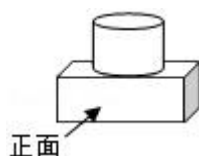
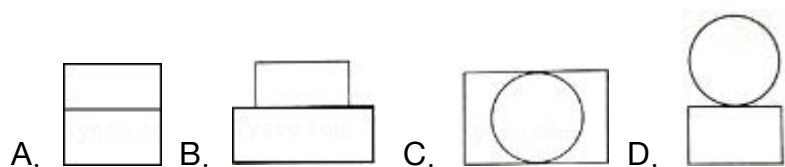


2016 年湖北省武汉市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) 实数 $\sqrt{2}$ 的值在 ()
- A. 0 和 1 之间 B. 1 和 2 之间 C. 2 和 3 之间 D. 3 和 4 之间
2. (3 分) 若代数式 $\frac{1}{x-3}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是 ()
- A. $x < 3$ B. $x > 3$ C. $x \neq 3$ D. $x = 3$
3. (3 分) 下列计算中正确的是 ()
- A. $a \cdot a^2 = a^2$ B. $2a \cdot a = 2a^2$ C. $(2a^2)^2 = 2a^4$ D. $6a^8 \div 3a^2 = 2a^4$
4. (3 分) 不透明的袋子中装有形状、大小、质地完全相同的 6 个球, 其中 4 个黑球、2 个白球, 从袋子中一次摸出 3 个球, 下列事件是不可能事件的是 ()
- A. 摸出的是 3 个白球 B. 摸出的是 3 个黑球
- C. 摸出的是 2 个白球、1 个黑球 D. 摸出的是 2 个黑球、1 个白球
5. (3 分) 运用乘法公式计算 $(x+3)^2$ 的结果是 ()
- A. x^2+9 B. x^2-6x+9 C. x^2+6x+9 D. x^2+3x+9
6. (3 分) 已知点 A (a , 1) 与点 A' (5, b) 关于坐标原点对称, 则实数 a 、 b 的值是 ()
- A. $a=5$, $b=1$ B. $a=-5$, $b=1$ C. $a=5$, $b=-1$ D. $a=-5$, $b=-1$
7. (3 分) 如图是由一个圆柱体和一个长方体组成的几何体, 其左视图是 ()





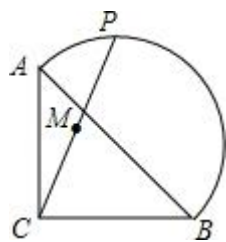
8. (3分) 某车间 20 名工人日加工零件数如表所示:

日加工零件数	4	5	6	7	8
人数	2	6	5	4	3

这些工人日加工零件数的众数、中位数、平均数分别是 ()

- A. 5、6、5 B. 5、5、6 C. 6、5、6 D. 5、6、6

9. (3分) 如图, 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=BC=2\sqrt{2}$, 点 P 在以斜边 AB 为直径的半圆上, M 为 PC 的中点. 当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时, 点 M 运动的路径长是 ()



- A. $\sqrt{2}\pi$ B. π C. $2\sqrt{2}$ D. 2

10. (3分) 平面直角坐标系中, 已知 $A(2, 2)$ 、 $B(4, 0)$. 若在坐标轴上取点 C , 使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 则满足条件的点 C 的个数是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

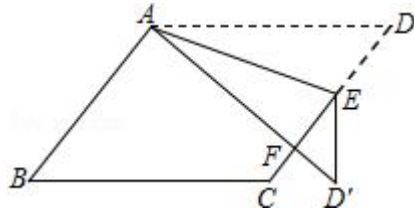
11. (3分) 计算 $5+(-3)$ 的结果为_____.

12. (3分) 某市 2016 年初中毕业生人数约为 63 000, 数 63 000 用科学记数法表示为_____.

13. (3分) 一个质地均匀的小正方体, 6 个面分别标有数字 1, 1, 2, 4, 5, 5,

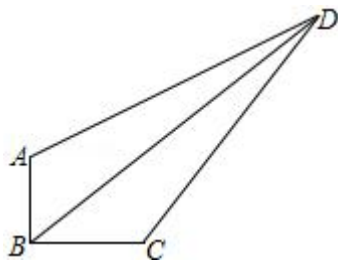
若随机投掷一次小正方体，则朝上一面的数字是 5 的概率为_____.

14. (3 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，E 为边 CD 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AD'E$ 处，AD' 与 CE 交于点 F. 若 $\angle B=52^\circ$ ， $\angle DAE=20^\circ$ ，则 $\angle FED'$ 的大小为_____.



15. (3 分) 将函数 $y=2x+b$ (b 为常数) 的图象位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折至其上方后，所得的折线是函数 $y=|2x+b|$ (b 为常数) 的图象. 若该图象在直线 $y=2$ 下方的点的横坐标 x 满足 $0 < x < 3$ ，则 b 的取值范围为_____.

