

2015 年湖北省襄阳市中考数学试卷

一、选择题，共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分

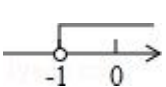
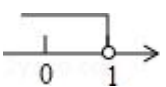
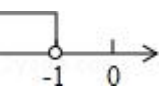
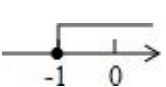
1. (3 分) (2015•襄阳) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

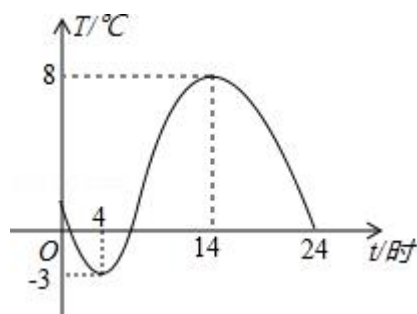
2. (3 分) (2015•湖北) 中国人口众多，地大物博，仅领水面积就约为 $370\,000\text{km}^2$ ，将“370 000”这个数用科学记数法表示为 ()

- A. 3.7×10^6 B. 3.7×10^5 C. 37×10^4 D. 3.7×10^4

3. (3 分) (2015•襄阳) 在数轴上表示不等式 $2(1-x) < 4$ 的解集，正确的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

4. (3 分) (2015•襄阳) 如图，是一台自动测温记录仪的图象，它反映了我市冬季某天气温 T 随时间 t 变化而变化的关系，观察图象得到下列信息，其中错误的是 ()

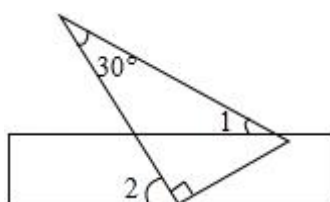


- A. 凌晨 4 时气温最低为 -3°C
 B. 14 时气温最高为 8°C
 C. 从 0 时至 14 时，气温随时间增长而上升
 D. 从 14 时至 24 时，气温随时间增长而下降

5. (3 分) (2015•襄阳) 下列运算中正确的是 ()

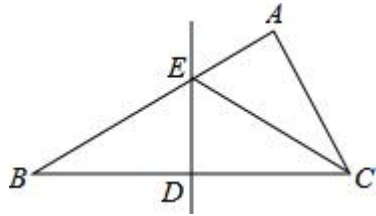
- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ C. $a^6 \div a^2 = a^3$ D. $(-a^2)^3 = -a^6$

6. (3 分) (2015•襄阳) 如图，将一块含有 30° 角的直角三角板的两个顶点放在矩形直尺的一组对边上. 如果 $\angle 2 = 60^\circ$ ，那么 $\angle 1$ 的度数为 ()



A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

7. (3分) (2015•湖北) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=30^\circ$, BC 的垂直平分线交 AB 于点 E , 垂足为 D , CE 平分 $\angle ACB$. 若 $BE=2$, 则 AE 的长为 ()



A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

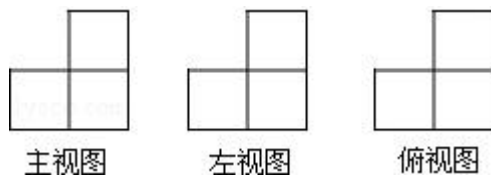
8. (3分) (2015•襄阳) 下列说法中正确的是 ()

- A. “任意画出一个等边三角形, 它是轴对称图形”是随机事件
- B. “任意画出一个平行四边形, 它是中心对称图形”是必然事件
- C. “概率为 0.0001 的事件”是不可能事件
- D. 任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次, 正面向上的一定是 5 次

9. (3分) (2015•襄阳) 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\angle BOC=80^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ()

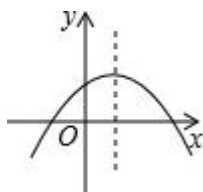
A. 40° B. 100° C. 40° 或 140° D. 40° 或 100°

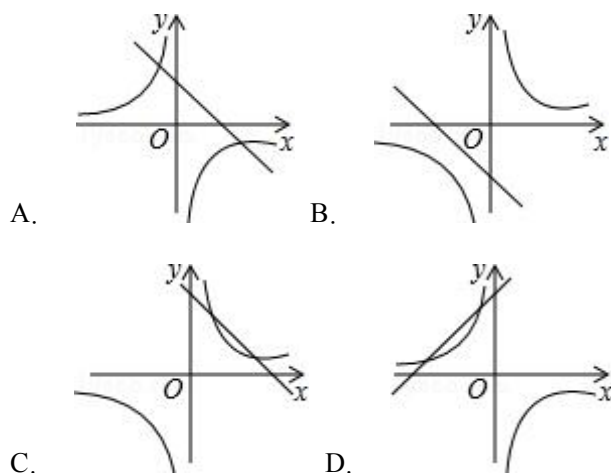
10. (3分) (2015•襄阳) 由若干个小正方体组合而成的一个几何体的三视图如图所示, 则组成这个几何体的小正方体的个数是 ()



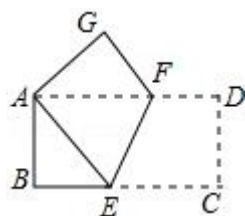
A. 4 B. 5 C. 6 D. 9

11. (3分) (2015•襄阳) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象在平面直角坐标系中的位置如图所示, 则一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()





12. (3分) (2015•湖北) 如图, 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 将纸片沿 EF 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 则下列结论错误的是 ()



- A. $AF=AE$ B. $\triangle ABE \cong \triangle AGF$ C. $EF=2\sqrt{5}$ D. $AF=EF$

二、填空题, 共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分

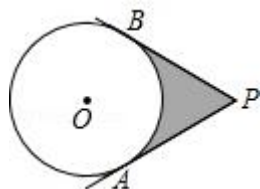
13. (3分) (2015•襄阳) 计算: $2^{-1} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ = _____.

14. (3分) (2015•襄阳) 分式方程 $\frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2-10x+25} = 0$ 的解是 _____.

15. (3分) (2015•襄阳) 若一组数据 $1, 2, x, 4$ 的众数是 1, 则这组数据的方差为 _____.

16. (3分) (2015•襄阳) 如图, P 为 $\odot O$ 外一点, PA, PB 是 $\odot O$ 的切线, A, B 为切点,

$PA=\sqrt{3}$, $\angle P=60^\circ$, 则图中阴影部分的面积为 _____.



17. (3分) (2015•襄阳) 在 $\square ABCD$ 中, $AD=BD$, BE 是 AD 边上的高, $\angle EBD=20^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 _____.

