

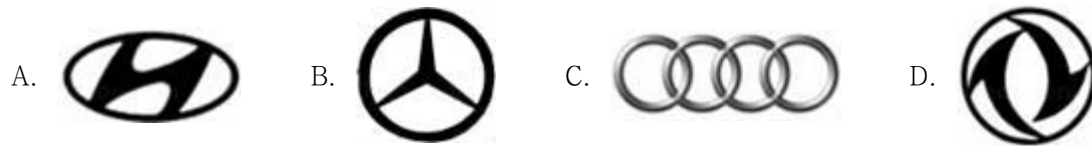
2016 年湖北省随州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.每小题给出的四个选项中，只有一个正确的）

1. $-\sqrt{2}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

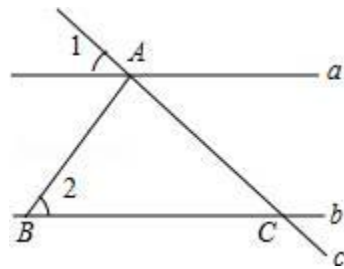
2. 随着我国经济快速发展，轿车进入百姓家庭，小明同学在街头观察出下列四种汽车标志，其中既是中心对称图形，又是轴对称图形的是 ()



3. 下列运算正确的是 ()

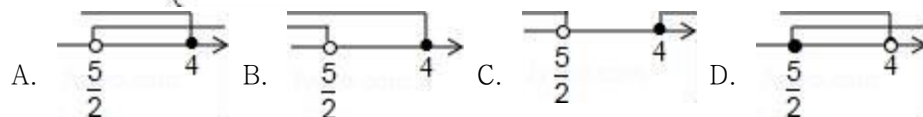
- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^5 \div a^2 = a^3$ C. $(-3a)^3 = -9a^3$ D. $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$

4. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a 、 b 相交于 A 、 B 两点， $AC \perp AB$ 于点 A ，交直线 b 于点 C 。已知 $\angle 1 = 42^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 38° B. 42° C. 48° D. 58°

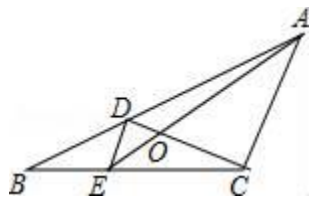
5. 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x \\ 5x - 2 > 3(x+1) \end{cases}$ 的解集表示在数轴上，正确的是 ()



6. 为了响应学校“书香校园”建设，阳光班的同学们积极捐书，其中宏志学习小组的同学捐书册数分别是：5，7， x ，3，4，6。已知他们平均每人捐 5 本，则这组数据的众数、中位数和方差分别是 ()

- A. 5, 5, $\frac{3}{2}$ B. 5, 5, 10 C. 6, 5.5, $\frac{11}{6}$ D. 5, 5, $\frac{5}{3}$

7. 如图, D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 上的点, 且 $DE \parallel AC$, AE、CD 相交于点 O, 若 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COA} = 1 : 25$, 则 $S_{\triangle BDE}$ 与 $S_{\triangle CDE}$ 的比是 ()

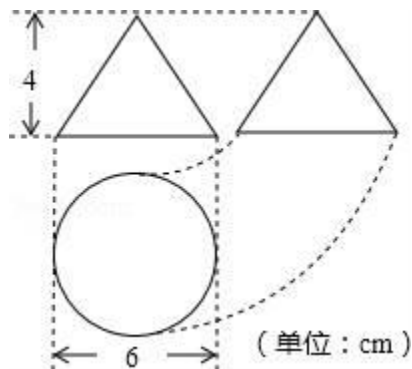


- A. 1: 3 B. 1: 4 C. 1: 5 D. 1: 25

8. 随州市尚市“桃花节”观赏人数逐年增加, 据有关部门统计, 2014 年约为 20 万人次, 2016 年约为 28.8 万人次, 设观赏人数年均增长率为 x , 则下列方程中正确的是 ()

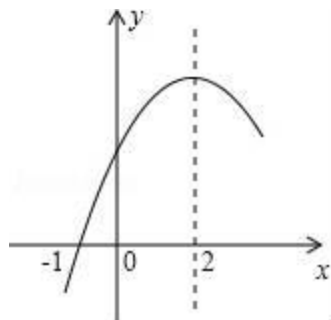
- A. $20(1+2x) = 28.8$ B. $28.8(1+x)^2 = 20$
C. $20(1+x)^2 = 28.8$ D. $20 + 20(1+x) + 20(1+x)^2 = 28.8$

9. 如图是某工件的三视图, 则此工件的表面积为 ()



- A. $15\pi \text{ cm}^2$ B. $51\pi \text{ cm}^2$ C. $66\pi \text{ cm}^2$ D. $24\pi \text{ cm}^2$

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分图象如图所示, 图象过点 $(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 2$, 下列结论: (1) $4a + b = 0$; (2) $9a + c > 3b$; (3) $8a + 7b + 2c > 0$; (4) 若点 A $(-3, y_1)$ 、点 B $(-\frac{1}{2}, y_2)$ 、点 C $(\frac{7}{2}, y_3)$ 在该函数图象上, 则 $y_1 < y_3 < y_2$; (5) 若方程 $a(x+1)(x-5) = -3$ 的两根为 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 < -1 < 5 < x_2$. 其中正确的结论有 ()



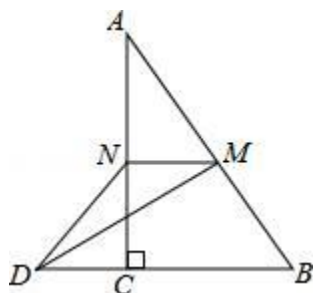
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

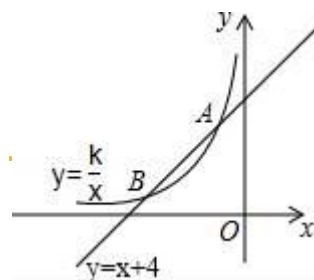
11. 2015 年“圣地车都”——随州改装车的总产值为 14.966 亿元, 其中 14.966 亿元用科学记数法表示为_____元.

12. 已知等腰三角形的一边长为 9, 另一边长为方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的根, 则该等腰三角形的周长为_____.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, M、N 分别是 AB、AC 的中点, 延长 BC 至点 D, 使 $CD = \frac{1}{3}BD$, 连接 DM、DN、MN. 若 $AB = 6$, 则 $DN =$ _____.



14. 如图, 直线 $y = x + 4$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 相交于 A $(-1, a)$ 、B 两点, 在 y 轴上找一点 P, 当 $PA + PB$ 的值最小时, 点 P 的坐标为_____.



15. 如图 (1), PT 与 $\odot O_1$ 相切于点 T, PAB 与 $\odot O_1$ 相交于 A、B 两点, 可证明 $\triangle PTA \sim \triangle PBT$, 从而有 $PT^2 = PA \cdot PB$. 请应用以上结论解决下列问题: 如图 (2), PAB、PCD 分别与 $\odot O_2$ 相交于 A、B、C、D 四点, 已知 $PA = 2$, $PB = 7$, $PC = 3$, 则 $CD =$ _____.

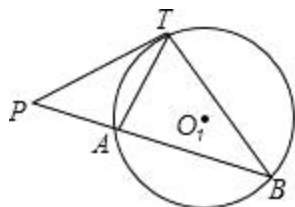


图 (1)

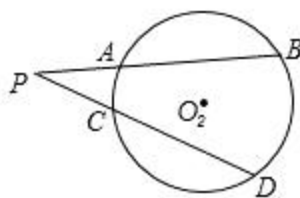
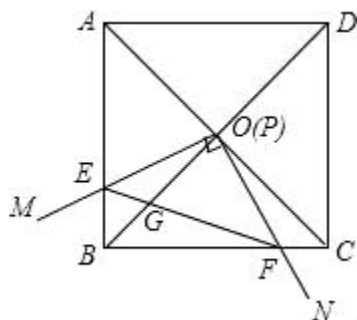


图 (2)

16. 如图, 边长为 1 的正方形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O. 有直角 $\angle MPN$, 使直角顶点 P 与点 O 重合, 直角边 PM、PN 分别与 OA、OB 重合, 然后逆时针旋转 $\angle MPN$, 旋转角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), PM、PN 分别交 AB、BC 于 E、F 两点, 连接 EF 交 OB 于点 G, 则下列结论中正确的是_____.

