

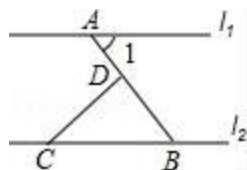
2016 年湖北省咸宁市中考数学试卷

一、精心选一选选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分再给出的四个选项中只有一项符合题目要求的，请在答题卷上把正确答案的代号涂黑）

1. 冰箱冷藏室的温度零上 5°C ，记作 $+5^{\circ}\text{C}$ ，保鲜室的温度零下 7°C ，记作（ ）

A. 7°C B. -7°C C. 2°C D. -12°C

2. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $CD \perp AB$ 于点 D， $\angle 1 = 50^{\circ}$ ，则 $\angle BCD$ 的度数为（ ）

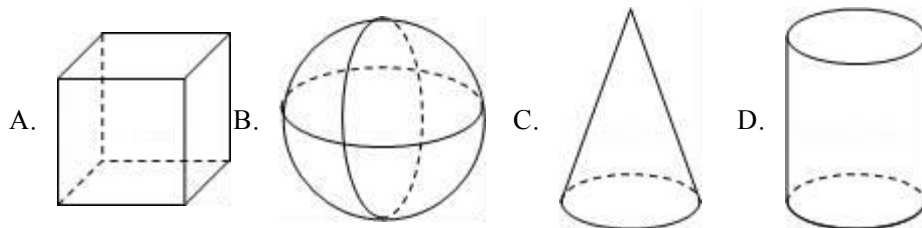


A. 50° B. 45° C. 40° D. 30°

3. 近几年来，我市加大教育信息化投入，投资 201000000 元，初步完成咸宁市教育公共服务平台基础工程，教学点数字教育资源全覆盖，将 201000000 用科学记数法表示为（ ）

A. 20.1×10^7 B. 2.01×10^8 C. 2.01×10^9 D. 0.201×10^{10}

4. 下面四个几何体中，其主视图不是中心对称图形的是（ ）



5. 下列运算正确的是（ ）

A. $\sqrt{6} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ B. $\sqrt{(-3)^2} = -3$ C. $a \cdot a^2 = a^2$ D. $(2a^3)^2 = 4a^6$

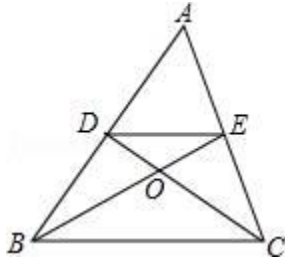
6. 某班七个兴趣小组人数分别为 4, 4, 5, 5, x, 6, 7，已知这组数据的平均数是 5，则这组数据的众数和中位数分别是（ ）

A. 4, 5 B. 4, 4 C. 5, 4 D. 5, 5

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 BE，CD 相交于点 O，连接 DE，下列结论：

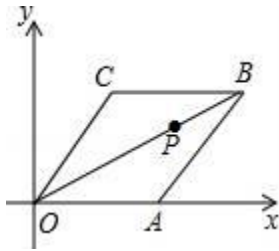
① $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$ ； ② $\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle COB}} = \frac{1}{2}$ ； ③ $\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB}$ ； ④ $\frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{1}{3}$

其中正确的个数有（ ）



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 已知菱形 OABC 在平面直角坐标系的位置如图所示，顶点 A (5, 0)，OB=4 $\sqrt{5}$ ，点 P 是对角线 OB 上的一个动点，D (0, 1)，当 CP+DP 最短时，点 P 的坐标为 ()



- A. (0, 0) B. $(1, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ D. $(\frac{10}{7}, \frac{5}{7})$

二、细心填一填 (本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分，请把答案填在答案卷相应题号的横线上)

9. 代数式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

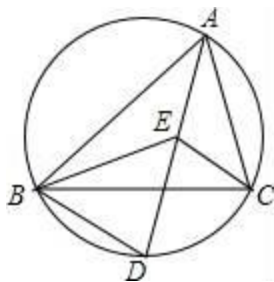
10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+2=0$ 有两个不相等的实数根，写出一个满足条件的实数 b 的值: b=_____.

11. a, b 互为倒数，代数式 $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} \div (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的值为_____.

12. 一个布袋内只装有一个红球和 2 个黄球，这些球除颜色外其余都相同，随机摸出一个球后放回搅匀，再随机摸出一个球，则两次摸出的球都是黄球的概率是_____.

13. 端午节那天，“味美早餐店”的粽子打 9 折出售，小红的妈妈去该店买粽子花了 54 元钱，比平时多买了 3 个，求平时每个粽子卖多少元？设平时每个粽子卖 x 元，列方程为_____.

14. 如图，点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，AE 的延长线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，连接 BD、BE、CE，若 $\angle CBD=32^\circ$ ，则 $\angle BEC$ 的度数为_____.



15. 用 m 根火柴棒恰好可拼成如图 1 所示的 a 个等边三角形或如图 2 所示的 b 个正六边形, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.



图1

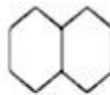
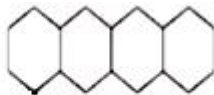
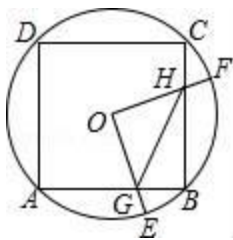


图2

16. 如图, 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内接于点 O , 点 E 是 $\widehat{AB}$ 上的一动点 (不与 A 、 B 重合), 点 F 是 $\widehat{BC}$ 上的一点, 连接 OE 、 OF , 分别与 AB 、 BC 交于点 G 、 H , 且 $\angle EOF = 90^\circ$, 有以下结论:

- ① $\widehat{AE} = \widehat{BF}$;
- ② $\triangle OGH$ 是等腰三角形;
- ③ 四边形 $OGBH$ 的面积随着点 E 位置的变化而变化;
- ④ $\triangle GBH$ 周长的最小值为 $4 + \sqrt{2}$.

其中正确的是 (把你认为正确结论的序号都填上) .



三、专心解一解 (本大题共 8 小题, 满分 72 分. 请认真读题, 冷静思考, 解答题应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤, 请把解题过程写在答题卷相应题号的位置) 解答题

17. (1) 计算: $|-2| - 2016^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

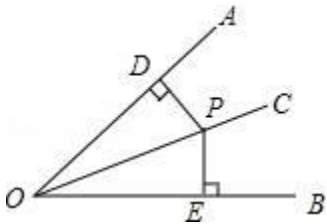
(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x > 5 - x \\ x + 2 > 2x - 3 \end{cases}$$

18. 证明命题“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”，要根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证，写出证明过程，下面是小明同学根据题意画出的图形，并写出了不完整的已知和求证.