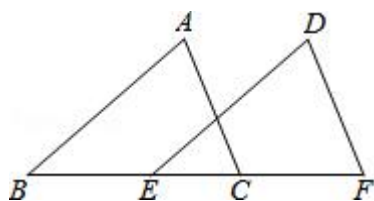
16. (3 分) 如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=3$ ， $BC=4$ ， $CD=10$ ， $DA=5\sqrt{5}$ ，则 BD 的长为_____.



三、解答题 (共 8 题，共 72 分)

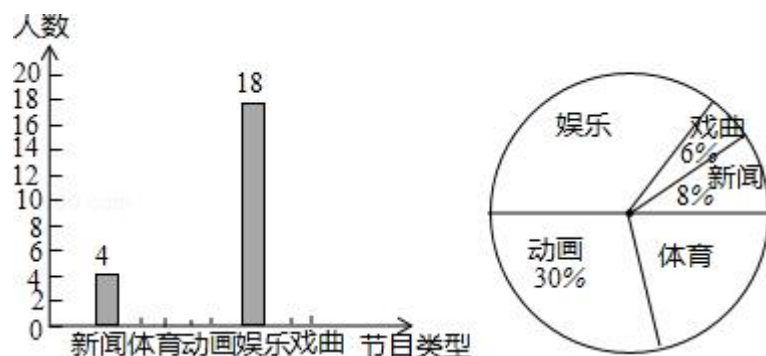
17. (8 分) 解方程： $5x+2=3(x+2)$

18. (8 分) 如图，点 B、E、C、F 在同一条直线上， $AB=DE$ ， $AC=DF$ ， $BE=CF$ ，求证： $AB \parallel DE$.



19. (8 分) 某学校为了解学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目

最喜爱的情况，随机调查了若干名学生，根据调查数据进行整理，绘制了如下的不完整统计图.



请你根据以上的信息，回答下列问题:

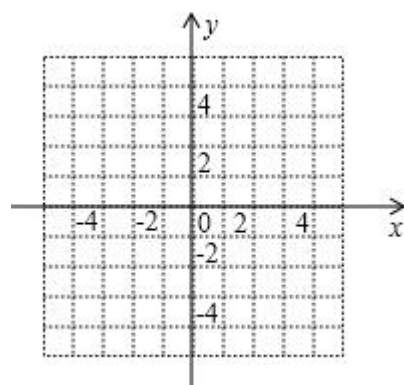
(1) 本次共调查了____名学生，其中最喜爱戏曲的有____人；在扇形统计图中，最喜爱体育的对应扇形的圆心角大小是_____.

(2) 根据以上统计分析，估计该校 2000 名学生中最喜爱新闻的人数.

20. (8 分) 已知反比例函数 $y = \frac{4}{x}$.

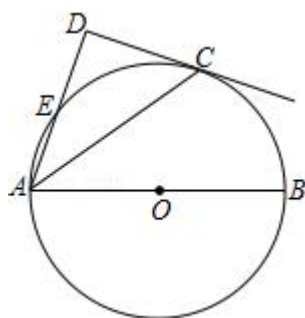
(1) 若该反比例函数的图象与直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 只有一个公共点，求 k 的值;

(2) 如图，反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ ($1 \leq x \leq 4$) 的图象记为曲线 C_1 ，将 C_1 向左平移 2 个单位长度，得曲线 C_2 ，请在图中画出 C_2 ，并直接写出 C_1 平移至 C_2 处所扫过的面积.



21. (8 分) 如图，点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上， AD 与过点 C 的切线垂直，垂足为点 D ， AD 交 $\odot O$ 于点 E .

- (1) 求证: AC 平分 $\angle DAB$;
- (2) 连接 BE 交 AC 于点 F , 若 $\cos \angle CAD = \frac{4}{5}$, 求 $\frac{AF}{FC}$ 的值.



22. (10 分) 某公司计划从甲、乙两种产品中选择一种生产并销售, 每年产销 x 件. 已知产销两种产品的有关信息如表:

产 品	每件售价 (万 元)	每件成本 (万 元)	每年其他费用 (万 元)	每年最大产销量 (件)
甲	6	a	20	200
乙	20	10	$40+0.05x^2$	80

其中 a 为常数, 且 $3 \leq a \leq 5$

- (1) 若产销甲、乙两种产品的年利润分别为 y_1 万元、 y_2 万元, 直接写出 y_1 、 y_2 与 x 的函数关系式;
- (2) 分别求出产销两种产品的最大年利润;
- (3) 为获得最大年利润, 该公司应该选择产销哪种产品? 请说明理由.

23. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, P 为边 AB 上一点.

- (1) 如图 1, 若 $\angle ACP = \angle B$, 求证: $AC^2 = AP \cdot AB$;
- (2) 若 M 为 CP 的中点, $AC = 2$.
- ①如图 2, 若 $\angle PBM = \angle ACP$, $AB = 3$, 求 BP 的长;
- ②如图 3, 若 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle A = \angle BMP = 60^\circ$, 直接写出 BP 的长.

