

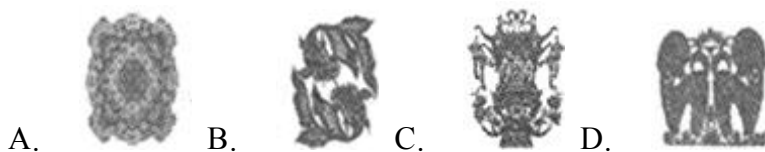
2015 年湖北省宜昌市中考数学试卷

一、选择题（下列各题中，只有一个选项是符合题目要求的，本大题共 15 小题，每小题 3 分，计 45 分）

1. 中国倡导的“一带一路”建设将促进我国与世界各国的互利合作，根据规划，“一带一路”地区覆盖总人口约为 4400000000 人，这个数用科学记数法表示为（ ）

- A. 44×10^8 B. 4.4×10^9 C. 4.4×10^8 D. 4.4×10^{10}

2. 下列剪纸图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



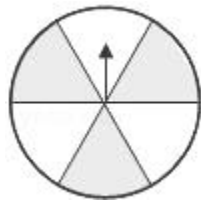
3. 陆地上最高处是珠穆朗玛峰顶，高出海平面 8848m，记为+8848m；陆地上最低处是地处亚洲西部的死海，低于海平面约 415m，记为（ ）

- A. +415m B. -415m C. ± 415 m D. -8848m

4. 某校对九年级 6 个班学生平均一周的课外阅读时间进行了统计，分别为（单位：h）：3.5，4，3.5，5，5，3.5. 这组数据的众数是（ ）

- A. 3 B. 3.5 C. 4 D. 5

5. 如图是一个可以自由转动的转盘，转盘分为 6 个大小相同的扇形，指针的位置固定，转动的转盘停止后，其中的某个扇形会恰好停在指针所指的位置（指针指向两个扇形的交线时，当作指向右边的扇形），指针指向阴影区域的概率是（ ）

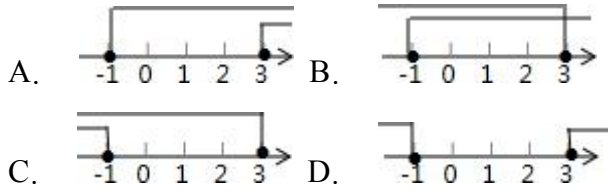


- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

6. 下列式子没有意义的是（ ）

- A. $\sqrt{-3}$ B. $\sqrt{0}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{(-1)^2}$

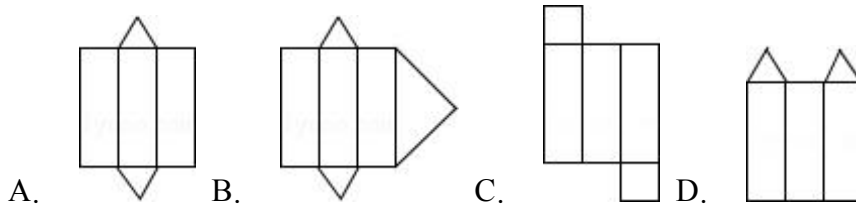
7. 不等式组 $\begin{cases} x+2 \geq 1 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是（ ）



8. 下列图形具有稳定性的是 ()

A. 正方形 B. 矩形 C. 平行四边形 D. 直角三角形

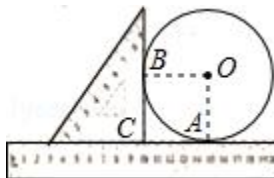
9. 下列图形中可以作为一个三棱柱的展开图的是 ()



10. 下列运算正确的是 ()

A. $x^4 + x^4 = 2x^8$ B. $(x^2)^3 = x^5$ C. $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ D. $x^3 \cdot x = x^4$

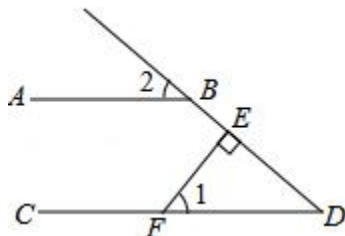
11. 如图, 圆形铁片与直角三角尺、直尺紧靠在一起平放在桌面上. 已知铁片的圆心为 O , 三角尺的直角顶点 C 落在直尺的 10cm 处, 铁片与直尺的唯一公共点 A 落在直尺的 14cm 处, 铁片与三角尺的唯一公共点为 B , 下列说法错误的是 ()



A. 圆形铁片的半径是 4cm B. 四边形 $AOBC$ 为正方形

C. 弧 AB 的长度为 $4\pi\text{cm}$ D. 扇形 OAB 的面积是 $4\pi\text{cm}^2$

12. 如图, $AB \parallel CD$, $FE \perp DB$, 垂足为 E , $\angle 1 = 50^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()

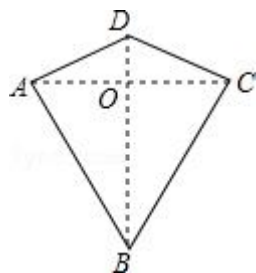


A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

13. 两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”，如图，四边形 ABCD 是一个筝形，其中 $AD=CD$ ， $AB=CB$ ，詹姆斯在探究筝形的性质时，得到如下结论：

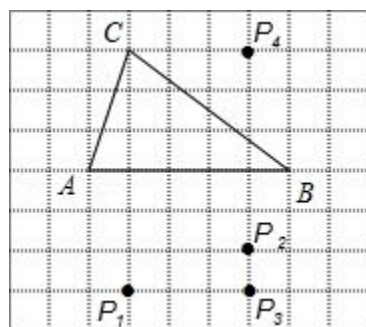
① $AC \perp BD$ ；② $AO=CO=\frac{1}{2}AC$ ；③ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ，

其中正确的结论有（ ）



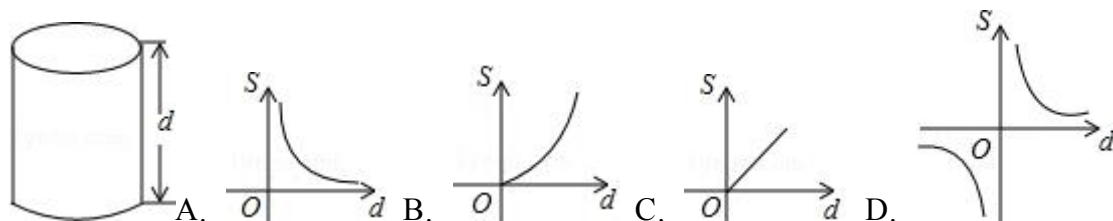
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

14. 如图，在方格纸中，以 AB 为一边作 $\triangle ABP$ ，使之与 $\triangle ABC$ 全等，从 P_1 ， P_2 ， P_3 ， P_4 四个点中找出符合条件的点 P，则点 P 有（ ）



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

15. 如图，市煤气公司计划在地下修建一个容积为 10^4m^3 的圆柱形煤气储存室，则储存室的底面积 S （单位： m^2 ）与其深度 d （单位： m ）的函数图象大致是（ ）



二、解答题（本大题共 9 小题，计 75 分）

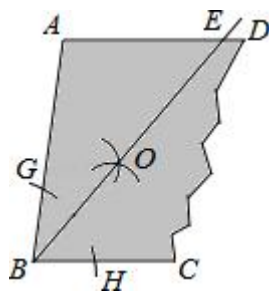
16. 计算： $-2|+3^0 - (-6) \times (-\frac{1}{2})$.