三、简单题，共 9 小题，共 69 分

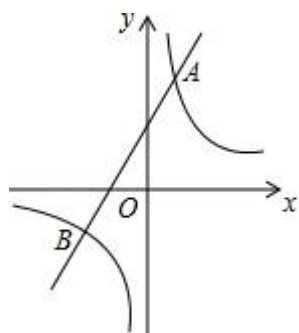
18. (6 分) (2015•襄阳) 先化简，再求值： $(\frac{5x+3y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{y^2-x^2}) \div \frac{1}{x^2y-xy^2}$ ，其中

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}, y=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

19. (6 分) (2015•襄阳) 如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=ax+b$ 的图象相交于点 A (1, 4) 和点 B (n, -2).

(1) 求反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 当一次函数的值小于反比例函数的值时，直接写出 x 的取值范围.

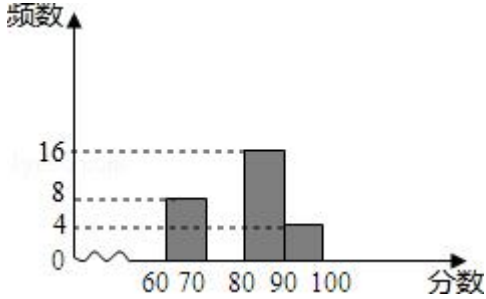


20. (6分) (2015•湖北) 为配合全市“禁止焚烧秸秆”工作，某学校举行了“禁止焚烧秸秆，保护环境，从我做起”为主题的演讲比赛，赛后组委会整理参赛同学的成绩，并制作了如图不完整的频数分布表和频数分布直方图

分数段 (分手为 x 分)	频数	百分比
$60 \leq x < 70$	8	20%
$70 \leq x < 80$	a	30%
$80 \leq x \leq 90$	16	$b\%$
$90 \leq x < 100$	4	10%

请根据图表提供的信息，解答下列问题：

- (1) 表中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；请补全频数分布直方图；
- (2) 若用扇形统计图来描述成绩分布情况，则分数段 $70 \leq x < 80$ 对应扇形的圆心角的度数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 竞赛成绩不低于 90 分的 4 名同学中正好有 2 名男同学，2 名女同学。学校从这 4 名同学中随机抽 2 名同学接受电视台记者采访，则正好抽到一名男同学和一名女同学的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



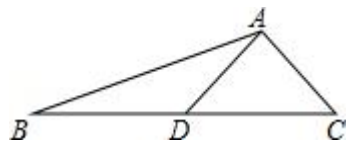
21. (6分) (2015•襄阳) 如图，一农户要建一个矩形猪舍，猪舍的一边利用长为 12m 的住房墙，另外三边用 25m 长的建筑材料围成，为方便进出，在垂直于住房墙的一边留一个 1m 宽的门，所围矩形猪舍的长、宽分别为多少时，猪舍面积为 80m^2 ？



22. (6分) (2015•襄阳) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\tan B = \frac{1}{3}$, $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC = \sqrt{2}$. 求:

(1) BC 的长;

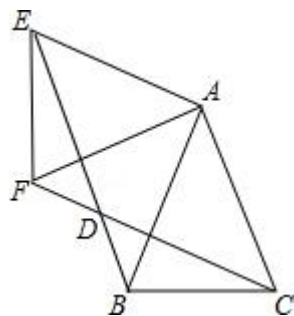
(2) $\sin \angle ADC$ 的值.



23. (7分) (2015•湖北) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=1$, $\angle BAC=45^\circ$, $\triangle AEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转得到的, 连接 BE、CF 相交于点 D.

(1) 求证: $BE=CF$;

(2) 当四边形 ACDE 为菱形时, 求 BD 的长.



24. (10分) (2015•湖北) 为满足市场需求, 某超市在五月初五“端午节”来领前夕, 购进一种品牌粽子, 每盒进价是 40 元. 超市规定每盒售价不得少于 45 元. 根据以往销售经验发现: 当售价定为每盒 45 元时, 每天可以卖出 700 盒, 每盒售价每提高 1 元, 每天要少卖出 20 盒.

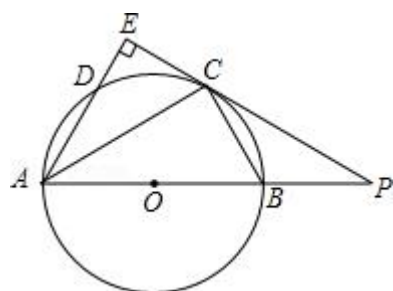
(1) 试求出每天的销售量 y (盒) 与每盒售价 x (元) 之间的函数关系式;

(2) 当每盒售价定为多少元时, 每天销售的利润 P (元) 最大? 最大利润是多少?

(3) 为稳定物价, 有关部门限定: 这种粽子的每盒售价不得高于 58 元. 如果超市想要每天获得不低于 6000 元的利润, 那么超市每天至少销售粽子多少盒?

25. (10 分) (2015•湖北) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, AE 和过点 C 的切线互相垂直, 垂足为 E , AE 交 $\odot O$ 于点 D , 直线 EC 交 AB 的延长线于点 P , 连接 AC , BC , $PB: PC=1: 2$.

- (1) 求证: AC 平分 $\angle BAD$;
- (2) 探究线段 PB , AB 之间的数量关系, 并说明理由;
- (3) 若 $AD=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

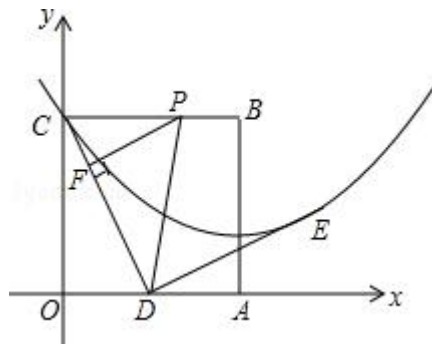


26. (12 分) (2015•湖北) 边长为 2 的正方形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示, 点 D 是边 OA 的中点, 连接 CD , 点 E 在第一象限, 且 $DE \perp DC$, $DE=DC$. 以直线 AB 为对称轴的抛物线过 C, E 两点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 从点 C 出发, 沿射线 CB 每秒 1 个单位长度的速度运动, 运动时间为 t 秒. 过点 P 作 $PF \perp CD$ 于点 F , 当 t 为何值时, 以点 P, F, D 为顶点的三角形与 $\triangle COD$ 相似?

(3) 点 M 为直线 AB 上一动点, 点 N 为抛物线上一动点, 是否存在点 M, N , 使得以点 M, N, D, E 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出满足条件的点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2015 年湖北省襄阳市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题，共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分

1. (3 分) (2015•襄阳) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

考点：绝对值.

分析：根据负数的绝对值等于它的相反数解答.

解答：解： -2 的绝对值是 2 ,

即 $|-2|=2$.

故选：A.

点评：本题考查了绝对值的性质：正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.

2. (3 分) (2015•湖北) 中国人口众多，地大物博，仅领水面积就约为 $370\,000\text{km}^2$ ，将“370 000”这个数用科学记数法表示为 ()

- A. 3.7×10^6 B. 3.7×10^5 C. 37×10^4 D. 3.7×10^4

考点：科学记数法—表示较大的数.

