

2015 年湖北省鄂州市中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•鄂州) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

2. (3 分) (2015•鄂州) 某小区居民王先生改进用水设施，在 5 年内帮助他居住小区的居民累计节水 39400 吨，将 39400 用科学记数法表示（结果保留 2 个有效数字）应为 ()

- A. 3.9×10^4 B. 3.94×10^4 C. 39.4×10^3 D. 4.0×10^4

3. (3 分) (2015•鄂州) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ B. $(a^2)^4 = a^6$ C. $(ab)^2 = ab^2$ D. $2a^3 \div a = 2a^2$

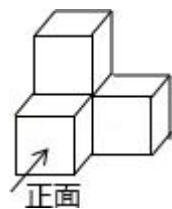
4. (3 分) (2015•鄂州) 为了解某社区居民的用电情况，随机对该社区 10 户居民进行调查，下表是这 10 户居民 2015 年 4 月份用电量的调查结果：

居民 (户)	1	2	3	4
月用电量 (度/户)	30	42	50	51

那么关于这 10 户居民月用电量 (单位: 度), 下列说法错误的是 ()

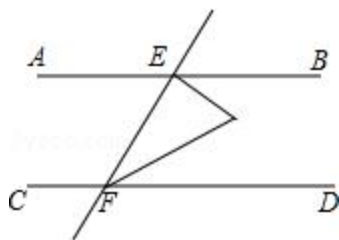
- A. 中位数是 50 B. 众数是 51 C. 方差是 42 D. 极差是 21

5. (3 分) (2015•鄂州) 如图所示的几何体是由一些正方体组合而成的立体图形, 则这个几何体的俯视图是 ()



- A. B. C. D.

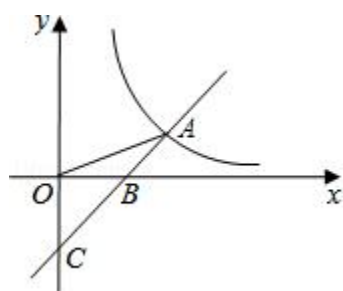
6. (3 分) (2015•鄂州) 如图, $AB \parallel CD$, EF 与 AB 、 CD 分别相交于点 E 、 F , $EP \perp EF$, 与 $\angle EFD$ 的平分线 FP 相交于点 P , 且 $\angle BEP = 50^\circ$, 则 $\angle EPF =$ () 度.



A. 70 B. 65 C. 60 D. 55

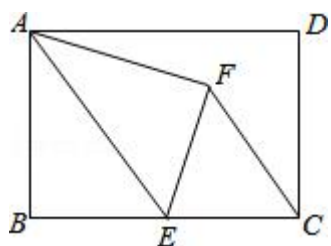
7. (3分) (2015•鄂州) 如图, 直线 $y=x-2$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 B , 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在

第一象限交于点 A , 连接 OA . 若 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = 1 : 2$, 则 k 的值为 ()



A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

8. (3分) (2015•鄂州) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=12$, 点 E 是 BC 的中点, 连接 AE , 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠, 点 B 落在点 F 处, 连接 FC , 则 $\sin \angle ECF =$ ()



A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. (3分) (2015•鄂州) 甲、乙两车从 A 城出发匀速行驶至 B 城. 在整个行驶过程中, 甲、乙两车离开 A 城的距离 y (千米) 与甲车行驶的时间 t (小时) 之间的函数关系如图所示. 则下列结论:

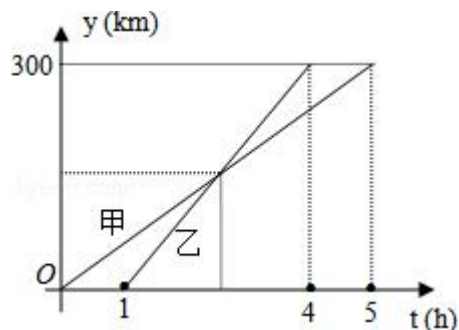
① A , B 两城相距 300 千米;

② 乙车比甲车晚出发 1 小时, 却早到 1 小时;

③乙车出发后 2.5 小时追上甲车；

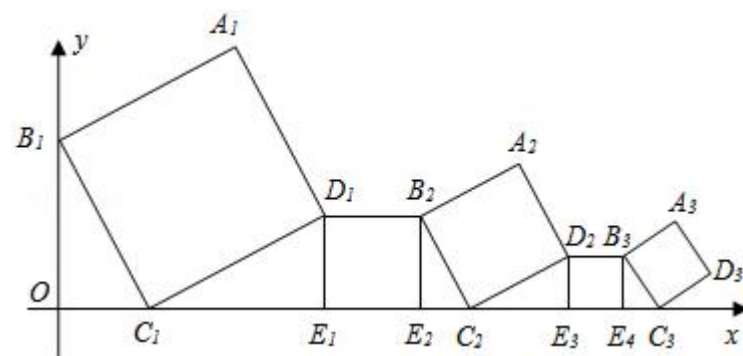
④当甲、乙两车相距 50 千米时， $t = \frac{5}{4}$ 或 $\frac{15}{4}$.

其中正确的结论有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. (3 分) (2015•鄂州) 在平面直角坐标系中，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 、 $D_1E_1E_2B_2$ 、 $A_2B_2C_2D_2$ 、 $D_2E_3E_4B_3$ 、 $A_3B_3C_3D_3$...按如图所示的方式放置，其中点 B_1 在 y 轴上，点 C_1 、 E_1 、 E_2 、 C_2 、 E_3 、 E_4 、 C_3 ...在 x 轴上，已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1， $\angle B_1C_1O = 60^\circ$ ， $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$...则正方形 $A_{2015}B_{2015}C_{2015}D_{2015}$ 的边长是 ()



A. $(\frac{1}{2})^{2014}$ B. $(\frac{1}{2})^{2015}$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2015}$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2014}$

二、填空题 (每小题 3 分，共 18 分)

11. (3 分) (2015•鄂州) 若使二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

12. (3 分) (2015•鄂州) 分解因式: $a^3b - 4ab =$ _____.

13. (3 分) (2015•鄂州) 下列命题中正确的个数有_____个.

①如果单项式 $3a^4b^yc$ 与 $2a^xb^3c^z$ 是同类项, 那么 $x=4$, $y=3$, $z=1$;

②在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 中, y 随 x 的增大而减小;

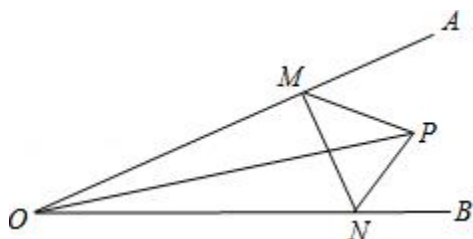
③要了解一批炮弹的杀伤半径, 适合用普查方式;

④从 -3 , -2 , 2 , 3 四个数中任意取两个数分别作为 k , b 的值, 则直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、三象限的概率是 $\frac{1}{6}$.

14. (3 分) (2015•鄂州) 圆锥体的底面周长为 6π , 侧面积为 12π , 则该圆锥体的高为_____.

15. (3 分) (2015•鄂州) 已知点 P 是半径为 1 的 $\odot O$ 外一点, PA 切 $\odot O$ 于点 A , 且 $PA=1$, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB=\sqrt{2}$, 连接 PB , 则 $PB=$ _____.