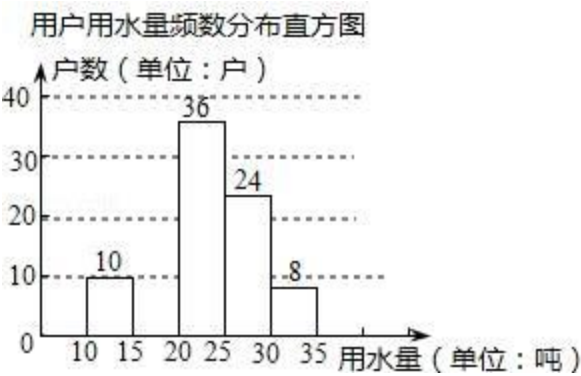
已知：如图， $\angle AOC = \angle BOC$ ，点 P 在 OC 上，_____

求证：_____.

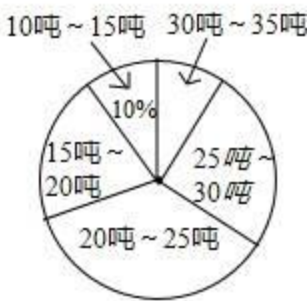
请你补全已知和求证，并写出证明过程.



19. 某市为提倡节约用水，准备实行自来水“阶梯计费”方式，用户用水不超出基本用水量的部分享受基本价格，超出基本用水量的部分实行超价收费，为更好地决策，自来水公司的随机抽取了部分用户的用水量数据，并绘制了如图不完整的统计图，（每组数据包括在右端点但不包括左端点），请你根据统计图解答下列问题：



用户用水量扇形统计图

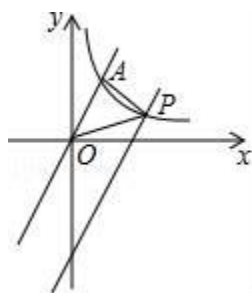


- (1) 此次抽样调查的样本容量是_____.
- (2) 补全频数分布直方图，求扇形图中“15 吨 ~ 20 吨”部分的圆心角的度数.
- (3) 如果自来水公司将基本用水量定为每户 25 吨，那么该地区 6 万用户中约有多少用户的用水全部享受基本价格？

20. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 $A(m, 2)$ ，将直线 $y=2x$ 向下平移后与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 P ，且 $\triangle POA$ 的面积为 2.

(1) 求 k 的值.

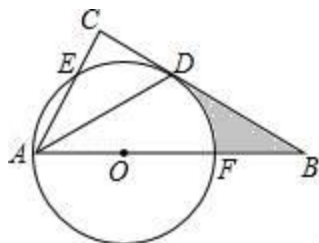
(2) 求平移后的直线的函数解析式.



21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心， OA 为半径的圆恰好经过点 D ，分别交 AC ， AB 于点 E ， F .

(1) 试判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $BD=2\sqrt{3}$ ， $BF=2$ ，求阴影部分的面积（结果保留 π ）.



22. 某网店销售某款童装，每件售价 60 元，每星期可卖 300 件，为了促销，该网店决定降价销售. 市场调查反映：每降价 1 元，每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件成本价 40 元，设该款童装每件售价 x 元，每星期的销售量为 y 件.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 当每件售价定为多少元时，每星期的销售利润最大，最大利润多少元？

(3) 若该网店每星期想要获得不低于 6480 元的利润，每星期至少要销售该款童装多少件？

23. 阅读理解:

我们知道, 四边形具有不稳定性, 容易变形, 如图 1, 一个矩形发生变形后成为一个平行四边形, 设这个平行四边形相邻两个内角中较小的一个内角为 α , 我们把 $\frac{1}{\sin \alpha}$ 的值叫做这个平行四边形的变形度.

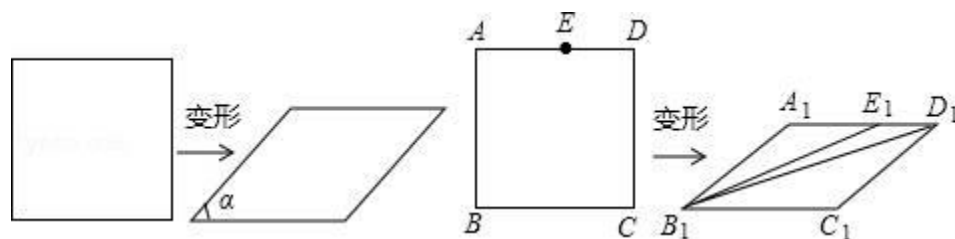
(1) 若矩形发生变形后的平行四边形有一个内角是 120 度, 则这个平行四边形的变形度是 _____.

猜想证明:

(2) 设矩形的面积为 S_1 , 其变形后的平行四边形面积为 S_2 , 试猜想 S_1 , S_2 , $\frac{1}{\sin \alpha}$ 之间的数量关系, 并说明理由;

拓展探究:

(3) 如图 2, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AD 边上的一点, 且 $AB^2 = AE \cdot AD$, 这个矩形发生变形后为平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$, E_1 为 E 的对应点, 连接 B_1E_1 , B_1D_1 , 若矩形 $ABCD$ 的面积为 $4\sqrt{\pi}$ ($m > 0$), 平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 $2\sqrt{\pi}$ ($m > 0$), 试求 $\angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1$ 的度数.



24. 如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0, 1)$ ，取一点 $B(b, 0)$ ，连接 AB ，做线段 AB 的垂直平分线 l_1 ，过点 B 作 x 轴的垂线 l_2 ，记 l_1, l_2 的交点为 P 。

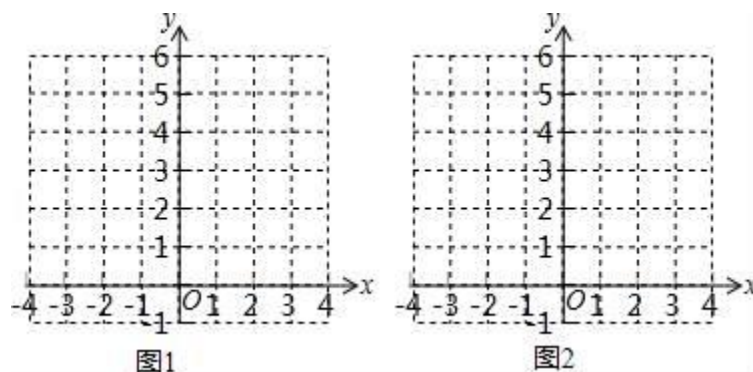
(1) 当 $b=3$ 时，在图 1 中补全图形（尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 小慧多次取不同数值 b ，得出相应的点 P ，并把这些点用平滑的曲线连接起来发现：这些点 P 竟然在一条曲线 L 上！

①设点 P 的坐标为 (x, y) ，试求 y 与 x 之间的关系式，并指出曲线 L 是哪种曲线；

②设点 P 到 x 轴， y 轴的距离分别是 d_1, d_2 ，求 d_1+d_2 的范围，当 $d_1+d_2=8$ 时，求点 P 的坐标；

③将曲线 L 在直线 $y=2$ 下方的部分沿直线 $y=2$ 向上翻折，得到一条“W”形状的新曲线，若直线 $y=kx+3$ 与这条“W”形状的新曲线有 4 个交点，直接写出 k 的取值范围。



2016 年湖北省咸宁市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、精心选一选选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分再给出的四个选项中只有一项符合题目要求的, 请在答题卷上把正确答案的代号涂黑)

1. 冰箱冷藏室的温度零上 5°C , 记作 $+5^{\circ}\text{C}$, 保鲜室的温度零下 7°C , 记作 ()

A. 7°C B. -7°C C. 2°C D. -12°C

【考点】正数和负数.