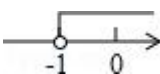
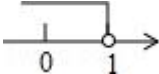
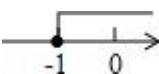
分析：科学记数法的表示形式为 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leq |a|<10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 >1 时， n 是正数；当原数的绝对值 <1 时， n 是负数.

解答：解： $370\,000=3.7\times 10^5$,

故选：B.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leq |a|<10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2015•襄阳) 在数轴上表示不等式 $2(1-x) < 4$ 的解集，正确的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

考点：在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式.

分析：根据解不等式的方法，可得不等式的解集，根据不等式的解集在数轴上表示的方法，可得答案.

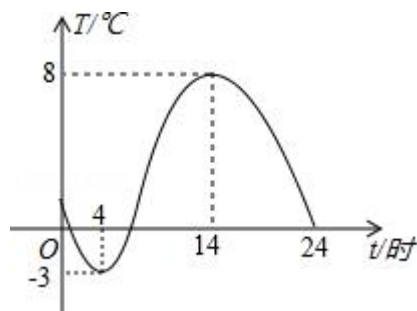
解答：解：由 $2(1-x) < 4$ ，得 $2-2x < 4$.

解得 $x > -1$,

故选：A.

点评：本题考查了在数轴上表示不等式的解集，把每个不等式的解集在数轴上表示出来 ($>$ ， $\geq$ 向右画； $<$ ， $\leq$ 向左画)，数轴上的点把数轴分成若干段，如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样，那么这段就是不等式组的解集. 有几个就要几个. 在表示解集时“ $\geq$ ”，“ $\leq$ ”要用实心圆点表示；“ $<$ ”，“ $>$ ”要用空心圆点表示.

4. (3分) (2015•湖北) 如图，是一台自动测温记录仪的图象，它反映了我市冬季某天气温 T 随时间 t 变化而变化的关系，观察图象得到下列信息，其中错误的是 ()



- A. 凌晨4时气温最低为 -3°C
- B. 14时气温最高为 8°C
- C. 从0时至14时，气温随时间增长而上升
- D. 从14时至24时，气温随时间增长而下降

考点：函数的图象.

分析：根据函数的图象对各选项进行逐一分析即可.

解答：解：A、 $\because$ 由图象可知，在凌晨4点函数图象在最低点 -3 ， $\therefore$ 凌晨4时气温最低为 -3°C ，故本选项正确；

B、 $\because$ 由图象可知，在14点函数图象在最高点 8 ， $\therefore$ 14时气温最高为 8°C ，故本选项正确；

C、 $\because$ 由图象可知，从4时至14时，气温随时间增长而上升，不是从0点，故本选项错误；

D、 $\because$ 由图象可知，14时至24时，气温随时间增长而下降，故本选项正确.

故选 C.

点评： 本题考查的是函数的图象，能根据函数图象在坐标系中的增减性判断出函数的增减性是解答此题的关键.

5. (3分) (2015•襄阳) 下列运算中正确的是 ()

- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ C. $a^6 \div a^2 = a^3$ D. $(-a^2)^3 = -a^6$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析： 根据合并同类项，可判断 A；根据同底数幂的乘法，可判断 B；根据同底数幂的除法，可判断 C；根据积的乘方，可判断 D.

解答： 解：A、合并同类项系数相加字母部分不变，故 A 错误；

B、同底数幂的乘法底数不变指数相加，故 B 错误；

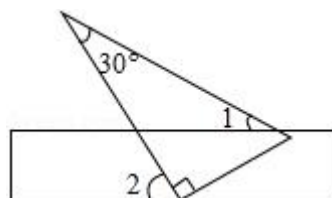
C、同底数幂的除法底数不变指数相减，故 C 错误；

D、积的乘方等于乘方的积，故 D 正确；

故选：D.

点评： 本题考查了同底数幂的除法，熟记法则并根据法则计算是解题关键.

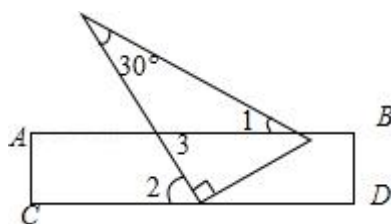
6. (3分) (2015•湖北) 如图，将一块含有 30° 角的直角三角板的两个顶点放在矩形直尺的一组对边上. 如果 $\angle 2 = 60^\circ$ ，那么 $\angle 1$ 的度数为 ()



A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

考点： 平行线的性质.

分析： 根据三角形外角性质可得 $\angle 3 = 30^\circ + \angle 1$ ，由于平行线的性质即可得到 $\angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$ ，即可解答.



解答： 解：如图，

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + 30^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

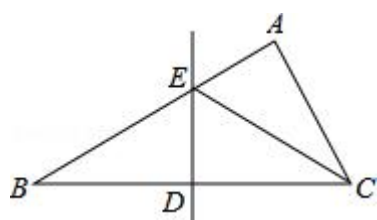
$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 - 30^\circ = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

故选 D

点评： 本题考查了平行线的性质，关键是根据：两直线平行，内错角相等. 也利用了三角形外角性质.

7. (3分) (2015•湖北) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ，BC 的垂直平分线交 AB 于点 E，垂足为 D，CE 平分 $\angle ACB$. 若 $BE = 2$ ，则 AE 的长为 ()



A. $\sqrt{3}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

考点：含 30 度角的直角三角形；角平分线的性质；线段垂直平分线的性质.

分析：先根据线段垂直平分线的性质得出 $BE=CE=2$ ，故可得出 $\angle B=\angle DCE=30^\circ$ ，再由角平分线定义得出 $\angle ACB=2\angle DCE=60^\circ$ ， $\angle ACE=\angle DCE=30^\circ$ ，利用三角形内角和定理求出 $\angle A=180^\circ - \angle B - \angle ACB=90^\circ$ ，然后在 $Rt\triangle CAE$ 中根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半得出 $AE=\frac{1}{2}CE=1$.

解答：解：∵在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ， BC 的垂直平分线交 AB 于 E ， $BE=2$ ，

∴ $BE=CE=2$ ，

∴ $\angle B=\angle DCE=30^\circ$ ，

∵ CE 平分 $\angle ACB$ ，

∴ $\angle ACB=2\angle DCE=60^\circ$ ， $\angle ACE=\angle DCE=30^\circ$ ，

∴ $\angle A=180^\circ - \angle B - \angle ACB=90^\circ$.

在 $Rt\triangle CAE$ 中，∵ $\angle A=90^\circ$ ， $\angle ACE=30^\circ$ ， $CE=2$ ，

∴ $AE=\frac{1}{2}CE=1$.

故选 B.

点评：本题考查的是含 30 度角的直角三角形的性质，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，角平分线定义，三角形内角和定理，求出 $\angle A=90^\circ$ 是解答此题的关键.