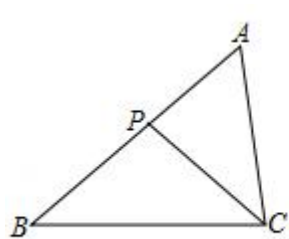


图 1

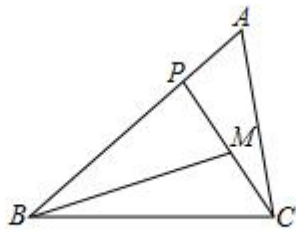


图 2

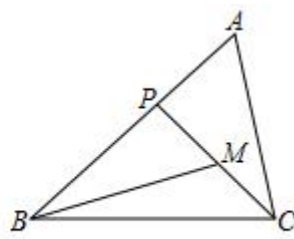


图 3

24. (12 分) 抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴交于 A , B 两点, 顶点为 C , 点 P 为抛物线上, 且位于 x 轴下方.

(1) 如图 1, 若 $P(1, -3)$, $B(4, 0)$.

①求该抛物线的解析式;

②若 D 是抛物线上一点, 满足 $\angle DPO = \angle POB$, 求点 D 的坐标;

(2) 如图 2, 已知直线 PA , PB 与 y 轴分别交于 E , F 两点. 当点 P 运动时, $\frac{OE+OF}{OC}$ 是否为定值? 若是, 试求出该定值; 若不是, 请说明理由.

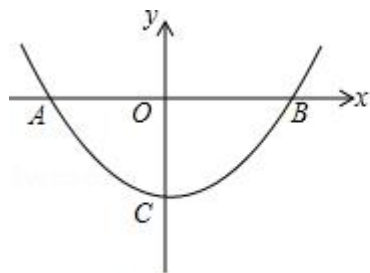


图1

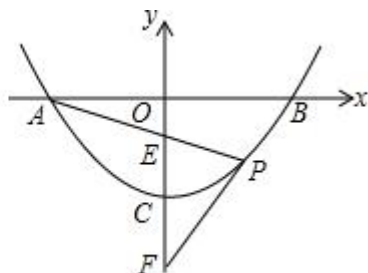


图2

2016 年湖北省武汉市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2016•武汉) 实数 $\sqrt{2}$ 的值在 ()

A. 0 和 1 之间 B. 1 和 2 之间 C. 2 和 3 之间 D. 3 和 4 之间

【解答】解：∵ $1 < \sqrt{2} < 2$,

∴实数 $\sqrt{2}$ 的值在：1 和 2 之间.

故选：B.

2. (3 分) (2016•武汉) 若代数式 $\frac{1}{x-3}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是 ()

A. $x < 3$ B. $x > 3$ C. $x \neq 3$ D. $x = 3$

【解答】解：依题意得： $x - 3 \neq 0$,

解得 $x \neq 3$,

故选：C.

3. (3 分) (2016•武汉) 下列计算中正确的是 ()

A. $a \cdot a^2 = a^2$ B. $2a \cdot a = 2a^2$ C. $(2a^2)^2 = 2a^4$ D. $6a^8 \div 3a^2 = 2a^4$

【解答】解：A、原式= a^3 ，错误；

B、原式= $2a^2$ ，正确；

C、原式= $4a^4$ ，错误；

D、原式= $2a^6$ ，错误，

故选 B

4. (3 分) (2016•武汉) 不透明的袋子中装有形状、大小、质地完全相同的 6 个球, 其中 4 个黑球、2 个白球, 从袋子中一次摸出 3 个球, 下列事件是不可能事件的是 ()

A. 摸出的是 3 个白球 B. 摸出的是 3 个黑球

C. 摸出的是 2 个白球、1 个黑球 D. 摸出的是 2 个黑球、1 个白球

【解答】解: A. 摸出的是 3 个白球是不可能事件;

B. 摸出的是 3 个黑球是随机事件;

C. 摸出的是 2 个白球、1 个黑球是随机事件;

D. 摸出的是 2 个黑球、1 个白球是随机事件,

故选: A.

5. (3 分) (2016•武汉) 运用乘法公式计算 $(x+3)^2$ 的结果是 ()

A. x^2+9 B. x^2-6x+9 C. x^2+6x+9 D. x^2+3x+9

【解答】解: $(x+3)^2=x^2+6x+9$,

故选: C.

6. (3 分) (2016•武汉) 已知点 A (a, 1) 与点 A' (5, b) 关于坐标原点对称, 则实数 a、b 的值是 ()

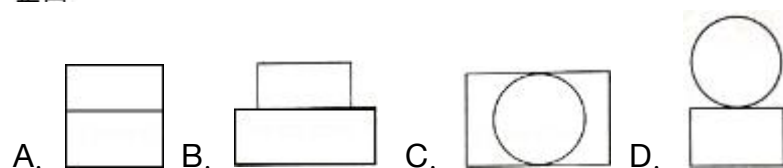
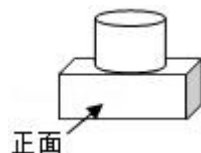
A. a=5, b=1 B. a=-5, b=1 C. a=5, b=-1 D. a=-5, b=-1

【解答】解: $\because$ 点 A (a, 1) 与点 A' (5, b) 关于坐标原点对称,

$\therefore a=-5$, $b=-1$.