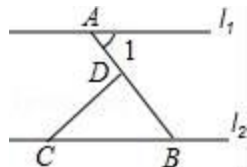
【分析】首先审清题意, 明确“正”和“负”所表示的意义; 再根据题意作答.

【解答】解: $\because$ 冰箱冷藏室的温度零上 5°C , 记作 $+5^{\circ}\text{C}$,

$\therefore$ 保鲜室的温度零下 7°C , 记作 -7°C .

故选: B.

2. 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, $CD \perp AB$ 于点 D, $\angle 1 = 50^{\circ}$, 则 $\angle BCD$ 的度数为 ()



A. 50° B. 45° C. 40° D. 30°

【考点】平行线的性质.

【分析】先依据平行线的性质可求得 $\angle ABC$ 的度数, 然后在直角三角形 CBD 中可求得 $\angle BCD$ 的度数.

【解答】解: $\because l_1 \parallel l_2$,

$\therefore \angle 1 = \angle ABC = 50^{\circ}$.

$\because CD \perp AB$ 于点 D,

$\therefore \angle CDB = 90^{\circ}$.

$\therefore \angle BCD + \angle DBC = 90^{\circ}$, 即 $\angle BCD + 50^{\circ} = 90^{\circ}$.

$\therefore \angle BCD = 40^{\circ}$.

故选: C.

3. 近几年来, 我市加大教育信息化投入, 投资 201000000 元, 初步完成咸宁市教育公共服务平台基础工程, 教学点数字教育资源全覆盖, 将 201000000 用科学记数法表示为 ()

A. 20.1×10^7 B. 2.01×10^8 C. 2.01×10^9 D. 0.201×10^{10}

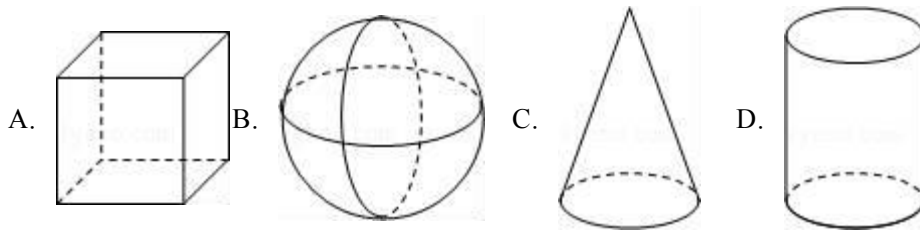
【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 201000000 用科学记数法表示为 2.01×10^8 .

故选 B.

4. 下面四个几何体中, 其主视图不是中心对称图形的是 ()



【考点】简单几何体的三视图；中心对称图形.

【分析】首先得出各几何体的主视图的形状，进而结合中心对称图形的定义得出答案.

【解答】解：A、立方体的主视图是正方形，是中心对称图形，故此选项错误；

B、球体的主视图是圆，是中心对称图形，故此选项错误；

C、圆锥的主视图是等腰三角形，不是中心对称图形，故此选项正确；

D、圆柱的主视图是矩形，是中心对称图形，故此选项错误；

故选：C.

5. 下列运算正确的是（ ）

A. $\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$ B. $\sqrt{(-3)^2}=-3$ C. $a \cdot a^2=a^2$ D. $(2a^3)^2=4a^6$

【考点】二次根式的加减法；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方；二次根式的性质与化简.

【分析】直接利用二次根式加减运算法则以及积的乘方运算法则和幂的乘方运算法则、同底数幂的乘法运算法则、二次根式的性质分别化简判断即可.

【解答】解：A、 $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ 无法计算，故此选项错误；

B、 $\sqrt{(-3)^2}=3$ ，故此选项错误；

C、 $a \cdot a^2=a^3$ ，故此选项错误；

D、 $(2a^3)^2=4a^6$ ，正确.

故选：D.

6. 某班七个兴趣小组人数分别为 4, 4, 5, 5, x, 6, 7, 已知这组数据的平均数是 5, 则这组数据的众数和中位数分别是（ ）

A. 4, 5 B. 4, 4 C. 5, 4 D. 5, 5

【考点】众数；算术平均数；中位数.

【分析】根据众数、算术平均数、中位数的概念，结合题意进行求解.

【解答】解： $\because$ 这组数据的平均数是 5,

$$\therefore \frac{4+4+5+5+x+6+7}{7}=5,$$

解得：x=4,

这组数据按照从小到大的顺序排列为：4, 4, 4, 5, 5, 6, 7,

则众数为：4,

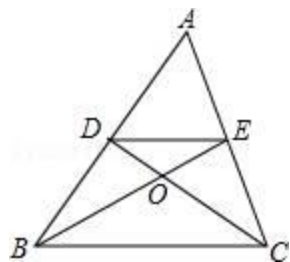
中位数为：5.

故选 A.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 BE, CD 相交于点 O, 连接 DE, 下列结论：

$$\textcircled{1} \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}; \textcircled{2} \frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle COB}} = \frac{1}{2}; \textcircled{3} \frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB}; \textcircled{4} \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{1}{3}$$

其中正确的个数有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【考点】相似三角形的判定与性质；三角形的重心.

【分析】BE、CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，即 D、E 是 AB 和 AC 的中点，即 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，则 $DE \parallel BC$ ， $\triangle ODE \sim \triangle OCB$ ，根据相似三角形的性质即可判断.

【解答】解： $\because$ BE、CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，即 D、E 是 AB 和 AC 的中点，

$\therefore$ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, \text{ 即 } \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle DOE \sim \triangle COB$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle COB}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\frac{OE}{OB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

故 $\textcircled{1}$ 正确， $\textcircled{2}$ 错误， $\textcircled{3}$ 正确；

设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 AF，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AF$ ， $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}BC \cdot AF$ ，

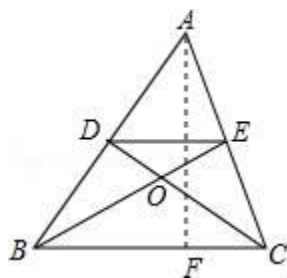
$\because \triangle ODE$ 中， $DE = \frac{1}{2}BC$ ，DE 边上的高是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}AF = \frac{1}{6}AF$ ，

$$\therefore S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BC \times \frac{1}{6}AF = \frac{1}{24}BC \cdot AF,$$

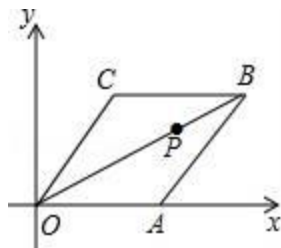
$$\therefore \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{24}BC \cdot AF}{\frac{1}{4}BC \cdot AF} = \frac{1}{6}, \text{ 故 } \textcircled{4} \text{ 错误.}$$

故正确的是 $\textcircled{1}\textcircled{3}$.