8. (3 分) (2015•襄阳) 下列说法中正确的是 ()

- A. “任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是随机事件
- B. “任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件
- C. “概率为 0.0001 的事件”是不可能事件
- D. 任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，正面向上的一定是 5 次

考点：随机事件.

分析：根据随机事件、必然事件以及不可能事件的定义即可作出判断.

解答：解：A、“任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是必然事件，选项错误；

B、“任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件，选项正确；

C、“概率为 0.0001 的事件”是随机事件，选项错误；

D、任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，正面向上的可能是 5 次，选项错误.

故选 B.

点评: 本题考查了随机事件、必然事件以及不可能事件的定义, 解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件.

9. (3 分) (2015•襄阳) 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\angle BOC=80^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 ()

A. 40° B. 100° C. 40° 或 140° D. 40° 或 100°

考点: 三角形的外接圆与外心; 圆周角定理.

专题: 分类讨论.

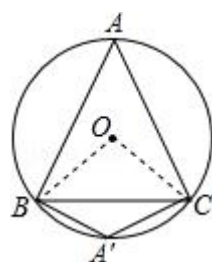
分析: 利用圆周角定理以及圆内接四边形的性质得出 $\angle BAC$ 的度数.

解答: 解: 如图所示: $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\angle BOC=80^\circ$,

$\therefore \angle A=40^\circ$, $\angle A'=140^\circ$,

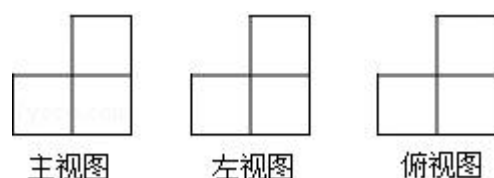
故 $\angle BAC$ 的度数为: 40° 或 140° .

故选: C.



点评: 此题主要考查了圆周角定理以及圆内接四边形的性质, 利用分类讨论得出是解题关键.

10. (3 分) (2015•襄阳) 由若干个相同的小正方体组合而成的一个几何体的三视图如图所示, 则组成这个几何体的小正方体的个数是 ()



A. 4 B. 5 C. 6 D. 9

考点: 由三视图判断几何体.

分析: 根据三视图, 该几何体的主视图以及俯视图可确定该几何体共有两层 3 列, 故可得出该几何体的小正方体的个数.

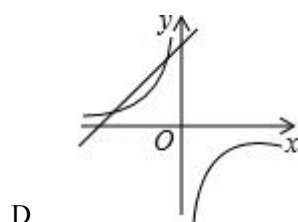
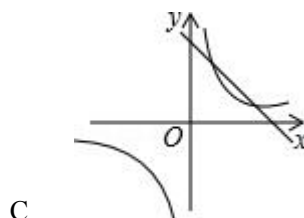
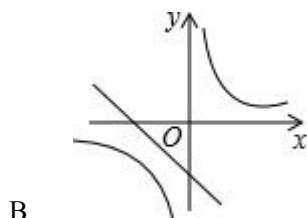
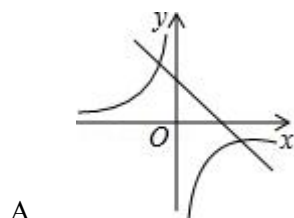
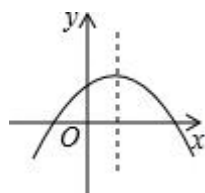
解答：解：综合三视图，我们可得出，这个几何体的底层应该有 3 个小正方体，第二层应该有 1 个小正方体，

因此搭成这个几何体的小正方体的个数为 $3+1=4$ 个，

故选 A.

点评：本题意在考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查. 如果掌握口诀“俯视图打地基，正视图疯狂盖，左视图拆违章”就更容易得到答案.

11. (3 分) (2015•襄阳) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象在平面直角坐标系中的位置如图所示，则一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()



考点：二次函数的图象；一次函数的图象；反比例函数的图象.

分析：根据二次函数图象开口向下得到 $a < 0$ ，再根据对称轴确定出 b ，根据与 y 轴的交点确定出 $c > 0$ ，然后确定出一次函数图象与反比例函数图象的情况，即可得解.

解答：解： $\because$ 二次函数图象开口方向向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

$\therefore$ 与 y 轴的正半轴相交，

$$\therefore c > 0,$$

$\therefore y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限,

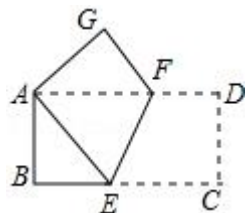
反比例函数 $y=\frac{c}{x}$ 图象在第一三象限,

只有 C 选项图象符合.

故选 C.

点评: 本题考查了二次函数的图形, 一次函数的图象, 反比例函数的图象, 熟练掌握二次函数的有关性质: 开口方向、对称轴、与 y 轴的交点坐标等确定出 a 、 b 、 c 的情况是解题的关键.

12. (3 分) (2015•湖北) 如图, 矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 将纸片沿 EF 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 则下列结论错误的是 ()



A. $AF=AE$ B. $\triangle ABE \cong \triangle AGF$ C. $EF=2\sqrt{5}$ D. $AF=EF$

考点: 翻折变换 (折叠问题).

分析: 设 $BE=x$, 表示出 $CE=8-x$, 根据翻折的性质可得 $AE=CE$, 然后在 $Rt\triangle ABE$ 中, 利用勾股定理列出方程求出 x , 再根据翻折的性质可得 $\angle AEF=\angle CEF$, 根据两直线平行, 内错角相等可得 $\angle AFE=\angle CEF$, 然后求出 $\angle AEF=\angle AFE$, 根据等角对等边可得 $AE=AF$, 过点 E 作 $EH \perp AD$ 于 H , 可得四边形 $ABEH$ 是矩形, 根据矩形的性质求出 EH 、 AH , 然后求出 FH , 再利用勾股定理列式计算即可得解.

解答: 解: 设 $BE=x$, 则 $CE=BC-BE=8-x$,

$\therefore$ 沿 EF 翻折后点 C 与点 A 重合,

$\therefore AE=CE=8-x$,

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $AB^2+BE^2=AE^2$,

即 $4^2+x^2=(8-x)^2$

解得 $x=3$,

$\therefore AE=8-3=5$,

由翻折的性质得, $\angle AEF=\angle CEF$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的对边 $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AFE=\angle CEF$,

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AE = AF = 5,$$

$\therefore A$ 正确;

在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle AGF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AF \\ AG = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AGF \text{ (HL)},$$

$\therefore B$ 正确;

过点 E 作 $EH \perp AD$ 于 H , 则四边形 $ABEH$ 是矩形,

$$\therefore EH = AB = 4,$$

$$AH = BE = 3,$$

$$\therefore FH = AF - AH = 5 - 3 = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFH \text{ 中, } EF = 2\sqrt{5},$$

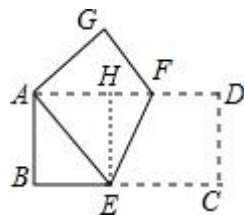
$\therefore C$ 正确;

$\therefore \triangle AEF$ 不是等边三角形,

$$\therefore EF \neq AE,$$

故 D 错误;

故选: D .



