

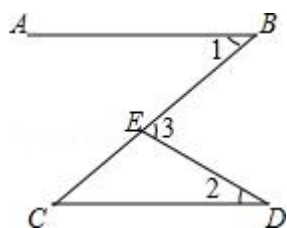
2015 年湖北省十堰市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. 函数 $y=\sqrt{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（ ）

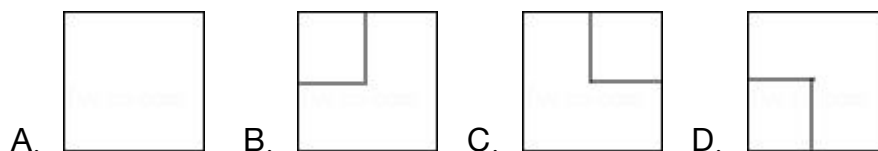
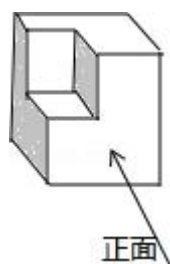
- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

2. 如图， $AB \parallel CD$ ，点 E 在线段 BC 上，若 $\angle 1=40^\circ$ ， $\angle 2=30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数是（ ）



- A. 70° B. 60° C. 55° D. 50°

3. 如图所示的几何体的俯视图是（ ）



4. 下列计算中，不正确的是（ ）

- A. $-2x+3x=x$ B. $6xy^2 \div 2xy=3y$
C. $(-2x^2y)^3 = -6x^6y^3$ D. $2xy^2 \cdot (-x) = -2x^2y^2$

5. 某校篮球队 13 名同学的身高如下表：

身高 (cm)	175	180	182	185	188
人数 (个)	1	5	4	2	1

则该校篮球队 13 名同学身高的众数和中位数分别是（ ）

- A. 182, 180 B. 180, 180 C. 180, 182 D. 188, 182

6. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-4, 2)$ ， $B(-6, -4)$ ，以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ()

A. $(-2, 1)$

B. $(-8, 4)$

C. $(-8, 4)$ 或 $(8, -4)$

D. $(-2, 1)$ 或 $(2, -1)$

7. 当 $x=1$ 时， $ax+b+1$ 的值为 -2 ，则 $(a+b-1)(1-a-b)$ 的值为 ()

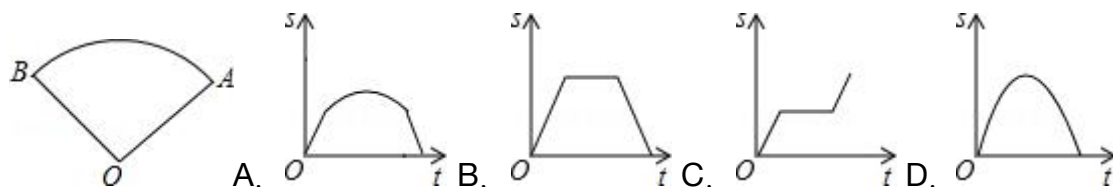
A. -16

B. -8

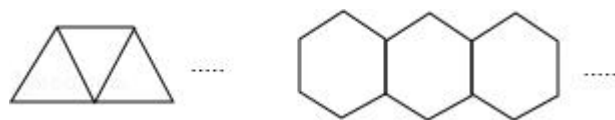
C. 8

D. 16

8. 如图，一只蚂蚁从 O 点出发，沿着扇形 OAB 的边缘匀速爬行一周，当蚂蚁运动的时间为 t 时，蚂蚁与 O 点的距离为 s ，则 s 关于 t 的函数图象大致是 ()



9. 如图，分别用火柴棍连续搭建正三角形和正六边形，公共边只用一根火柴棍. 如果搭建正三角形和正六边形共用了 2016 根火柴棍，并且正三角形的个数比正六边形的个数多 6 个，那么能连续搭建正三角形的个数是 ()



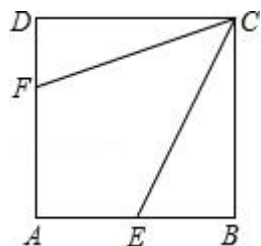
A. 222

B. 280

C. 286

D. 292

10. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，点 E 、 F 分别在 AB ， AD 上，若 $CE=3\sqrt{5}$ ，且 $\angle ECF=45^\circ$ ，则 CF 的长为 ()



A. $2\sqrt{10}$

B. $3\sqrt{5}$

C. $\frac{5}{3}\sqrt{10}$

D. $\frac{10}{3}\sqrt{5}$

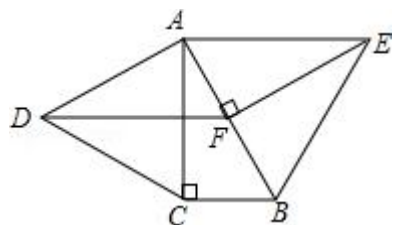
二、填空题（本题有 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 光的速度大约是 300000 千米/秒，将 300000 用科学记数法表示_____.

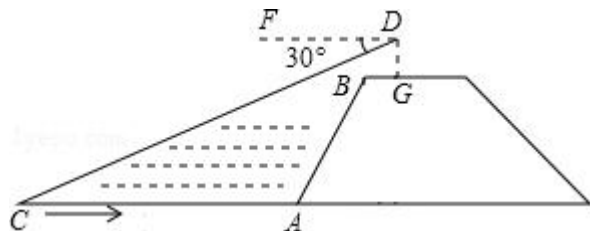
12. 计算： $3^{-1} + (\pi - 3)^0 - |-\frac{1}{3}| =$ _____.

13. 不等式组 $\begin{cases} x \leq 3x+2 \\ x-1 < 2-2x \end{cases}$ 的整数解是_____.

14. 如图，分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 及斜边 AB 为边向外作等边 $\triangle ACD$ 、等边 $\triangle ABE$ ， $EF \perp AB$ ，垂足为 F ，连接 DF ，当 $\frac{AC}{AB}$ _____时，四边形 $ADFE$ 是平行四边形.