(1) $EF = \sqrt{2}OE$; (2) $S_{\text{四边形} OEBF} : S_{\text{正方形} ABCD} = 1 : 4$; (3) $BE + BF = \sqrt{2}OA$; (4) 在旋转过程中, 当 $\triangle BEF$ 与 $\triangle COF$ 的面积之和最大时, $AE = \frac{3}{4}$; (5) $OG \cdot BD = AE^2 + CF^2$.



三、解答题 (本题共 9 小题, 共 72 分, 解答应写出必要演算步骤, 文字说明或证明过程)

17. 计算: $-|-1| + \sqrt{12} \cdot \cos 30^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + (\pi - 3.14)^0$.

18. 先化简, 再求值: $\left(\frac{3}{x+1} - x + 1\right) \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 2$.

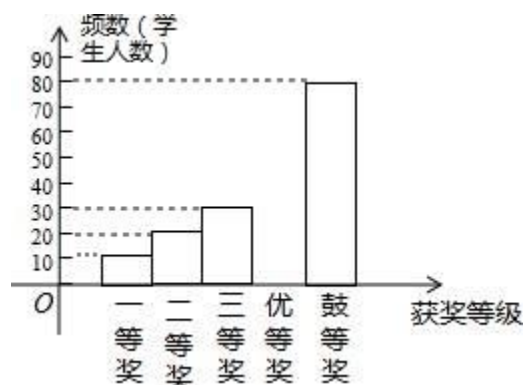
19. 某校学生利用双休时间去距学校 10km 的炎帝故里参观, 一部分学生骑自行车先走, 过了 20min 后, 其余学生乘汽车沿相同路线出发, 结果他们同时到达. 已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍, 求骑车学生的速度和汽车的速度.

20. 国务院办公厅 2015 年 3 月 16 日发布了《中国足球改革的总体方案》，这是中国足球历史上的重大改革。为了进一步普及足球知识，传播足球文化，我市举行了“足球进校园”知识竞赛活动，为了解足球知识的普及情况，随机抽取了部分获奖情况进行整理，得到下列不完整的统计图表：

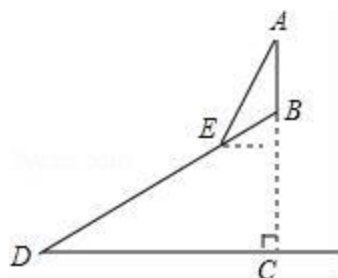
获奖等次	频数	频率
一等奖	10	0.05
二等奖	20	0.10
三等奖	30	b
优胜奖	a	0.30
鼓励奖	80	0.40

请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) $a=$ _____， $b=$ _____，且补全频数分布直方图；
- (2) 若用扇形统计图来描述获奖分布情况，问获得优胜奖对应的扇形圆心角的度数是多少？
- (3) 在这次竞赛中，甲、乙、丙、丁四位同学都获得一等奖，若从这四位同学中随机选取两位同学代表我市参加上一级竞赛，请用树状图或列表的方法，计算恰好选中甲、乙二人的概率。



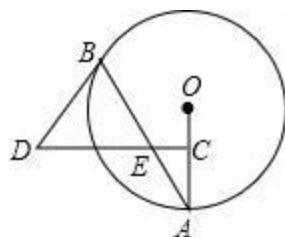
21. 某班数学兴趣小组利用数学活动课时间测量位于烈山山顶的炎帝雕像高度，已知烈山坡面与水平面的夹角为 30° ，山高 857.5 尺，组员从山脚 D 处沿山坡向着雕像方向前进 1620 尺到达 E 点，在点 E 处测得雕像顶端 A 的仰角为 60° ，求雕像 AB 的高度.



22. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 为半径 OA 的中点，过点 C 作 $CD \perp OA$ 交弦 AB 于点 E，连接 BD，且 $DE = DB$.

(1) 判断 BD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $CD = 15$ ， $BE = 10$ ， $\tan A = \frac{5}{12}$ ，求 $\odot O$ 的直径.



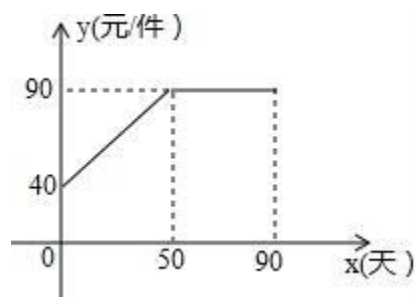
23. 九年级 (3) 班数学兴趣小组经过市场调查整理出某种商品在第 x 天 ($1 \leq x \leq 90$ ，且 x 为整数) 的售价与销售量的相关信息如下. 已知商品的进价为 30 元/件，设该商品的售价为 y (单位：元/件)，每天的销售量为 p (单位：件)，每天的销售利润为 w (单位：元).

时间 x (天)	1	30	60	90
每天销售量 p (件)	198	140	80	20

(1) 求出 w 与 x 的函数关系式；

(2) 问销售该商品第几天时，当天的销售利润最大？并求出最大利润；

(3) 该商品在销售过程中，共有多少天每天的销售利润不低于 5600 元？请直接写出结果.



24. 爱好思考的小茜在探究两条直线的位置关系查阅资料时,发现了“中垂三角形”,即两条中线互相垂直的三角形称为“中垂三角形”.如图(1)、图(2)、图(3)中,AM、BN是 $\triangle ABC$ 的中线,AN $\perp$ BN于点P,像 $\triangle ABC$ 这样的三角形均为“中垂三角形”.设BC=a, AC=b, AB=c.

【特例探究】

(1) 如图1,当 $\tan \angle PAB=1$, $c=4\sqrt{2}$ 时, $a=$ _____, $b=$ _____;

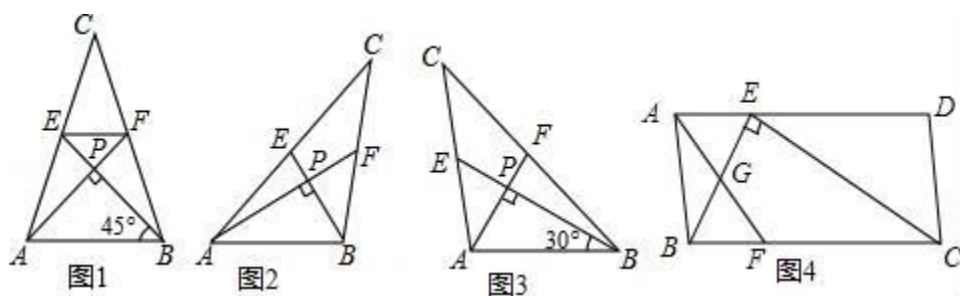
如图2,当 $\angle PAB=30^\circ$, $c=2$ 时, $a=$ _____, $b=$ _____;

【归纳证明】

(2) 请你观察(1)中的计算结果,猜想 a^2 、 b^2 、 c^2 三者之间的关系,用等式表示出来,并利用图3证明你的结论.

【拓展证明】

(3) 如图4, $\square ABCD$ 中, E、F分别是AD、BC的三等分点,且 $AD=3AE$, $BC=3BF$, 连接AF、BE、CE, 且 $BE \perp CE$ 于E, AF与BE相交点G, $AD=3\sqrt{5}$, $AB=3$, 求AF的长.