点评: 本题考查了翻折变换的性质, 矩形的判定与性质, 勾股定理, 熟记各性质并作利用勾股定理列方程求出 BE 的长度是解题的关键, 也是本题的突破口.

二、填空题, 共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分

13. (3 分) (2015•襄阳) 计算: $2^{-1} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \underline{0}$.

考点: 实数的运算; 负整数指数幂.

专题: 计算题.

分析: 原式第一项利用负整数指数幂法则计算, 第二项利用立方根定义计算即可得到结果.

解答： 解： 原式= $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

=0,

故答案为： 0.

点评： 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

14. (3 分) (2015•襄阳) 分式方程 $\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-10x+25}=0$ 的解是 15.

考点： 解分式方程.

专题： 计算题.

分析： 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

解答： 解： 去分母得： $x-5-10=0$,

解得： $x=15$,

经检验 $x=15$ 是分式方程的解.

故答案为： 15.

点评： 此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意验根.

15. (3 分) (2015•襄阳) 若一组数据 1, 2, x, 4 的众数是 1, 则这组数据的方差为 1.5.

考点： 方差；众数.

分析： 根据众数的定义先求出 x 的值，再根据方差的计算公式 $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2]$ 进行计算即可.

解答： 解： $\because$ 数据 1, 2, x, 4 的众数是 1,

$\therefore x=1$,

$\therefore$ 平均数是 $(1+2+1+4) \div 4=2$,

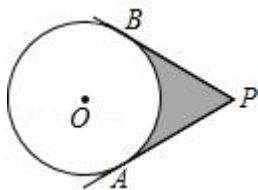
则这组数据的方差为 $\frac{1}{4}[(1-2)^2+(2-2)^2+(1-2)^2+(4-2)^2]=1.5$;

故答案为： 1.5.

点评： 本题考查了众数和方差：众数是一组数据中出现次数最多的数；一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2]$.

16. (3 分) (2015•襄阳) 如图，P 为 $\odot O$ 外一点，PA, PB 是 $\odot O$ 的切线，A, B 为切点，

$PA=\sqrt{3}$, $\angle P=60^\circ$, 则图中阴影部分的面积为 $\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi$.



考点： 扇形面积的计算；切线的性质.

分析： 连结 PO 交圆于 C，根据切线的性质可得 $\angle OAP=90^\circ$ ，根据含 30° 的直角三角形的性质可得 $OA=1$ ，再求出 $\triangle PAO$ 与扇形 AOC 的面积，由 $S_{\text{阴影}}=2 \times (S_{\triangle PAO} - S_{\text{扇形 AOC}})$ 则可求得结果.

解答： 解：连结 AO，连结 PO 交圆于 C.

$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线，A，B 为切点， $PA=\sqrt{3}$ ， $\angle P=60^\circ$ ，

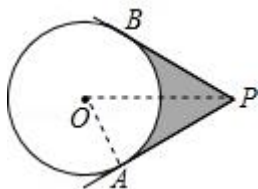
$\therefore \angle OAP=90^\circ$ ， $OA=1$ ，

$\therefore S_{\text{阴影}}=2 \times (S_{\triangle PAO} - S_{\text{扇形 AOC}})$

$$=2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{60 \times \pi \times 1}{360} \right)$$

$$=\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi.$$

故答案为： $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$.



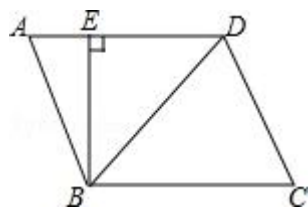
点评： 此题考查了切线长定理，直角三角形的性质，扇形面积公式等知识. 此题难度中等，注意数形结合思想的应用.

17. (3 分) (2015•襄阳) 在 $\square ABCD$ 中， $AD=BD$ ，BE 是 AD 边上的高， $\angle EBD=20^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为 55° 或 35° .

考点： 平行四边形的性质.

分析： 首先求出 $\angle ADB$ 的度数，再利用三角形内角和定理以及等腰三角形的性质，得出 $\angle A$ 的度数.

解答： 解：情形一：当 E 点在线段 AD 上时，如图所示，



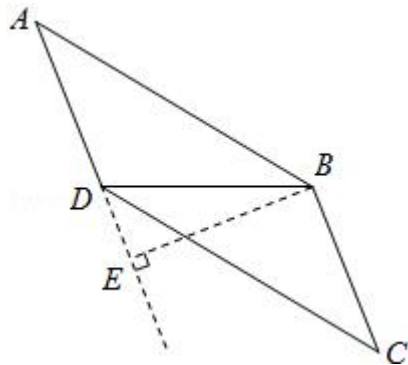
$\because$ BE 是 AD 边上的高, $\angle EBD=20^\circ$,

$\therefore \angle ADB=90^\circ - 20^\circ=70^\circ$,

$\because AD=BD$,

$\therefore \angle A=\angle ABD=\frac{180^\circ - 70^\circ}{2}=55^\circ$.

情形二: 当 E 点在 AD 的延长线上时, 如图所示,



$\because$ BE 是 AD 边上的高, $\angle EBD=20^\circ$,

$\therefore \angle BDE=70^\circ$,

$\because AD=BD$,

$\therefore \angle A=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle BDE=\frac{1}{2}\times 70^\circ=35^\circ$.

故答案为: 55° 或 35° .

点评: 此题主要考查了平行四边形的性质以及等腰三角形的性质等知识, 得出 $\angle ADB$ 的度数是解题关键.

三、简单题, 共 9 小题, 共 69 分

18. (6 分) (2015•襄阳) 先化简, 再求值: $(\frac{5x+3y}{x^2-y^2}+\frac{2x}{y^2-x^2}) \div \frac{1}{x^2y-xy^2}$, 其中

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}, y=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

考点: 分式的化简求值.

专题: 计算题.

分析： 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，把 x 与 y 的值代入计算即可求出值.

解答： 解：原式 $= \frac{5x+3y-2x}{(x+y)(x-y)} \cdot xy(x-y) = \frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)} \cdot xy(x-y) = 3xy,$

当 $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 时，原式 $= 3$.

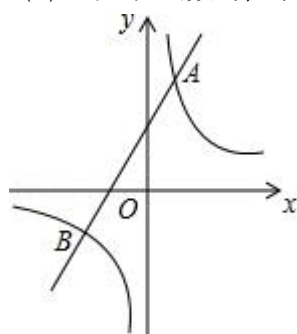
点评： 此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (6 分) (2015•襄阳) 如图，已知反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象与一次函数 $y = ax + b$ 的图象相交

于点 A (1, 4) 和点 B (n, -2).