17. 化简: $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1}$.

18. 如图, 一块余料 ABCD, $AD \parallel BC$, 现进行如下操作: 以点 B 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 BA, BC 于点 G, H; 再分别以点 G, H 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}GH$ 的长为半径画弧, 两弧在 $\angle ABC$ 内部相交于点 O, 画射线 BO, 交 AD 于点 E.

(1) 求证: $AB = AE$;

(2) 若 $\angle A = 100^\circ$, 求 $\angle EBC$ 的度数.

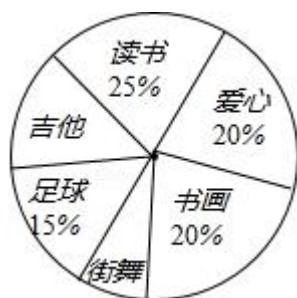


19. 901 班的全体同学根据自己的兴趣爱好参加了六个学生社团 (每个学生必须参加且只参加一个), 为了了解学生参加社团的情况, 学生会对该班参加各个社团的人数进行了统计, 绘制成了如图不完整的扇形统计图, 已知参加“读书社”的学生有 15 人, 请解答下列问题:

(1) 该班的学生共有_____名;

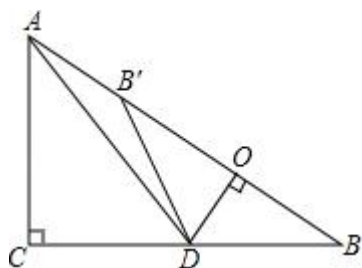
(2) 若该班参加“吉他社”与“街舞社”的人数相同, 请你计算, “吉他社”对应扇形的圆心角的度数;

(3) 901 班学生甲、乙、丙是“爱心社”的优秀社员, 现要从这三名学生中随机选两名学生参加“社区义工”活动, 请你用画树状图或列表的方法求出恰好选中甲和乙的概率.



20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 为边 CB 上的一个动点（点 D 不与点 B 重合），过 D 作 $DO \perp AB$ ，垂足为 O ，点 B' 在边 AB 上，且与点 B 关于直线 DO 对称，连接 DB' ， AD 。

- (1) 求证： $\triangle DOB \sim \triangle ACB$ ；
- (2) 若 AD 平分 $\angle CAB$ ，求线段 BD 的长；
- (3) 当 $\triangle AB'D$ 为等腰三角形时，求线段 BD 的长。



21. 如图，已知点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 4\sqrt{3})$ ，把一个直角三角尺 DEF 放在 $\triangle OAB$ 内，使其斜边 FD 在线段 AB 上，三角尺可沿着线段 AB 上下滑动。其中 $\angle EFD=30^\circ$ ， $ED=2$ ，点 G 为边 FD 的中点。

- (1) 求直线 AB 的解析式；
- (2) 如图 1，当点 D 与点 A 重合时，求经过点 G 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的解析式；
- (3) 在三角尺滑动的过程中，经过点 G 的反比例函数的图象能否同时经过点 F ？如果能，求出此时反比例函数的解析式；如果不能，说明理由。

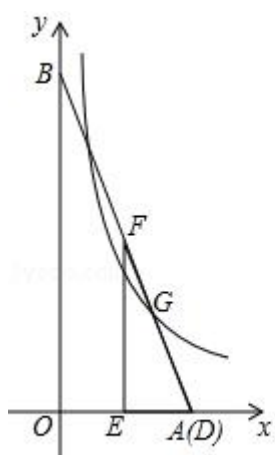


图1

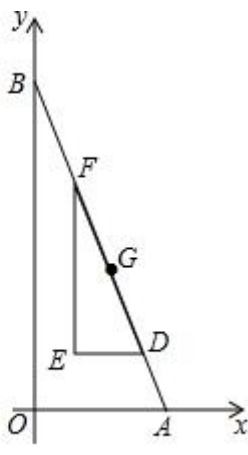


图2

22. 全民健身和医疗保健是社会普遍关注的问题，2014 年，某社区共投入 30 万元用于购买健身器材和药品.

(1) 若 2014 年社区购买健身器材的费用不超过总投入的 $\frac{2}{3}$ ，问 2014 年最低投入多少万元购买药品？

(2) 2015 年，该社区购买健身器材的费用比上一年增加 50%，购买药品的费用比上一年减少 $\frac{7}{16}$ ，但社区在这两方面的总投入仍与 2014 年相同.

①求 2014 年社区购买药品的总费用；

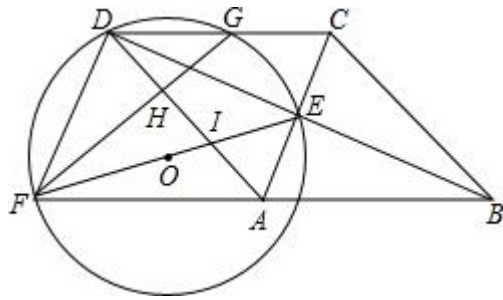
②据统计，2014 年该社区积极健身的家庭达到 200 户，社区用于这些家庭的药品费用明显减少，只占当年购买药品总费用的 $\frac{1}{4}$ ，与 2014 年相比，如果 2015 年社区内健身家庭户数增加的百分比与平均每户健身家庭的药品费用降低的百分比相同，那么，2015 年该社区用于健身家庭的药品费用就是当年购买健身器材费用的 $\frac{1}{7}$ ，求 2015 年该社区健身家庭的户数.

23. 如图，四边形 ABCD 为菱形，对角线 AC，BD 相交于点 E，F 是边 BA 延长线上一点，连接 EF，以 EF 为直径作 $\odot O$ ，交 DC 于 D，G 两点，AD 分别于 EF，GF 交于 I，H 两点.

- (1) 求 $\angle FDE$ 的度数;
- (2) 试判断四边形 $FACD$ 的形状, 并证明你的结论;
- (3) 当 G 为线段 DC 的中点时,

①求证: $FD=FI$;

②设 $AC=2m$, $BD=2n$, 求 $\odot O$ 的面积与菱形 $ABCD$ 的面积之比.



24. 如图 1, $B(2m, 0)$, $C(3m, 0)$ 是平面直角坐标系中两点, 其中 m 为常数, 且 $m > 0$, $E(0, n)$ 为 y 轴上一动点, 以 BC 为边在 x 轴上方作矩形 $ABCD$, 使 $AB=2BC$, 画射线 OA , 把 $\triangle ADC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得 $\triangle A'D'C'$, 连接 ED' , 抛物线 $y=ax^2+bx+n$ ($a \neq 0$) 过 E, A' 两点.