故选 D.

7. (3 分) (2016•武汉) 如图是由一个圆柱体和一个长方体组成的几何体, 其左视图是 ()



【解答】解: 从左面可看到一个长方形和上面一个长方形.

故选: A.

8. (3 分) (2016•武汉) 某车间 20 名工人日加工零件数如表所示:

日加工零件数	4	5	6	7	8
人数	2	6	5	4	3

这些工人日加工零件数的众数、中位数、平均数分别是 ()

A. 5、6、5 B. 5、5、6 C. 6、5、6 D. 5、6、6

【解答】解: 5 出现了 6 次, 出现的次数最多, 则众数是 5;

把这些数从小到大排列, 中位数第 10、11 个数的平均数,

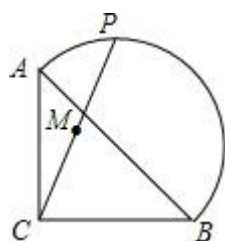
则中位数是 $\frac{6+6}{2}=6$;

平均数是: $\frac{4 \times 2 + 5 \times 6 + 6 \times 5 + 7 \times 4 + 8 \times 3}{20} = 6$;

故选 D.

9. (3 分) (2016•武汉) 如图, 在等腰 Rt $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=2\sqrt{2}$, 点 P 在以

斜边 AB 为直径的半圆上， M 为 PC 的中点。当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是（ ）



- A. $\sqrt{2}\pi$ B. π C. $2\sqrt{2}$ D. 2

【解答】解：取 AB 的中点 O 、 AC 的中点 E 、 BC 的中点 F ，连结 OC 、 OP 、 OM 、 OE 、 OF 、 EF ，如图，

$\therefore$ 在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=BC=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore AB=\sqrt{2}BC=4$ ，

$\therefore OC=\frac{1}{2}AB=2$ ， $OP=\frac{1}{2}AB=2$ ，

$\therefore M$ 为 PC 的中点，

$\therefore OM \perp PC$ ，

$\therefore \angle CMO=90^\circ$ ，

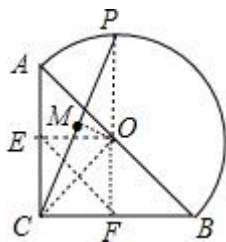
$\therefore$ 点 M 在以 OC 为直径的圆上，

点 P 点在 A 点时， M 点在 E 点；点 P 点在 B 点时， M 点在 F 点，易得四边形 $CEOF$ 为正方形， $EF=OC=2$ ，

$\therefore M$ 点的路径为以 EF 为直径的半圆，

$\therefore$ 点 M 运动的路径长 $=\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1=\pi$ 。

故选 B.



10. (3分) (2016•武汉) 平面直角坐标系中, 已知 $A(2, 2)$ 、 $B(4, 0)$. 若在坐标轴上取点 C , 使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 则满足条件的点 C 的个数是()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【解答】解: $\because$ 点 A 、 B 的坐标分别为 $(2, 2)$ 、 $B(4, 0)$.

$$\therefore AB = 2\sqrt{2},$$

①若 $AC=AB$, 以 A 为圆心, AB 为半径画弧与坐标轴有 3 个交点 (含 B 点), 即

$(0, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(0, 4)$,

$\because$ 点 $(0, 4)$ 与直线 AB 共线,

$\therefore$ 满足 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的 C 点有 1 个;

②若 $BC=AB$, 以 B 为圆心, BA 为半径画弧与坐标轴有 2 个交点 (A 点除外),

即满足 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的 C 点有 2 个;

③若 $CA=CB$, 作 AB 的垂直平分线与坐标轴有两个交点, 即满足 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的 C 点有 2 个;

综上所述: 点 C 在坐标轴上, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 符合条件的点 C 共有 5 个.

故选 A

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. (3分) (2016•武汉) 计算 $5 + (-3)$ 的结果为 2.

【解答】解: 原式 $= 5 - 3 = 2$,

故答案为：2.

12. (3分) (2016•武汉) 某市 2016 年初中毕业生人数约为 63 000，数 63 000 用科学记数法表示为 6.3×10^4 .

【解答】解：将 63 000 用科学记数法表示为 6.3×10^4 .

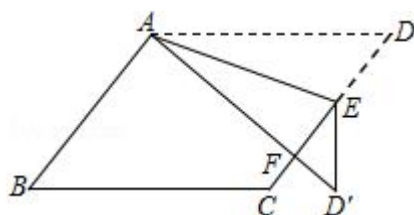
故答案为： 6.3×10^4 .