15. 如图，小华站在河岸上的 G 点，看见河里有一小船沿垂直于岸边的方向划过来. 此时，测得小船 C 的俯角是 $\angle FDC = 30^\circ$ ，若小华的眼睛与地面的距离是 1.6 米， $BG = 0.7$ 米， BG 平行于 AC 所在的直线，迎水坡 $i = 4:3$ ，坡长 $AB = 8$ 米，点 A 、 B 、 C 、 D 、 F 、 G 在同一平面内，则此时小船 C 到岸边的距离 CA 的长为_____米.（结果保留根号）



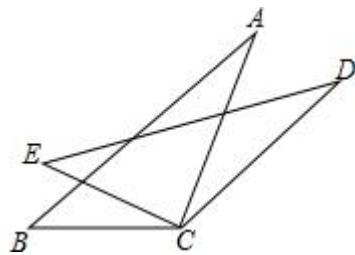
16. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a , b , c 为常数，且 $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，当 $x < -1$ 时， y 随着 x 的增大而减小. 下列结论：① $abc > 0$ ；② $a + b > 0$ ；③若点 $A(-3, y_1)$ ，点 $B(3, y_2)$ 都在抛物线上，则 $y_1 < y_2$ ；④ a

$(m-1)+b=0$; ⑤若 $c \leq -1$, 则 $b^2 - 4ac \leq 4a$. 其中结论错误的是_____ . (只填写序号)

三、解答题 (本题有 9 小题, 共 72 分)

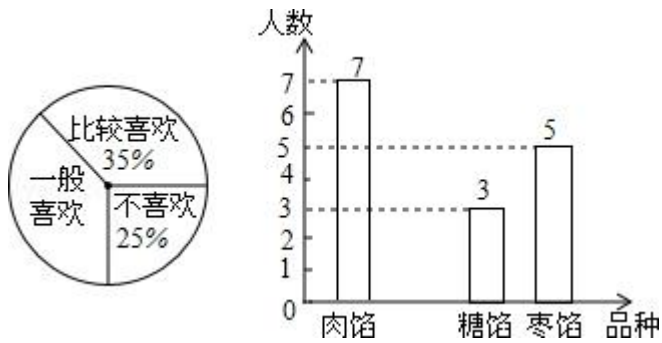
17. 化简: $(a - \frac{1}{a}) \div (1 + \frac{a^2 - 2}{a})$

18. 如图, $CA=CD$, $\angle B=\angle E$, $\angle BCE=\angle ACD$. 求证: $AB=DE$.



19. 在我市开展“五城联创”活动中, 某工程队承担了某小区 900 米长的污水管道改造任务. 工程队在改造完 360 米管道后, 引进了新设备, 每天的工作效率比原来提高了 20%, 结果共用 27 天完成了任务, 问引进新设备前工程队每天改造管道多少米?

20. 端午节是我国的传统节日, 人们有吃粽子的习惯. 某校数学兴趣小组为了了解本校学生喜爱粽子的情况, 随机抽取了 50 名同学进行问卷调查, 经过统计后绘制了两幅尚不完整的统计图 (注: 每一位同学在任何一种分类统计中只有一种选择)



请根据统计图完成下列问题:

- (1) 扇形统计图中, “很喜欢”所对应的圆心角为_____度; 条形统计图中, 喜欢“糖馅”粽子的人数为_____人;
- (2) 若该校学生人数为 800 人, 请根据上述调查结果, 估计该校学生中“很喜欢”和“比较喜欢”粽子的人数之和;
- (3) 小军最爱吃肉馅粽子, 小丽最爱吃糖馅粽子. 某天小霞带了重量、外包装完全一样的肉馅、糖馅、枣馅、海鲜馅四种粽子各一只, 让小军、小丽每人各选一只. 请用树状图或列表法求小军、小丽两人中有且只有一人选中自己最爱吃的粽子的概率.

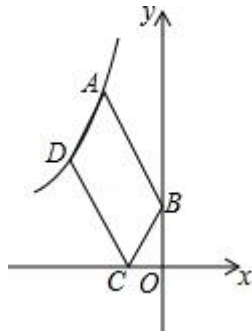
21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$.

- (1) 若方程有实数根, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若方程两实数根分别为 x_1 、 x_2 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|$, 求实数 m 的值.

22. 如图, 点 $A(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 上.

- (1) 求 k 的值;

(2) 在 y 轴上取点 $B(0, 1)$ ，为双曲线上是否存在点 D ，使得以 AB, AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的顶点 C 在 x 轴的负半轴上？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。



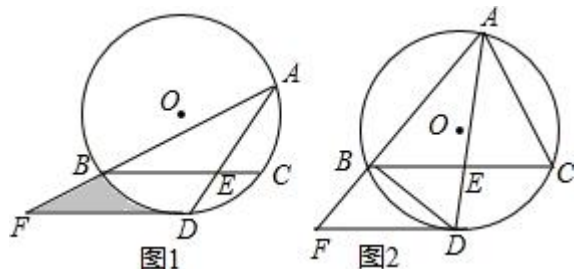
23. 为支持国家南水北调工程建设，小王家由原来养殖户变为种植户，经市场调查得知，种植草莓不超过 20 亩时，所得利润 y （元）与种植面积 m （亩）满足关系式 $y=1500m$ ；超过 20 亩时， $y=1380m+2400$ 。而当种植樱桃的面积不超过 15 亩时，每亩可获得利润 1800 元；超过 15 亩时，每亩获得利润 z （元）与种植面积 x （亩）之间的函数关系如下表（为所学过的一次函数、反比例函数或二次函数中的一种）。

x （亩）	20	25	30	35
z （元）	1700	1600	1500	1400

(1) 设小王家种植 x 亩樱桃所获得的利润为 P 元，直接写出 P 关于 x 的函数关系式，并写出自变量的取值范围；(2) 如果小王家计划承包 40 亩荒山种植草莓和樱桃，当种植樱桃面积 x （亩）满足 $0 < x < 20$ 时，求小王家总共获得的利润 w （元）的最大值。

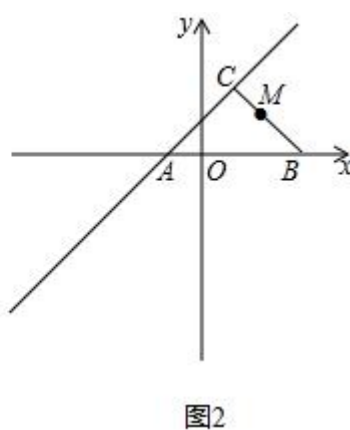
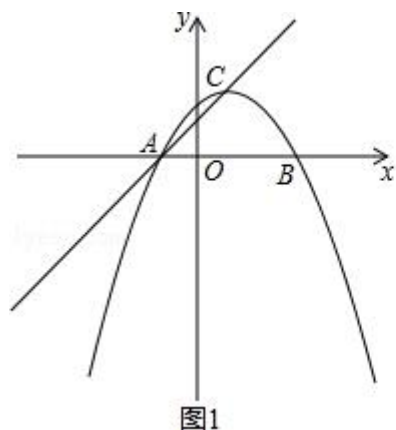
24. 如图 1， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D ，交 BC 于点 E ($BE > EC$)，且 $BD=2\sqrt{3}$ 。过点 D 作 $DF \parallel BC$ ，交 AB 的延长线于点 F 。

- (1) 求证: DF 为 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\angle BAC=60^\circ$, $DE=\sqrt{7}$, 求图中阴影部分的面积;
- (3) 若 $\frac{AB}{AC}=\frac{4}{3}$, $DF+BF=8$, 如图 2, 求 BF 的长.