(1) 填空: $\angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$, 用 m 表示点 A' 的坐标: $A'(\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}})$;

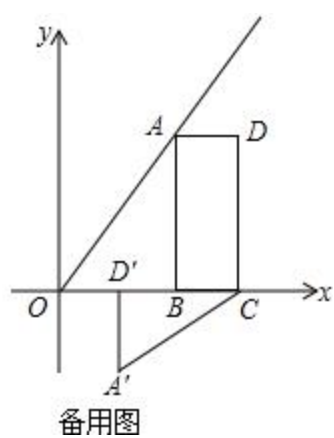
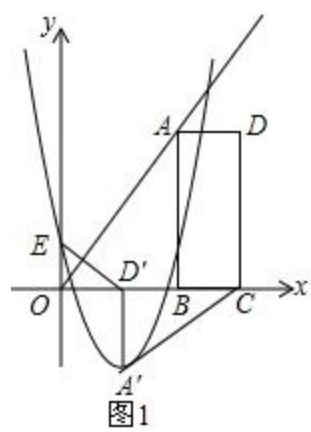
(2) 当抛物线的顶点为 A' , 抛物线与线段 AB 交于点 P , 且 $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$ 时, $\triangle D'OE$

与 $\triangle ABC$ 是否相似? 说明理由;

(3) 若 E 与原点 O 重合, 抛物线与射线 OA 的另一个交点为点 M , 过 M 作 $MN \perp y$ 轴, 垂足为 N :

①求 a, b, m 满足的关系式;

②当 m 为定值, 抛物线与四边形 $ABCD$ 有公共点, 线段 MN 的最大值为 10, 请你探究 a 的取值范围.



2015 年湖北省宜昌市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列各题中，只有一个选项是符合题目要求的，本大题共 15 小题，每小题 3 分，计 45 分）

1. 中国倡导的“一带一路”建设将促进我国与世界各国的互利合作，根据规划，“一带一路”地区覆盖总人口约为 4400000000 人，这个数用科学记数法表示为（ ）

A. 44×10^8 B. 4.4×10^9 C. 4.4×10^8 D. 4.4×10^{10}

考点： 科学记数法—表示较大的数.

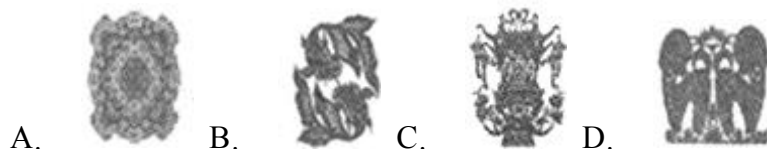
分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答： 解： $4\ 400\ 000\ 000 = 4.4 \times 10^9$,

故选： B.

点评： 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. 下列剪纸图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



考点： 中心对称图形；轴对称图形.

分析： 根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

解答： 解： A、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项正确；

B、不是轴对称图形，因为找不到任何这样的一条直线，沿这条直线对折后它的两部分能够重合；即不满足轴对称图形的定义. 是中心对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，旋转 180 度后它的两部分能够重合；即不满足中心对称图形的定义，故此选项错误.

故选：A.

点评： 此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

3. 陆地上最高处是珠穆朗玛峰顶，高出海平面 8848m，记为+8848m；陆地上最低处是地处亚洲西部的死海，低于海平面约 415m，记为（ ）

A. +415m B. - 415m C. $\pm 415m$ D. - 8848m

考点： 正数和负数.

分析： 根据用正负数表示两种具有相反意义的量的方法，可得：高出海平面 8848m，记为+8848m；则低于海平面约 415m，记为 - 415m，据此解答即可.

解答： 解： $\because$ 高出海平面 8848m，记为+8848m；

$\therefore$ 低于海平面约 415m，记为 - 415m.

故选：B.

点评： 此题主要考查了用正负数表示两种具有相反意义的量，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：具有相反意义的量都是互相依存的两个量，它包含两个要素，一是它们的意义相反，二是它们都是数量.

4. 某校对九年级 6 个班学生平均一周的课外阅读时间进行了统计，分别为（单位：h）：3.5，4，3.5，5，5，3.5. 这组数据的众数是（ ）

A. 3 B. 3.5 C. 4 D. 5

考点： 众数.

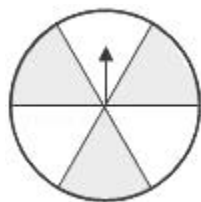
分析： 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数，依此求解即可.

解答： 解：在这一组数据中 3.5 出现了 3 次，次数最多，故众数是 3.5.

故选 B.

点评： 本题考查了众数的定义，求一组数据的众数的方法：找出频数最多的那个数据，若几个数据频数都是最多且相同，此时众数就是这多个数据.

5. 如图是一个可以自由转动的转盘，转盘分为 6 个大小相同的扇形，指针的位置固定，转动的转盘停止后，其中的某个扇形会恰好停在指针所指的位置（指针指向两个扇形的交线时，当作指向右边的扇形），指针指向阴影区域的概率是（ ）



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

考点： 几何概率.

分析： 求出阴影在整个转盘中所占的比例即可解答.

解答： 解： $\because$ 每个扇形大小相同，因此阴影面积与空白的面积相等，

$\therefore$ 落在阴影部分的概率为： $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：C.

点评： 此题主要考查了几何概率，用到的知识点为：概率=相应的面积与总面积之比.

6. 下列式子没有意义的是（ ）

- A. $\sqrt{-3}$ B. $\sqrt{0}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{(-1)^2}$

考点： 二次根式有意义的条件.

分析： 根据二次根式的被开方数是非负数，可得答案.

解答：解：A、 $\sqrt{-3}$ 没有意义，故 A 符合题意；

B、 $\sqrt{0}$ 有意义，故 B 不符合题意；

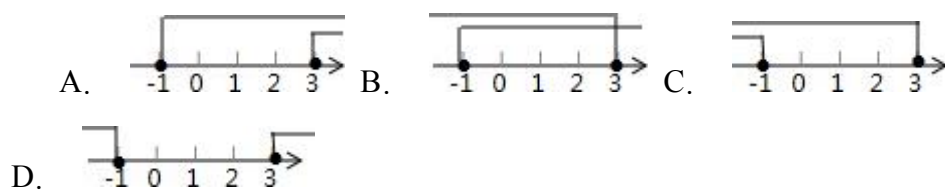
C、 $\sqrt{2}$ 有意义，故 C 不符合题意；

D、 $\sqrt{(-1)^2}$ 有意义，故 D 不符合题意；

故选：A.

点评： 本题考查了二次根式有意义的条件，二次根式的被开方数是非负数是解题关键.

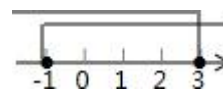
7. 不等式组 $\begin{cases} x+2 \geq 1 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



考点： 在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组.

分析： 根据不等式的基本性质来解不等式组，两个不等式的解集的交集，就是该不等式组的解集；然后把不等式的解集根据不等式解集在数轴上的表示方法画出图示.

解答： 解：不等式组的解集是 $-1 \leq x \leq 3$ ，其数轴上表示为：



故选 B

点评： 不等式组的解集：不等式组的解集可以先求这些个不等式各自的解，然后再找它们的相交的公共部分（最好先在数轴上画出它们的解），找它们的相交的公共部分可以用这个口诀记住：同小取小，同大取大；比大的小，比小的大，取中间；比大的大，比小的小，无解.