16. (3 分) (2015•鄂州) 如图, $\angle AOB=30^\circ$, 点 M 、 N 分别是射线 OA 、 OB 上的动点, OP 平分 $\angle AOB$, 且 $OP=6$, 当 $\triangle PMN$ 的周长取最小值时, 四边形 $PMON$ 的面积为_____.



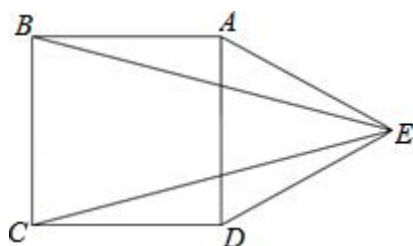
三、解答题 (17-20 每题 8 分, 21-22 每题 9 分, 23 题 10 分, 24 题 12 分, 共 72 分)

17. (8 分) (2015•鄂州) 先化简, 再求值: $(\frac{2}{a+1} + \frac{a+2}{a^2-1}) \div \frac{a}{a-1}$, 其中 $a=\sqrt{2}-1$.

18. (8 分) (2015•鄂州) 如图, 在正方形 $ABCD$ 的外侧, 作等边三角形 ADE , 连接 BE , CE .

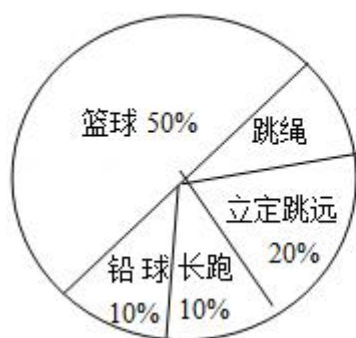
(1) 求证: $BE=CE$.

(2) 求 $\angle BEC$ 的度数.

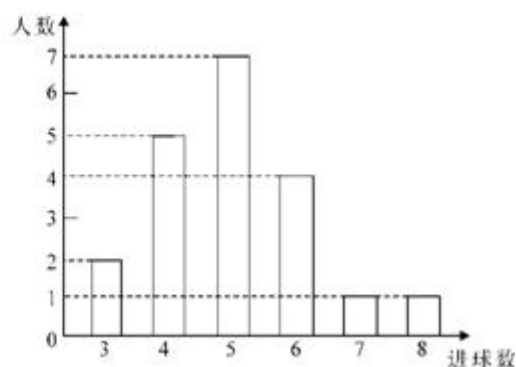


19. (8 分) (2015•鄂州) 八年级 (1) 班学生在完成课题学习“体质健康测试中的数据分析”后, 利用课外活动时间积极参加体育锻炼, 每位同学从篮球、跳绳、立定跳远、长跑、铅球中选一项进行训练, 训练后都进行了测试. 现将项目选择情况及训练后篮球定时定点投篮测试成绩整理后作出如下统计图.

项目选择人数情况统计图



训练后篮球定时定点投篮测试进球数统计图



请你根据上面提供的信息回答下列问题:

(1) 扇形图中跳绳部分的扇形圆心角为_____度, 该班共有学生_____人, 训练后篮球定时定点投篮平均每个人的进球数是_____.

(2) 老师决定从选择铅球训练的 3 名男生和 1 名女生中任选两名学生先进行测试, 请用列表或画树形图的方法求恰好选中两名男生的概率.

20. (8 分) (2015•鄂州) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 .

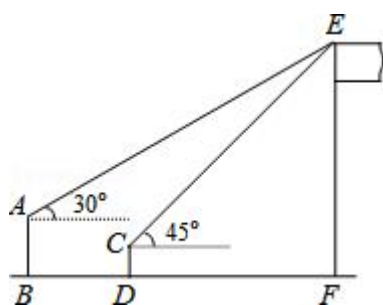
(1) 求实数 k 的取值范围.

(2) 若方程两实根 x_1, x_2 满足 $|x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2$, 求 k 的值.

21. (9 分) (2015•鄂州) 如图, 某数学兴趣小组在活动课上测量学校旗杆的高度. 已知小亮站着测量, 眼睛与地面的距离 (AB) 是 1.7 米, 看旗杆顶部 E 的仰角为 30° ; 小敏蹲着测量, 眼睛与地面的距离 (CD) 是 0.7 米, 看旗杆顶部 E 的仰角为 45° . 两人相距 5 米且位于旗杆同侧 (点 B, D, F 在同一直线上).

(1) 求小敏到旗杆的距离 DF . (结果保留根号)

(2) 求旗杆 EF 的高度. (结果保留整数, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4, \sqrt{3} \approx 1.7$)

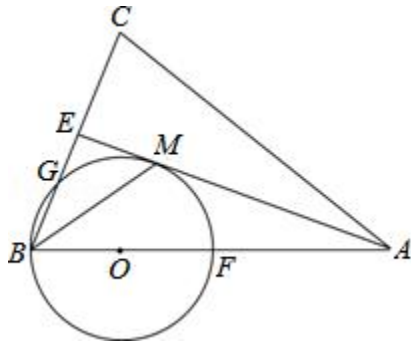


22. (9 分) (2015•鄂州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 AE 于点 M , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, OB 的长为半径的圆经过点 M , 交 BC 于点 G , 交 AB 于点 F .

(1) 求证: AE 为 $\odot O$ 的切线.

(2) 当 $BC=8, AC=12$ 时, 求 $\odot O$ 的半径.

(3) 在 (2) 的条件下, 求线段 BG 的长.



23. (10 分) (2015•鄂州) 鄂州市化工材料经销公司购进一种化工原料若干千克, 价格为每千克 30 元. 物价部门规定其销售单价不高于每千克 60 元, 不低于每千克 30 元. 经市场调查发现: 日销售量 y (千克) 是销售单价 x (元) 的一次函数, 且当 $x=60$ 时, $y=80$; $x=50$ 时, $y=100$. 在销售过程中, 每天还要支付其他费用 450 元.

(1) 求出 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

(2) 求该公司销售该原料日获利 w (元) 与销售单价 x (元) 之间的函数关系式.

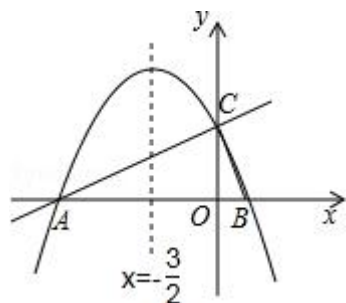
(3) 当销售单价为多少元时, 该公司日获利最大? 最大获利是多少元?

24. (12 分) (2015•鄂州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 C. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{3}{2}$ 且经过 A、C 两点, 与 x 轴的另一交点为点 B.

(1) ①直接写出点 B 的坐标; ②求抛物线解析式.

(2) 若点 P 为直线 AC 上方的抛物线上的一点, 连接 PA, PC. 求 $\triangle PAC$ 的面积的最大值, 并求出此时点 P 的坐标.

(3) 抛物线上是否存在点 M, 过点 M 作 MN 垂直 x 轴于点 N, 使得以点 A、M、N 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2015 年湖北省鄂州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•鄂州) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

考点： 倒数.

分析： 一个数的倒数就是把这个数的分子、分母颠倒位置即可得到.

解答： 解： $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{1} = -3$.

故选 C.