25. 已知抛物线 $C_1: y=ax^2+bx+\frac{3}{2}$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-1, 0)$ 和 $B(3, 0)$.

- (1) 求抛物线 C_1 的解析式, 并写出其顶点 C 的坐标;
- (2) 如图 1, 把抛物线 C_1 沿着直线 AC 方向平移到某处时得到抛物线 C_2 , 此时点 A, C 分别平移到点 D, E 处. 设点 F 在抛物线 C_1 上且在 x 轴的下方, 若 $\triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形, 求点 F 的坐标;
- (3) 如图 2, 在 (2) 的条件下, 设点 M 是线段 BC 上一动点, $EN \perp EM$ 交直线 BF 于点 N , 点 P 为线段 MN 的中点, 当点 M 从点 B 向点 C 运动时: ① $\tan \angle ENM$ 的值如何变化? 请说明理由; ② 点 M 到达点 C 时, 直接写出点 P 经过的路线长.



2015 年湖北省十堰市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. 函数 $y=\sqrt{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

【考点】 函数自变量的取值范围.

【分析】 根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

【解答】 解：由题意得， $x - 1 \geq 0$,

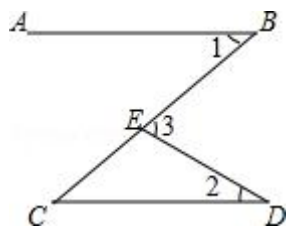
解得 $x \geq 1$.

故选 B.

【点评】 本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

2. 如图， $AB \parallel CD$ ，点 E 在线段 BC 上，若 $\angle 1=40^\circ$ ， $\angle 2=30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数是（ ）



- A. 70° B. 60° C. 55° D. 50°

【考点】 平行线的性质.

【分析】 先根据平行线的性质求出 $\angle C$ 的度数，再由三角形外角的性质即可得出结论.

【解答】 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 1=40^\circ$ ， $\angle 1=30^\circ$ ，
 $\therefore \angle C=40^\circ$.

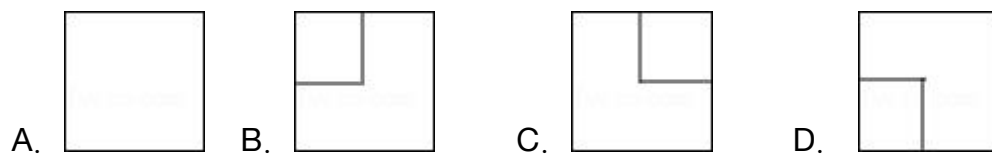
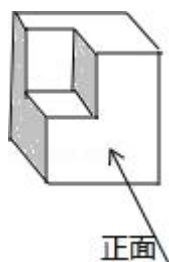
$\because \angle 3$ 是 $\triangle CDE$ 的外角，

$\therefore \angle 3=\angle C+\angle 2=40^\circ+30^\circ=70^\circ$.

故选 A.

【点评】 本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，内错角相等.

3. 如图所示的几何体的俯视图是 ()



【考点】 简单组合体的三视图.

【分析】 根据从上面看得到的视图是俯视图，可得答案.

【解答】 解：从上面看是一个大正方形，大正方形内部的左下角是一个小正方形，

故选：D.

【点评】 本题考查了简单组合体的三视图，从上面看的到的视图是俯视图.

4. 下列计算中，不正确的是（ ）

A. $-2x+3x=x$

B. $6xy^2 \div 2xy=3y$

C. $(-2x^2y)^3 = -6x^6y^3$

D. $2xy^2 \cdot (-x) = -2x^2y^2$

【考点】 整式的除法；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；单项式乘单项式.

【分析】 根据同类项、同底数幂的除法、积的乘方以及整式的乘法计算即可.

【解答】 解：A、 $-2x+3x=x$ ，正确；

B、 $6xy^2 \div 2xy=3y$ ，正确；

C、 $(-2x^2y)^3 = -8x^6y^3$ ，错误；

D、 $2xy^2 \cdot (-x) = -2x^2y^2$ ，正确；

故选 C.

【点评】 此题考查同类项、同底数幂的除法、积的乘方以及整式的乘法，关键是根据法则进行计算.

5. 某校篮球队 13 名同学的身高如下表：

身高 (cm)	175	180	182	185	188
人数 (个)	1	5	4	2	1

则该校篮球队 13 名同学身高的众数和中位数分别是（ ）

A. 182, 180 B. 180, 180 C. 180, 182 D. 188, 182

【考点】 众数；中位数.

【分析】 找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数；众数是一组数据中出现次数最多的数据.

【解答】 解：由图表可得，众数是：182cm，

中位数是：180cm.

故选：A.

【点评】 本题为统计题，考查众数与中位数的意义. 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后，最中间的那个数 (或最中间两个数的平均数)，叫做这组数据的中位数. 如果中位数的概念掌握得不好，不把数据按要求重新排列，就会出错.

6. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-4, 2)$ ， $B(-6, -4)$ ，以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ()

- A. $(-2, 1)$ B. $(-8, 4)$
- C. $(-8, 4)$ 或 $(8, -4)$ D. $(-2, 1)$ 或 $(2, -1)$

【考点】 位似变换; 坐标与图形性质.

【分析】 根据在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k ，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$ ，即可求得答案.

【解答】 解: $\because$ 点 A $(-4, 2)$, B $(-6, -4)$, 以原点 O 为位似中心, 相似比为 $\frac{1}{2}$, 把 $\triangle ABO$ 缩小,

∴ 点 A 的对应点 A' 的坐标是: $(-2, 1)$ 或 $(2, -1)$.

故选: D.

【点评】 此题考查了位似图形与坐标的关系. 此题比较简单, 注意在平面直角坐标系中, 如果位似变换是以原点为位似中心, 相似比为 k , 那么位似图形对应点的坐标比等于 $\pm k$.

7. 当 $x=1$ 时, $ax+b+1$ 的值为 -2 , 则 $(a+b-1)(1-a-b)$ 的值为 ()

- A. -16 B. -8 C. 8 D. 16

【考点】 整式的混合运算—化简求值.

【分析】 由 $x=1$ 时，代数式 $ax+b+1$ 的值是 -2 ，求出 $a+b$ 的值，将所得的值代入所求的代数式中进行计算即可得解.