故选 B.



8. 已知菱形 OABC 在平面直角坐标系的位置如图所示，顶点 A (5, 0)，OB=4 $\sqrt{5}$ ，点 P 是对角线 OB 上的一个动点，D (0, 1)，当 CP+DP 最短时，点 P 的坐标为 ()

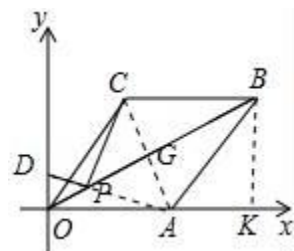


- A. (0, 0) B. $(1, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ D. $(\frac{10}{7}, \frac{5}{7})$

【考点】菱形的性质；坐标与图形性质；轴对称-最短路线问题.

【分析】如图连接 AC，AD，分别交 OB 于 G、P，作 BK⊥OA 于 K. 首先说明点 P 就是所求的点，再求出点 B 坐标，求出直线 OB、DA，列方程组即可解决问题.

【解答】解：如图连接 AC，AD，分别交 OB 于 G、P，作 BK⊥OA 于 K.



∵ 四边形 OABC 是菱形，

∴ AC⊥OB，GC=AG，OG=BG=2 $\sqrt{5}$ ，A、C 关于直线 OB 对称，

∴ PC+PD=PA+PD=DA，

∴ 此时 PC+PD 最短，

在 RT△AOG 中，AG= $\sqrt{OA^2 - OG^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$ ，

∴ AC=2 $\sqrt{5}$ ，

∴ OA•BK= $\frac{1}{2}$ •AC•OB，

∴ BK=4，AK= $\sqrt{AB^2 - BK^2} = 3$ ，

∴ 点 B 坐标 (8, 4)，

∴ 直线 OB 解析式为 $y = \frac{1}{2}x$ ，直线 AD 解析式为 $y = -\frac{1}{5}x + 1$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{5}x + 1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{5}{7} \end{cases},$$

∴ 点 P 坐标 $(\frac{10}{7}, \frac{5}{7})$.

故选 D.

二、细心填一填 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分, 请把答案填在答案卷相应题号的横线上)

9. 代数式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 $x \geq 1$.

【考点】二次根式有意义的条件.

【分析】先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式, 求出 x 的取值范围即可.

【解答】解: ∵ $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore x-1 \geq 0,$$

解得 $x \geq 1$.

故答案为: $x \geq 1$.

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+2=0$ 有两个不相等的实数根, 写出一个满足条件的实数 b 的值: $b=3$.

【考点】根的判别式.

【分析】根据题意可知判别式 $\Delta=b^2-8>0$, 从而求得 b 的取值范围, 然后即可得出答案.

【解答】解: ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+2=0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta=b^2-8>0,$$

$$\therefore b>2\sqrt{2} \text{ 或 } b<-2\sqrt{2},$$

∴ b 为 3, 4, 5 等等,

∴ b 为 3 (答案不唯一).

故答案为 3.

11. a, b 互为倒数, 代数式 $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} \div (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的值为 1.

【考点】分式的化简求值.

【分析】先算括号里面的, 再算除法, 根据 a, b 互为倒数得出 $a \cdot b=1$, 代入代数式进行计算即可.

$$\text{【解答】解: 原式} = \frac{(a+b)^2}{a+b} \div \frac{a+b}{ab}$$

$$= (a+b) \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= ab,$$

∵ a, b 互为倒数,

$$\therefore a \cdot b=1,$$

∴ 原式=1.

故答案为: 1.

12. 一个布袋内只装有一个红球和 2 个黄球，这些球除颜色外其余都相同，随机摸出一个球后放回搅匀，再随机摸出一个球，则两次摸出的球都是黄球的概率是 $\frac{4}{9}$ 。

【考点】列表法与树状图法。

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的球都是黄球的情况，再利用概率公式即可求得答案。

【解答】解：画树状图得：



∴ 共有 9 种等可能的结果，两次摸出的球都是黄球的有 4 种情况，

∴ 两次摸出的球都是黄球的概率是 $\frac{4}{9}$ ，

故答案为： $\frac{4}{9}$ 。

13. 端午节那天，“味美早餐店”的粽子打 9 折出售，小红的妈妈去该店买粽子花了 54 元钱，比平时多买了 3 个，求平时每个粽子卖多少元？设平时每个粽子卖 x 元，列方程为 $\frac{54}{x} + 3 = \frac{54 \div 0.9}{x}$ 。

$$\frac{54}{x} + 3 = \frac{54 \div 0.9}{x}$$

【考点】由实际问题抽象出分式方程。

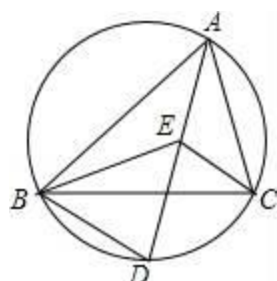
【分析】根据端午节那天，“味美早餐店”的粽子打 9 折出售，小红的妈妈去该店买粽子花了 54 元钱，比平时多买了 3 个，设平时每个粽子卖 x 元，可以列出相应的分式方程。

【解答】解：由题意可得，

$$\frac{54}{x} + 3 = \frac{54 \div 0.9}{x},$$

故答案为： $\frac{54}{x} + 3 = \frac{54 \div 0.9}{x}$ 。

14. 如图，点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心， AE 的延长线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D ，连接 BD 、 BE 、 CE ，若 $\angle CBD = 32^\circ$ ，则 $\angle BEC$ 的度数为 122° 。

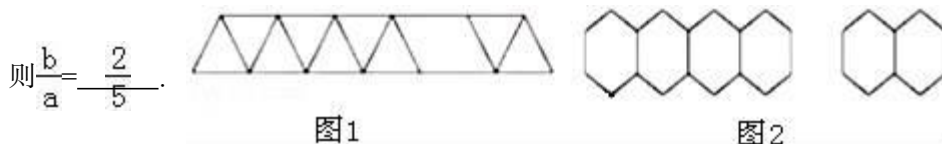


【考点】三角形的内切圆与内心；圆周角定理。

【分析】根据圆周角定理可求 $\angle CAD = 32^\circ$ ，再根据三角形内心的定义可求 $\angle BAC$ ，再根据三角形内角和定理和三角形内心的定义可求 $\angle EBC + \angle ECB$ ，再根据三角形内角和定理可求 $\angle BEC$ 的度数。

【解答】解：在 $\odot O$ 中， $\because \angle CBD=32^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAD=32^\circ$ ，
 $\because$ 点E是 $\triangle ABC$ 的内心，
 $\therefore \angle BAC=64^\circ$ ，
 $\therefore \angle EBC+\angle ECB=\div 2=58^\circ$ ，
 $\therefore \angle BEC=180^\circ-58^\circ=122^\circ$ 。
 故答案为：122°。

15. 用 m 根火柴棒恰好可拼成如图 1 所示的 a 个等边三角形或如图 2 所示的 b 个正六边形，



【考点】规律型：图形的变化类.