13. (3分) (2016•武汉) 一个质地均匀的小正方体，6 个面分别标有数字 1，1，2，4，5，5，若随机投掷一次小正方体，则朝上一面的数字是 5 的概率为 $\frac{1}{3}$.

【解答】解： $\because$ 一个质地均匀的小正方体由 6 个面，其中标有数字 5 的有 2 个，
 $\therefore$ 随机投掷一次小正方体，则朝上一面的数字是 5 的概率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

14. (3分) (2016•武汉) 如图，在 $\square ABCD$ 中，E 为边 CD 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AD'E$ 处，AD' 与 CE 交于点 F. 若 $\angle B = 52^\circ$ ， $\angle DAE = 20^\circ$ ，则 $\angle FED'$ 的大小为 36° .



【解答】解： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$\therefore \angle D = \angle B = 52^\circ$,

由折叠的性质得： $\angle D' = \angle D = 52^\circ$ ， $\angle EAD' = \angle DAE = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF = \angle D + \angle DAE = 52^\circ + 20^\circ = 72^\circ$ ， $\angle AED' = 180^\circ - \angle EAD' - \angle D' = 108^\circ$ ，

$$\therefore \angle FED' = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ;$$

故答案为： 36° .

15. (3 分) (2016•武汉) 将函数 $y=2x+b$ (b 为常数) 的图象位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折至其上方后, 所得的折线是函数 $y=|2x+b|$ (b 为常数) 的图象. 若该图象在直线 $y=2$ 下方的点的横坐标 x 满足 $0 < x < 3$, 则 b 的取值范围为 $-4 \leq b \leq -2$.

【解答】解: $\because y=2x+b$,

$$\therefore \text{当 } y < 2 \text{ 时, } 2x+b < 2, \text{ 解得 } x < \frac{2-b}{2};$$

$$\therefore \text{函数 } y=2x+b \text{ 沿 } x \text{ 轴翻折后的解析式为 } -y=2x+b, \text{ 即 } y=-2x-b,$$

$$\therefore \text{当 } y < 2 \text{ 时, } -2x-b < 2, \text{ 解得 } x > -\frac{2+b}{2};$$

$$\therefore -\frac{2+b}{2} < x < \frac{2-b}{2},$$

$$\therefore x \text{ 满足 } 0 < x < 3,$$

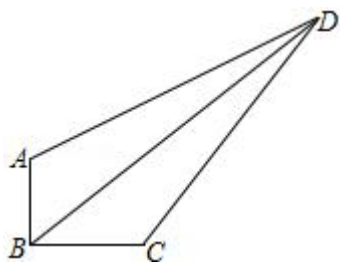
$$\therefore -\frac{2+b}{2}=0, \frac{2-b}{2}=3,$$

$$\therefore b=-2, b=-4,$$

$$\therefore b \text{ 的取值范围为 } -4 \leq b \leq -2.$$

故答案为 $-4 \leq b \leq -2$.

16. (3 分) (2016•武汉) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=3$, $BC=4$, $CD=10$, $DA=5\sqrt{5}$, 则 BD 的长为 $2\sqrt{41}$.



【解答】解：作 $DM \perp BC$ ，交 BC 延长线于 M ，连接 AC ，如图所示：

则 $\angle M = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DCM + \angle CDM = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ, AB = 3, BC = 4,$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25,$$

$$\because CD = 10, AD = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore AC^2 + CD^2 = AD^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形， $\angle ACD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB + \angle DCM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CDM,$$

$$\because \angle ABC = \angle M = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CMD,$$

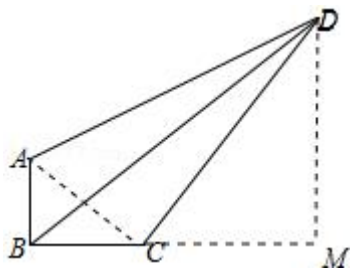
$$\therefore \frac{AB}{CM} = \frac{BC}{DM} = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CM = 2AB = 6, DM = 2BC = 8,$$

$$\therefore BM = BC + CM = 10,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BM^2 + DM^2} = \sqrt{10^2 + 8^2} = 2\sqrt{41},$$

故答案为： $2\sqrt{41}$.



三、解答题 (共 8 题, 共 72 分)

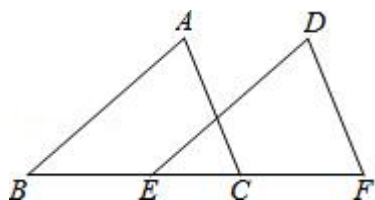
17. (8 分) (2016•武汉) 解方程: $5x+2=3(x+2)$

【解答】解: 去括号得: $5x+2=3x+6$,

移项合并得: $2x=4$,

解得: $x=2$.

18. (8 分) (2016•武汉) 如图, 点 B、E、C、F 在同一条直线上, $AB=DE$, $AC=DF$, $BE=CF$, 求证: $AB \parallel DE$.