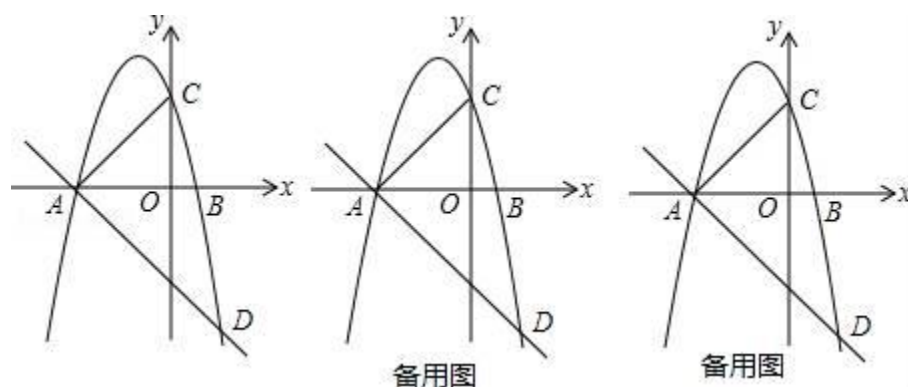


25. 已知抛物线 $y=a(x+3)(x-1)$ ($a \neq 0$), 与 x 轴从左至右依次相交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 经过点 A 的直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 与抛物线的另一个交点为 D .

(1) 若点 D 的横坐标为 2, 求抛物线的函数解析式;

(2) 若在第三象限内的抛物线上有点 P , 使得以 A 、 B 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 P 的坐标;

(3) 在 (1) 的条件下, 设点 E 是线段 AD 上的一点 (不含端点), 连接 BE . 一动点 Q 从点 B 出发, 沿线段 BE 以每秒 1 个单位的速度运动到点 E , 再沿线段 ED 以每秒 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 个单位的速度运动到点 D 后停止, 问当点 E 的坐标是多少时, 点 Q 在整个运动过程中所用时间最少?



2016 年湖北省随州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的）

1. $-\sqrt{2}$ 的相反数是（ ）

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

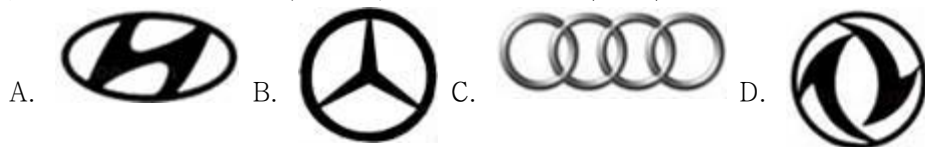
【考点】实数的性质.

【分析】利用相反数的定义计算即可得到结果.

【解答】解： $-\sqrt{2}$ 的相反数是 $\sqrt{2}$,

故选 C

2. 随着我国经济快速发展，轿车进入百姓家庭，小明同学在街头观察出下列四种汽车标志，其中既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（ ）



【考点】中心对称图形；轴对称图形.

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形；

C、是轴对称图形，也是中心对称图形；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形.

故选 C.

3. 下列运算正确的是（ ）

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^5 \div a^2 = a^3$ C. $(-3a)^3 = -9a^3$ D. $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$

【考点】同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

【分析】直接根据同底数幂的乘除法以及幂的乘方运算法则计算出各选项结果，进而作出判断.

【解答】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，此选项错误；

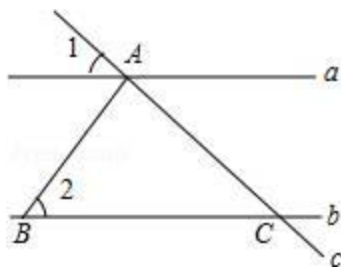
B、 $a^5 \div a^2 = a^3$ ，此选项正确；

C、 $(-3a)^3 = -27a^3$ ，此选项错误；

D、 $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$ ，此选项错误；

故选 B.

4. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a 、 b 相交于 A、B 两点， $AC \perp AB$ 于点 A，交直线 b 于点 C. 已知 $\angle 1 = 42^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是（ ）



A. 38° B. 42° C. 48° D. 58°

【考点】 平行线的性质.

【分析】 先根据平行线的性质求出 $\angle ACB$ 的度数, 再根据垂直的定义和余角的性质求出 $\angle 2$ 的度数.

【解答】 解: $\because$ 直线 $a \parallel b$,

$$\therefore \angle 1 = \angle BCA,$$

$$\therefore \angle 1 = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = 42^\circ,$$

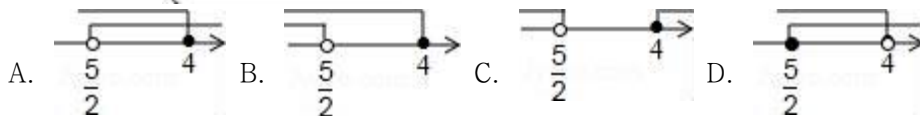
$$\therefore AC \perp AB,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 48^\circ,$$

故选 C.

5. 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x \\ 5x - 2 > 3(x+1) \end{cases}$ 的解集表示在数轴上, 正确的是 ()



【考点】 解一元一次不等式组; 在数轴上表示不等式的解集.

【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 大小小大中间找确定不等式组的解集, 再根据“大于向右, 小于向左, 包括端点用实心, 不包括端点用空心”的原则分析选项可得答案.

【解答】 解: 解不等式 $\frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x$, 得: $x \leq 4$,

解不等式 $5x - 2 > 3(x+1)$, 得: $x > \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 不等式组的解集为: $\frac{5}{2} < x \leq 4$,

故选: A.

6. 为了响应学校“书香校园”建设, 阳光班的同学们积极捐书, 其中宏志学习小组的同学捐书册数分别是: 5, 7, x , 3, 4, 6. 已知他们平均每人捐 5 本, 则这组数据的众数、中位数和方差分别是 ()

A. 5, 5, $\frac{3}{2}$ B. 5, 5, 10 C. 6, 5.5, $\frac{11}{6}$ D. 5, 5, $\frac{5}{3}$

【考点】 方差; 中位数; 众数.

【分析】根据平均数，可得 x 的值，根据众数的定义、中位数的定义、方差的定义，可得答案.

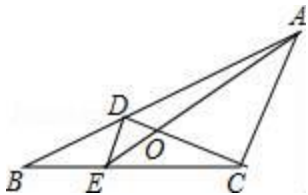
【解答】解：由 5, 7, x , 3, 4, 6. 已知他们平均每人捐 5 本，得 $x=5$.

众数是 5，中位数是 5，

$$\text{方差} = \frac{(7-5)^2 + (6-5)^2 + 2 \times (5-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2}{6} = \frac{5}{3},$$

故选：D.

7. 如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 上的点，且 $DE \parallel AC$ ，AE、CD 相交于点 O，若 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COA} = 1 : 25$ ，则 $S_{\triangle BDE}$ 与 $S_{\triangle CDE}$ 的比是 ()



A. 1: 3 B. 1: 4 C. 1: 5 D. 1: 25

【考点】相似三角形的判定与性质.

【分析】根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle DOE \sim \triangle COA$ ，根据相似三角形的性质定理得到 $\frac{DE}{AC} = \frac{1}{5}$ ， $\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{5}$ ，结合图形得到 $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{4}$ ，得到答案.

【解答】解： $\because DE \parallel AC$,

$\therefore \triangle DOE \sim \triangle COA$ ，又 $S_{\triangle DOE} : S_{\triangle COA} = 1 : 25$,

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{1}{5},$$

$\because DE \parallel AC$,

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{1}{4},$$

$\therefore S_{\triangle BDE}$ 与 $S_{\triangle CDE}$ 的比是 1: 4,

故选：B.