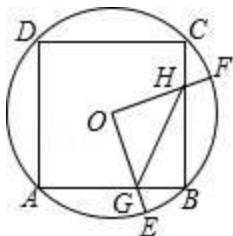
【分析】根据题意和图形可以得到 a 与 m 的关系式和 b 与 m 的关系式，从而可以得到 b 与 a 的比值.

【解答】解：由题意可得，
 $3+(a-1) \times 2=m$ ， $6+(b-1) \times 5=m$ ，
 $\therefore 3+(a-1) \times 2=6+(b-1) \times 5$ ，
 化简，得 $\frac{b}{a} = \frac{2}{5}$ ，
 故答案为： $\frac{2}{5}$ 。

16. 如图，边长为 4 的正方形 ABCD 内接于点 O，点 E 是 $\widehat{AB}$ 上的一动点（不与 A、B 重合），点 F 是 $\widehat{BC}$ 上的一点，连接 OE、OF，分别与 AB、BC 交于点 G，H，且 $\angle EOF=90^\circ$ ，有以下结论：

- ① $\widehat{AE} = \widehat{BF}$ ；
- ② $\triangle OGH$ 是等腰三角形；
- ③ 四边形 OGBH 的面积随着点 E 位置的变化而变化；
- ④ $\triangle GBH$ 周长的最小值为 $4+\sqrt{2}$ 。

其中正确的是 ①②（把你认为正确结论的序号都填上）。



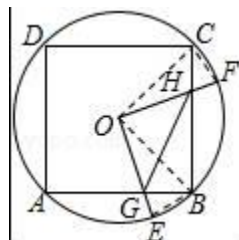
【考点】圆的综合题.

【分析】①根据 ASA 可证 $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ，根据全等三角形的性质得到 $BE=CF$ ，根据等弦对等弧得到 $\widehat{AE} = \widehat{BF}$ ，可以判断①；
 ②根据 SAS 可证 $\triangle BOG \cong \triangle COH$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle GOH=90^\circ$ ， $OG=OH$ ，根据等腰直角三角形的判定得到 $\triangle OGH$ 是等腰直角三角形，可以判断②；

③通过证明 $\triangle HOM \cong \triangle GON$ ，可得四边形 OGBH 的面积始终等于正方形 ONBM 的面积，可以判断③；

④根据 $\triangle BOG \cong \triangle COH$ 可知 $BG=CH$ ，则 $BG+BH=BC=4$ ，设 $BG=x$ ，则 $BH=4-x$ ，根据勾股定理得到 $GH=\sqrt{BG^2+BH^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}$ ，可以求得其最小值，可以判断④。

【解答】解：①如图所示，



$\because \angle BOE + \angle BOF = 90^\circ$, $\angle COF + \angle BOF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOE = \angle COF$,

在 $\triangle BOE$ 与 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} OB=OC \\ \angle BOE=\angle COF, \\ OE=OF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF$,

$\therefore BE=CF$,

$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BF}$ ，①正确；

② $\because BE=CF$,

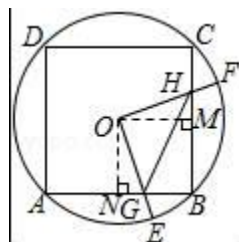
$\therefore \triangle BOG \cong \triangle COH$;

$\because \angle BOG = \angle COH$, $\angle COH + \angle OBF = 90^\circ$,

$\therefore \angle GOH = 90^\circ$, $OG=OH$,

$\therefore \triangle OGH$ 是等腰直角三角形，②正确。

③如图所示，



$\because \triangle HOM \cong \triangle GON$,

$\therefore$ 四边形 OGBH 的面积始终等于正方形 ONBM 的面积，③错误；

④ $\because \triangle BOG \cong \triangle COH$,

$\therefore BG=CH$,

$\therefore BG+BH=BC=4$,

设 $BG=x$ ，则 $BH=4-x$,

则 $GH=\sqrt{BG^2+BH^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}$,

$\therefore$ 其最小值为 $2\sqrt{2}$ ，D 错误。

故答案为：①②。

三、专心解一解（本大题共 8 小题，满分 72 分．请认真读题，冷静思考，解答题应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把解题过程写在答题卷相应题号的位置）解答题

17. (1) 计算： $|-2| - 2016^0 + (\frac{1}{2})^{-2}$

(2) 解不等式组：
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x > 5 - x \\ x + 2 > 2x - 3 \end{cases}$$

【考点】解一元一次不等式组；零指数幂；负整数指数幂．

【分析】(1) 根据绝对值的性质、零指数幂、负整数指数幂的运算法则分别计算可得；

(2) 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集．

【解答】解：(1) 原式 $=2 - 1 + 4 = 5$ ；

(2) 解不等式组
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x > 5 - x & \text{①} \\ x + 2 > 2x - 3 & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x > 3$ ，

解不等式②得： $x < 5$ ，

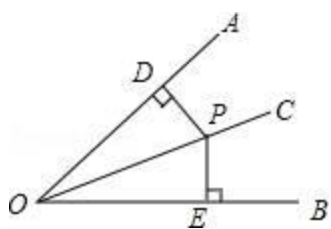
$\therefore$ 该不等式组的解集为： $3 < x < 5$ ．

18. 证明命题“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”，要根据题意，画出图形，并用符号表示已知和求证，写出证明过程，下面是小明同学根据题意画出的图形，并写出了不完整的已知和求证．

已知：如图， $\angle AOC = \angle BOC$ ，点 P 在 OC 上， $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$

求证： $PD = PE$ ．

请你补全已知和求证，并写出证明过程．



【考点】角平分线的性质．

【分析】根据图形写出已知条件和求证，利用全等三角形的判定得出 $\triangle PDO \cong \triangle PEO$ ，由全等三角形的性质可得结论．

【解答】解：已知： $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为 D、E；求证： $PD = PE$ ．

故答案为： $PD = PE$ ．

$\because PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，

$\therefore \angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$ ，

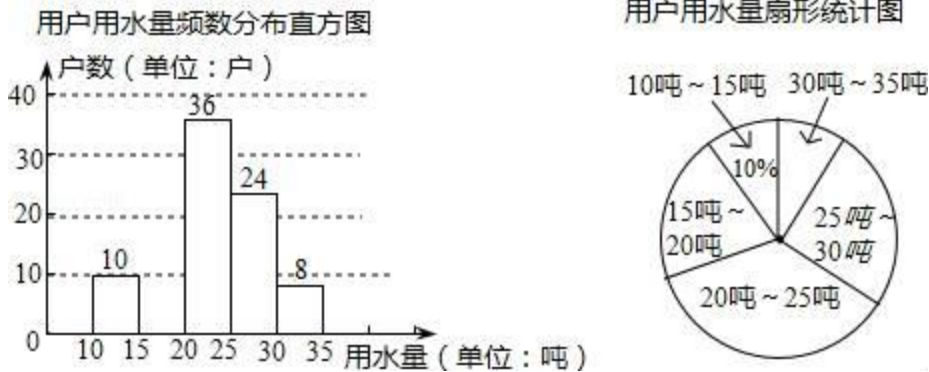
在 $\triangle PDO$ 和 $\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases} \angle PDO = \angle PEO \\ \angle AOC = \angle BOC, \\ OP = OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO$ (AAS)，

∴ PD=PE.