点评： 此题考查倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. (3 分) (2015•鄂州) 某小区居民王先生改进用水设施，在 5 年内帮助他居住小区的居民累计节水 39400 吨，将 39400 用科学记数法表示（结果保留 2 个有效数字）应为 ()

A. 3.9×10^4 B. 3.94×10^4 C. 39.4×10^3 D. 4.0×10^4

考点： 科学记数法与有效数字.

分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，n 为整数. 确定 n 的值是易错点，由于 39400 有 5 位，所以可以确定 $n = 5 - 1 = 4$ ，由于结果保留 2 个有效数字，所以 $a = 3.9$.

解答： 解： $39\,400 \approx 3.9 \times 10^4$.

故选 A.

点评： 此题考查科学记数法表示较大的数的方法，准确确定 a 与 n 值是关键.

3. (3 分) (2015•鄂州) 下列运算正确的是 ()

A. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ B. $(a^2)^4 = a^6$ C. $(ab)^2 = ab^2$ D. $2a^3 \div a = 2a^2$

考点： 整式的除法；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析： 根据同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方、整式的除法，即可解答.

解答： 解：A、 $a^4 \cdot a^2 = a^6$ ，故错误；

B、 $(a^2)^4 = a^8$ ，故错误；

C、 $(ab)^2 = a^2b^2$ ，故错误；

D、正确；

故选：D.

点评： 本题考查了同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方、整式的除法，解决本题的关键是熟记相关法则.

4. (3 分) (2015•鄂州) 为了解某社区居民的用电情况，随机对该社区 10 户居民进行调查，下表是这 10 户居民 2015 年 4 月份用电量的调查结果：

居民 (户) 1 2 3 4

月用电量 (度/户) 30 42 50 51

那么关于这 10 户居民月用电量 (单位：度)，下列说法错误的是 ()

A. 中位数是 50 B. 众数是 51 C. 方差是 42 D. 极差是 21

考点： 方差；中位数；众数；极差.

专题： 计算题.

分析： 根据表格中的数据，求出平均数，中位数，众数，极差与方差，即可做出判断.

解答： 解：10 户居民 2015 年 4 月份用电量为 30，42，42，50，50，50，51，51，51，51，

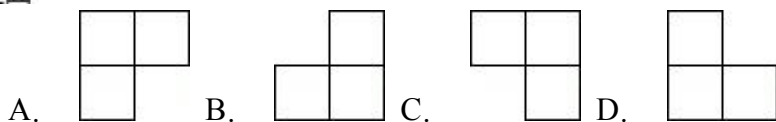
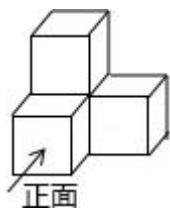
平均数为 $\frac{1}{10} (30+42+42+50+50+50+51+51+51+51) = 46.8$,

中位数为 50；众数为 51，极差为 $51 - 30 = 21$ ，方差为 $\frac{1}{10}[(30 - 46.8)^2 + 2(42 - 46.8)^2 + 3(50 - 46.8)^2 + 4(51 - 46.8)^2] = 42.96$.

故选 C.

点评： 此题考查了方差，中位数，众数，以及极差，熟练掌握各自的求法是解本题的关键.

5. (3 分) (2015•鄂州) 如图所示的几何体是由一些正方体组合而成的立体图形，则这个几何体的俯视图是 ()



考点： 简单组合体的三视图.

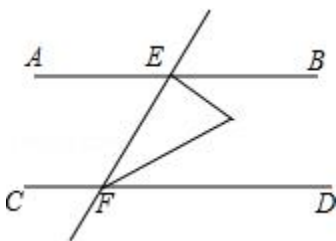
分析： 找到从上面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

解答： 解：从上面看易得左侧有 2 个正方形，右侧有一个正方形.

故选 A.

点评： 本题考查了三视图的知识，俯视图是从物体的上面看得到的视图.

6. (3 分) (2015•鄂州) 如图， $AB \parallel CD$ ，EF 与 AB、CD 分别相交于点 E、F， $EP \perp EF$ ，与 $\angle EFD$ 的平分线 FP 相交于点 P，且 $\angle BEP = 50^\circ$ ，则 $\angle EPF = ()$ 度.

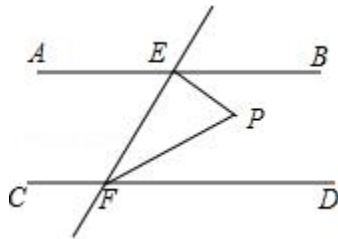


A. 70 B. 65 C. 60 D. 55

考点： 平行线的性质.

分析： 先由垂直的定义，求出 $\angle PEF=90^\circ$ ，然后由 $\angle BEP=50^\circ$ ，进而可求 $\angle BEF=140^\circ$ ，然后根据两直线平行同旁内角互补，求出 $\angle EFD$ 的度数，然后根据角平分线的定义可求 $\angle EFP$ 的度数，然后根据三角形内角和定理即可求出 $\angle EPF$ 的度数.

解答： 解： 如图所示，



$\because EP \perp EF,$

$\therefore \angle PEF=90^\circ,$

$\because \angle BEP=50^\circ,$

$\therefore \angle BEF=\angle BEP+\angle PEF=140^\circ,$

$\because AB \parallel CD,$

$\therefore \angle BEF+\angle EFD=180^\circ,$

$\therefore \angle EFD=40^\circ,$

$\because FP$ 平分 $\angle EFD,$

$\therefore \angle EFP=\frac{1}{2}\angle EFD=20^\circ,$

$\because \angle PEF+\angle EFP+\angle EPF=180^\circ,$

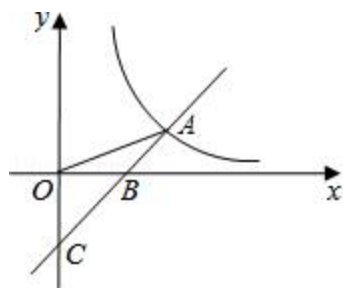
$\therefore \angle EPF=70^\circ.$

故选： A.

点评： 此题考查了平行线的性质，解题的关键是：熟记两直线平行同位角相等；两直线平行内错角相等；两直线平行同旁内角互补.

7. (3分) (2015•鄂州) 如图, 直线 $y=x-2$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 B , 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在

第一象限交于点 A , 连接 OA . 若 $S_{\triangle AOB}: S_{\triangle BOC}=1: 2$, 则 k 的值为 ()



A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: 先由直线 $y=x-2$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 B , 求出 $C(0, -2)$, $B(2, 0)$, 那么 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB \cdot OC=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$, 根据 $S_{\triangle AOB}: S_{\triangle BOC}=1: 2$, 得出 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOC}=1$, 求出 $y_A=1$, 再把 $y=1$ 代入 $y=x-2$, 解得 x 的值, 得到 A 点坐标, 然后将 A 点坐标代入 $y=\frac{k}{x}$, 即可求出 k 的值.

解答: 解: $\because$ 直线 $y=x-2$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 B ,

$\therefore C(0, -2)$, $B(2, 0)$,

$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB \cdot OC=\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$,

$\because S_{\triangle AOB}: S_{\triangle BOC}=1: 2$,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOC}=1$,

$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times y_A=1$,

$\therefore y_A=1$,

把 $y=1$ 代入 $y=x-2$,

得 $1=x-2$, 解得 $x=3$,

$\therefore A(3, 1)$.