8. 下列图形具有稳定性的是 ()

A. 正方形 B. 矩形 C. 平行四边形 D. 直角三角形

考点： 三角形的稳定性；多边形.

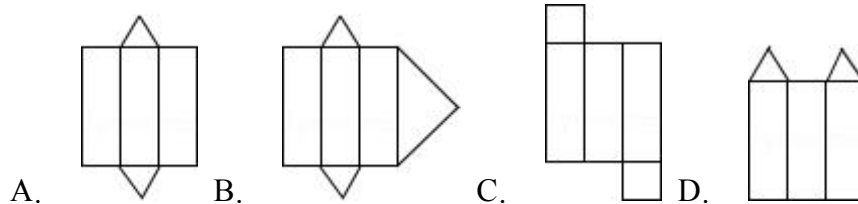
分析： 根据三角形具有稳定性，四边形具有不稳定性进行判断.

解答： 解：直角三角形具有稳定性.

故选： D.

点评： 此题考查了三角形的稳定性和四边形的不稳定性，正确掌握三角形的性质是解题关键.

9. 下列图形中可以作为一个三棱柱的展开图的是 ()



考点： 几何体的展开图.

分析： 三棱柱展开后，侧面是三个长方形，上下底各是一个三角形.

解答： 解：三棱柱展开后，侧面是三个长方形，上下底各是一个三角形由此可得：

只有 A 是三棱柱的展开图.

故选： A

点评： 此题主要考查了三棱柱表面展开图，注意上、下两底面应在侧面展开图长方形的两侧.

10. 下列运算正确的是 ()

A. $x^4 + x^4 = 2x^8$ B. $(x^2)^3 = x^5$ C. $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ D. $x^3 \cdot x = x^4$

考点： 幂的乘方与积的乘方；合并同类项；同底数幂的乘法；完全平方公式.

分析： A：根据合并同类项的方法判断即可.

B：根据幂的乘方的运算方法判断即可.

C：根据完全平方公式的计算方法判断即可.

D：根据同底数幂的乘法法则判断即可.

解答： 解： $\because x^4 + x^4 = 2x^4$,

$\therefore$ 选项 A 不正确;

$\because (x^2)^3 = x^6$,

$\therefore$ 选项 B 不正确;

$\because (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$,

$\therefore$ 选项 C 不正确;

$\because x^3 \cdot x = x^4$,

$\therefore$ 选项 D 正确.

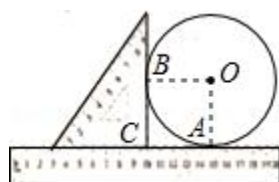
故选：D.

点评： (1) 此题主要考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：① $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)；② $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

(2) 此题还考查了同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①底数必须相同；②按照运算性质，只有相乘时才是底数不变，指数相加.

(3) 此题还考查了完全平方公式，以及合并同类项的方法，要熟练掌握.

11. 如图，圆形铁片与直角三角尺、直尺紧靠在一起平放在桌面上. 已知铁片的圆心为 O ，三角尺的直角顶点 C 落在直尺的 10cm 处，铁片与直尺的唯一公共点 A 落在直尺的 14cm 处，铁片与三角尺的唯一公共点为 B ，下列说法错误的是 ()



A. 圆形铁片的半径是 4cm B. 四边形 AOBC 为正方形

C. 弧 AB 的长度为 4π cm D. 扇形 OAB 的面积是 4π cm²

考点： 切线的性质；正方形的判定与性质；弧长的计算；扇形面积的计算.

专题： 应用题.

分析： 由 BC, AC 分别是 $\odot O$ 的切线, B, A 为切点, 得到 $OA \perp CA$, $OB \perp BC$, 又 $\angle C=90^\circ$, $OA=OB$, 推出四边形 AOBC 是正方形, 得到 $OA=AC=4$, 故 A, B 正确; 根据扇形的弧长、面积的计算公式求出结果即可进行判断.

解答： 解: 由题意得: BC, AC 分别是 $\odot O$ 的切线, B, A 为切点,
 $\therefore OA \perp CA$, $OB \perp BC$,

又 $\because \angle C=90^\circ$, $OA=OB$,

$\therefore$ 四边形 AOBC 是正方形,

$\therefore OA=AC=4$, 故 A, B 正确;

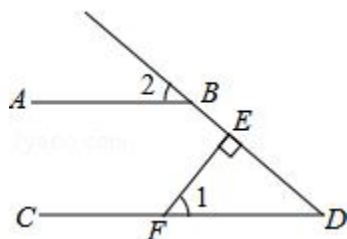
$\therefore \widehat{AB}$ 的长度为: $\frac{90 \cdot 4\pi}{180}=2\pi$, 故 C 错误;

$S_{\text{扇形} OAB} = \frac{90 \cdot \pi \cdot 4^2}{360}=4\pi$, 故 D 正确.

故选 C.

点评： 本题考查了切线的性质, 正方形的判定和性质, 扇形的弧长、面积的计算, 熟记计算公式是解题的关键.

12. 如图, $AB \parallel CD$, $FE \perp DB$, 垂足为 E, $\angle 1=50^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



A. 60° B. 50° C. 40° D. 30°

考点： 平行线的性质.

分析： 先根据直角三角形的性质求出 $\angle D$ 的度数, 再由平行线的性质即可得出结论.

解答： 解: $\because FE \perp DB$,

$\therefore \angle DEF=90^\circ$.

$\because \angle 1=50^\circ$,

$$\therefore \angle D = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle D = 40^\circ.$$

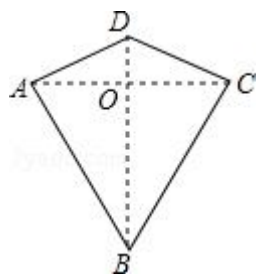
故选 C.

点评： 本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，同位角相等.

13. 两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”，如图，四边形 ABCD 是一个筝形，其中 $AD=CD$ ， $AB=CB$ ，詹姆斯在探究筝形的性质时，得到如下结论：

$$\textcircled{1} AC \perp BD; \textcircled{2} AO=CO=\frac{1}{2}AC; \textcircled{3} \triangle ABD \cong \triangle CBD,$$

其中正确的结论有 ()



A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

考点： 全等三角形的判定与性质.

专题： 新定义.

分析： 先证明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 全等，再证明 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COD$ 全等即可判断.

解答： 解：在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ AB=CB, \\ DB=DB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD \text{ (SSS),}$$

故 $\textcircled{3}$ 正确;

$$\therefore \angle ADB = \angle CDB,$$

在 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COD$ 中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ \angle ADB=\angle CDB, \\ OD=OD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COD$ (SAS),

$\therefore \angle AOD = \angle COD = 90^\circ$, $AO = OC$,

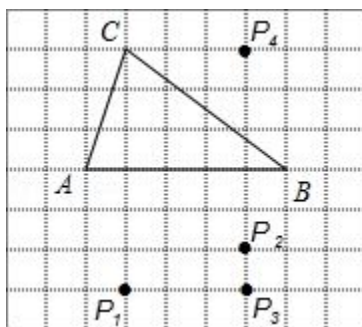
$\therefore AC \perp DB$,

故①②正确;

故选 D

点评: 此题考查全等三角形的判定和性质, 关键是根据 SSS 证明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 全等和利用 SAS 证明 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COD$ 全等.