8. 随州市尚市“桃花节”观赏人数逐年增加，据有关部门统计，2014 年约为 20 万人次，2016 年约为 28.8 万人次，设观赏人数年均增长率为 x ，则下列方程中正确的是 ()

A. $20(1+2x) = 28.8$ B. $28.8(1+x)^2 = 20$

C. $20(1+x)^2 = 28.8$ D. $20+20(1+x)+20(1+x)^2 = 28.8$

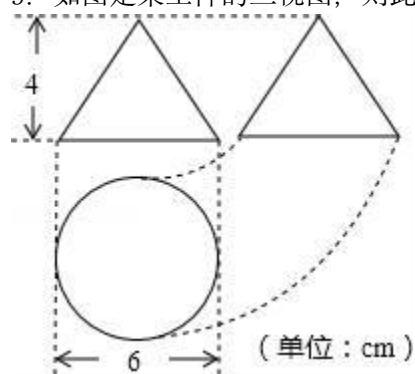
【考点】由实际问题抽象出一元二次方程.

【分析】设这两年观赏人数年均增长率为 x ，根据“2014 年约为 20 万人次，2016 年约为 28.8 万人次”，可得出方程.

【解答】解：设观赏人数年均增长率为 x ，那么依题意得 $20(1+x)^2 = 28.8$,

故选 C.

9. 如图是某工件的三视图，则此工件的表面积为（ ）

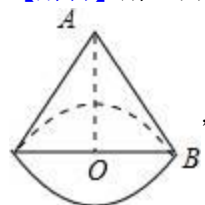


A. $15\pi \text{ cm}^2$ B. $51\pi \text{ cm}^2$ C. $66\pi \text{ cm}^2$ D. $24\pi \text{ cm}^2$

【考点】由三视图判断几何体.

【分析】根据三视图，可得几何体是圆锥，根据勾股定理，可得圆锥的母线长，根据扇形的面积公式，可得圆锥的侧面积，根据圆的面积公式，可得圆锥的底面积，可得答案.

【解答】解：由三视图，得



$OB=3\text{cm}$, $OA=4\text{cm}$,

由勾股定理，得 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{cm}$,

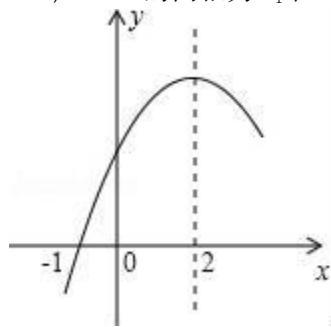
圆锥的侧面积 $\frac{1}{2} \times 6\pi \times 5 = 15\pi \text{ cm}^2$,

圆锥的底面积 $\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9\pi \text{ cm}^2$,

圆锥的表面积 $15\pi + 9\pi = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$,

故选：D.

10. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的部分图象如图所示，图象过点 $(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x=2$ ，下列结论：(1) $4a+b=0$ ；(2) $9a+c > 3b$ ；(3) $8a+7b+2c > 0$ ；(4) 若点 A $(-3, y_1)$ 、点 B $(-\frac{1}{2}, y_2)$ 、点 C $(\frac{7}{2}, y_3)$ 在该函数图象上，则 $y_1 < y_3 < y_2$ ；(5) 若方程 $a(x+1)(x-5) = -3$ 的两根为 x_1 和 x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 < -1 < 5 < x_2$. 其中正确的结论有（ ）



A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【考点】二次函数图象与系数的关系.

【分析】(1) 正确. 根据对称轴公式计算即可.

(2) 错误, 利用 $x = -3$ 时, $y < 0$, 即可判断.

(3) 正确. 由图象可知抛物线经过 $(-1, 0)$ 和 $(5, 0)$, 列出方程组求出 a 、 b 即可判断.

(4) 错误. 利用函数图象即可判断.

(5) 正确. 利用二次函数与二次不等式关系即可解决问题.

【解答】解: (1) 正确. $\because -\frac{b}{2a} = 2$,

$\therefore 4a + b = 0$. 故正确.

(2) 错误. $\because x = -3$ 时, $y < 0$,

$\therefore 9a - 3b + c < 0$,

$\therefore 9a + c < 3b$, 故 (2) 错误.

(3) 正确. 由图象可知抛物线经过 $(-1, 0)$ 和 $(5, 0)$,

$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -4a \\ c = -5a \end{cases}$,

$\therefore 8a + 7b + 2c = 8a - 28a - 10a = -30a$,

$\because a < 0$,

$\therefore 8a + 7b + 2c > 0$, 故 (3) 正确.

(4) 错误, $\because$ 点 A $(-3, y_1)$ 、点 B $(-\frac{1}{2}, y_2)$ 、点 C $(\frac{7}{2}, y_3)$,

$\because \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$, $2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$,

$\therefore \frac{3}{2} < \frac{5}{2}$

$\therefore$ 点 C 离对称轴的距离近,

$\therefore y_3 > y_2$,

$\because a < 0$, $-3 < -\frac{1}{2} < 2$,

$\therefore y_1 < y_2$

$\therefore y_1 < y_2 < y_3$, 故 (4) 错误.

(5) 正确. $\because a < 0$,

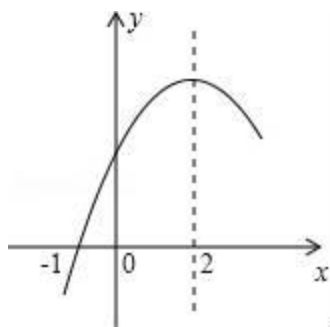
$\therefore (x+1)(x-5) = -3/a > 0$,

即 $(x+1)(x-5) > 0$,

故 $x < -1$ 或 $x > 5$, 故 (5) 正确.

$\therefore$ 正确的有三个,

故选 B.



二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 2015 年“圣地车都”——随州改装车的总产值为 14.966 亿元，其中 14.966 亿元用科学记数法表示为 1.4966×10^9 元.

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：14.966 亿 $= 1.4966 \times 10^9$.

故答案为： 1.4966×10^9 .

12. 已知等腰三角形的一边长为 9，另一边长为方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 的根，则该等腰三角形的周长为 19 或 21 或 23.

【考点】解一元二次方程-因式分解法；三角形三边关系；等腰三角形的性质.

【分析】求出方程的解，分为两种情况，看看是否符合三角形三边关系定理，求出即可.

【解答】解：由方程 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 得： $(x - 3)(x - 5) = 0$,

$\therefore x - 3 = 0$ 或 $x - 5 = 0$,

解得： $x = 3$ 或 $x = 5$,

当等腰三角形的三边长为 9、9、3 时，其周长为 21；

当等腰三角形的三边长为 9、9、5 时，其周长为 23；

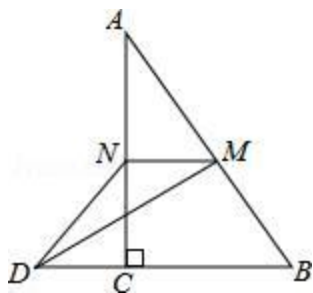
当等腰三角形的三边长为 9、3、3 时， $3 + 3 < 9$ ，不符合三角形三边关系定理，舍去；

当等腰三角形的三边长为 9、5、5 时，其周长为 19；

综上，该等腰三角形的周长为 19 或 21 或 23，

故答案为： 19 或 21 或 23.

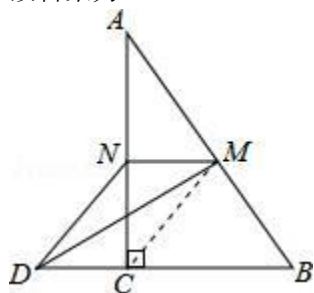
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，延长 BC 至点 D ，使 $CD = \frac{1}{3}BD$ ，连接 DM 、 DN 、 MN . 若 $AB = 6$ ，则 $DN =$ 3.



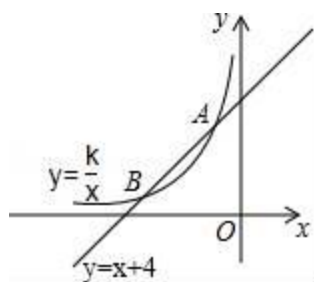
【考点】三角形中位线定理；直角三角形斜边上的中线；平行四边形的判定与性质.

【分析】连接 CM，根据三角形中位线定理得到 $NM = \frac{1}{2}CB$ ， $MN \parallel BC$ ，证明四边形 DCMN 是平行四边形，得到 $DN = CM$ ，根据直角三角形的性质得到 $CM = \frac{1}{2}AB = 3$ ，等量代换即可.