【解答】 解：∵当 $x=1$ 时， $ax+b+1$ 的值为 -2 ，

$$\therefore a+b+1=-2,$$

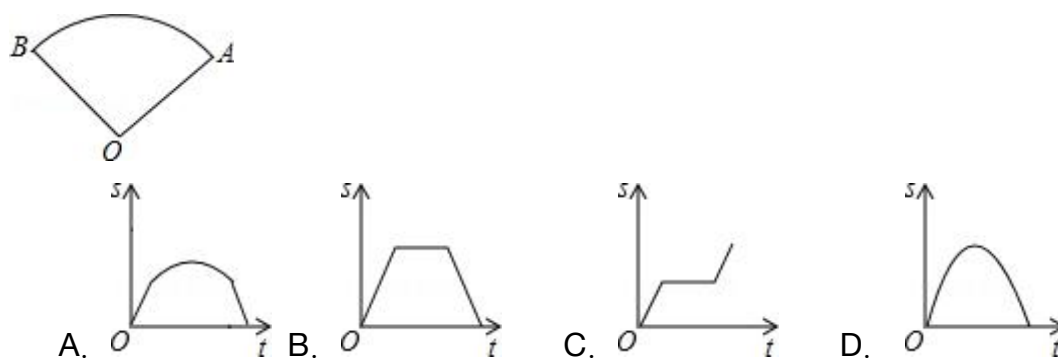
$$\therefore a+b=-3,$$

$$\therefore (a+b-1)(1-a-b) = (-3-1) \times (1+3) = -16.$$

故选：A.

【点评】 此题考查整式的化简求值，运用整体代入法是解决问题的关键.

8. 如图，一只蚂蚁从 O 点出发，沿着扇形 OAB 的边缘匀速爬行一周，当蚂蚁运动的时间为 t 时，蚂蚁与 O 点的距离为 s ，则 s 关于 t 的函数图象大致是()



【考点】 动点问题的函数图象.

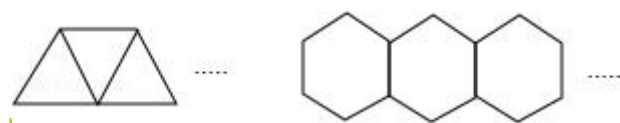
【分析】 根据蚂蚁在 $\widehat{AB}$ 上运动时，随着时间的变化，距离不发生变化，得出图象是与 x 轴平行的线段，即可得出结论.

【解答】 解：一只蚂蚁从 O 点出发，沿着扇形 OAB 的边缘匀速爬行，在开始时经过半径 OA 这一段，蚂蚁到 O 点的距离随运动时间 t 的增大而增大；到弧 AB 这一段，蚂蚁到 O 点的距离 S 不变，图象是与 x 轴平行的线段；走另一条半径 OB 时， S 随 t 的增大而减小；

故选：B.

【点评】 本题主要考查动点问题的函数图象；根据随着时间的变化，到弧 AB 这一段，蚂蚁到 O 点的距离 S 不变，得到图象的特点是解决本题的关键.

9. 如图, 分别用火柴棍连续搭建正三角形和正六边形, 公共边只用一根火柴棍. 如果搭建正三角形和正六边形共用了 2016 根火柴棍, 并且正三角形的个数比正六边形的个数多 6 个, 那么能连续搭建正三角形的个数是 ()



- A. 222 B. 280 C. 286 D. 292

【考点】 规律型: 图形的变化类.

【分析】 设连续搭建三角形 x 个, 连续搭建正六边形 y 个, 根据搭建三角形和正六边形共用了 2016 根火柴棍, 并且三角形的个数比正六边形的个数多 6 个, 列方程组求解

【解答】 解: 设连续搭建三角形 x 个, 连续搭建正六边形 y 个.

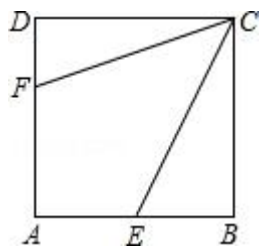
$$\text{由题意得, } \begin{cases} 2x+1+5y+1=2016 \\ x-y=6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=292 \\ y=286 \end{cases}.$$

故选 D.

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用及图形的变化类问题, 解答本题的关键是读懂题意, 仔细观察图形, 找出合适的等量关系, 列方程组求解.

10. 如图, 正方形 ABCD 的边长为 6, 点 E、F 分别在 AB, AD 上, 若 $CE=3\sqrt{5}$, 且 $\angle ECF=45^\circ$, 则 CF 的长为 ()



A. $2\sqrt{10}$

B. $3\sqrt{5}$

C. $\frac{5}{3}\sqrt{10}$

D. $\frac{10}{3}\sqrt{5}$

【考点】 全等三角形的判定与性质；勾股定理；正方形的性质.

【分析】 首先延长 FD 到 G，使 $DG=BE$ ，利用正方形的性质得

$\angle B = \angle CDF = \angle CDG = 90^\circ$ ， $CB=CD$ ；利用 SAS 定理得 $\triangle BCE \cong \triangle DCG$ ，利用

全等三角形的性质易得 $\triangle GCF \cong \triangle ECF$ ，利用勾股定理可得 $AE=3$ ，设 $AF=x$ ，

利用 $GF=EF$ ，解得 x ，利用勾股定理可得 CF.

【解答】 解：如图，延长 FD 到 G，使 $DG=BE$ ；

连接 CG、EF；

$\because$ 四边形 ABCD 为正方形，

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle DCG$ 中，

$$\begin{cases} CB=CD \\ \angle CBE=\angle CDG, \\ BE=DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG$ (SAS),

$\therefore CG=CE$, $\angle DCG = \angle BCE$,

$\therefore \angle GCF = 45^\circ$,

在 $\triangle GCF$ 与 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} GC=EC \\ \angle GCF=\angle ECF, \\ CF=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle GCF \cong \triangle ECF$ (SAS),

$\therefore GF=EF$,

$$\because CE=3\sqrt{5}, CB=6,$$

$$\therefore BE=\sqrt{CE^2-CB^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-6^2}=3,$$

$$\therefore AE=3,$$

$$\text{设 } AF=x, \text{ 则 } DF=6-x, GF=3+(6-x)=9-x,$$

$$\therefore EF=\sqrt{AE^2+x^2}=\sqrt{9+x^2},$$

$$\therefore (9-x)^2=9+x^2,$$

$$\therefore x=4,$$

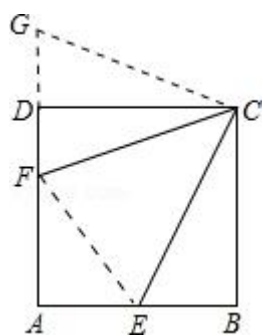
$$\text{即 } AF=4,$$

$$\therefore GF=5,$$

$$\therefore DF=2,$$

$$\therefore CF=\sqrt{CD^2+DF^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10},$$

故选 A.



【点评】 本题主要考查了全等三角形的判定及性质，勾股定理等，构建全等三角形，利用方程思想是解答此题的关键.

二、填空题 (本题有 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

11. 光的速度大约是 300000 千米/秒，将 300000 用科学记数法表示为__

3.0×10^5 .

【考点】 科学记数法—表示较大的数.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】 解: 将 300000 用科学记数法表示为 3.0×10^5 .