【解答】证明: $\because BE=CF$,

$\therefore BC=EF$,

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中,

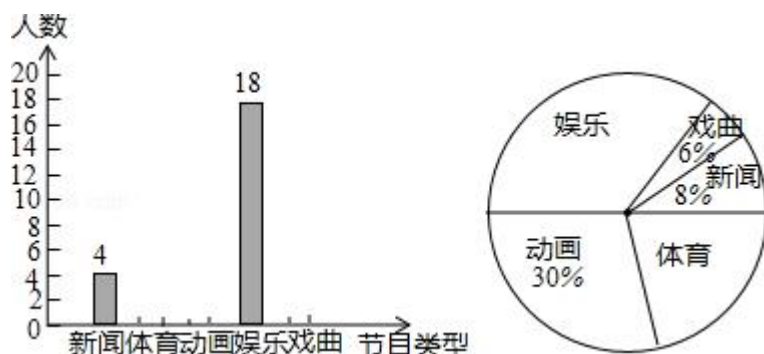
$$\begin{cases} AB=DE \\ AC=DF, \\ BC=EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS),

$\therefore \angle ABC = \angle DEF$,

$\therefore AB \parallel DE$.

19. (8分) (2016•武汉) 某学校为了解学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目最喜爱的情况, 随机调查了若干名学生, 根据调查数据整理, 绘制了如下的不完整统计图.



请你根据以上的信息, 回答下列问题:

(1) 本次共调查了 50 名学生, 其中最喜爱戏曲的有 3 人; 在扇形统计图中, 最喜爱体育的对应扇形的圆心角大小是 72°.

(2) 根据以上统计分析, 估计该校 2000 名学生中最喜爱新闻的人数.

【解答】 解: (1) 本次共调查学生: $4 \div 8\% = 50$ (人), 最喜爱戏曲的人数为: $50 \times 6\% = 3$ (人);

$\therefore$ “娱乐”类人数占被调查人数的百分比为: $\frac{18}{50} \times 100\% = 36\%$,

$\therefore$ “体育”类人数占被调查人数的百分比为: $1 - 8\% - 30\% - 36\% - 6\% = 20\%$,

$\therefore$ 在扇形统计图中, 最喜爱体育的对应扇形的圆心角大小是 $360^\circ \times 20\% = 72^\circ$;

故答案为: 50, 3, 72° .

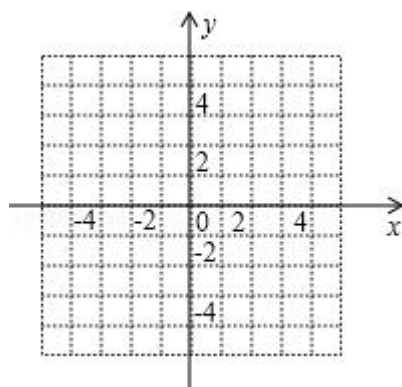
(2) $2000 \times 8\% = 160$ (人),

答: 估计该校 2000 名学生中最喜爱新闻的人数约有 160 人.

20. (8分) (2016•武汉) 已知反比例函数 $y = \frac{4}{x}$.

(1) 若该反比例函数的图象与直线 $y=kx+4$ ($k \neq 0$) 只有一个公共点, 求 k 的值;

(2) 如图, 反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ ($1 \leq x \leq 4$) 的图象记为曲线 C_1 , 将 C_1 向左平移 2 个单位长度, 得曲线 C_2 , 请在图中画出 C_2 , 并直接写出 C_1 平移至 C_2 处所扫过的面积.



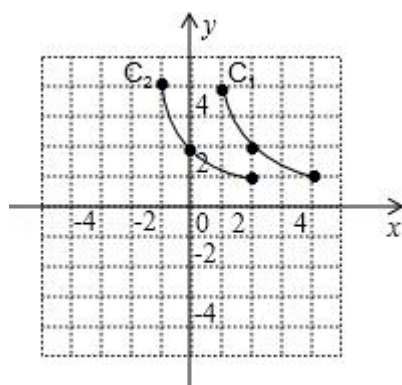
【解答】 解: (1) 解 $\begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ y=kx+4 \end{cases}$ 得 $kx^2+4x-4=0$,

$\therefore$ 反比例函数的图象与直线 $y=kx+4$ ($k \neq 0$) 只有一个公共点,

$$\therefore \Delta=16+16k=0,$$

$$\therefore k=-1;$$

(2) 如图所示, C_1 平移至 C_2 处所扫过的面积 $=2 \times 3=6$.

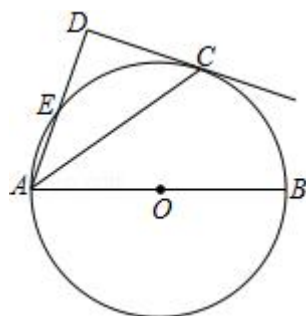


21. (8 分) (2016•武汉) 如图, 点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上, AD 与过点 C

的切线垂直，垂足为点 D，AD 交 $\odot O$ 于点 E.