【解答】解：连接 CM，
 $\because M、N$ 分别是 $AB、AC$ 的中点，
 $\therefore NM = \frac{1}{2}CB$ ， $MN \parallel BC$ ，又 $CD = \frac{1}{3}BD$ ，
 $\therefore MN = CD$ ，又 $MN \parallel BC$ ，
 $\therefore$ 四边形 DCMN 是平行四边形，
 $\therefore DN = CM$ ，
 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， M 是 AB 的中点，
 $\therefore CM = \frac{1}{2}AB = 3$ ，
 $\therefore DN = 3$ ，
 故答案为：3.



14. 如图，直线 $y = x + 4$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 相交于 $A(-1, a)$ 、 B 两点，在 y 轴上找一点 P ，当 $PA + PB$ 的值最小时，点 P 的坐标为 $(0, \frac{5}{2})$.



【考点】反比例函数与一次函数的交点问题；轴对称-最短路线问题.

【分析】根据一次函数和反比例函数的解析式求出点 $A、B$ 的坐标，然后作出点 A 关于 y 轴的对称点 C ，连接 BC ，与 y 轴的交点即为点 P ，然后求出直线 BC 的解析式，求出点 P 的坐标.

【解答】解：把点 A 坐标代入 $y = x + 4$ 得，
 $-1 + 4 = a$ ，
 $a = 3$ ，
 即 $A(-1, 3)$ ，
 把点 A 坐标代入双曲线的解析式： $3 = -k$ ，

解得: $k = -3$,

联立两函数解析式得:
$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -\frac{3}{x} \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

即点 B 坐标为: $(-3, 1)$,

作出点 A 关于 y 轴的对称点 C, 连接 BC, 与 y 轴的交点即为点 P, 使得 PA+PB 的值最小,

则点 C 坐标为: $(1, 3)$,

设直线 BC 的解析式为: $y = ax + b$,

把 B、C 的坐标代入得:
$$\begin{cases} -3a + b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases}$$
,

解得:
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

函数解析式为: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$,

则与 y 轴的交点为: $(0, \frac{5}{2})$.

故答案为: $(0, \frac{5}{2})$.

15. 如图 (1), PT 与 $\odot O_1$ 相切于点 T, PAB 与 $\odot O_1$ 相交于 A、B 两点, 可证明 $\triangle PTA \sim \triangle PBT$, 从而有 $PT^2 = PA \cdot PB$. 请应用以上结论解决下列问题: 如图 (2), PAB、PCD 分别与 $\odot O_2$ 相交于 A、B、C、D 四点, 已知 $PA=2$, $PB=7$, $PC=3$, 则 $CD = \frac{5}{3}$.

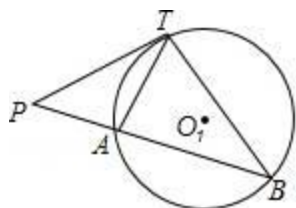


图 (1)

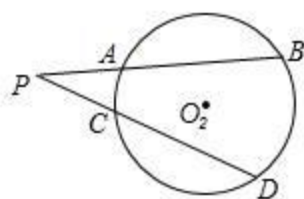


图 (2)

【考点】相似三角形的判定与性质; 切线的性质.

【分析】如图 2 中, 过点 P 作 $\odot O$ 的切线 PT, 切点是 T, 根据 $PT^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 求出 PD 即可解决问题.

【解答】解: 如图 2 中, 过点 P 作 $\odot O$ 的切线 PT, 切点是 T.

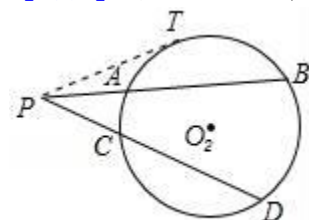
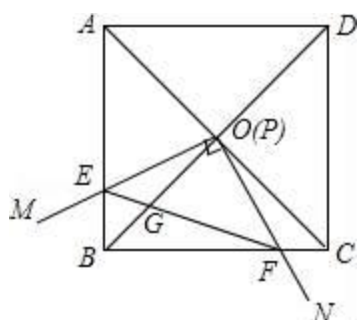


图 (2)

$$\begin{aligned}
&\therefore PT^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD, \\
&\therefore PA = 2, PB = 7, PC = 3, \\
&\therefore 2 \times 7 = 3 \times PD, \\
&\therefore PD = \frac{14}{3} \\
&\therefore CD = PD - PC = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

16. 如图, 边长为 1 的正方形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O. 有直角 $\angle MPN$, 使直角顶点 P 与点 O 重合, 直角边 PM、PN 分别与 OA、OB 重合, 然后逆时针旋转 $\angle MPN$, 旋转角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), PM、PN 分别交 AB、BC 于 E、F 两点, 连接 EF 交 OB 于点 G, 则下列结论中正确的是 (1), (2), (3), (5).

(1) $EF = \sqrt{2}OE$; (2) $S_{\text{四边形 OEBF}} : S_{\text{正方形 ABCD}} = 1 : 4$; (3) $BE + BF = \sqrt{2}OA$; (4) 在旋转过程中, 当 $\triangle BEF$ 与 $\triangle COF$ 的面积之和最大时, $AE = \frac{3}{4}$; (5) $OG \cdot BD = AE^2 + CF^2$.



【考点】 四边形综合题.

【分析】 (1) 由四边形 ABCD 是正方形, 直角 $\angle MPN$, 易证得 $\triangle BOE \cong \triangle COF$ (ASA), 则可证得结论;

(2) 由 (1) 易证得 $S_{\text{四边形 OEBF}} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形 ABCD}}$, 则可证得结论;

(3) 由 $BE = CF$, 可得 $BE + BF = BC$, 然后由等腰直角三角形的性质, 证得 $BE + BF = \sqrt{2}OA$;

(4) 首先设 $AE = x$, 则 $BE = CF = 1 - x$, $BF = x$, 继而表示出 $\triangle BEF$ 与 $\triangle COF$ 的面积之和, 然后利用二次函数的最值问题, 求得答案;

(5) 易证得 $\triangle OEG \sim \triangle OBE$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 证得 $OG \cdot OB = OE^2$, 再利用 OB 与 BD 的关系, OE 与 EF 的关系, 即可证得结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore OB = OC, \angle OBE = \angle OCF = 45^\circ, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle COF,$$

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases}
\angle BOE = \angle COF \\
OB = OC \\
\angle OBE = \angle OCF
\end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)},$$

17. 计算: $-|-1| + \sqrt{12} \cdot \cos 30^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + (\pi - 3.14)^0$.

【考点】实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

【分析】本题涉及绝对值、二次根式化简、特殊角的三角函数值、负指数幂、零指数幂 5 个考点. 在计算时, 需要针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】解: 原式 $= -1 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 + 1$
 $= -1 + 3 - 4 + 1$
 $= -1$.

18. 先化简, 再求值: $\left(\frac{3}{x+1} - x + 1\right) \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 2$.

【考点】分式的化简求值.

【分析】首先将括号里面的通分相减, 然后将除法转化为乘法, 化简后代入 x 的值即可求解.

【解答】解: 原式 $= \left[\frac{3}{x+1} - \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right] \cdot \frac{x+1}{(x+2)^2}$
 $= \frac{-(x+2)(x-2)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(x+2)^2}$
 $= \frac{2-x}{x+2}$.

当 $x = \sqrt{2} - 2$ 时,

原式 $= \frac{2 - \sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - 2 + 2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

19. 某校学生利用双休时间去距学校 10km 的炎帝故里参观, 一部分学生骑自行车先走, 过了 20min 后, 其余学生乘汽车沿相同路线出发, 结果他们同时到达. 已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍, 求骑车学生的速度和汽车的速度.

【考点】分式方程的应用.