故答案为: 3.0×10^5 .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 计算: $3^{-1} + (\pi - 3)^0 - \left| -\frac{1}{3} \right| = \underline{1}$.

【考点】 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂.

专题: 计算题.

【分析】 原式第一项利用负整数指数幂法则计算, 第二项利用零指数幂法则计算, 最后一项利用绝对值的代数意义化简, 计算即可得到结果.

【解答】 解: 原式 $= \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 1$,

故答案为: 1

【点评】 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

13. 不等式组 $\begin{cases} x \leq 3x+2 \\ x-1 < 2-2x \end{cases}$ 的整数解是 $\underline{-1, 0}$.

【考点】 一元一次不等式组的整数解.

【分析】 首先解不等式组求得不等式的解集, 然后确定解集中的整数解即可.

【解答】 解: $\begin{cases} x \leq 3x+2 \text{ ①} \\ x-1 < 2-2x \text{ ②} \end{cases}$,

解①得： $x \geq -1$,

解②得： $x < 1$,

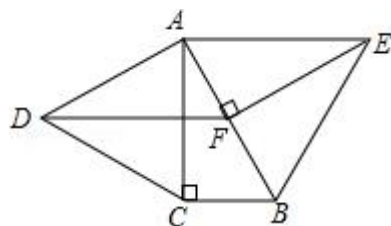
则不等式组的解集是： $-1 \leq x < 1$,

则整数解是： $-1, 0$.

故答案是： $-1, 0$.

【点评】 本题考查了不等式组的整数解，正确解不等式组是解题的关键.

14. 如图，分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 及斜边 AB 为边向外作等边 $\triangle ACD$ 、等边 $\triangle ABE$ ， $EF \perp AB$ ，垂足为 F ，连接 DF ，当 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，四边形 $ADFE$ 是平行四边形.



【考点】 平行四边形的判定；等边三角形的性质.

【分析】 由三角形 ABE 为等边三角形， EF 垂直于 AB ，利用三线合一得到 EF 为角平分线，得到 $\angle AEF = 30^\circ$ ，进而确定 $\angle BAC = \angle AEF$ ，再由一对直角相等，及 $AE = AB$ ，利用 AAS 即可得证 $\triangle ABC \cong \triangle EAF$ ；由 $\angle BAC$ 与 $\angle DAC$ 度数之和为 90° ，得到 DA 垂直于 AB ，而 EF 垂直于 AB ，得到 EF 与 AD 平行，再由全等得到 $EF = AC$ ，而 $AC = AD$ ，可得出一组对边平行且相等，即可得证.

【解答】 解：当 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

理由： $\because \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle CAB = 30^\circ$,

$\because \triangle ABE$ 为等边三角形, $EF \perp AB$,

$\therefore EF$ 为 $\angle BEA$ 的平分线, $\angle AEB=60^\circ$, $AE=AB$,

$\therefore \angle FEA=30^\circ$, 又 $\angle BAC=30^\circ$,

$\therefore \angle FEA=\angle BAC$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACB=\angle EFA \\ \angle BAC=\angle AEF, \\ AB=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAF$ (AAS);

$\because \angle BAC=30^\circ$, $\angle DAC=60^\circ$,

$\therefore \angle DAB=90^\circ$, 即 $DA \perp AB$,

$\because EF \perp AB$,

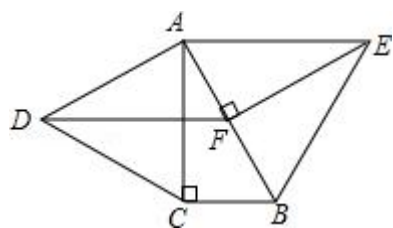
$\therefore AD \parallel EF$,

$\because \triangle ABC \cong \triangle EAF$,

$\therefore EF=AC=AD$, [来源:Zxxk.Com]

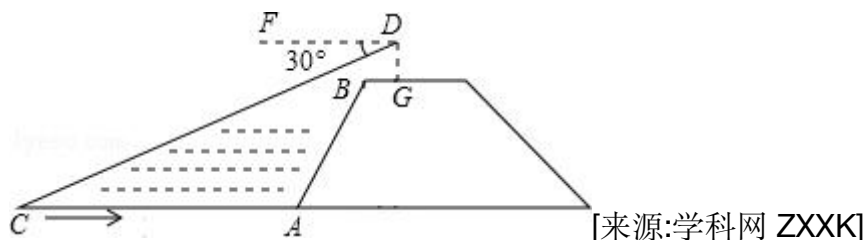
$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点评】 此题考查了平行四边形的判定、平行线的判定与性质、全等三角形的判定与性质以及等边三角形的性质, 熟练掌握判定与性质是解本题的关键.

15. 如图, 小华站在河岸上的 G 点, 看见河里有一小船沿垂直于岸边的方向划过来. 此时, 测得小船 C 的俯角是 $\angle FDC=30^\circ$, 若小华的眼睛与地面的距离是 1.6 米, $BG=0.7$ 米, BG 平行于 AC 所在的直线, 迎水坡 $i=4:3$, 坡长 $AB=8$ 米, 点 A、B、C、D、F、G 在同一平面内, 则此时小船 C 到岸边的距离 CA 的长为 $8\sqrt{3}-5.5$ 米. (结果保留根号)



【考点】 解直角三角形的应用-仰角俯角问题; 解直角三角形的应用-坡度坡角问题.

【分析】 把 AB 和 CD 都整理为直角三角形的斜边, 利用坡度和勾股定理易得点 B 和点 D 到水面的距离, 进而利用俯角的正切值可求得 CH 长度. $CH - AE = EH$ 即为 AC 长度.

【解答】 解: 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E, 延长 DG 交 CA 于点 H, 得 $Rt\triangle ABE$ 和矩形 BEHG.

$$\because i = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{3}, \quad AB = 8 \text{ 米},$$

$$\therefore BE = \frac{32}{5}, \quad AE = \frac{24}{5}.$$

$$\because DG = 1.6, \quad BG = 0.7,$$

$$\therefore DH = DG + GH = 1.6 + \frac{32}{5} = 8,$$

$$AH = AE + EH = \frac{24}{5} + 0.7 = 5.5.$$

在 $Rt\triangle CDH$ 中,

$$\because \angle C = \angle FDC = 30^\circ, DH = 8, \tan 30^\circ = \frac{DH}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

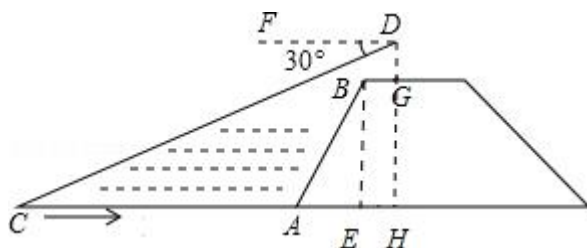
$$\therefore CH = 8\sqrt{3}.$$

$$\text{又} \because CH = CA + 5.5,$$

$$\text{即 } 8\sqrt{3} = CA + 5.5,$$

$$\therefore CA = 8\sqrt{3} - 5.5 \text{ (米)}.$$

答：CA 的长约为 $(8\sqrt{3} - 5.5)$ 米.