(1) 求反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 当一次函数的值小于反比例函数的值时，直接写出 x 的取值范围.



考点： 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析： (1) 把 A 的坐标代入反比例函数的解析式，求出 m 的值，从而确定反比例函数的解析式，把 B 的坐标代入反比例函数解析式求出 B 的坐标，把 A、B 的坐标代入一次函数的解析式，即可求出 a , b 的值，从而确定一次函数的解析式；

(2) 根据函数的图象即可得出一次函数的值小于反比例函数的值的 x 的取值范围.

解答： 解：(1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象过点 A (1, 4),

$$\therefore 4 = \frac{m}{1}, \text{ 即 } m = 4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{4}{x}.$$

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象过点 B (n, -2),

$$\therefore -2 = \frac{4}{n},$$

$$\text{解得: } n = -2$$

$$\therefore B (-2, -2).$$

$\because$ 一次函数 $y = ax + b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 A (1, 4) 和点 B (-2, -2),

$$\therefore \begin{cases} a+b=4 \\ -2a+b=-2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}.$$

∴一次函数的解析式为： $y=2x+2$ ；

(2) 由图象可知：当 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$ 时，一次函数的值小于反比例函数的值.

点评： 本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，用待定系数法求一次函数和反比例函数的解析式及利用图象比较函数值的大小. 解题的关键是：确定交点的坐标.

20. (6分) (2015•襄阳) 为配合全市“禁止焚烧秸秆”工作，某学校举行了“禁止焚烧秸秆，保护环境，从我做起”为主题的演讲比赛，赛后组委会整理参赛同学的成绩，并制作了如图不完整的频数分布表和频数分布直方图

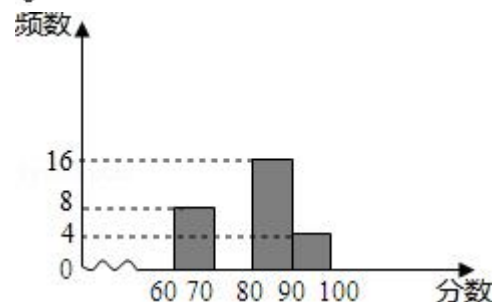
分数段 (分手为 x 分)	频数	百分比
$60 \leq x < 70$	8	20%
$70 \leq x < 80$	a	30%
$80 \leq x \leq 90$	16	b%
$90 \leq x < 100$	4	10%

请根据图表提供的信息，解答下列问题：

(1) 表中的 $a=12$ ， $b=40$ ；请补全频数分布直方图；

(2) 若用扇形统计图来描述成绩分布情况，则分数段 $70 \leq x < 80$ 对应扇形的圆心角的度数是 108° ；

(3) 竞赛成绩不低于 90 分的 4 名同学中正好有 2 名男同学，2 名女同学. 学校从这 4 名同学中随机抽 2 名同学接受电视台记者采访，则正好抽到一名男同学和一名女同学的概率为 $\frac{2}{3}$.



考点： 列表法与树状图法；频数（率）分布表；频数（率）分布直方图.

分析： (1) 首先根据第一小组的频数和频率求得总人数，然后减去其它小组的频数即可求得 a 值，根据总人数和第三小组的频数即可求得 b 值；

(2) 用周角乘以相应分数段所占的百分比即可求得圆心角的度数；

(3) 列表将所有等可能的结果列举出来利用概率公式求解即可.

解答： 解：(1) ∵ $60 \leq x < 70$ 小组的频数为 8，占 20%，

∴ $8 \div 20\% = 40$ 人，

$$\therefore a=40-8-16-4=12, \quad b\%=\frac{16}{40}\times 100\%=40\%,$$

故答案为：12，40；

(2) $\therefore 70 \leq x < 80$ 小组所占的百分比为 30%，

$$\therefore 70 \leq x < 80 \text{ 对应扇形的圆心角的度数 } 360^\circ \times 30\% = 108^\circ,$$

故答案为：108°；

(3) 用 A、B 表示男生，用 a、b 表示女生，列表得：

A B a b

A AB Aa Ab

B BA Ba Bb

a aA aB ab

b bA bB ba

$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，其中一男一女的有 8 种，

$$\therefore P(\text{一男一女}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

点评： 本题考查了条形统计图：条形统计图是用线段长度表示数据，根据数量的多少画成长短不同的矩形直条，然后按顺序把这些直条排列起来。从条形图可以很容易看出数据的大小，便于比较。也考查了扇形统计图和概率公式。

21. (6 分) (2015•湖北) 如图，一农户要建一个矩形猪舍，猪舍的一边利用长为 12m 的住房墙，另外三边用 25m 长的建筑材料围成，为方便进出，在垂直于住房墙的一边留一个 1m 宽的门，所围矩形猪舍的长、宽分别为多少时，猪舍面积为 80m²？



考点： 一元二次方程的应用.

专题： 几何图形问题.

分析： 设矩形猪舍垂直于住房墙一边长为 xm 可以得出平行于墙的一边的长为 (25 - 2x + 1) m. 根据矩形的面积公式建立方程求出其解就可以了.

解答： 解：设矩形猪舍垂直于住房墙一边长为 xm 可以得出平行于墙的一边的长为 (25 - 2x + 1) m, 由题意得

$$x(25 - 2x + 1) = 80,$$

$$\text{化简, 得 } x^2 - 13x + 40 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 5, \quad x_2 = 8,$$

当 x=5 时, 26 - 2x=16 > 12 (舍去), 当 x=8 时, 26 - 2x=10 < 12,

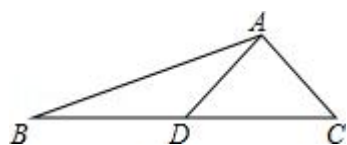
答：所围矩形猪舍的长为 10m、宽为 8m.

点评： 本题考查了列一元二次方程解实际问题的运用，矩形的面积公式的运用及一元二次方程的解法的运用，解答时寻找题目的等量关系是关键.

22. (6分) (2015•襄阳) 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $\tan B = \frac{1}{3}$ ， $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $AC = \sqrt{2}$. 求：

(1) BC 的长；

(2) $\sin \angle ADC$ 的值.



考点： 解直角三角形.

分析： (1) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E，根据 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求出 $\angle C = 45^\circ$ ，求出 $AE = CE = 1$ ，

根据 $\tan B = \frac{1}{3}$ ，求出 BE 的长即可；

(2) 根据 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，求出 BD 的长，得到 DE 的长，得到答案.