【分析】求速度, 路程已知, 根据时间来列等量关系. 关键描述语: “一部分学生骑自行车先走, 过了 20min 后, 其余学生乘汽车沿相同路线出发, 结果他们同时到达”, 根据等量关系列出方程.

【解答】解: 设骑车学生的速度为 x 千米/小时, 汽车的速度为 $2x$ 千米/小时,

可得: $\frac{10}{x} = \frac{10}{2x} + \frac{20}{60}$,

解得: $x = 15$,

经检验 $x = 15$ 是原方程的解,

$2x = 2 \times 15 = 30$,

答: 骑车学生的速度和汽车的速度分别是每小时 15km, 30km.

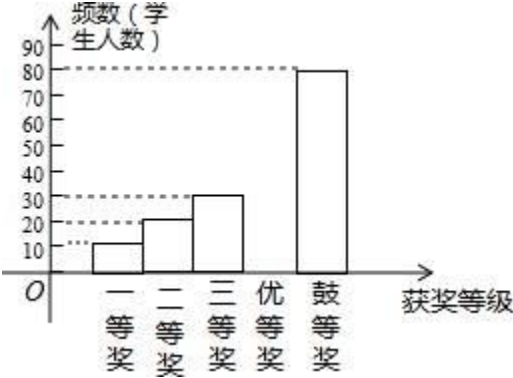
20. 国务院办公厅 2015 年 3 月 16 日发布了《中国足球改革的总体方案》, 这是中国足球历史上的重大改革. 为了进一步普及足球知识, 传播足球文化, 我市举行了“足球进校园”知

识竞赛活动，为了解足球知识的普及情况，随机抽取了部分获奖情况进行整理，得到下列不完整的统计图表：

获奖等次	频数	频率
一等奖	10	0.05
二等奖	20	0.10
三等奖	30	b
优胜奖	a	0.30
鼓励奖	80	0.40

请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) $a=$ 60， $b=$ 0.15，且补全频数分布直方图；
- (2) 若用扇形统计图来描述获奖分布情况，问获得优胜奖对应的扇形圆心角的度数是多少？
- (3) 在这次竞赛中，甲、乙、丙、丁四位同学都获得一等奖，若从这四位同学中随机选取两位同学代表我市参加上一级竞赛，请用树状图或列表的方法，计算恰好选中甲、乙二人的概率.



- 【考点】**列表法与树状图法；频数（率）分布表；频数（率）分布直方图；扇形统计图.
- 【分析】**(1) 根据公式频率=频数÷样本总数，求得样本总数，再根据公式得出 a，b 的值即可；
- (2) 根据公式优胜奖对应的扇形圆心角的度数=优胜奖的频率×360°计算即可；
- (3) 画树状图或列表将所有等可能的结果列举出来，利用概率公式求解即可.

【解答】解：(1) 样本总数为 $10\div0.05=200$ 人，
 $a=200-10-20-30-80=60$ 人，
 $b=30\div200=0.15$ ，
 故答案为 200，0.15；

- (2) 优胜奖所在扇形的圆心角为 $0.30\times360^{\circ}=108^{\circ}$ ；
- (2) 列表：甲乙丙丁分别用 ABCD 表示，

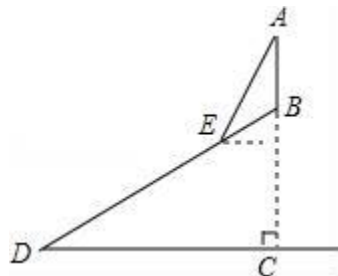
	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，恰好选中 A、B 的有 2 种，
 画树状图如下：



$$\therefore P(\text{选中 A、B}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

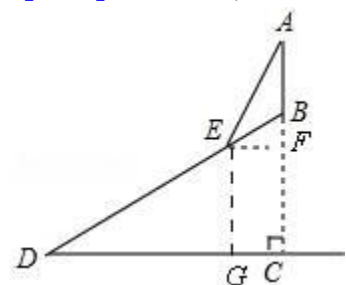
21. 某班数学兴趣小组利用数学活动课时间测量位于烈山山顶的炎帝雕像高度，已知烈山坡面与水平面的夹角为 30° ，山高 857.5 尺，组员从山脚 D 处沿山坡向着雕像方向前进 1620 尺到达 E 点，在点 E 处测得雕像顶端 A 的仰角为 60° ，求雕像 AB 的高度.



【考点】解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

【分析】构造直角三角形，利用锐角三角函数，进行简单计算即可.

【解答】解：如图，



过点 E 作 $EF \perp AC$ ， $EG \perp CD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中， $\because DE=1620$ ， $\angle D=30^\circ$ ，

$$\therefore EG = DE \sin \angle D = 1620 \times \frac{1}{2} = 810,$$

$$\because BC = 857.5, CF = EG,$$

$$\therefore BF = BC - CF = 47.5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BEF \text{ 中, } \tan \angle BEF = \frac{BF}{EF},$$

$$\therefore EF = \sqrt{3}BF,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\angle AEF = 60^\circ$ ，设 $AB = x$ ，

$$\therefore \tan \angle AEF = \frac{AF}{EF},$$

$$\therefore AF = EF \times \tan \angle AEF,$$

$$\therefore x+47.5=3 \times 47.5,$$

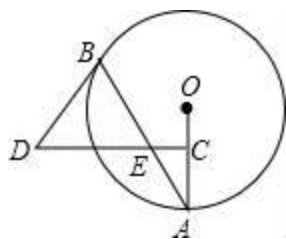
$$\therefore x=95,$$

答：雕像 AB 的高度为 95 尺.

22. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 为半径 OA 的中点，过点 C 作 $CD \perp OA$ 交弦 AB 于点 E，连接 BD，且 $DE=DB$.

(1) 判断 BD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $CD=15$ ， $BE=10$ ， $\tan A = \frac{5}{12}$ ，求 $\odot O$ 的直径.



【考点】 直线与圆的位置关系；垂径定理；相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 连接 OB，由圆的半径相等和已知条件证明 $\angle OBD=90^\circ$ ，即可证明 BD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 过点 D 作 $DG \perp BE$ 于 G，根据等腰三角形的性质得到 $EG = \frac{1}{2}BE = 5$ ，由两角相等的三角形相似， $\triangle ACE \sim \triangle DGE$ ，利用相似三角形对应角相等得到 $\sin \angle EDG = \sin A = \frac{5}{13}$ ，在 $Rt \triangle EDG$ 中，利用勾股定理求出 DG 的长，根据三角形相似得到比例式，代入数据即可得到结果.

【解答】 (1) 证明：连接 OB，

$$\because OB=OA, DE=DB,$$

$$\therefore \angle A = \angle OBA, \angle DEB = \angle ABD,$$

又 $\because CD \perp OA$,

$$\therefore \angle A + \angle AEC = \angle A + \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore OB \perp BD,$$

$\therefore$ BD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 如图，过点 D 作 $DG \perp BE$ 于 G，

$$\because DE = DB,$$

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BE = 5,$$

$$\because \angle ACE = \angle DGE = 90^\circ, \angle AEC = \angle GED,$$

$$\therefore \angle GDE = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle DGE,$$

$$\therefore \sin \angle EDG = \sin A = \frac{EG}{DE} = \frac{5}{13}, \text{ 即 } CE = 13,$$

在 $Rt \triangle ECG$ 中，

$$\therefore DG = \sqrt{DE^2 - EG^2} = 12,$$

$$\because CD = 15, DE = 13,$$

$$\therefore \begin{cases} b=40 \\ 50k+b=90 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=1 \\ b=40 \end{cases},$$

$\therefore$ 售价 y 与时间 x 的函数关系式为 $y=x+40$;

当 $50 < x \leq 90$ 时, $y=90$.

$$\therefore \text{ 售价 } y \text{ 与时间 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \begin{cases} x+40 (0 \leq x \leq 50, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ 90 (50 < x \leq 90, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \end{cases}.$$

由书记可知每天的销售量 p 与时间 x 成一次函数关系,

设每天的销售量 p 与时间 x 的函数关系式为 $p=mx+n$ (m, n 为常数, 且 $m \neq 0$),

$\therefore p=mx+n$ 过点 $(60, 80)$ 、 $(30, 140)$,

$$\therefore \begin{cases} 60m+n=80 \\ 30m+n=140 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m=-2 \\ n=200 \end{cases},$$

$\therefore p=-2x+200$ ($0 \leq x \leq 90$, 且 x 为整数),

当 $0 \leq x \leq 50$ 时, $w = (y-30) \cdot p = (x+40-30)(-2x+200) = -2x^2+180x+2000$;

当 $50 < x \leq 90$ 时, $w = (90-30)(-2x+200) = -120x+12000$.