【点评】 此题考查了俯角与坡度的知识. 注意构造所给坡度和所给锐角所在的直角三角形是解决问题的难点, 利用坡度和三角函数求值得到相应线段的长度是解决问题的关键.

16. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$, 且 $1 < m < 2$, 当 $x < -1$ 时, y 随着 x 的增大而减小. 下列结论: ① $abc > 0$; ② $a + b > 0$; ③ 若点 $A(-3, y_1)$, 点 $B(3, y_2)$ 都在抛物线上, 则 $y_1 < y_2$; ④ $a(m-1) + b = 0$; ⑤ 若 $c \leq -1$, 则 $b^2 - 4ac \leq 4a$. 其中结论错误的是 ③⑤. (只填写序号)

【考点】 二次函数图象与系数的关系.

专题: 数形结合.

【分析】 根据题意画出抛物线的大致图象, 利用函数图象, 由抛物线开口方向得 $a > 0$, 由抛物线的对称轴位置得 $b < 0$, 由抛物线与 y 轴的交点位置得 $c < 0$, 于是可对①进行判断; 由于抛物线过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$, 且 $1 < m < 2$,

根据抛物线的对称性和对称轴方程得到 $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$, 变形可得 $a+b > 0$, 则可对

②进行判断; 利用点 A $(-3, y_1)$ 和点 B $(3, y_2)$ 到对称轴的距离的大小可对

③进行判断; 根据抛物线上点的坐标特征得 $a-b+c=0$, $am^2+bm+c=0$, 两式相

减得 $am^2-a+bm+b=0$, 然后把等式左边分解后即可得到 $a(m-1)+b=0$, 则

可对④进行判断; 根据顶点的纵坐标公式和抛物线对称轴的位置得到 $\frac{4ac-b^2}{4a} <$

$c \leq -1$, 变形得到 $b^2-4ac > 4a$, 则可对⑤进行判断.

【解答】 解: 如图,

$\because$ 抛物线开口向上,

$\therefore a > 0$,

$\because$ 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,

$\therefore b < 0$,

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$\therefore c < 0$,

$\therefore abc > 0$, 所以①的结论正确;

$\because$ 抛物线过点 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$, 且 $1 < m < 2$,

$\therefore 0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$,

$\therefore a+b > 0$, 所以②的结论正确;

$\because$ 点 A $(-3, y_1)$ 到对称轴的距离比点 B $(3, y_2)$ 到对称轴的距离远,

$\therefore y_1 > y_2$, 所以③的结论错误;

$\because$ 抛物线过点 $(-1, 0)$, $(m, 0)$,

$\therefore a-b+c=0$, $am^2+bm+c=0$,

$\therefore am^2-a+bm+b=0$,

$$a(m+1)(m-1)+b(m+1)=0,$$

$\therefore a(m-1)+b=0$, 所以④的结论正确;

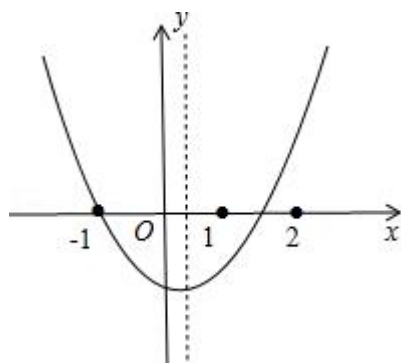
$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a} < c,$$

而 $c \leq -1$,

$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a} < -1,$$

$\therefore b^2-4ac > 4a$, 所以⑤的结论错误.

故答案为③⑤.



【点评】 本题考查了二次函数图象与系数的关系: 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小, 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右. (简称: 左同右异); 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点: 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$. 抛物线与 x 轴交点个数由 Δ 决定: $\Delta=b^2-4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta=b^2-4ac=0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta=b^2-4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

三、解答题 (本题有 9 小题, 共 72 分)

17. 化简: $(a - \frac{1}{a}) \div (1 + \frac{a^2 - 2}{a})$

【考点】 分式的混合运算.

专题: 计算题.

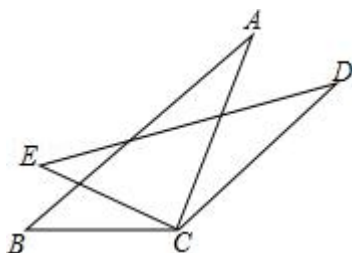
【分析】 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加减法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分即可得到结果.

【解答】 解: 原式

$$= \frac{a^2 - 1}{a} \div \frac{a + a^2 - 2}{a} = \frac{(a+1)(a-1)}{a} \cdot \frac{a}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a+2}.$$

【点评】 此题考查了分式的混合运算, 熟练掌握运算是解本题的关键.

18. 如图, $CA=CD$, $\angle B=\angle E$, $\angle BCE=\angle ACD$. 求证: $AB=DE$.



【考点】 全等三角形的判定与性质.

专题: 证明题.

【分析】 如图, 首先证明 $\angle ACB=\angle DCE$, 这是解决问题的关键性结论; 然后运用 AAS 公理证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$, 即可解决问题.

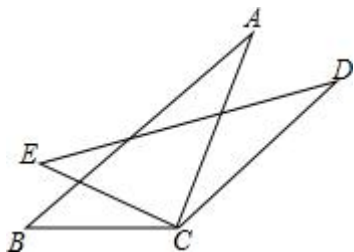
【解答】 解: 如图, $\because \angle BCE=\angle ACD$,

$\therefore \angle ACB=\angle DCE$; 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACB=\angle DCE \\ \angle B=\angle E \\ CA=CD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ (AAS),

$\therefore AB=DE$.



【点评】 该题主要考查了全等三角形的判定及其性质的应用问题；解题的关键是牢固掌握全等三角形的判定方法，这是灵活运用、解题的基础和关键.

19. 在我市开展“五城联创”活动中，某工程队承担了某小区 900 米长的污水管道改造任务. 工程队在改造完 360 米管道后，引进了新设备，每天的工作效率比原来提高了 20%，结果共用 27 天完成了任务，问引进新设备前工程队每天改造管道多少米？

【考点】 分式方程的应用.

【分析】 首先设原来每天改造管道 x 米，则引进新设备前工程队每天改造管道 $(1+20\%)x$ 米，由题意得等量关系：原来改造 360 米管道所用时间+引进了新设备改造 540 米所用时间=27 天，根据等量关系列出方程，再解即可.