19. 某市为提倡节约用水，准备实行自来水“阶梯计费”方式，用户用水不超出基本用水量的部分享受基本价格，超出基本用水量的部分实行超价收费，为更好地决策，自来水公司的随机抽取了部分用户的用水量数据，并绘制了如图不完整的统计图，（每组数据包括在右端点但不包括左端点），请你根据统计图解答下列问题：



- (1) 此次抽样调查的样本容量是 100 .
- (2) 补全频数分布直方图，求扇形图中“15 吨 ~ 20 吨”部分的圆心角的度数.
- (3) 如果自来水公司将基本用水量定为每户 25 吨，那么该地区 6 万用户中约有多少用户的用水全部享受基本价格？

【考点】 频数（率）分布直方图；总体、个体、样本、样本容量；用样本估计总体；扇形统计图.

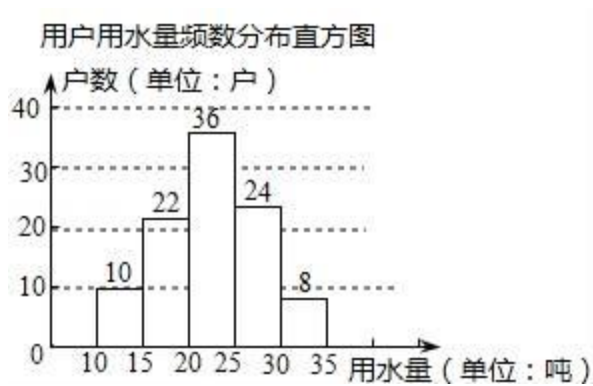
【分析】 (1) 根据 10 ~ 15 吨部分的用户数和百分比进行计算； (2) 先根据频数分布直方图中的数据，求得“15 吨 ~ 20 吨”部分的用户数，再画图，最后根据该部分的用户数计算圆心角的度数； (3) 根据用水 25 吨以内的用户数的占比，求得该地区 6 万用户中用水全部享受基本价格的户数.

【解答】 解： (1) $\because 10 \div 10\% = 100$ (户)

$\therefore$ 样本容量是 100;

(2) 用水 15 ~ 20 吨的户数： $100 - 10 - 36 - 24 - 8 = 22$ (户)

$\therefore$ 补充图如下：



“15 吨 ~ 20 吨”部分的圆心角的度数 $= 360^\circ \times \frac{22}{100} = 79.2^\circ$

答：扇形图中“15 吨 ~ 20 吨”部分的圆心角的度数为 79.2° .

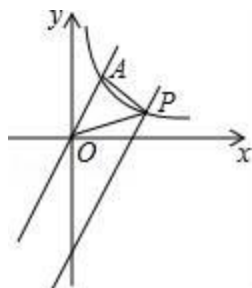
(3) $6 \times \frac{10+22+36}{100} = 4.08$ (万户)

答：该地区 6 万用户中约有 4.08 万户的用水全部享受基本价格.

20. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=2x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 A (m, 2)，将直线 $y=2x$ 向下平移后与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 P，且 $\triangle POA$ 的面积为 2.

(1) 求 k 的值.

(2) 求平移后的直线的函数解析式.



【考点】 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 由点 A 的纵坐标求得 m，即点 A 的坐标，把点 A 的坐标代入反比例函数中即可；

(2) 先求出 PM，再求出 BN 然后用锐角三角函数求出 OB，即可.

【解答】 解：(1) $\because$ 点 A (m, 2) 在直线 $y=2x$,

$$\therefore 2=2m,$$

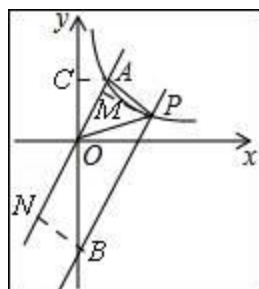
$$\therefore m=1,$$

$$\therefore \text{点 A (1, 2),}$$

$$\because \text{点 A (1, 2) 在反比例函数 } y=\frac{k}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore k=2,$$

(2) 如图,



设平移后的直线与 y 轴相交于 B，过点 P 作 $PM \perp OA$ ， $BN \perp OA$ ， $AC \perp y$ 轴

由 (1) 知，A (1, 2)，

$$\therefore OA=\sqrt{5}, \sin \angle BON=\sin \angle AOC=\frac{AC}{OA}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\because S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}OA \times PM=\frac{1}{2} \times \sqrt{5}PM=2,$$

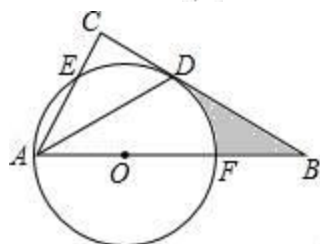
$$\therefore PM=\frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\because PM \perp OA, BN \perp OA,$$

$\therefore PM \parallel BN$,
 $\therefore PB \parallel OA$,
 $\therefore$ 四边形 BPMN 是平行四边形,
 $\therefore BN = PM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,
 $\therefore \sin \angle BON = \frac{BN}{OB} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{5}{OB}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
 $\therefore OB = 4$,
 $\therefore PB \parallel AO$,
 $\therefore B(0, -4)$,
 $\therefore$ 平移后的直线 PB 的函数解析式 $y = 2x - 4$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, OA 为半径的圆恰好经过点 D , 分别交 AC , AB 于点 E , F .

- (1) 试判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;
- (2) 若 $BD = 2\sqrt{3}$, $BF = 2$, 求阴影部分的面积 (结果保留 π).



【考点】 直线与圆的位置关系; 扇形面积的计算.

【分析】 (1) 连接 OD , 证明 $OD \parallel AC$, 即可证得 $\angle ODB = 90^\circ$, 从而证得 BC 是圆的切线;

(2) 在直角三角形 ODB 中, 设 $OF = OD = x$, 利用勾股定理列出关于 x 的方程, 求出方程的解得到 x 的值, 即为圆的半径, 求出圆心角的度数, 直角三角形 ODB 的面积减去扇形 DOF 面积即可确定出阴影部分面积.

【解答】 解: (1) BC 与 $\odot O$ 相切.

证明: 连接 OD .

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

又 $\therefore OD = OA$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA$.

$\therefore \angle CAD = \angle ODA$.

$\therefore OD \parallel AC$.

$\therefore \angle ODB = \angle C = 90^\circ$, 即 $OD \perp BC$.