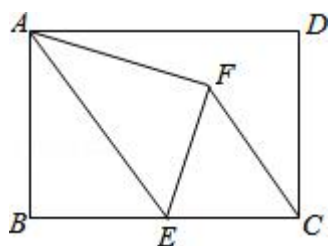
$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象过点 A,

$$\therefore k=3 \times 1=3.$$

故选 B.

点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 反比例函数与一次函数图象上点的坐标特征, 三角形的面积, 待定系数法求反比例函数解析式, 求出 A 点坐标是解题的关键.

8. (3 分) (2015•鄂州) 如图, 在矩形 ABCD 中, AB=8, BC=12, 点 E 是 BC 的中点, 连接 AE, 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠, 点 B 落在点 F 处, 连接 FC, 则 $\sin \angle ECF =$ ()



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

考点: 翻折变换 (折叠问题).

分析: 过 E 作 $EH \perp CF$ 于 H, 由折叠的性质得 $BE=EF$, $\angle BEA=\angle FEA$, 由点 E 是 BC 的中点, 得到 $CE=BE$, 得到 $\triangle EFC$ 是等腰三角形, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle FEH=\angle CEH$, 推出 $\triangle ABE \sim \triangle EHC$, 求得 $EH=\frac{24}{5}$, 结果可求 $\sin \angle$

$$\angle ECF = \frac{EH}{CE} = \frac{4}{5}.$$

解答: 解: 过 E 作 $EH \perp CF$ 于 H,

由折叠的性质得: $BE=EF$, $\angle BEA=\angle FEA$,

$\therefore$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore CE=BE,$$

$$\therefore EF=CE,$$

$$\therefore \angle FEH=\angle CEH,$$

$$\therefore \angle AEB+\angle CEH=90^\circ,$$

在矩形 ABCD 中,

$$\therefore \angle B=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE+\angle BEA=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle CEH, \quad \angle B=\angle EHC,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EHC,$$

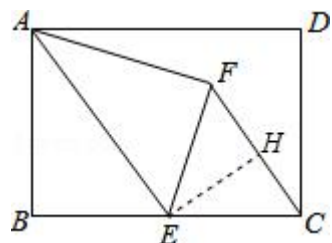
$$\therefore \frac{AB}{EH} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 10,$$

$$\therefore EH = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ECF = \frac{EH}{CE} = \frac{4}{5},$$

故选 D.



点评： 本题考查了折叠问题：折叠前后两图形全等，即对应线段相等；对应角相等．也考查了矩形的性质以及勾股定理．

9. (3 分) (2015•鄂州) 甲、乙两车从 A 城出发匀速行驶至 B 城. 在整个行驶过程中, 甲、乙两车离开 A 城的距离 y (千米) 与甲车行驶的时间 t (小时) 之间的函数关系如图所示. 则下列结论:

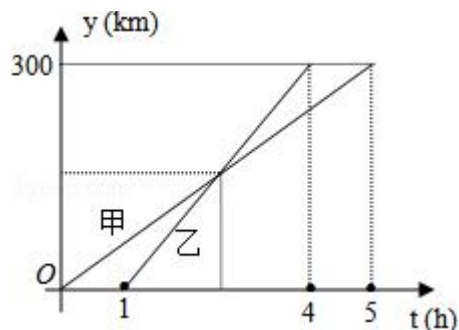
①A, B 两城相距 300 千米;

②乙车比甲车晚出发 1 小时, 却早到 1 小时;

③乙车出发后 2.5 小时追上甲车；

④当甲、乙两车相距 50 千米时， $t=\frac{5}{4}$ 或 $\frac{15}{4}$.

其中正确的结论有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

考点： 一次函数的应用.

分析： 观察图象可判断①②，由图象所给数据可求得甲、乙两车离开 A 城的距离 y 与时间 t 的关系式，可求得两函数图象的交点，可判断③，再令两函数解析式的差为 50，可求得 t，可判断④，可得出答案.

解答： 解：

由图象可知 A、B 两城市之间的距离为 300km，甲行驶的时间为 5 小时，而乙是在甲出发 1 小时后出发的，且用时 3 小时，即比甲早到 1 小时，

∴①②都正确；

设甲车离开 A 城的距离 y 与 t 的关系式为 $y_{\text{甲}}=kt$,

把 (5, 300) 代入可求得 $k=60$,

∴ $y_{\text{甲}}=60t$,

设乙车离开 A 城的距离 y 与 t 的关系式为 $y_{\text{乙}}=mt+n$,

把 (1, 0) 和 (4, 300) 代入可得 $\begin{cases} m+n=0 \\ 4m+n=300 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=100 \\ n=-100 \end{cases}$,

∴ $y_{\text{乙}}=100t-100$,

令 $y_{\text{甲}}=y_{\text{乙}}$ 可得: $60t=100t-100$, 解得 $t=2.5$,

即甲、乙两直线的交点横坐标为 $t=2.5$,

此时乙出发时间为 1.5 小时，即乙车出发 1.5 小时后追上甲车，

∴③不正确；

令 $|y_{\text{甲}} - y_{\text{乙}}| = 50$ ，可得 $|60t - 100t + 100| = 50$ ，即 $|100 - 40t| = 50$ ，

当 $100 - 40t = 50$ 时，可解得 $t = \frac{5}{4}$ ，

当 $100 - 40t = -50$ 时，可解得 $t = \frac{15}{4}$ ，

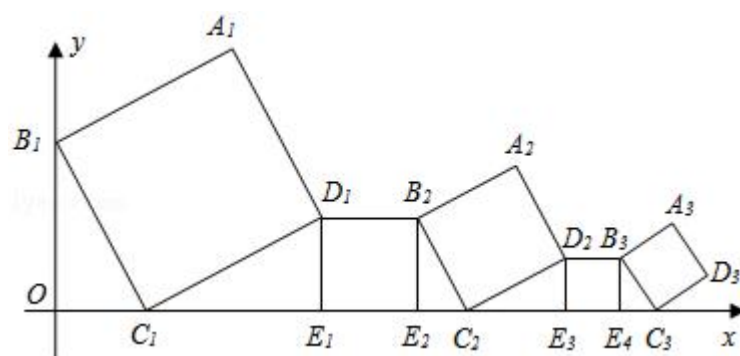
∴④正确；

综上可知正确的有①②④共三个，

故选 C.

点评： 本题主要考查一次函数的应用，掌握一次函数图象的意义是解题的关键，特别注意 t 是甲车所用的时间.

10. (3 分) (2015•鄂州) 在平面直角坐标系中，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 、 $D_1E_1E_2B_2$ 、 $A_2B_2C_2D_2$ 、 $D_2E_3E_4B_3$ 、 $A_3B_3C_3D_3$...按如图所示的方式放置，其中点 B_1 在 y 轴上，点 C_1 、 E_1 、 E_2 、 C_2 、 E_3 、 E_4 、 C_3 ...在 x 轴上，已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1， $\angle B_1C_1O = 60^\circ$ ， $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$...则正方形 $A_{2015}B_{2015}C_{2015}D_{2015}$ 的边长是 ()



A. $(\frac{1}{2})^{2014}$ B. $(\frac{1}{2})^{2015}$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2015}$ D. $(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2014}$

考点： 正方形的性质.

专题： 规律型.

分析： 利用正方形的性质结合锐角三角函数关系得出正方形的边长，进而得出变化规律即可得出答案.