14. 如图, 在方格纸中, 以 AB 为一边作 $\triangle ABP$, 使之与 $\triangle ABC$ 全等, 从 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 四个点中找出符合条件的点 P, 则点 P 有 ()



A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

考点: 全等三角形的判定.

分析: 根据全等三角形的判定得出点 P 的位置即可.

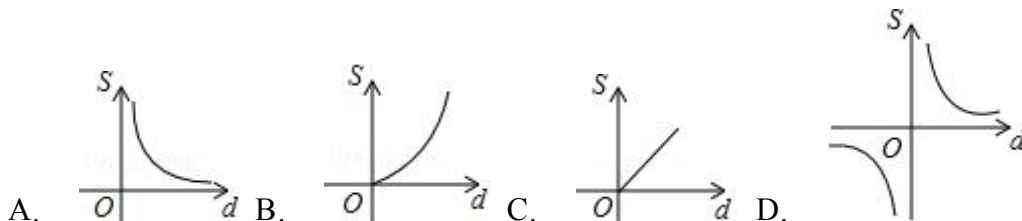
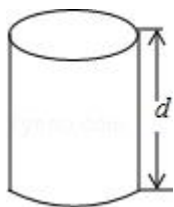
解答: 解: 要使 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 全等, 点 P 到 AB 的距离应该等于点 C 到 AB 的距离, 即 3 个单位长度, 故点 P 的位置可以是 P_1 , P_3 , P_4 三个,

故选 C

点评: 此题考查全等三角形的判定, 关键是利用全等三角形的判定进行判定点 P 的位置.

15. 如图，市煤气公司计划在地下修建一个容积为 10^4m^3 的圆柱形煤气储存室，则储存室的底面积 S （单位： m^2 ）与其深度 d （单位： m ）的函数图象大致是

()



考点： 反比例函数的应用；反比例函数的图象.

分析： 根据储存室的体积=底面积 $\times$ 高即可列出反比例函数关系，从而判定正确的结论.

解答： 解：由储存室的体积公式知： $10^4 = Sd$,

故储存室的底面积 S (m^2) 与其深度 d (m) 之间的函数关系式为 $S = \frac{10^4}{d}$ ($d > 0$)

为反比例函数.

故选：A.

点评： 本题考查了反比例函数的应用及反比例函数的图象，解题的关键是根据自变量的取值范围确定双曲线的具体位置，难度不大.

二、解答题（本大题共 9 小题，计 75 分）

16. 计算： $|-2| + 3^0 - (-6) \times (-\frac{1}{2})$.

考点： 实数的运算；零指数幂.

专题： 计算题.

分析： 原式第一项利用绝对值的代数意义化简，第二项利用零指数幂法则计算，第三项利用乘法法则计算即可得到结果.

解答： 解： 原式 $=2+1-3=0$.

点评： 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

17. 化简： $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$.

考点： 分式的加减法.

分析： 首先约分，然后根据同分母分式加减法法则，求出算式 $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$ 的值是多少即可.

解答： 解： $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x+1}$

$$= \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{x+1}$$
$$= \frac{x+1}{x+1}$$
$$= 1.$$

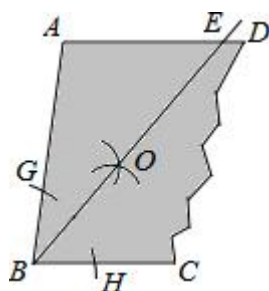
点评： 此题主要考查了分式的加减法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

(1) 同分母分式加减法法则：同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减. (2) 异分母分式加减法法则：把分母不相同的几个分式化成分母相同的分式，叫做通分，经过通分，异分母分式的加减就转化为同分母分式的加减法.

18. 如图，一块余料 ABCD，AD//BC，现进行如下操作：以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 BA，BC 于点 G，H；再分别以点 G，H 为圆心，大于 $\frac{1}{2}GH$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部相交于点 O，画射线 BO，交 AD 于点 E.

(1) 求证：AB=AE；

(2) 若 $\angle A=100^\circ$ ，求 $\angle EBC$ 的度数.



考点： 作图—基本作图； 等腰三角形的判定与性质.

分析： (1) 根据角平分线的性质，可得 $\angle AEB = \angle EBC$ ，根据角平分线的性质，可得 $\angle EBC = \angle ABE$ ，根据等腰三角形的判定，可得答案；

(2) 根据三角形的内角和定理，可得 $\angle AEB$ ，根据平行线的性质，可得答案.

解答： (1) 证明： $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC.$$

由 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle EBC = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ABE,$$

$$\therefore AB = AE;$$

(2) 由 $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle ABE = \angle AEB$ ， 得

$$\angle ABE = \angle AEB = 40^\circ.$$

由 $AD \parallel BC$ ， 得

$$\angle EBC = \angle AEB = 40^\circ.$$

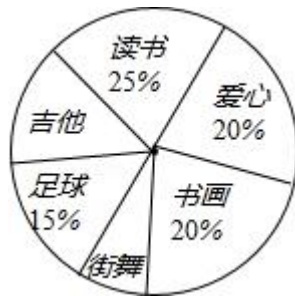
点评： 本题考查了等腰三角形的判定，利用了平行线的性质，角平分线的性质，等腰三角形的判定.

19. 901 班的全体同学根据自己的兴趣爱好参加了六个学生社团（每个学生必须参加且只参加一个），为了了解学生参加社团的情况，学生会对该班参加各个社团的人数进行了统计，绘制成了如图不完整的扇形统计图，已知参加“读书社”的学生有 15 人，请解答下列问题：

(1) 该班的学生共有 60 名；

(2) 若该班参加“吉他社”与“街舞社”的人数相同，请你计算，“吉他社”对应扇形的圆心角的度数；

(3) 901 班学生甲、乙、丙是“爱心社”的优秀社员，现要从这三名学生中随机选两名学生参加“社区义工”活动，请你用画树状图或列表的方法求出恰好选中甲和乙的概率.



考点：列表法与树状图法；扇形统计图.

分析：（1）利用参加“读书社”的学生数除以所占比例进而求出总人数；

（2）首先求出参加“吉他社”的学生在全班学生中所占比例，进而求出对应扇形的圆心角的度数；

（3）首先画出树状图，进而求出恰好选中甲和乙的概率.