又 $\therefore BC$ 过半径 OD 的外端点 D ,

$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $OF = OD = x$, 则 $OB = OF + BF = x + 2$,

根据勾股定理得: $OB^2 = OD^2 + BD^2$, 即 $(x + 2)^2 = x^2 + 12$,

解得: $x = 2$, 即 $OD = OF = 2$,

$\therefore OB = 2 + 2 = 4$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ODB$ 中, $OD=\frac{1}{2}OB$,

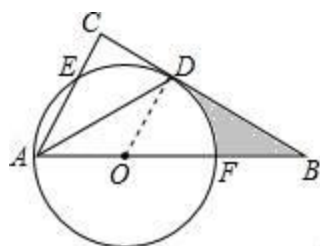
$\therefore \angle B=30^\circ$,

$\therefore \angle DOB=60^\circ$,

$$\therefore S_{\text{扇形} AOB} = \frac{60\pi \times 4}{360} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{则阴影部分的面积为 } S_{\triangle ODB} - S_{\text{扇形} DOF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{故阴影部分的面积为 } 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$



22. 某网店销售某款童装, 每件售价 60 元, 每星期可卖 300 件, 为了促销, 该网店决定降价销售. 市场调查反映: 每降价 1 元, 每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件成本价 40 元, 设该款童装每件售价 x 元, 每星期的销售量为 y 件.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 当每件售价定为多少元时, 每星期的销售利润最大, 最大利润多少元?

(3) 若该网店每星期想要获得不低于 6480 元的利润, 每星期至少要销售该款童装多少件?

【考点】 二次函数的应用.

【分析】 (1) 根据售量 y (件) 与售价 x (元/件) 之间的函数关系即可得到结论.

(2) 设每星期利润为 W 元, 构建二次函数利用二次函数性质解决问题.

(3) 列出不等式先求出售价的范围, 再确定销售数量即可解决问题.

【解答】 解: (1) $y=300+30(60-x)=-30x+2100$.

(2) 设每星期利润为 W 元,

$$W=(x-40)(-30x+2100)=-30(x-55)^2+6750.$$

$\therefore x=55$ 时, W 最大值=6750.

$\therefore$ 每件售价定为 55 元时, 每星期的销售利润最大, 最大利润 6750 元.

(3) 由题意 $(x-40)(-30x+2100) \geq 6480$, 解得 $52 \leq x \leq 58$,

当 $x=52$ 时, 销售 $300+30 \times 8=540$,

当 $x=58$ 时, 销售 $300+30 \times 2=360$,

$\therefore$ 该网店每星期想要获得不低于 6480 元的利润, 每星期至少要销售该款童装 360 件.

23. 阅读理解:

我们知道, 四边形具有不稳定性, 容易变形, 如图 1, 一个矩形发生变形后成为一个平行四

边形, 设这个平行四边形相邻两个内角中较小的一个内角为 α , 我们把 $\frac{1}{\sin \alpha}$ 的值叫做这个平行四边形的变形度.

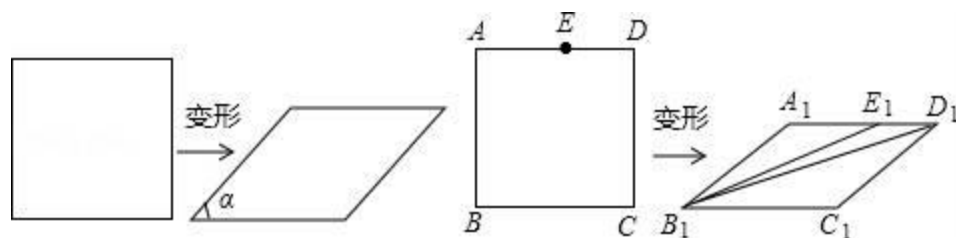
(1) 若矩形发生变形后的平行四边形有一个内角是 120° ，则这个平行四边形的变形度是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

猜想证明：

(2) 设矩形的面积为 S_1 ，其变形后的平行四边形面积为 S_2 ，试猜想 S_1 ， S_2 ， $\frac{1}{\sin \alpha}$ 之间的数量关系，并说明理由；

拓展探究：

(3) 如图 2，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 AD 边上的一点，且 $AB^2 = AE \cdot AD$ ，这个矩形发生变形后为平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ， E_1 为 E 的对应点，连接 B_1E_1 ， B_1D_1 ，若矩形 $ABCD$ 的面积为 $4\sqrt{m}$ ($m > 0$)，平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 $2\sqrt{m}$ ($m > 0$)，试求 $\angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1$ 的度数。



【考点】相似形综合题。

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $\alpha = 60^\circ$ ，根据三角函数的定义即可得到结论；

(2) 如图 1，设矩形的长和宽分别为 a ， b ，变形后的平行四边形的高为 h ，根据平行四边形和矩形的面积公式即可得到结论；

(3) 由已知条件得到 $\triangle B_1A_1E_1 \sim \triangle D_1A_1B_1$ ，由相似三角形的性质得到 $\angle A_1B_1E_1 = \angle A_1D_1B_1$ ，根据平行线的性质得到 $\angle A_1E_1B_1 = \angle C_1B_1E_1$ ，求得 $\angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1 = \angle C_1E_1B_1 + \angle A_1B_1E_1 = \angle A_1B_1C_1$ ，证得 $\angle A_1B_1C_1 = 30^\circ$ ，于是得到结论。

【解答】解：(1) $\because$ 平行四边形有一个内角是 120° ，

$\therefore \alpha = 60^\circ$ ，

$$\therefore \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}；$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ；

$$(2) \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{S_1}{S_2}，$$

理由：如图 1，设矩形的长和宽分别为 a ， b ，变形后的平行四边形的高为 h ， $\therefore S_1 = ab$ ， $S_2 = ah$ ，

$$\sin \alpha = \frac{h}{b}，$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{ab}{ah} = \frac{b}{h}， \therefore \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{b}{h}， \therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sin \alpha}；$$

(3) $\because AB^2 = AE \cdot AD$ ，

$$\therefore A_1B_1^2 = A_1E_1 \cdot A_1D_1, \text{ 即 } \frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{A_1E_1}{A_1B_1},$$

$$\therefore \angle B_1A_1E_1 = \angle D_1A_1B_1,$$

$$\therefore \triangle B_1A_1E_1 \sim \triangle D_1A_1B_1,$$

$$\therefore \angle A_1B_1E_1 = \angle A_1D_1B_1,$$

$$\therefore A_1D_1 \parallel B_1C_1,$$

$$\therefore \angle A_1E_1B_1 = \angle C_1B_1E_1,$$

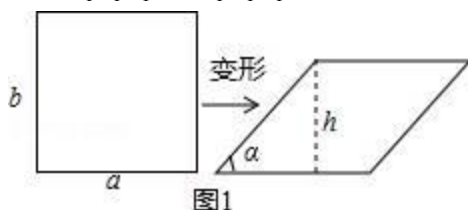
$$\therefore \angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1 = \angle C_1E_1B_1 + \angle A_1B_1E_1 = \angle A_1B_1C_1,$$

$$\text{由 (2) 知 } \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{S_1}{S_2} \text{ 可知 } \frac{1}{\sin \angle A_1B_1C_1} = \frac{4\sqrt{m}}{2\sqrt{m}} = 2,$$

$$\therefore \sin \angle A_1B_1C_1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle A_1B_1C_1 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1E_1B_1 + \angle A_1D_1B_1 = 30^\circ.$$



24. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(0, 1)$, 取一点 $B(b, 0)$, 连接 AB , 做线段 AB 的垂直平分线 l_1 , 过点 B 作 x 轴的垂线 l_2 , 记 l_1, l_2 的交点为 P .