【解答】 解：设原来每天改造管道 x 米，由题意得：

$$\frac{360}{x} + \frac{900 - 360}{(1+20\%)x} = 27,$$

解得： $x=30$,

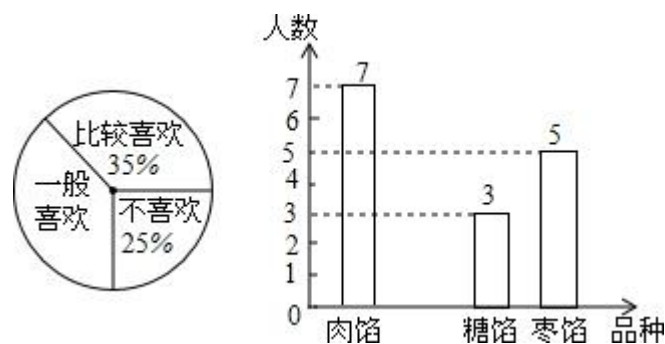
经检验： $x=30$ 是原分式方程的解，

$$(1+20\%)x = 1.2 \times 30 = 36.$$

答：引进新设备前工程队每天改造管道 36 米.

【点评】 此题主要考查了分式方程的应用，关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，列出方程，注意分式方程不要忘记检验.

20. 端午节是我国的传统节日，人们有吃粽子的习惯. 某校数学兴趣小组为了了解本校学生喜爱粽子的情况，随机抽取了 50 名同学进行问卷调查，经过统计后绘制了两幅尚不完整的统计图（注：每一位同学在任何一种分类统计中只有一种选择）



请根据统计图完成下列问题：

(1) 扇形统计图中，“很喜欢”所对应的圆心角为 144 度；条形统计图中，喜欢“糖馅”粽子的人数为 3 人；[来源:Z*xx*k.Com]

(2) 若该校学生人数为 800 人，请根据上述调查结果，估计该校学生中“很喜欢”和“比较喜欢”粽子的人数之和；

(3) 小军最爱吃肉馅粽子，小丽最爱吃糖馅粽子. 某天小霞带了重量、外包装完全一样的肉馅、糖馅、枣馅、海鲜馅四种粽子各一只，让小军、小丽每人各选一只. 请用树状图或列表法求小军、小丽两人中有且只有一人选中自己最爱吃的粽子的概率.

【考点】 列表法与树状图法；用样本估计总体；扇形统计图；条形统计图.

【分析】 (1) 用周角乘以很喜欢所占的百分比即可求得其圆心角，直接从条形统计图中得到喜欢糖馅的人数即可；

(2) 利用总人数 800 乘以所对应的百分比即可；

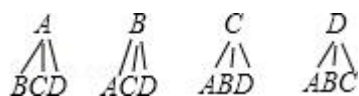
(3) 利用列举法表示，然后利用概率公式即可求解

【解答】 解：(1) 扇形统计图中，“很喜欢”所对应的圆心角为 $360^\circ \times 40\% = 144$

度；条形统计图中，喜欢“糖馅”粽子的人数为 3 人；

(2) 学生有 800 人，估计该校学生中“很喜欢”和“比较喜欢”粽子的人数之和为 $800 \times (1 - 25\%) = 600$ (人)；

(3) 肉馅、糖馅、枣馅、海鲜馅四种粽子分别用 A、B、C、D 表示，画图如下：



$\therefore$ 共 12 种等可能的结果，其中小军、小丽两人中有且只有一人选中自己最爱吃的粽子有 4 种，

$\therefore P$ (小军、小丽两人中有且只有一人选中自己最爱吃的粽子) $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$.

(1) 若方程有实数根，求实数 m 的取值范围；

(2) 若方程两实数根分别为 x_1 、 x_2 ，且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|$ ，求实数 m 的值.

【考点】 根的判别式；根与系数的关系.

【分析】 (1) 根据根的判别式的意义得到 $\Delta \geq 0$ ，即 $(2m+3)^2 - 4(m^2+2) \geq 0$ ，解不等式即可；

(2) 根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 2m+3$ ， $x_1 x_2 = m^2 + 2$ ，再变形已知条件得到

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 31 + |x_1 x_2|$ ，代入即可得到结果.

【解答】 解：(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta \geq 0, \text{ 即 } (2m+3)^2 - 4(m^2+2) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -\frac{1}{12};$$

$$(2) \text{ 根据题意得 } x_1 + x_2 = 2m+3, \quad x_1 x_2 = m^2 + 2,$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\text{即 } (2m+3)^2 - 2(m^2+2) = 31 + m^2 + 2,$$

$$\text{解得 } m=2, \quad m=-14 \text{ (舍去),}$$

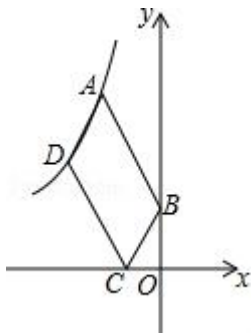
$$\therefore m=2.$$

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。也考查了一元二次方程根与系数的关系。

22. 如图，点 A $(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 上。

(1) 求 k 的值；

(2) 在 y 轴上取点 B $(0, 1)$ ，为双曲线上是否存在点 D，使得以 AB, AD 为邻边的平行四边形 ABCD 的顶点 C 在 x 轴的负半轴上？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。



【考点】 反比例函数综合题.

【分析】 (1) 直接利用反比例函数图象上点的坐标性质代入求出即可;

(2) 根据平行四边形的性质得出 D 点纵坐标, 进而代入函数解析式得出 D 点横坐标即可.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 A $(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 上,

$$\therefore k = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 1 - 5 = -4;$$

(2) 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E, 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是以 AB, AD 为邻边的平行四边形 ABCD,

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\because A(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}), B(0, 1),$$

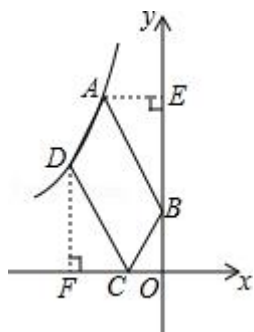
$$\therefore BE = \sqrt{5},$$

由题意可得: $DF = BE = \sqrt{5}$,

$$\text{则 } \sqrt{5} = \frac{-4}{x},$$

$$\text{解得: } x = \frac{-4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \text{点 D 的坐标为: } \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right).$$



【点评】 此题主要考查了反比例函数综合以及平行四边形的性质，得出 D 点纵坐标是解题关键.