解答： 解：过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E，

$$\because \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

在 $Rt\triangle ACE$ 中， $CE = AC \cdot \cos C = 1$ ，

$$\therefore AE = CE = 1,$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $\tan B = \frac{1}{3}$ ，即 $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore BE = 3AE = 3,$$

$$\therefore BC = BE + CE = 4;$$

(2) $\because$ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

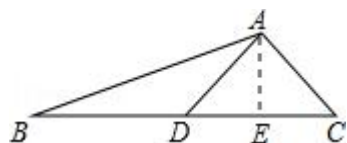
$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore DE = CD - CE = 1,$$

$\because AE \perp BC$ ， $DE = AE$ ，

$$\therefore \angle ADC = 45^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

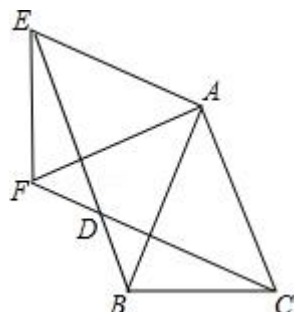


点评： 本题考查的是解直角三角形的知识，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键，注意锐角三角函数的概念的正确应用.

23. (7分) (2015•湖北) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=1$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， $\triangle AEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转得到的，连接 BE、CF 相交于点 D.

(1) 求证： $BE=CF$ ；

(2) 当四边形 ACDE 为菱形时，求 BD 的长.



考点： 旋转的性质；勾股定理；菱形的性质.

专题： 计算题.

分析： (1) 先由旋转的性质得 $AE=AB$ ， $AF=AC$ ， $\angle EAF=\angle BAC$ ，则 $\angle EAF+\angle BAF=\angle BAC+\angle BAF$ ，即 $\angle EAB=\angle FAC$ ，利用 $AB=AC$ 可得 $AE=AF$ ，于是根据旋转的定义， $\triangle AEB$ 可由 $\triangle AFC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转得到，然后根据旋转的性质得到 $BE=CD$ ；

(2) 由菱形的性质得到 $DE=AE=AC=AB=1$ ， $AC \parallel DE$ ，根据等腰三角形的性质得 $\angle AEB=\angle ABE$ ，根据平行线得性质得 $\angle ABE=\angle BAC=45^\circ$ ，所以 $\angle AEB=\angle ABE=45^\circ$ ，于是可判断 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，所以 $BE=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}$ ，于是利用 $BD=BE-DE$ 求解.

解答： (1) 证明： $\because \triangle AEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转得到的，

$$\therefore AE=AB, AF=AC, \angle EAF=\angle BAC,$$

$$\therefore \angle EAF+\angle BAF=\angle BAC+\angle BAF, \text{ 即 } \angle EAB=\angle FAC,$$

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore AE=AF,$$

∴△AEB可由△AFC绕点A按顺时针方向旋转得到,

∴BE=CF;

(2) 解: ∵四边形ACDE为菱形, AB=AC=1,

∴DE=AE=AC=AB=1, AC∥DE,

∴∠AEB=∠ABE, ∠ABE=∠BAC=45°,

∴∠AEB=∠ABE=45°,

∴△ABE为等腰直角三角形,

∴BE=√2AC=√2,

∴BD=BE-DE=√2-1.

点评: 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等. 也考查了菱形的性质.

24. (10分) (2015•湖北) 为满足市场需求, 某超市在五月初五“端午节”来领前夕, 购进一种品牌粽子, 每盒进价是40元. 超市规定每盒售价不得少于45元. 根据以往销售经验发现: 当售价定为每盒45元时, 每天可以卖出700盒, 每盒售价每提高1元, 每天要少卖出20盒.

(1) 试求出每天的销售量y(盒)与每盒售价x(元)之间的函数关系式;

(2) 当每盒售价定为多少元时, 每天销售的利润P(元)最大? 最大利润是多少?

(3) 为稳定物价, 有关部门限定: 这种粽子的每盒售价不得高于58元. 如果超市想要每天获得不低于6000元的利润, 那么超市每天至少销售粽子多少盒?

考点: 二次函数的应用.

分析: (1) 根据“当售价定为每盒45元时, 每天可以卖出700盒, 每盒售价每提高1元, 每天要少卖出20盒”即可得出每天的销售量y(盒)与每盒售价x(元)之间的函数关系式;

(2) 根据利润=1盒粽子所获得的利润×销售量列式整理, 再根据二次函数的最值问题解答;

(3) 先由(2)中所求得的P与x的函数关系式, 根据这种粽子的每盒售价不得高于58元, 且每天销售粽子的利润不低于6000元, 求出x的取值范围, 再根据(1)中所求得的销售量y(盒)与每盒售价x(元)之间的函数关系式即可求解.

解答: 解: (1) 由题意得, $y=700-20(x-45)=-20x+1600$;

(2) $P=(x-40)(-20x+1600)=-20x^2+2400x-64000=-20(x-60)^2+8000$,

∴ $x \geq 45$, $a=-20 < 0$,

∴当 $x=60$ 时, $P_{\text{最大值}}=8000$ 元,

即当每盒售价定为 60 元时，每天销售的利润 P（元）最大，最大利润是 8000 元；

(3) 由题意，得 $-20(x-60)^2+8000=6000$ ，
解得 $x_1=50$ ， $x_2=70$ 。

$\therefore$ 抛物线 $P=-20(x-60)^2+8000$ 的开口向下，

$\therefore$ 当 $50 \leq x \leq 70$ 时，每天销售粽子的利润不低于 6000 元的利润。

又 $\because x \leq 58$ ，

$\therefore 50 \leq x \leq 58$ 。

$\therefore$ 在 $y=-20x+1600$ 中， $k=-20 < 0$ ，

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

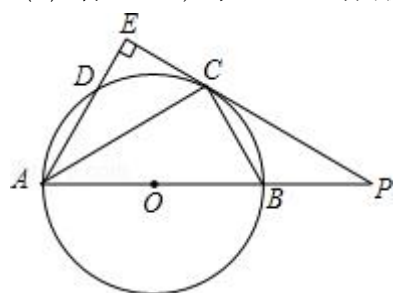
$\therefore$ 当 $x=58$ 时， $y_{\text{最小值}}=-20 \times 58+1600=440$ ，

即超市每天至少销售粽子 440 盒。

点评： 本题考查的是二次函数与一次函数在实际生活中的应用，主要利用了利润=1 盒粽子所获得的利润 $\times$ 销售量，求函数的最值时，注意自变量的取值范围。

25. (10 分) (2015•湖北) 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 为 $\odot O$ 上一点，AE 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 E，AE 交 $\odot O$ 于点 D，直线 EC 交 AB 的延长线于点 P，连接 AC，BC，PB: PC=1: 2。

- (1) 求证：AC 平分 $\angle BAD$ ；
- (2) 探究线段 PB，AB 之间的数量关系，并说明理由；
- (3) 若 $AD=3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。



考点： 圆的综合题。

分析： (1) 首先连接 OC，由 PE 是 $\odot O$ 的切线，AE 和过点 C 的切线互相垂直，可证得

$OC \parallel AE$ ，又由 $OA=OC$ ，易证得 $\angle DAC=\angle OAC$ ，即可得 AC 平分 $\angle BAD$ ；

(2) 由 AB 是 $\odot O$ 的直径, PE 是切线, 可证得 $\angle PCB = \angle PAC$, 即可证得 $\triangle PCB \sim \triangle PAC$, 然后由相似三角形的对应边成比例与 $PB:PC=1:2$, 即可求得答案;

(3) 首先过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H , 则 $AH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$, 四边形 $OCEH$ 是矩形, 即可得 $AE = \frac{3}{2} + OC$, 由 $OC \parallel AE$, 可得 $\triangle PCO \sim \triangle PEA$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 求得 OC 的长, 再由 $\triangle PBC \sim \triangle PCA$, 证得 $AC = 2BC$, 然后在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 可得 $(2BC)^2 + BC^2 = 5^2$, 即可求得 BC 的长, 继而求得答案.