解答：解：（1） $\because$ 参加“读书社”的学生有 15 人，且在扇形统计图中，所占比例为：25%，

$\therefore$ 该班的学生共有： $15 \div 25\% = 60$ （人）；

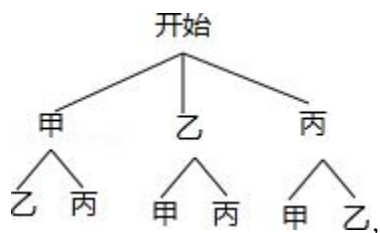
故答案为：60；

（2）参加“吉他社”的学生在全班学生中所占比例为：

$$\frac{1 - 25\% - 20\% - 20\% - 15\%}{2} = 10\%,$$

所以，“吉他社”对应扇形的圆心角的度数为： $360^\circ \times 10\% = 36^\circ$ ；

（3）画树状图如下：



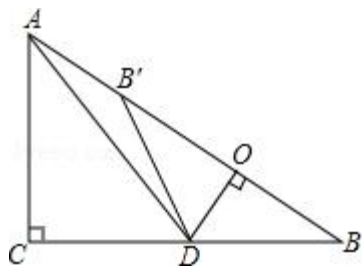
由树状图可知，共有 6 种可能的情况，其中恰好选中甲和乙的情况有 2 种，

故 $P(\text{选中甲和乙}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

点评： 此题考查了扇形统计图以及树状图法求概率，弄清题意得出正确信息是解本题的关键.

20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 为边 CB 上的一个动点（点 D 不与点 B 重合），过 D 作 $DO \perp AB$ ，垂足为 O ，点 B' 在边 AB 上，且与点 B 关于直线 DO 对称，连接 DB' ， AD .

- (1) 求证： $\triangle DOB \sim \triangle ACB$ ；
- (2) 若 AD 平分 $\angle CAB$ ，求线段 BD 的长；
- (3) 当 $\triangle AB'D$ 为等腰三角形时，求线段 BD 的长.



考点： 相似形综合题.

分析： (1) 由 $\angle DOB = \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle B$ ，容易证明 $\triangle DOB \sim \triangle ACB$ ；

(2) 先由勾股定理求出 AB ，由角平分线的性质得出 $DC=DO$ ，再由 HL 证明 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AOD$ ，得出 $AC=AO$ ，设 $BD=x$ ，则 $DC=DO=8-x$ ，由勾股定理得出方程，解方程即可；

(3) 根据题意得出当 $\triangle AB'D$ 为等腰三角形时, $AB'=DB'$, 由 $\triangle DOB \sim \triangle ACB$, 得出 $\frac{OB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, 设 $BD=5x$, 则 $AB'=DB'=5x$, $BO=B'O=4x$, 由 $AB'+B'O+BO=AB$, 得出方程, 解方程求出 x , 即可得出 BD .

解答: (1) 证明: $\because DO \perp AB$,

$$\therefore \angle DOB = \angle DOA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle ACB = 90^\circ,$$

又 $\because \angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle DOB \sim \triangle ACB;$$

(2) 解: $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $DC \perp AC$, $DO \perp AB$,

$$\therefore DC = DO,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 和 $Rt\triangle AOD$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ DC = DO \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle AOD \text{ (HL)},$$

$$\therefore AC = AO = 6,$$

设 $BD=x$, 则 $DC=DO=8-x$, $OB=AB-AO=4$,

在 $Rt\triangle BOD$ 中, 根据勾股定理得: $DO^2 + OB^2 = BD^2$,

$$\text{即 } (8-x)^2 + 4^2 = x^2,$$

解得: $x=5$,

$\therefore BD$ 的长为5;

(3) 解: $\because$ 点 B' 与点 B 关于直线 DO 对称,

$$\therefore \angle B = \angle OB'D, \quad BO = B'O, \quad BD = B'D,$$

$\because \angle B$ 为锐角,

$\therefore \angle OB'D$ 也为锐角,

$\therefore \angle AB'D$ 为钝角,

∴ 当 $\triangle AB'D$ 为等腰三角形时, $AB'=DB'$,

∴ $\triangle DOB \sim \triangle ACB$,

$$\therefore \frac{OB}{BD} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

设 $BD=5x$,

则 $AB'=DB'=5x$, $BO=B'O=4x$,

∴ $AB'+B'O+BO=AB$,

$$\therefore 5x+4x+4x=10,$$

解得: $x=\frac{10}{13}$,

$$\therefore BD=\frac{50}{13}.$$

点评: 本题是相似形综合题目, 考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理、全等三角形的判定与性质、角平分线的性质等知识; 本题难度较大, 综合性强, 特别是 (2) (3) 中, 需要根据题意列出方程, 解方程才能得出结果.

21. 如图, 已知点 $A(4, 0)$, $B(0, 4\sqrt{3})$, 把一个直角三角尺 DEF 放在 $\triangle OAB$ 内, 使其斜边 FD 在线段 AB 上, 三角尺可沿着线段 AB 上下滑动. 其中 $\angle EFD=30^\circ$, $ED=2$, 点 G 为边 FD 的中点.

(1) 求直线 AB 的解析式;

(2) 如图 1, 当点 D 与点 A 重合时, 求经过点 G 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的解析式;

(3) 在三角尺滑动的过程中, 经过点 G 的反比例函数的图象能否同时经过点 F ? 如果能, 求出此时反比例函数的解析式; 如果不能, 说明理由.

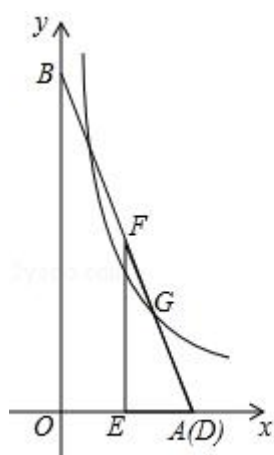


图1

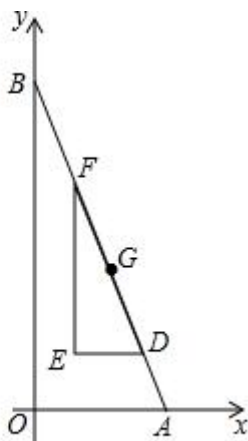


图2

考点：反比例函数综合题.

分析：（1）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ，把点 A、B 的坐标代入，组成方程组，解方程组求出 k、b 的值即可；

（2）由 $Rt\triangle DEF$ 中，求出 EF、DF，在求出点 D 坐标，得出点 F、G 坐标，把点 G 坐标代入反比例函数求出 k 即可；

（3）设 $F(t, -\sqrt{3}t+4\sqrt{3})$ ，得出 D、G 坐标，设过点 G 和 F 的反比例函数解析式为 $y=\frac{m}{x}$ ，用待定系数法求出 t、m，即可得出反比例函数解析式.