解答： 解：如图所示：∵正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1， $\angle B_1C_1O=60^\circ$ ， $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \dots$

∴ $D_1E_1=B_2E_2$ ， $D_2E_3=B_3E_4$ ， $\angle D_1C_1E_1=\angle C_2B_2E_2=\angle C_3B_3E_4=30^\circ$ ，

∴ $D_1E_1=C_1D_1\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ，则 $B_2C_2=\frac{B_2E_2}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1$ ，

同理可得： $B_3C_3=\frac{1}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ，

故正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的边长是： $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$ 。

则正方形 $A_{2015}B_{2015}C_{2015}D_{2015}$ 的边长是： $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2014}$ 。

故选：D.

点评： 此题主要考查了正方形的性质以及锐角三角函数关系，得出正方形的边长变化规律是解题关键.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. (3 分) (2015•鄂州) 若使二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $x \geq 2$ 。

考点： 二次根式有意义的条件.

专题： 计算题.

分析： 先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可.

解答： 解：∵二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 有意义，

∴ $2x-4 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 2$ 。

故答案为： $x \geq 2$ 。

点评： 本题考查的是二次根式有意义的条件，即被开方数大于等于 0.

12. (3 分) (2015•鄂州) 分解因式: $a^3b - 4ab = \underline{ab(a+2)(a-2)}$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

专题: 计算题.

分析: 原式提取公因式, 再利用平方差公式分解即可.

解答: 解: 原式 $= ab(a^2 - 4) = ab(a+2)(a-2)$,

故答案为: $ab(a+2)(a-2)$

点评: 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

13. (3 分) (2015•鄂州) 下列命题中正确的个数有 2 个.

①如果单项式 $3a^4b^yc$ 与 $2a^xb^3c^z$ 是同类项, 那么 $x=4$, $y=3$, $z=1$;

②在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 中, y 随 x 的增大而减小;

③要了解一批炮弹的杀伤半径, 适合用普查方式;

④从 -3 , -2 , 2 , 3 四个数中任意取两个数分别作为 k , b 的值, 则直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、三象限的概率是 $\frac{1}{6}$.

考点: 命题与定理.

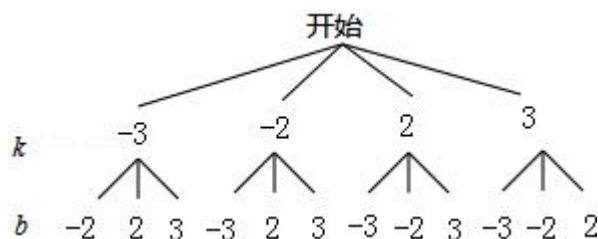
分析: ①根据同类项的定义列方程求解即可; ②依据反比例函数的性质解答即可; ③具有破坏性的调查不适合普查; ④首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限的情况, 再利用概率公式即可求得答案

解答: 解: ①由同类项的定义可知: $x=4$, $y=3$, $z=1$, 故①正确;

② $k=3 > 0$ 函数图象在“每个分支上” y 随 x 的增大而减小, 故②错误;

③具有破坏性的调查不适合普查, 故③错误;

④画树状图得：



共 12 中情况，当 $k > 0$ ， $b > 0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限，故符合条件的有 2 个.

∴一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限的概率是： $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

故填：2.

点评： 本题考查了同类项的定义、反比例函数的性质、概率的计算以及调查方式的选择，需要同学熟练掌握相关知识.

14. (3 分) (2015•鄂州) 圆锥体的底面周长为 6π ，侧面积为 12π ，则该圆锥体的高为 $\sqrt{7}$.

考点： 圆锥的计算.

分析： 让周长除以 2π 即为圆锥的底面半径；根据圆锥的侧面积 $=\frac{1}{2} \times$ 侧面展开图的弧长 $\times$ 母线长可得圆锥的母线长，利用勾股定理可得圆锥的高.

解答： 解：∵圆锥的底面周长为 6π ,

∴圆锥的底面半径为 $6\pi \div 2\pi = 3$,

∴圆锥的侧面积 $=\frac{1}{2} \times$ 侧面展开图的弧长 $\times$ 母线长,

∴母线长 $= 2 \times 12\pi \div (6\pi) = 4$,

∴这个圆锥的高是 $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,

故答案为： $\sqrt{7}$.

点评： 考查圆锥的计算，用到的知识点为：圆锥的底面周长等于侧面展开图的弧长；圆锥的侧面积 $=\frac{1}{2} \times$ 侧面展开图的弧长 $\times$ 母线长.

15. (3分) (2015•鄂州) 已知点P是半径为1的 $\odot O$ 外一点, PA切 $\odot O$ 于点A, 且PA=1, AB是 $\odot O$ 的弦, $AB=\sqrt{2}$, 连接PB, 则PB= 1或 $\sqrt{5}$.

考点: 切线的性质.

专题: 分类讨论.

分析: 本题应分两种情况进行讨论:

(1) 如图1, 可以根据已知条件证明 $\triangle POA \cong \triangle POB$, 然后即可求出PB;

(2) 如图2, 此时可以根据已知条件证明PABO是平行四边形, 然后利用平行四边形的性质和勾股定理即可求出PB.

解答: 解: 连接OA,

(1) 如图1, 连接OA,

$\because PA=AO=1$, $OA=OB$, PA是 $\odot$ 的切线,

$\therefore \angle AOP=45^\circ$. $\because OA=OB$,

$\therefore \angle BOP=\angle AOP=45^\circ$,

在 $\triangle POA$ 与 $\triangle POB$ 中,
$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle AOP=\angle BOP, \\ OP=OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle POA \cong \triangle POB$,

$\therefore PB=PA=1$;

(2) 如图2, 连接OA, 与PB交于C,

$\because$ PA是 $\odot O$ 的切线,

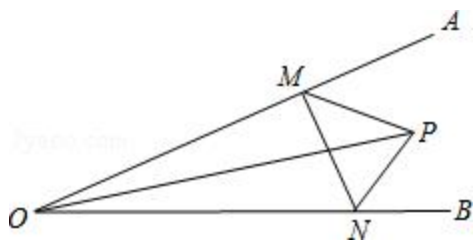
$\therefore OA \perp PA$,

而 $PA=AO=1$

$\therefore OP=\sqrt{2}$;

$\because AB=\sqrt{2}$,

16. (3 分) (2015•鄂州) 如图, $\angle AOB=30^\circ$, 点 M、N 分别是射线 OA、OB 上的动点, OP 平分 $\angle AOB$, 且 $OP=6$, 当 $\triangle PMN$ 的周长取最小值时, 四边形 PMON 的面积为 $36\sqrt{3}-54$.



考点：轴对称-最短路线问题.

分析：设点 P 关于 OA 的对称点为 C，关于 OB 的对称点为 D，当点 M、N 在 CD 上时， $\triangle PMN$ 的周长最小，此时 $\triangle COD$ 是等边三角形，求得三角形 PMN 和 $\triangle COD$ 的面积，根据四边形 PMON 的面积为： $\frac{1}{2} (S_{\triangle COD} + S_{\triangle PMN})$ 求得即可.

解答：解：分别作点 P 关于 OA、OB 的对称点 C、D，连接 CD，分别交 OA、OB 于点 M、N，连接 OP、OC、OD、PM、PN.