(1) 求证：AC 平分 $\angle DAB$;

(2) 连接 BE 交 AC 于点 F，若 $\cos \angle CAD = \frac{4}{5}$ ，求 $\frac{AF}{FC}$ 的值.



【解答】(1) 证明：连接 OC,

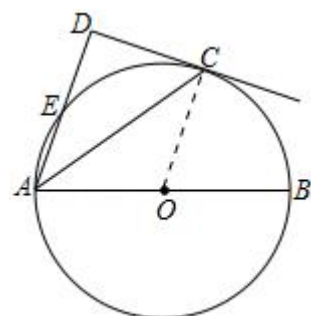


图1

$\because$ CD 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore CD \perp OC$,

又 $\because CD \perp AD$,

$\therefore AD \parallel OC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ACO$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle CAO = \angle ACO$,

$\therefore \angle CAD = \angle CAO$,

即 AC 平分 $\angle DAB$;

(2) 解：连接 BE、BC、OC，BE 交 AC 于 F 交 OC 于 H.

乙	20	10	$40+0.05x^2$	80
---	----	----	--------------	----

其中 a 为常数, 且 $3 \leq a \leq 5$

(1) 若产销甲、乙两种产品的年利润分别为 y_1 万元、 y_2 万元, 直接写出 y_1 、 y_2 与 x 的函数关系式;

(2) 分别求出产销两种产品的最大年利润;

(3) 为获得最大年利润, 该公司应该选择产销哪种产品? 请说明理由.

【解答】 解: (1) $y_1 = (6 - a)x - 20$, ($0 < x \leq 200$)

$$y_2 = 10x - 40 - 0.05x^2 = -0.05x^2 + 10x - 40. \quad (0 < x \leq 80).$$

(2) 对于 $y_1 = (6 - a)x - 20$, $\because 6 - a > 0$,

$\therefore x=200$ 时, y_1 的值最大 = $(1180 - 200a)$ 万元.

对于 $y_2 = -0.05(x - 100)^2 + 460$,

$\because 0 < x \leq 80$,

$\therefore x=80$ 时, y_2 最大值 = 440 万元.

(3) ① $(1180 - 200a) = 440$, 解得 $a = 3.7$,

② $(1180 - 200a) > 440$, 解得 $a < 3.7$,

③ $(1180 - 200a) < 440$, 解得 $a > 3.7$,

$\because 3 \leq a \leq 5$,

$\therefore$ 当 $a = 3.7$ 时, 生产甲乙两种产品的利润相同.

当 $3 \leq a < 3.7$ 时, 生产甲产品利润比较高.

当 $3.7 < a \leq 5$ 时, 生产乙产品利润比较高.

23. (10 分) (2016•武汉) 在 $\triangle ABC$ 中, P 为边 AB 上一点.

(1) 如图 1, 若 $\angle ACP = \angle B$, 求证: $AC^2 = AP \cdot AB$;

(2) 若 M 为 CP 的中点, $AC = 2$.

①如图 2, 若 $\angle PBM = \angle ACP$, $AB = 3$, 求 BP 的长;

②如图 3, 若 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle A = \angle BMP = 60^\circ$, 直接写出 BP 的长.

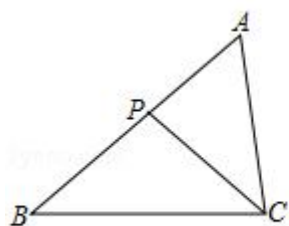


图 1

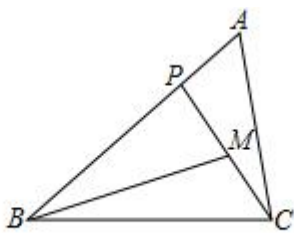


图 2

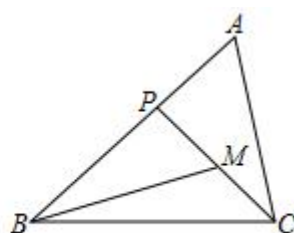


图 3

【解答】 解: (1) $\because \angle ACP = \angle B$, $\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AP \cdot AB;$$

(2) ①取 AP 的中点 G, 连接 MG, 设 $AG = x$, 则 $PG = x$, $BG = 3 - x$,

$\because M$ 是 PC 的中点,

$\therefore MG \parallel AC$,

$\therefore \angle BGM = \angle A$,

$\because \angle ACP = \angle PBM$,

$\therefore \triangle APC \sim \triangle GMB$,

$$\therefore \frac{AP}{GM} = \frac{AC}{BG},$$

$$\text{即 } \frac{2x}{1} = \frac{2}{3-x},$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore AB=3,$$

$$\therefore AP=3-\sqrt{5},$$

$$\therefore PB=\sqrt{5};$$

②过C作CH⊥AB于H，延长AB到E，使BE=BP，

设BP=x.