解答：解：（1）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ，

$$\because A(4, 0), B(0, 4\sqrt{3}),$$

$$\therefore \begin{cases} 4k+b=0 \\ b=4\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-\sqrt{3} \\ b=4\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 AB 的解析式为: } y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3};$$

$$(2) \because \text{在 } Rt\triangle DEF \text{ 中, } \angle EFD=30^\circ, ED=2,$$

$$\therefore EF=2\sqrt{3}, DF=4,$$

$$\because \text{点 D 与点 A 重合,}$$

$$\therefore D(4, 0),$$

$$\therefore F(2, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore G(3, \sqrt{3}),$$

∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 G,

$$\therefore k = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{3\sqrt{3}}{x};$$

(3) 经过点 G 的反比例函数的图象能同时经过点 F; 理由如下:

∵ 点 F 在直线 AB 上,

$$\therefore \text{设 } F(t, -\sqrt{3}t + 4\sqrt{3}),$$

又 ∵ ED = 2,

$$\therefore D(t+2, -\sqrt{3}t + 2\sqrt{3}),$$

∵ 点 G 为边 FD 的中点.

$$\therefore G(t+1, -\sqrt{3}t + 3\sqrt{3}),$$

若过点 G 的反比例函数的图象也经过点 F,

$$\text{设解析式为 } y = \frac{m}{x},$$

$$\text{则 } \begin{cases} -\sqrt{3}t + 3\sqrt{3} = \frac{m}{t+1} \\ -\sqrt{3}t + 4\sqrt{3} = \frac{m}{t} \end{cases},$$

$$\text{整理得: } (-\sqrt{3}t + 3\sqrt{3})(t+1) = (-\sqrt{3}t + 4\sqrt{3})t,$$

$$\text{解得: } t = \frac{3}{2},$$

$$\therefore m = \frac{15\sqrt{3}}{4},$$

∴ 经过点 G 的反比例函数的图象能同时经过点 F, 这个反比例函数解析式为:

$$y = \frac{15\sqrt{3}}{4x}.$$

点评: 本题是反比例函数综合题目, 考查了用待定系数法求一次函数的解析式、求反比例函数的解析式、坐标与图形特征、解直角三角形、解方程组等知识; 本题难度较大, 综合性强, 用待定系数法确定一次函数和反比例函数的解析式是解决问题的关键.

22. 全民健身和医疗保健是社会普遍关注的问题, 2014 年, 某社区共投入 30 万元用于购买健身器材和药品.

(1) 若 2014 年社区购买健身器材的费用不超过总投入的 $\frac{2}{3}$, 问 2014 年最低投入多少万元购买药品?

(2) 2015 年, 该社区购买健身器材的费用比上一年增加 50%, 购买药品的费用比上一年减少 $\frac{7}{16}$, 但社区在这两方面的总投入仍与 2014 年相同.

①求 2014 年社区购买药品的总费用;

②据统计, 2014 年该社区积极健身的家庭达到 200 户, 社区用于这些家庭的药品费用明显减少, 只占当年购买药品总费用的 $\frac{1}{4}$, 与 2014 年相比, 如果 2015 年社区内健身家庭户数增加的百分比与平均每户健身家庭的药品费用降低的百分比相同, 那么, 2015 年该社区用于健身家庭的药品费用就是当年购买健身器材费用的 $\frac{1}{7}$, 求 2015 年该社区健身家庭的户数.

考点: 一元二次方程的应用; 二元一次方程组的应用; 一元一次不等式的应用.

专题: 应用题.

分析: (1) 设 2014 年购买药品的费用为 x 万元, 根据购买健身器材的费用不超过总投入的 $\frac{2}{3}$, 列出不等式, 求出不等式的解集即可得到结果;

(2) ①设 2014 年社区购买药品的费用为 y 万元, 则购买健身器材的费用为 $(30 - y)$ 万元, 2015 年购买健身器材的费用为 $(1 + 50\%)(30 - y)$ 万元, 购买药品的费用为 $(1 - \frac{7}{16})y$ 万元, 根据题意列出方程, 求出方程的解得到 y 的值, 即可得到结果;

②设这个相同的百分数为 m , 则 2015 年健身家庭的药品费用为 $200(1 + m)$, 根据 2015 年该社区用于健身家庭的药品费用就是当年购买健身器材费用的 $\frac{1}{7}$, 列出方程, 求出方程的解即可得到结果.

解答: 解: (1) 设 2014 年购买药品的费用为 x 万元,

根据题意得: $30 - x \leq \frac{2}{3} \times 30$,

解得: $x \geq 10$,

则 2014 年最低投入 10 万元购买商品;

(2) ①设 2014 年社区购买药品的费用为 y 万元, 则购买健身器材的费用为 $(30 - y)$ 万元,

2015 年购买健身器材的费用为 $(1+50\%) (30 - y)$ 万元, 购买药品的费用为 $(1 - \frac{7}{16}) y$ 万元,

根据题意得: $(1+50\%) (30 - y) + (1 - \frac{7}{16}) y = 30$,

解得: $y=16$, $30 - y=14$,

则 2014 年购买药品的总费用为 16 万元;

②设这个相同的百分数为 m , 则 2015 年健身家庭的药品费用为 $200 (1+m)$,

2015 年平均每户健身家庭的药品费用为 $\frac{16 \times \frac{1}{4}}{200} (1 - m)$ 万元,

依题意得: $200 (1+m) \cdot \frac{16 \times \frac{1}{4}}{200} (1 - m) = (1+50\%) \times 14 \times \frac{1}{7}$,

解得: $m = \pm \frac{1}{2}$,

$\because m > 0$, $\therefore m = \frac{1}{2} = 50\%$,

$\therefore 200 (1+m) = 300$ (户),

则 2015 年该社区健身家庭的户数为 300 户.

点评: 此题考查了一元二次方程的应用, 二元一次方程组的应用, 以及一元一次不等式的应用, 熟练掌握运算是解本题的关键.

23. 如图, 四边形 ABCD 为菱形, 对角线 AC, BD 相交于点 E, F 是边 BA 延长线上一点, 连接 EF, 以 EF 为直径作 $\odot O$, 交 DC 于 D, G 两点, AD 分别于 EF, GF 交于 I, H 两点.

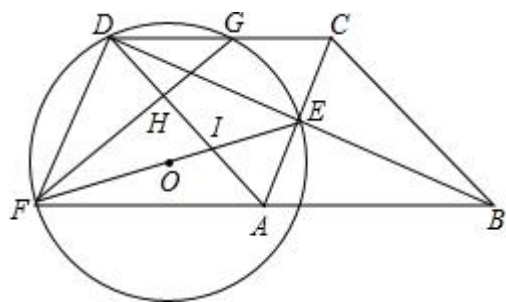
(1) 求 $\angle FDE$ 的度数;

(2) 试判断四边形 FACD 的形状, 并证明你的结论;

(3) 当 G 为线段 DC 的中点时,

①求证: $FD=FI$;

②设 $AC=2m$, $BD=2n$, 求 $\odot O$ 的面积与菱形 $ABCD$ 的面积之比.



考点：圆的综合题；等腰三角形的判定；直角三角形斜边上的中线；勾股定理；三角形中位线定理；平行四边形的判定与性质；菱形的性质.

专题: 综合题

分析: (1) 根据直径所对的圆周角是直角即可得到 $\angle FDE = 90^\circ$;

(2) 由四边形 ABCD 是菱形可得 $AB \parallel CD$ ，要证四边形 FACD 是平行四边形，只需证明 $DF \parallel AC$ ，只需证明 $\angle AEB = \angle FDE$ ，由于 $\angle FDE = 90^\circ$ ，只需证明 $\angle$

$\angle AEB=90^\circ$, 根据四边形 ABCD 是菱形即可得到结论;

(3) ①连接 GE, 如图, 易证 GE 是 $\triangle ACD$ 的中位线, 即可得到 $GE \parallel DA$, 即可得到 $\angle FHI = \angle FGE = \angle FGE = 90^\circ$. 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $DG = GE$, 从而有 $\widehat{DG} = \widehat{GE}$, 根据圆周角定理可得 $\angle 1 = \angle 2$, 根据等角的余角相等可得 $\angle 3 = \angle 4$, 根据等角对等边可得 $FD = DI$; ②易知 $S_{\odot O} = \pi \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi m^2$, $S_{\text{菱形} ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2n = 2mn$, 要求 $\odot O$ 的面积与菱形 $ABCD$ 的面积之比, 只需得到 m 与 n 的关系, 易证 $EI = EA = m$, $DF = AC = 2m$, $EF = FI + IE = DF + AE = 3m$, 在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中运用勾股定理即可解决问题.