$\because$ 点 P 关于 OA 的对称点为 C，关于 OB 的对称点为 D，

$\therefore PM = CM, OP = OC, \angle COA = \angle POA;$

$\because$ 点 P 关于 OB 的对称点为 D，

$\therefore PN = DN, OP = OD, \angle DOB = \angle POB,$

$\therefore OC = OD = OP = 6, \angle COD = \angle COA + \angle POA + \angle POB + \angle DOB = 2\angle POA + 2\angle POB = 2\angle AOB = 60^\circ,$

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形，

$\therefore CD = OC = OD = 6.$

$\because \angle POC = \angle POD,$

$\therefore OP \perp CD,$

$\therefore OQ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$

$\therefore PQ = 6 - 3\sqrt{3},$

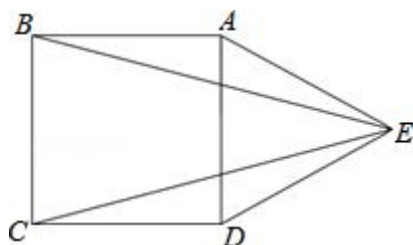
设 $MQ = x$ ，则 $PM = CM = 3 - x$ ，

$\therefore (3 - x)^2 - x^2 = (6 - 3\sqrt{3})^2$ ，解得 $x = 6\sqrt{3} - 9$ ，

18. (8分) (2015•鄂州) 如图, 在正方形 ABCD 的外侧, 作等边三角形 ADE, 连接 BE, CE.

(1) 求证: $BE=CE$.

(2) 求 $\angle BEC$ 的度数.



考点: 正方形的性质; 全等三角形的判定与性质.

分析: (1) 根据正方形的性质, 可得 $AB=AD=CD$, $\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$, 根据正三角形的性质, 可得 $AE=AD=DE$, $\angle EAD=\angle EDA=60^\circ$, 根据全等三角形的判定与性质, 可得答案;

(2) 根据等腰三角形的性质, $\angle ABE=\angle AEB$, 根据三角形的内角和定理, 可得 $\angle AEB$, 根据角的和差, 可得答案.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 为正方形

$$\therefore AB=AD=CD, \angle BAD=\angle ADC=90^\circ$$

$\because$ 三角形 ADE 为正三角形

$$\therefore AE=AD=DE, \angle EAD=\angle EDA=60^\circ$$

$$\therefore \angle BAE=\angle CDE=150^\circ$$

$$\text{在 } \triangle BAE \text{ 和 } \triangle CDE \text{ 中 } \begin{cases} AB=CD \\ \angle BAE=\angle CDE, \\ AE=DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CDE$$

$$\therefore BE=CE;$$

(2) $\because AB=AD, AD=AE,$

$$\therefore AB=AE,$$

$$\therefore \angle ABE=\angle AEB,$$

$$\text{又} \because \angle BAE=150^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE=\angle AEB=15^\circ,$$

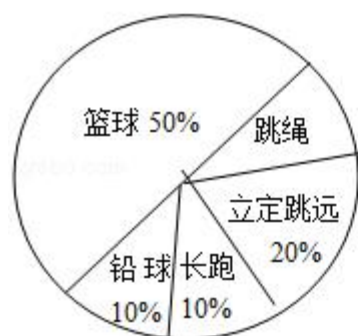
$$\text{同理: } \angle CED=15^\circ$$

$$\therefore \angle BEC=60^\circ - 15^\circ \times 2=30^\circ.$$

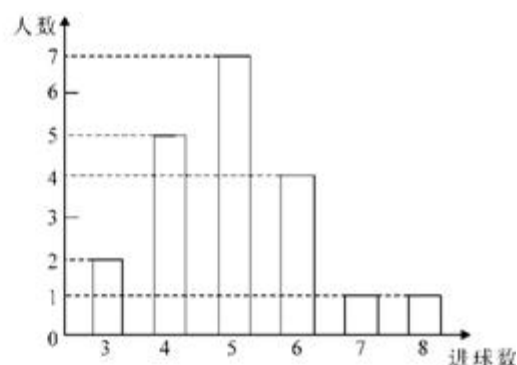
点评： 本题考查了正方形的性质，(1) 利用了正方形的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质；(2) 利用了等腰三角形的判定与性质，角的和差.

19. (8 分) (2015•鄂州) 八年级 (1) 班学生在完成课题学习“体质健康测试中的数据分析”后，利用课外活动时间积极参加体育锻炼，每位同学从篮球、跳绳、立定跳远、长跑、铅球中选一项进行训练，训练后都进行了测试. 现将项目选择情况及训练后篮球定时定点投篮测试成绩整理后作出如下统计图.

项目选择人数情况统计图



训练后篮球定时定点投篮测试进球数统计图



请你根据上面提供的信息回答下列问题:

(1) 扇形图中跳绳部分的扇形圆心角为 36 度，该班共有学生 40 人，训练后篮球定时定点投篮平均每个人的进球数是 5 .

(2) 老师决定从选择铅球训练的 3 名男生和 1 名女生中任选两名学生先进行测试，请用列表或画树形图的方法求恰好选中两名男生的概率.

考点： 列表法与树状图法；扇形统计图；条形统计图.

分析：（1）跳绳部分的圆心角的度数用周角乘以跳绳部分所占的百分比即可；
总人数用用篮球的总人数除以其所占的百分比即可求得总人数；

（2）列树状图将所有等可能的结果列举出来后利用概率公式求解即可．

解答：解：（1）扇形图中跳绳部分的扇形圆心角为 $360^\circ \times (1 - 50\% - 20\% - 10\% - 10\%) = 36$ 度；

该班共有学生 $(2+5+7+4+1+1) \div 50\% = 40$ 人；

训练后篮球定时定点投篮平均每个人的进球数是 $\frac{3 \times 2 + 4 \times 5 + 5 \times 7 + 6 \times 4 + 7 \times 8}{20} = 5$ ，

故答案为：36，40，5．

（2）三名男生分别用 A_1 ， A_2 ， A_3 表示，一名女生用 B 表示．根据题意，可画树形图如下：

第一名



第二名



由上图可知，共有 12 种等可能的结果，选中两名学生恰好是两名男生（记为事件 M ）的结果有 6 种，

$$\therefore P(M) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

点评：此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验；注意概率=所求情况数与总情况数之比

20. (8 分) (2015•鄂州) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不等实根 x_1 ， x_2 ．

（1）求实数 k 的取值范围．

（2）若方程两实根 x_1 ， x_2 满足 $|x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2$ ，求 k 的值．

考点：根的判别式；根与系数的关系．

分析： (1) 根据方程有两个不相等的实数根可得 $\Delta = (2k+1)^2 - 4(k^2+1) = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 4 = 4k - 3 > 0$ ，求出 k 的取值范围；

(2) 首先判断出两根均小于 0，然后去掉绝对值，进而得到 $2k+1=k^2+1$ ，结合 k 的取值范围解方程即可。

解答： 解：(1) $\because$ 原方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (2k+1)^2 - 4(k^2+1) = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 4 = 4k - 3 > 0,$$

$$\text{解得：} k > \frac{3}{4};$$

$$(2) \because k > \frac{3}{4},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -(2k+1) < 0,$$

$$\text{又} \because x_1 \cdot x_2 = k^2 + 1 > 0,$$

$$\therefore x_1 < 0, x_2 < 0,$$

$$\therefore |x_1| + |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = 2k+1,$$

$$\because |x_1| + |x_2| = x_1 \cdot x_2,$$

$$\therefore 2k+1 = k^2+1,$$

$$\therefore k_1 = 0, k_2 = 2,$$

$$\text{又} \because k > \frac{3}{4},$$

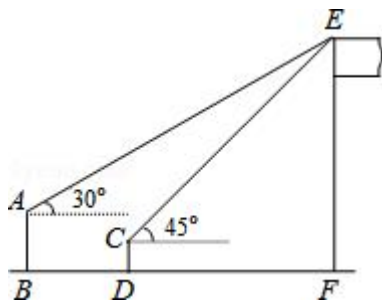
$$\therefore k = 2.$$

点评： 本题主要考查了根的判别式以及根与系数关系的知识，解答本题的关键是利用根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 求出 k 的取值范围，此题难度不大。