综上所述, 每天的销售利润 w 与时间 x 的函数关系式是

$$w = \begin{cases} -2x^2+180x+2000 (0 \leq x \leq 50, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \\ -120x+12000 (50 < x \leq 90, \text{ 且 } x \text{ 为整数}) \end{cases}.$$

(2) 当 $0 \leq x \leq 50$ 时, $w = -2x^2+180x+2000 = -2(x-45)^2+6050$,

$\therefore a = -2 < 0$ 且 $0 \leq x \leq 50$,

$\therefore$ 当 $x=45$ 时, w 取最大值, 最大值为 6050 元.

当 $50 < x \leq 90$ 时, $w = -120x+12000$,

$\therefore k = -120 < 0$, w 随 x 增大而减小,

$\therefore$ 当 $x=50$ 时, w 取最大值, 最大值为 6000 元.

$\therefore 6050 > 6000$,

$\therefore$ 当 $x=45$ 时, w 最大, 最大值为 6050 元.

即销售第 45 天时, 当天获得的销售利润最大, 最大利润是 6050 元.

(3) 当 $0 \leq x \leq 50$ 时, 令 $w = -2x^2+180x+2000 \geq 5600$, 即 $-2x^2+180x-3600 \geq 0$,

解得: $30 \leq x \leq 50$,

$50-30+1=21$ (天);

当 $50 < x \leq 90$ 时, 令 $w = -120x+12000 \geq 5600$, 即 $-120x+6400 \geq 0$,

解得: $50 < x \leq 53\frac{1}{3}$,

$\therefore x$ 为整数,

$\therefore 50 < x \leq 53$,

$53-50=3$ (天).

综上所述: $21+3=24$ (天),

故该商品在销售过程中, 共有 24 天每天的销售利润不低于 5600 元.

24. 爱好思考的小茜在探究两条直线的位置关系查阅资料时, 发现了“中垂三角形”, 即两条中线互相垂直的三角形称为“中垂三角形”. 如图 (1)、图 (2)、图 (3) 中, AM 、 BN 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AN \perp BN$ 于点 P , 像 $\triangle ABC$ 这样的三角形均为“中垂三角形”. 设 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

【特例探究】

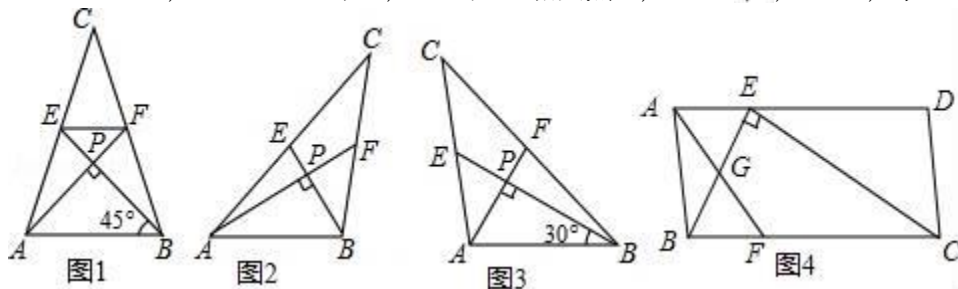
(1) 如图 1, 当 $\tan \angle PAB=1$, $c=4\sqrt{2}$ 时, $a=4\sqrt{5}$, $b=4\sqrt{5}$;
如图 2, 当 $\angle PAB=30^\circ$, $c=2$ 时, $a=\sqrt{7}$, $b=\sqrt{13}$;

【归纳证明】

(2) 请你观察 (1) 中的计算结果, 猜想 a^2 、 b^2 、 c^2 三者之间的关系, 用等式表示出来, 并利用图 3 证明你的结论.

【拓展证明】

(3) 如图 4, $\square ABCD$ 中, E、F 分别是 AD、BC 的三等分点, 且 $AD=3AE$, $BC=3BF$, 连接 AF、BE、CE, 且 $BE \perp CE$ 于 E, AF 与 BE 相交点 G, $AD=3\sqrt{5}$, $AB=3$, 求 AF 的长.



【考点】 四边形综合题.

【分析】 (1) ①首先证明 $\triangle APB$, $\triangle PEF$ 都是等腰直角三角形, 求出 PA、PB、PE、PF, 再利用勾股定理即可解决问题.

②连接 EF, 在 $RT\triangle PAB$, $RT\triangle PEF$ 中, 利用 30° 性质求出 PA、PB、PE、PF, 再利用勾股定理即可解决问题.

(2) 结论 $a^2+b^2=5c^2$. 设 $MP=x$, $NP=y$, 则 $AP=2x$, $BP=2y$, 利用勾股定理分别求出 a^2 、 b^2 、 c^2 即可解决问题.

(3) 取 AB 中点 H, 连接 FH 并且延长交 DA 的延长线于 P 点, 首先证明 $\triangle ABF$ 是中垂三角形, 利用 (2) 中结论列出方程即可解决问题.

【解答】 (1) 解: 如图 1 中, $\because CE=AE$, $CF=BF$,

$$\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2},$$

$$\because \tan \angle PAB=1,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA = \angle PEF = \angle PFE = 45^\circ,$$

$$\therefore PF=PE=2, PB=PA=4,$$

$$\therefore AE=BF = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore b=AC=2AE=4\sqrt{5}, a=BC=4\sqrt{5}.$$

故答案为 $4\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$.

如图 2 中, 连接 EF,

$$\because CE=AE, CF=BF,$$

$$\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\because \angle PAB=30^\circ,$$

$$\therefore PB=1, PA=\sqrt{3},$$

在 $RT\triangle EFP$ 中, $\because \angle EFP = \angle PAB = 30^\circ$,

$$\therefore PE = \frac{1}{2}, PF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AE = \sqrt{PA^2 + PE^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad BF = \sqrt{PB^2 + PF^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore a = BC = 2BF = \sqrt{7}, \quad b = AC = 2AE = \sqrt{13},$$

故答案分别为 $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

(2) 结论 $a^2 + b^2 = 5c^2$.

证明: 如图 3 中, 连接 EF.