解答: (1) 证明: 连接 OC ,

$\because PE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OC \perp PE$,

$\because AE \perp PE$,

$\therefore OC \parallel AE$,

$\therefore \angle DAC = \angle OCA$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$,

$\therefore \angle DAC = \angle OAC$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$;

(2) 线段 PB , AB 之间的数量关系为: $AB = 3PB$.

理由: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$,

$\because OB = OC$,

$\therefore \angle OCB = \angle ABC$,

$\therefore \angle PCB + \angle OCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle PCB = \angle PAC$,

$\because \angle P$ 是公共角,

$\therefore \triangle PCB \sim \triangle PAC$,

$$\therefore \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC},$$

$$\therefore PC^2 = PB \cdot PA,$$

$$\because PB: PC = 1: 2,$$

$$\therefore PC = 2PB,$$

$$\therefore PA = 4PB,$$

$$\therefore AB = 3PB;$$

(3) 解: 过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H, 则 $AH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$, 四边形 OCEH 是矩形,

$$\therefore OC = HE,$$

$$\therefore AE = \frac{3}{2} + OC,$$

$$\because OC \parallel AE,$$

$$\therefore \triangle PCO \sim \triangle PEA,$$

$$\therefore \frac{OC}{AE} = \frac{PO}{PA},$$

$$\because AB = 3PB, AB = 2OB,$$

$$\therefore OB = \frac{3}{2}PB,$$

$$\therefore \frac{OC}{\frac{3}{2} + OC} = \frac{PB + OB}{PB + AB} = \frac{PB + \frac{3}{2}PB}{PB + 3PB},$$

$$\therefore OC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore \triangle PBC \sim \triangle PCA,$$

考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 根据正方形的性质，可得 $OA=OC$ ， $\angle AOC=\angle DGE$ ，根据余角的性质，可得 $\angle OCD=\angle GDE$ ，根据全等三角形的判定与性质，可得 $EG=OD=1$ ， $DG=OC=2$ ，根据待定系数法，可得函数解析式；

(2) 分类讨论：若 $\triangle DFP \sim \triangle COD$ ，根据相似三角形的性质，可得 $\angle PDF=\angle DCO$ ，根据平行线的判定与性质，可得 $\angle PDO=\angle OCP=\angle AOC=90^\circ$ ，根据矩形的判定与性质，可得 PC 的长；若 $\triangle PFD \sim \triangle COD$ ，根据相似三角形的性质，可得 $\angle DPF=\angle DCO$ ， $\frac{PD}{CD}=\frac{DF}{OD}$ ，根据等腰三角形的判定与性质，可得 DF 与 CD 的关系，根据相似三角形的相似比，可得 PC 的长；

(3) 分类讨论： $\square MDNE$ ， $\square MNDE$ ， $\square NDME$ ，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，可得答案..

解答： 解：(1) 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于 G 点.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是边长为 2 的正方形， D 是 OA 的中点，

$\therefore OA=OC=2$ ， $OD=1$ ， $\angle AOC=\angle DGE=90^\circ$.

$\therefore \angle CDE=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ODC+\angle GDE=90^\circ$.

$\therefore \angle ODC+\angle OCD=90^\circ$ ，

$\therefore \angle OCD=\angle GDE$.

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle GED$ 中 $\begin{cases} \angle COD=\angle DGE \\ \angle OCD=\angle GDE, \\ DC=DE \end{cases}$

$\therefore \triangle ODC \cong \triangle GED$ (AAS),

$\therefore EG=OD=1$ ， $DG=OC=2$.

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3, 1)$.

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 AB 即直线 $x=2$,

$\therefore$ 可设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+k$,

将 C 、 E 点的坐标代入解析式，得

$$\begin{cases} 4a+k=2 \\ a+k=1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ k=\frac{2}{3} \end{cases}$

抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2+\frac{2}{3}$;

(2) ①若 $\triangle DFP \sim \triangle COD$, 则 $\angle PDF = \angle DCO$,

$\therefore PD \parallel OC$,

$\therefore \angle PDO = \angle OCP = \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 PDOC 是矩形,

$\therefore PC = OD = 1$,

$\therefore t = 1$;

②若 $\triangle PFD \sim \triangle COD$, 则 $\angle DPF = \angle DCO$, $\frac{PD}{CD} = \frac{DF}{OD}$.

$\therefore \angle PCF = 90^\circ - \angle DCO = 90^\circ - \angle DPF = \angle PDF$.

$\therefore PC = PD$,

$\therefore DF = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore CD^2 = OD^2 + OC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$,

$\therefore CD = \sqrt{5}$,

$\therefore DF = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore \frac{PD}{CD} = \frac{DF}{OD}$,

$\therefore PC = PD = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}$,

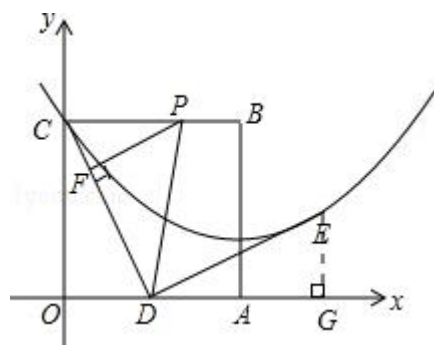
$t = \frac{5}{2}$,

综上所述: $t = 1$ 或 $t = \frac{5}{2}$ 时, 以点 P, F, D 为顶点的三角形与 $\triangle COD$ 相似;

(3) 存在,

四边形 MDEN 是平行四边形时, $M_1(2, 1)$, $N_1(4, 2)$;

四边形 NDME 是平行四边形时, $M_3(2, \frac{1}{3})$, $N_3(2, \frac{2}{3})$.



点评: 本题考察了二次函数综合题, (1) 利用了正方形的性质, 余角的性质, 全等三角形的判定与性质, 待定系数法求函数解析式; (2) 利用了相似三角形的性质, 矩形的判定, 分类讨论时解题关键; (3) 利用了平行四边形的判定, 分类讨论时解题关键.