(1) 当 $b=3$ 时, 在图 1 中补全图形 (尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹);

(2) 小慧多次取不同数值 b , 得出相应的点 P , 并把这些点用平滑的曲线连接起来发现: 这些点 P 竟然在一条曲线 L 上!

①设点 P 的坐标为 (x, y) , 试求 y 与 x 之间的关系式, 并指出曲线 L 是哪种曲线;

②设点 P 到 x 轴, y 轴的距离分别是 d_1, d_2 , 求 d_1+d_2 的范围, 当 $d_1+d_2=8$ 时, 求点 P 的坐标;

③将曲线 L 在直线 $y=2$ 下方的部分沿直线 $y=2$ 向上翻折, 得到一条“W”形状的新曲线, 若直线 $y=kx+3$ 与这条“W”形状的新曲线有 4 个交点, 直接写出 k 的取值范围.

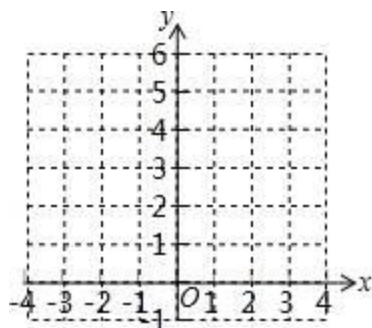


图1

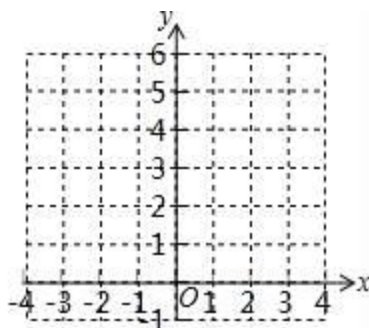


图2

【考点】一次函数综合题.

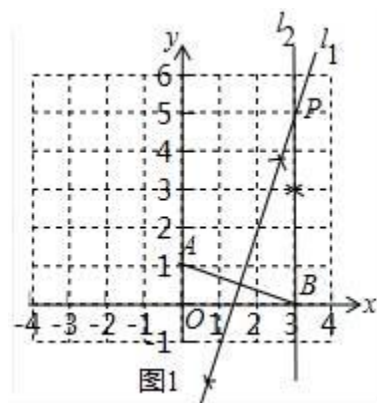
【分析】(1) 利用尺规作出线段 AB 的垂直平分线, 过点 B 作出 x 轴的垂线即可.

(2) ①分 $x > 0$ 或 $x < 0$ 两种情形利用勾股定理求出 x 与 y 的关系即可解决问题.

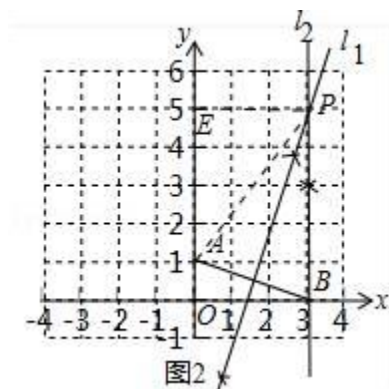
②由题意得 $d_1+d_2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+|x|$ ，列出方程即可解决问题.

③求出直线 $y=2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的两个交点为 $(-\sqrt{3}, 2)$ 和 $(\sqrt{3}, 2)$ ，利用这两个特殊点，求出 k 的值即可解决问题.

【解答】解：（1）线段 AB 的垂直平分线 l_1 ，过点 B 作 x 轴的垂线 l_2 ，直线 l_1 与 l_2 的交点为 P ，如图所示，



（2）①当 $x > 0$ 时，如图 2 中，连接 AP ，作 $PE \perp y$ 轴于 E ，



$\because l_1$ 垂直平分 AB ,

$\therefore PA=PB=y$,

在 $RT\triangle APE$ 中， $\because EP=BO=x$ ， $AE=OE-OA=y-1$ ， $PA=y$ ，

$\therefore y^2=x^2+(y-1)^2$ ，

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ，

当 $x < 0$ 时，点 $P(x, y)$ 同样满足 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 曲线 l 就是二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 即曲线 l 是抛物线.

② $\because d_1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ， $d_2=|x|$ ，

$\therefore d_1+d_2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+|x|$ ，

当 $x=0$ 时， d_1+d_2 有最小值 $\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore d_1 + d_2 \geq \frac{1}{2},$$

$$\because d_1 + d_2 = 8, \text{ 则 } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + |x| = 8,$$

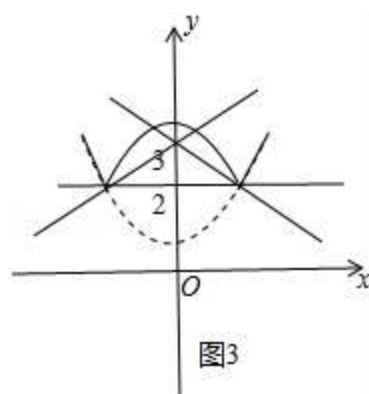
$$\text{当 } x \geq 0 \text{ 时, 原方程化为 } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + x - 8 = 0, \text{ 解得 } x = 3 \text{ 或 } (-5 \text{ 舍弃}),$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, 原方程化为 } \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - x - 8 = 0, \text{ 解得 } x = -3 \text{ 或 } (5 \text{ 舍弃}),$$

$$\because x = \pm 3 \text{ 时, } y = 5,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标 } (3, 5) \text{ 或 } (-3, 5).$$

③如图 3 中,



$$\text{把 } y = 2 \text{ 代入 } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \text{ 解得 } x = \pm\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{直线 } y = 2 \text{ 与抛物线 } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{ 的两个交点为 } (-\sqrt{3}, 2) \text{ 和 } (\sqrt{3}, 2).$$

$$\text{当直线 } y = kx + 3 \text{ 经过点 } (-\sqrt{3}, 2) \text{ 时, } 2 = -\sqrt{3}k + 3$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当直线 } y = kx + 3 \text{ 经过点 } (\sqrt{3}, 2) \text{ 时, } 2 = \sqrt{3}k + 3,$$

$$\therefore k = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } y = kx + 3 \text{ 与这条“W”形状的曲线有四个交点时, } k \text{ 的取值范围是: } -\frac{\sqrt{3}}{3} < k < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2016 年 9 月 20 日