解答: 解: (1) $\because EF$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle FDE = 90^\circ$;

(2) 四边形 $FACD$ 是平行四边形.

理由如下:

$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD, AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FDE,$$

$$\therefore AC \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 FACD 是平行四边形;

(3) ①连接 GE, 如图.

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形, $\therefore$ 点 E 为 AC 中点.

$\because$ G 为线段 DC 的中点, $\therefore GE \parallel DA,$

$$\therefore \angle FHI = \angle FGE.$$

$\because$ EF 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle FGE = 90^\circ,$

$$\therefore \angle FHI = 90^\circ.$$

$\because \angle DEC = \angle AEB = 90^\circ,$ G 为线段 DC 的中点,

$$\therefore DG = GE,$$

$$\therefore \widehat{DG} = \widehat{GE},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore FD = FI;$$

$$\textcircled{2} \because AC \parallel DF, \therefore \angle 3 = \angle 6.$$

$$\because \angle 4 = \angle 5, \angle 3 = \angle 4,$$

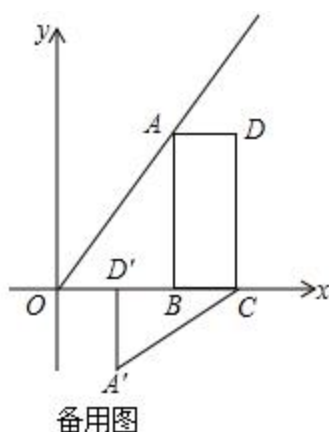
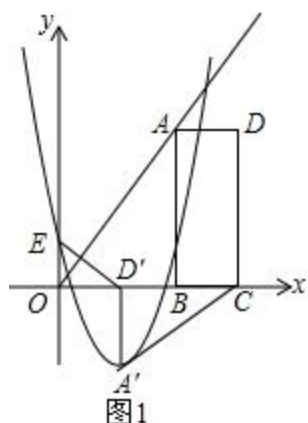
$$\therefore \angle 5 = \angle 6, \therefore EI = EA.$$

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形, 四边形 FACD 是平行四边形,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BD = n, AE = \frac{1}{2}AC = m, FD = AC = 2m,$$

$$\therefore EF = FI + IE = FD + AE = 3m.$$

②当 m 为定值, 抛物线与四边形 $ABCD$ 有公共点, 线段 MN 的最大值为 10, 请你探究 a 的取值范围.



考点： 二次函数综合题.

专题： 综合题.

分析： (1) 由 B 与 C 的坐标求出 OB 与 OC 的长，根据 $OC - OB$ 表示出 BC 的长，由题意 $AB = 2BC$ ，表示出 AB，得到 $AB = OB$ ，即三角形 AOB 为等腰直角三角形，即可求出所求角的度数；由旋转的性质得： $OD' = D'A' = m$ ，即可确定出 A' 坐标；

(2) $\triangle D'OE \sim \triangle ABC$ ，理由如下：根据题意表示出 A 与 B 的坐标，由 $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{3}$ ，表示出 P 坐标，由抛物线的顶点为 A'，表示出抛物线解析式，把点 E 坐标代入整理得到 m 与 n 的关系式，利用两边对应成比例且夹角相等的三角形相似即可得证；

(3) ①当 E 与原点重合时，把 A 与 E 坐标代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，整理即可得到 a, b, m 的关系式；

②抛物线与四边形 ABCD 有公共点，可得出抛物线过点 C 时的开口最大，过点 A 时的开口最小，分两种情况考虑：若抛物线过点 C (3m, 0)，此时 MN 的最大值为 10，求出此时 a 的值；若抛物线过点 A (2m, 2m)，求出此时 a 的值，即可确定出抛物线与四边形 ABCD 有公共点时 a 的范围.

解答： 解：(1) $\because B(2m, 0), C(3m, 0)$,
 $\therefore OB = 2m, OC = 3m$, 即 $BC = m$,
 $\therefore AB = 2BC$,

$$\therefore AB=2m=OB,$$

$$\therefore \angle ABO=90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABO$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AOB=45^\circ,$$

由旋转的性质得: $OD'=D'A'=m$, 即 $A' (m, -m)$;

故答案为: $45; m, -m$;

(2) $\triangle D'OE \sim \triangle ABC$, 理由如下:

由已知得: $A (2m, 2m)$, $B (2m, 0)$,

$$\therefore \frac{BP}{AP} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P (2m, \frac{1}{2}m),$$

$\therefore A'$ 为抛物线的顶点,

$\therefore$ 设抛物线解析式为 $y=a (x-m)^2 - m$,

$\therefore$ 抛物线过点 $E (0, n)$,

$$\therefore n=a (0-m)^2 - m, \text{ 即 } m=2n,$$

$$\therefore OE: OD'=BC: AB=1: 2,$$

$$\therefore \angle EOD'=\angle ABC=90^\circ,$$

$$\therefore \triangle D'OE \sim \triangle ABC;$$

(3) ①当点 E 与点 O 重合时, $E (0, 0)$,

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 E, A ,

$$\therefore \begin{cases} n=0 \\ am^2+bm+n=-m \end{cases},$$

整理得: $am+b=-1$, 即 $b=-1-am$;

② $\therefore$ 抛物线与四边形 $ABCD$ 有公共点,

$\therefore$ 抛物线过点 C 时的开口最大, 过点 A 时的开口最小,

若抛物线过点 $C (3m, 0)$, 此时 MN 的最大值为 10 ,

$$\therefore a(3m)^2 - (1+am) \cdot 3m = 0,$$

整理得： $am = \frac{1}{2}$ ，即抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2m}x^2 - \frac{3}{2}x$ ，

由 A (2m, 2m)，可得直线 OA 解析式为 $y = x$ ，

联立抛物线与直线 OA 解析式得：
$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{2m}x^2 - \frac{3}{2}x \end{cases}$$

解得： $x = 5m$ ， $y = 5m$ ，即 M (5m, 5m)，

令 $5m = 10$ ，即 $m = 2$ ，

当 $m = 2$ 时， $a = \frac{1}{4}$ ；

若抛物线过点 A (2m, 2m)，则 $a(2m)^2 - (1+am) \cdot 2m = 2m$ ，

解得： $am = 2$ ，

$\therefore m = 2$ ，

$\therefore a = 1$ ，

则抛物线与四边形 ABCD 有公共点时 a 的范围为 $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$ 。

点评： 此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：坐标与图形性质，等腰直角三角形的判定与性质，直线与抛物线的交点，以及二次函数的图象与性质，熟练掌握二次函数的性质是解本题的关键。