21. (9 分) (2015•鄂州) 如图，某数学兴趣小组在活动课上测量学校旗杆的高度. 已知小亮站着测量，眼睛与地面的距离 (AB) 是 1.7 米，看旗杆顶部 E 的仰角为 30° ；小敏蹲着测量，眼睛与地面的距离 (CD) 是 0.7 米，看旗杆顶部 E 的仰角为 45° . 两人相距 5 米且位于旗杆同侧 (点 B、D、F 在同一直线上).

(1) 求小敏到旗杆的距离 DF. (结果保留根号)

(2) 求旗杆 EF 的高度. (结果保留整数, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: (1) 过点 A 作 $AM \perp EF$ 于点 M, 过点 C 作 $CN \perp EF$ 于点 N. 设 $CN=x$, 分别表示出 EM、AM 的长度, 然后在 $Rt\triangle AEM$ 中, 根据 $\tan \angle EAM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 代入求解即可;

(2) 根据 (1) 求得的结果, 可得 $EF=DF+CD$, 代入求解.

解答: 解: (1) 过点 A 作 $AM \perp EF$ 于点 M, 过点 C 作 $CN \perp EF$ 于点 N, 设 $CN=x$,

在 $Rt\triangle ECN$ 中,

$$\because \angle ECN = 45^\circ,$$

$$\therefore EN = CN = x,$$

$$\therefore EM = x + 0.7 - 1.7 = x - 1,$$

$$\because BD = 5,$$

$$\therefore AM = BF = 5 + x,$$

在 $Rt\triangle AEM$ 中,

$$\because \angle EAM = 30^\circ$$

$$\therefore \frac{EM}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} (x + 5),$$

$$\text{解得: } x = 4 + 3\sqrt{3},$$

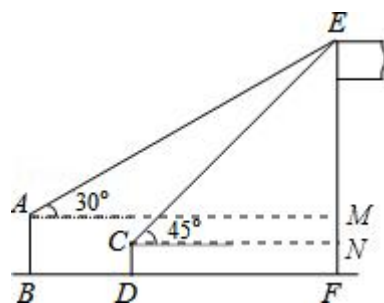
即 $DF = (4 + 3\sqrt{3})$ (米);

(2) 由 (1) 得:

$$EF = x + 0.7 = 4 + 3\sqrt{3} + 0.7$$

$$= 4 + 3 \times 1.7 + 0.7$$

$$= 9.8 \approx 10 \text{ (米)}.$$



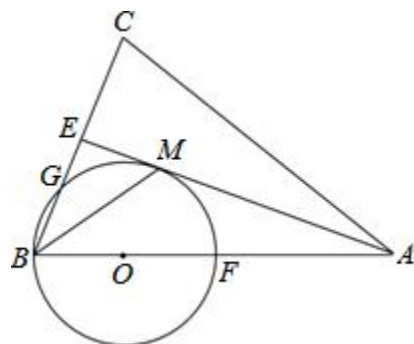
点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是根据仰角构造直角三角形, 利用三角函数的知识求解.

22. (9 分) (2015•鄂州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\angle ABC$ 的平分线 BM 交 AE 于点 M , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, OB 的长为半径的圆经过点 M , 交 BC 于点 G , 交 AB 于点 F .

(1) 求证: AE 为 $\odot O$ 的切线.

(2) 当 $BC = 8$, $AC = 12$ 时, 求 $\odot O$ 的半径.

(3) 在 (2) 的条件下, 求线段 BG 的长.



考点: 圆的综合题.

分析: (1) 连接 OM. 利用角平分线的性质和平行线的性质得到 $AE \perp OM$ 后即可证得 AE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 R, 根据 $OM \parallel BE$, 得到 $\triangle OMA \sim \triangle BEA$, 利用平行线的性质得到 $\frac{R}{4} = \frac{12-R}{12}$, 即可解得 $R=3$, 从而求得 $\odot O$ 的半径为 3;

(3) 过点 O 作 $OH \perp BG$ 于点 H, 则 $BG=2BH$, 根据 $\angle OME = \angle MEH = \angle EHO = 90^\circ$, 得到四边形 OMEH 是矩形, 从而得到 $HE=OM=3$ 和 $BH=1$, 证得结论 $BG=2BH=2$.

解答: (1) 证明: 连接 OM.

$\because AC=AB$, AE 平分 $\angle BAC$,

$\therefore AE \perp BC$, $CE=BE=\frac{1}{2}BC=4$,

$\because OB=OM$,

$\therefore \angle OBM = \angle OMB$,

$\because BM$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle OBM = \angle CBM$,

$\therefore \angle OMB = \angle CBM$,

$\therefore OM \parallel BC$

又 $\because AE \perp BC$,

$\therefore AE \perp OM$,

$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 R,

$\because OM \parallel BE$,

$\therefore \triangle OMA \sim \triangle BEA$,

$\therefore \frac{OM}{BE} = \frac{AO}{AB}$ 即 $\frac{R}{4} = \frac{12-R}{12}$,

解得 $R=3$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 3;

(3) 过点 O 作 $OH \perp BG$ 于点 H , 则 $BG=2BH$,

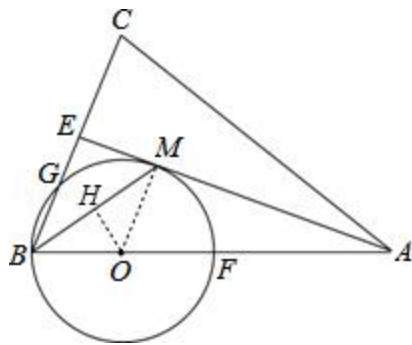
$\because \angle OME = \angle MEH = \angle EHO = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OMEH$ 是矩形,

$\therefore HE = OM = 3$,

$\therefore BH = 1$,

$\therefore BG = 2BH = 2$.



点评: 本题考查了圆的综合知识, 题目中还运用到了切线的判定与性质、相似三角形的判定与性质, 综合性较强, 难度较大.

23. (10 分) (2015•鄂州) 鄂州市化工材料经销公司购进一种化工原料若干千克, 价格为每千克 30 元. 物价部门规定其销售单价不高于每千克 60 元, 不低于每千克 30 元. 经市场调查发现: 日销售量 y (千克) 是销售单价 x (元) 的一次函数, 且当 $x=60$ 时, $y=80$; $x=50$ 时, $y=100$. 在销售过程中, 每天还要支付其他费用 450 元.

(1) 求出 y 与 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围.

(2) 求该公司销售该原料日获利 w (元) 与销售单价 x (元) 之间的函数关系式.

(3) 当销售单价为多少元时, 该公司日获利最大? 最大获利是多少元?

考点： 二次函数的应用.

专题： 应用题.