$\because$ AF、BE 是中线,

$$\therefore EF \parallel AB, \quad EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \triangle FPE \sim \triangle APB,$$

$$\therefore \frac{MP}{AP} = \frac{PN}{PB} = \frac{1}{2},$$

设 $FP = x$, $EP = y$, 则 $AP = 2x$, $BP = 2y$,

$$\therefore a^2 = BC^2 = 4BF^2 = 4(FP^2 + BP^2) = 4x^2 + 16y^2,$$

$$b^2 = AC^2 = 4AE^2 = 4(PE^2 + AP^2) = 4y^2 + 16x^2,$$

$$c^2 = AB^2 = AP^2 + BP^2 = 4x^2 + 4y^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 20x^2 + 20y^2 = 5(4x^2 + 4y^2) = 5c^2.$$

(3) 解: 如图 4 中, 在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle FGB$ 中,

$$\begin{cases} \angle AGE = \angle FGB \\ \angle AEG = \angle FBG \\ AE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AGE \cong \triangle FGB,$$

$\therefore BG = FG$, 取 AB 中点 H, 连接 FH 并且延长交 DA 的延长线于 P 点,

同理可证 $\triangle APH \cong \triangle BFH$,

$$\therefore AP = BF, \quad PE = CF = 2BF,$$

即 $PE \parallel CF$, $PE = CF$,

$\therefore$ 四边形 CEPF 是平行四边形,

$$\therefore FP \parallel CE,$$

$$\because BE \perp CE,$$

$$\therefore FP \perp BE, \quad \text{即 } FH \perp BG,$$

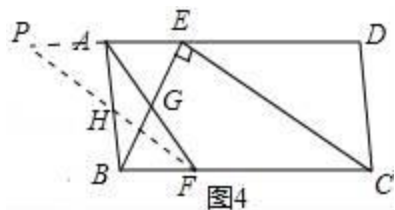
$\therefore \triangle ABF$ 是中垂三角形,

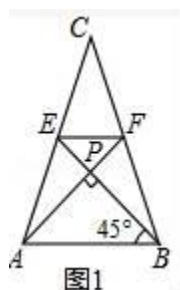
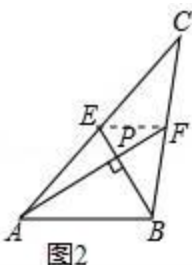
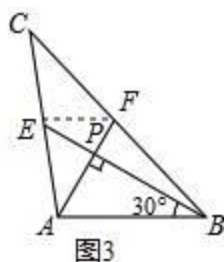
由 (2) 可知 $AB^2 + AF^2 = 5BF^2$,

$$\because AB = 3, \quad BF = \frac{1}{3}AD = \sqrt{5},$$

$$\therefore 9 + AF^2 = 5 \times (\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore AF = 4.$$



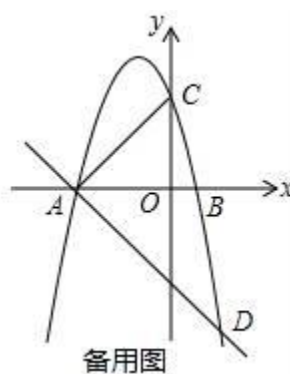
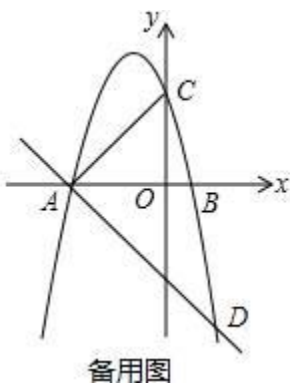
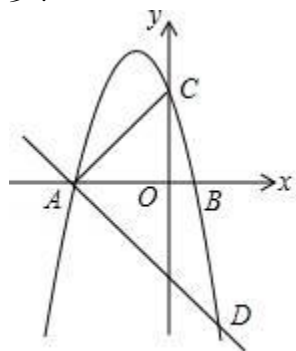


25. 已知抛物线 $y = a(x+3)(x-1)$ ($a \neq 0$)，与 x 轴从左至右依次相交于 A 、 B 两点，与 y 轴相交于点 C ，经过点 A 的直线 $y = -\sqrt{3}x + b$ 与抛物线的另一个交点为 D 。

(1) 若点 D 的横坐标为 2，求抛物线的函数解析式；

(2) 若在第三象限内的抛物线上有点 P ，使得以 A 、 B 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标；

(3) 在 (1) 的条件下，设点 E 是线段 AD 上的一点（不含端点），连接 BE 。一动点 Q 从点 B 出发，沿线段 BE 以每秒 1 个单位的速度运动到点 E ，再沿线段 ED 以每秒 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 个单位的速度运动到点 D 后停止，问当点 E 的坐标是多少时，点 Q 在整个运动过程中所用时间最少？



【考点】二次函数综合题。

【分析】(1) 根据二次函数的交点式确定点 A 、 B 的坐标，求出直线的解析式，求出点 D 的坐标，求出抛物线的解析式；

(2) 作 $PH \perp x$ 轴于 H, 设点 P 的坐标为 (m, n) , 分 $\triangle BPA \sim \triangle ABC$ 和 $\triangle PBA \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的性质计算即可;

(3) 作 $DM \parallel x$ 轴交抛物线于 M, 作 $DN \perp x$ 轴于 N, 作 $EF \perp DM$ 于 F, 根据正切的定义求出 Q 的运动时间 $t = BE + EF$ 时, t 最小即可.

【解答】 解: (1) $\because y = a(x+3)(x-1)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ 、点 B 两的坐标为 $(1, 0)$,

$\because$ 直线 $y = -\sqrt{3}x + b$ 经过点 A,

$\therefore b = -3\sqrt{3}$,

$\therefore y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$,

当 $x=2$ 时, $y = -5\sqrt{3}$,

则点 D 的坐标为 $(2, -5\sqrt{3})$,

$\because$ 点 D 在抛物线上,

$\therefore a(2+3)(2-1) = -5\sqrt{3}$,

解得, $a = -\sqrt{3}$,

则抛物线的解析式为 $y = -\sqrt{3}(x+3)(x-1) = -\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$;

(2) 作 $PH \perp x$ 轴于 H,

设点 P 的坐标为 (m, n) ,

当 $\triangle BPA \sim \triangle ABC$ 时, $\angle BAC = \angle PBA$,

$\therefore \tan \angle BAC = \tan \angle PBA$, 即 $\frac{OC}{OA} = \frac{PH}{HB}$,

$\therefore \frac{-3a}{3} = \frac{-n}{-m+1}$, 即 $n = -a(m-1)$,

$\therefore \begin{cases} n = -a(m-1) \\ n = (m+3)(m-1) \end{cases}$,

解得, $m_1 = -4$, $m_2 = 1$ (不合题意, 舍去),

当 $m = -4$ 时, $n = 5a$,

$\because \triangle BPA \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{PB}$, 即 $AB^2 = AC \cdot PB$,

$\therefore 4^2 = \sqrt{9a^2+9} \cdot \sqrt{25a^2+25}$,

解得, $a_1 = \frac{\sqrt{15}}{15}$ (不合题意, 舍去), $a_2 = -\frac{\sqrt{15}}{15}$,

则 $n = 5a = -\frac{\sqrt{15}}{3}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, -\frac{\sqrt{15}}{3})$;

当 $\triangle PBA \sim \triangle ABC$ 时, $\angle CBA = \angle PBA$,

$\therefore \tan \angle CBA = \tan \angle PBA$, 即 $\frac{OC}{OB} = \frac{PH}{HB}$,

$\therefore \frac{-3a}{1} = \frac{-n}{-m+1}$, 即 $n = -3a(m-1)$,

$$\therefore \begin{cases} n = -3a(m-1) \\ n = a(m+3)(m-1), \end{cases}$$

解得, $m_1 = -6$, $m_2 = 1$ (不合题意, 舍去),

当 $m = -6$ 时, $n = 21a$,

$\therefore \triangle PBA \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{AB}{PB}, \text{ 即 } AB^2 = BC \cdot PB,$$

$$\therefore 4^2 = \sqrt{1+9a^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-21a)^2},$$

解得, $a_1 = \frac{\sqrt{7}}{7}$ (不合题意, 舍去), $a_2 = -\frac{\sqrt{7}}{7}$,

则点 P 的坐标为 $(-6, -\frac{\sqrt{7}}{7})$,

综上所述, 符合条件的点 P 的坐标为 $(-4, -\frac{\sqrt{15}}{3})$ 和 $(-6, -\frac{\sqrt{7}}{7})$;

(3) 作 $DM \parallel x$ 轴交抛物线于 M, 作 $DN \perp x$ 轴于 N, 作 $EF \perp DM$ 于 F,

$$\text{则 } \tan \angle DAN = \frac{DN}{AN} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle DAN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{EF}{\sin \angle EDF} = \frac{2\sqrt{3}}{3} EF,$$

$$\therefore Q \text{ 的运动时间 } t = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = BE + EF,$$

$\therefore$ 当 BE 和 EF 共线时, t 最小,

则 $BE \perp DM$, $y = -4\sqrt{3}$.