$$\therefore \angle ABC=45^\circ, \angle A=60^\circ,$$

$$\therefore CH=\sqrt{3}, HE=\sqrt{3}+x,$$

$$\therefore CE^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+x)^2,$$

$$\therefore PB=BE, PM=CM,$$

$$\therefore BM\parallel CE,$$

$$\therefore \angle PMB=\angle PCE=60^\circ=\angle A,$$

$$\therefore \angle E=\angle E,$$

$$\therefore \triangle ECP\sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \frac{CE}{EP}=\frac{AE}{CE},$$

$$\therefore CE^2=EP\cdot EA,$$

$$\therefore 3+3+x^2+2\sqrt{3}x=2x(x+\sqrt{3}+1),$$

$$\therefore x=\sqrt{7}-1,$$

$$\therefore PB=\sqrt{7}-1.$$

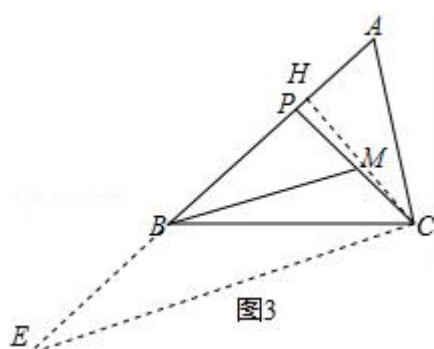


图3

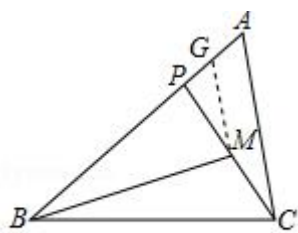


图 2

24. (12 分) (2016·武汉) 抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 顶点为 C , 点 P 为抛物线上, 且位于 x 轴下方.

(1) 如图 1, 若 $P(1, -3)$, $B(4, 0)$.

①求该抛物线的解析式;

②若 D 是抛物线上一点, 满足 $\angle DPO = \angle POB$, 求点 D 的坐标;

(2) 如图 2, 已知直线 PA, PB 与 y 轴分别交于 E, F 两点. 当点 P 运动时, $\frac{OE+OF}{OC}$ 是否为定值? 若是, 试求出该定值; 若不是, 请说明理由.

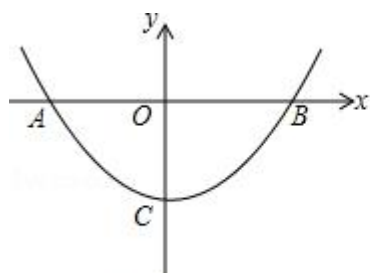


图1

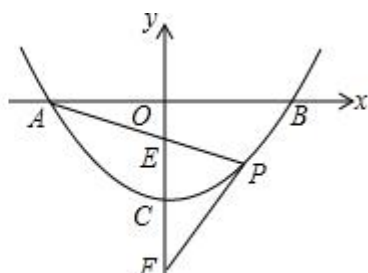


图2

【解答】 解: (1) ①将 $P(1, -3)$, $B(4, 0)$ 代入 $y=ax^2+c$, 得

$$\begin{cases} 16a+c=0 \\ a+c=-3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ c=-\frac{16}{5} \end{cases}$$

抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{5}x^2-\frac{16}{5}$;

②如图 1,

当点 D 在 OP 左侧时,

由 $\angle DPO = \angle POB$, 得

DP//OB,

D 与 P 关于 y 轴对称, P (1, -3),

得 D (-1, -3);

当点 D 在 OP 右侧时, 延长 PD 交 x 轴于点 G.

作 PH⊥OB 于点 H, 则 OH=1, PH=3.

∴ ∠DPO=∠POB,

∴ PG=OG.

设 OG=x, 则 PG=x, HG=x-1.

在 Rt△PGH 中, 由 $x^2 = (x-1)^2 + 3^2$, 得 x=5.

∴ 点 G (5, 0).

∴ 直线 PG 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \\ y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{11}{4} \\ y_2 = -\frac{27}{16} \end{cases}.$$

∴ P (1, -3),

∴ D ($\frac{11}{4}$, $-\frac{27}{16}$).

∴ 点 D 的坐标为 (-1, -3) 或 ($\frac{11}{4}$, $-\frac{27}{16}$).

(2) 点 P 运动时, $\frac{OE+OF}{OC}$ 是定值, 定值为 2, 理由如下:

作 PQ⊥AB 于 Q 点, 设 P (m, am^2+c), A (-t, 0), B (t, 0), 则 $at^2+c=0$,

$c = -at^2$.

∴ PQ//OF,

∴ $\frac{PQ}{OF} = \frac{BQ}{BO}$,

$$\therefore OF = \frac{PQ \cdot BO}{BQ} = -\frac{-(am^2+c)t}{t-m} = \frac{(am^2-at^2)t}{m-t} = amt+at^2.$$

同理 $OE = -amt+at^2$.

$$\therefore OE+OF=2at^2=-2c=2OC.$$

$$\therefore \frac{OE+OF}{OC}=2.$$