分析： （1）根据 y 与 x 成一次函数解析式，设为 $y=kx+b$ ，把 x 与 y 的两对值代入求出 k 与 b 的值，即可确定出 y 与 x 的解析式，并求出 x 的范围即可；

（2）根据利润=单价 $\times$ 销售量列出 W 关于 x 的二次函数解析式即可；

（3）利用二次函数的性质求出 W 的最大值，以及此时 x 的值即可.

解答： 解：（1）设 $y=kx+b$ ，根据题意得 $\begin{cases} 80=60k+b \\ 100=50k+b \end{cases}$ ，

解得： $x=-\frac{3}{2}$ ，

$\therefore y=-2x+200$ ($30 \leq x \leq 60$)；

（2） $W=(x-30)(-2x+200)-450=-2x^2+260x-6450=-2(x-65)^2+2000$ ；

（3） $W=-2(x-65)^2+2000$ ，

$\therefore 30 \leq x \leq 60$ ，

$\therefore x=60$ 时， w 有最大值为 1950 元，

$\therefore$ 当销售单价为 60 元时，该公司日获利最大，为 1950 元.

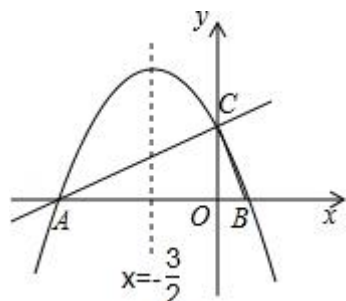
点评： 此题考查了二次函数的应用，待定系数法求一次函数解析式，以及二次函数的性质，熟练掌握二次函数性质是解本题的关键.

24. (12 分) (2015•鄂州) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 C . 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{3}{2}$ 且经过 A 、 C 两点，与 x 轴的另一交点为点 B .

(1) ①直接写出点 B 的坐标；②求抛物线解析式.

(2) 若点 P 为直线 AC 上方的抛物线上的一点，连接 PA ， PC . 求 $\triangle PAC$ 的面积的最大值，并求出此时点 P 的坐标.

(3) 抛物线上是否存在点 M, 过点 M 作 MN 垂直 x 轴于点 N, 使得以点 A、M、N 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) ①先求的直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴交点的坐标, 然后利用抛物线的对称性可求得点 B 的坐标; ②设抛物线的解析式为 $y = a(x+4)(x-1)$, 然后将点 C 的坐标代入即可求得 a 的值;

(2) 设点 P、Q 的横坐标为 m, 分别求得点 P、Q 的纵坐标, 从而可得到线段 $PQ = -\frac{1}{2}m^2 - 2m$, 然后利用三角形的面积公式可求得 $S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times PQ \times 4$, 然后利用配方法可求得 $\triangle PAC$ 的面积的最大值以及此时 m 的值, 从而可求得点 P 的坐标;

(3) 首先可证明 $\triangle ABC \sim \triangle ACO \sim \triangle CBO$, 然后分以下几种情况分类讨论即可:

①当 M 点与 C 点重合, 即 M (0, 2) 时, $\triangle MAN \sim \triangle BAC$; ②根据抛物线的对称性, 当 M (-3, 2) 时, $\triangle MAN \sim \triangle ABC$; ④当点 M 在第四象限时, 解题时, 需要注意相似三角形的对应关系.

解答: 解: (1) ① $y = \frac{1}{2}x + 2$ 当 $x=0$ 时, $y=2$, 当 $y=0$ 时, $x=-4$,

$\therefore C(0, 2), A(-4, 0)$,

由抛物线的对称性可知: 点 A 与点 B 关于 $x = -\frac{3}{2}$ 对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (1, 0).

② $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 A (-4, 0), B (1, 0),

∴可设抛物线解析式为 $y=a(x+4)(x-1)$,

又∵抛物线过点 $C(0, 2)$,

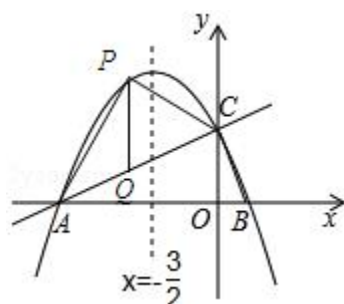
$$\therefore 2 = -4a$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2.$$

$$(2) \text{ 设 } P(m, -\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 2).$$

过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴交 AC 于点 Q ,



$$\therefore Q(m, \frac{1}{2}m + 2),$$

$$\therefore PQ = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m + 2 - (\frac{1}{2}m + 2)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 - 2m,$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times PQ \times 4,$$

$$= 2PQ = -m^2 - 4m = -(m+2)^2 + 4,$$

∴当 $m = -2$ 时, $\triangle PAC$ 的面积有最大值是 4,

此时 $P(-2, 3)$.

(3) 在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\tan\angle CAO = \frac{1}{2}$ 在 $Rt\triangle BOC$ 中, $\tan\angle BCO = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle CAO = \angle BCO,$$

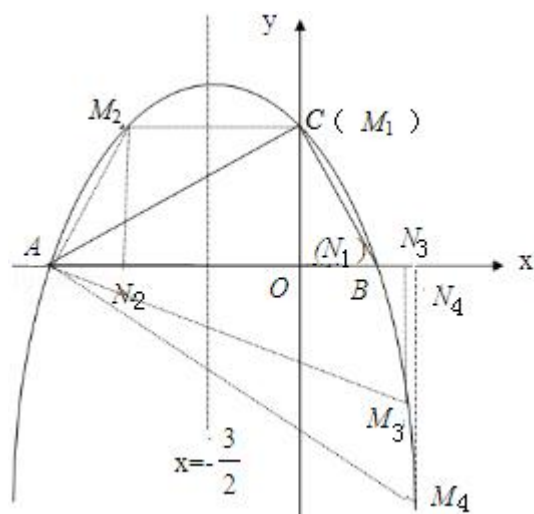
$$\therefore \angle BCO + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAO + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACO \sim \triangle CBO,$$

如下图:



①当M点与C点重合，即M(0, 2)时， $\triangle MAN \sim \triangle BAC$;

②根据抛物线的对称性，当M(-3, 2)时， $\triangle MAN \sim \triangle ABC$;

③当点M在第四象限时，设M(n, $-\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2$)，则N(n, 0)

$$\therefore MN = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2, \quad AN = n + 4$$

$$\text{当 } \frac{MN}{AN} = \frac{1}{2} \text{ 时, } MN = \frac{1}{2}AN, \text{ 即 } \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2 = \frac{1}{2}(n + 4)$$

$$\text{整理得: } n^2 + 2n - 8 = 0$$

$$\text{解得: } n_1 = -4 \text{ (舍), } n_2 = 2$$

$$\therefore M(2, -3);$$

$$\text{当 } \frac{MN}{AN} = 2 \text{ 时, } MN = 2AN, \text{ 即 } \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2 = 2(n + 4),$$

$$\text{整理得: } n^2 - n - 20 = 0$$

$$\text{解得: } n_1 = -4 \text{ (舍), } n_2 = 5,$$

$$\therefore M(5, -18).$$

综上所述：存在M₁(0, 2)，M₂(-3, 2)，M₃(2, -3)，M₄(5, -18)，使得以点A、M、N为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

点评： 本题主要考查的是二次函数与相似三角形的综合应用，难度较大，解答本题需要同学们熟练掌握二次函数和相似三角形的相关性质.