23. 为支持国家南水北调工程建设，小王家由原来养殖户变为种植户，经市场调查得知，种植草莓不超过 20 亩时，所得利润 y （元）与种植面积 m （亩）满足关系式 $y=1500m$ ；超过 20 亩时， $y=1380m+2400$. 而当种植樱桃的面积不超过 15 亩时，每亩可获得利润 1800 元；超过 15 亩时，每亩获得利润 z （元）与种植面积 x （亩）之间的函数关系如下表（为所学过的一次函数、反比例函数或二次函数中的一种）.

x （亩）	20	25	30	35
z （元）	1700	1600	1500	1400

(1) 设小王家种植 x 亩樱桃所获得的利润为 P 元，直接写出 P 关于 x 的函数关系式，并写出自变量的取值范围；(2) 如果小王家计划承包 40 亩荒山种植草莓和樱桃，当种植樱桃面积 x （亩）满足 $0 < x < 20$ 时，求小王家总共获得的利润 w （元）的最大值.

【考点】 一次函数的应用.

【分析】 (1) 根据图表的性质，可以得出 P 关于 x 的函数关系式和出 x 的取值范围.

(2) 根据利润=亩数×每亩利润，可得①当 $0 < x \leq 15$ 时 ②当 $15 < x < 20$ 时，利润的函数式，即可解题；

【解答】 解：(1) 观察图表的数量关系，可以得出 P 关于 x 的函数关系式为：

$$P = \begin{cases} 1800x & (0 < x \leq 15) \\ -20x + 2100 & (x > 15) \end{cases}$$

(2) $\because$ 利润=亩数×每亩利润，

$\therefore$ ①当 $0 < x \leq 15$ 时， $W = 1800x + 1380(40 - x) + 2400 = 420x + 55200$ ；

当 $x = 15$ 时， W 有最大值， $W_{\text{最大}} = 6300 + 55200 = 61500$ ；

②当 $15 < x < 20$ ， $W = -20x + 2100 + 1380(40 - x) + 2400 = -1400x + 59700$ ；

$\therefore -1400x + 59700 < 61500$ ；

$\therefore x = 15$ 时有最大值为：61500 元.

【点评】 本题主要考查了一次函数的实际应用，解题的关键是分析题意，找到关键描述语，求出函数的解析式，用到的知识点是一次函数的性质.

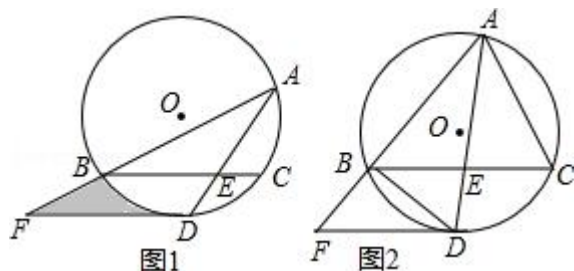
24. 如图 1， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D ，交 BC 于点 E

($BE > EC$)，且 $BD = 2\sqrt{3}$. 过点 D 作 $DF \parallel BC$ ，交 AB 的延长线于点 F .

(1) 求证： DF 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $DE = \sqrt{7}$ ，求图中阴影部分的面积；

(3) 若 $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$ ， $DF + BF = 8$ ，如图 2，求 BF 的长.



【考点】 圆的综合题.

专题: 综合题.

【分析】 (1) 连结 OD , 如图 1, 由角平分线定义得 $\angle BAD = \angle CAD$, 则根据圆周角定理得到 $\widehat{BD} = \widehat{CD}$, 再根据垂径定理得 $OD \perp BC$, 由于 $BC \parallel EF$, 则 $OD \perp DF$, 于是根据切线的判定定理即可判断 DF 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 连结 OB , OD 交 BC 于 P , 作 $BH \perp DF$ 于 H , 如图 1, 先证明 $\triangle OBD$ 为等边三角形得到 $\angle ODB = 60^\circ$, $OB = BD = 2\sqrt{3}$, 易得 $\angle BDF = \angle DBP = 30^\circ$, 根据含 30° 度的直角三角形三边的关系, 在 $Rt\triangle DBP$ 中得到 $PD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$, $PB = \sqrt{3}PD = 3$, 接着在 $Rt\triangle DEP$ 中利用勾股定理计算出 $PE = 2$, 由于 $OP \perp BC$, 则 $BP = CP = 3$, 所以 $CE = 1$, 然后利用 $\triangle BDE \sim \triangle ACE$, 通过相似比可得到 $AE = \frac{5\sqrt{7}}{7}$, 再证明 $\triangle ABE \sim \triangle AFD$, 利用相似比可得 $DF = 12$, 最后根据扇形面积公式, 利用 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle BDF} - S_{\text{弓形 BD}} = S_{\triangle BDF} - (S_{\text{扇形 BOD}} - S_{\triangle BOD})$ 进行计算;

(3) 连结 CD , 如图 2, 由 $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$ 可设 $AB = 4x$, $AC = 3x$, 设 $BF = y$, 由 $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ 得到 $CD = BD = 2\sqrt{3}$, 先证明 $\triangle BFD \sim \triangle CDA$, 利用相似比得到 $xy = 4$, 再证明 $\triangle FDB \sim \triangle FAD$, 利用相似比得到 $16 - 4y = xy$, 则 $16 - 4y = 4$, 然后解方程易得 $BF = 3$.

【解答】 证明: (1) 连结 OD , 如图 1,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 $\odot O$ 于 D ,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD}$,

$\therefore OD \perp BC$,

$\because BC \parallel EF$,

$\therefore OD \perp DF$,

∴DF 为⊙O 的切线;

(2) 连结 OB, 连结 OD 交 BC 于 P, 作 BH⊥DF 于 H, 如图 1,

∵∠BAC=60°, AD 平分∠BAC,

∴∠BAD=30°,

∴∠BOD=2∠BAD=60°,

∴△OBD 为等边三角形,

∴∠ODB=60°, OB=BD=2√3,

∴∠BDF=30°,

∵BC∥DF,

∴∠DBP=30°,

在 Rt△DBP 中, $PD=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$, $PB=\sqrt{3}PD=3$,

在 Rt△DEP 中, ∵ $PD=\sqrt{3}$, $DE=\sqrt{7}$,

∴ $PE=\sqrt{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2}=2$,

∵OP⊥BC,

∴BP=CP=3,

∴CE=3-2=1,

易证得△BDE∽△ACE,

∴AE:BE=CE:DE, 即 AE:5=1:√7,

∴ $AE=\frac{5\sqrt{7}}{7}$

∵BE∥DF,

∴△ABE∽△AFD,

$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{AE}{AD}, \text{ 即 } \frac{5}{DF} = \frac{\frac{5\sqrt{7}}{7}}{\frac{12\sqrt{5}}{7}}, \text{ 解得 } DF=12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDH \text{ 中, } BH = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle BDF} - S_{\text{弓形 BD}}$$

$$= S_{\triangle BDF} - (S_{\text{扇形 BOD}} - S_{\triangle BOD})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} - \frac{60 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^2}{360} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{3})^2$$

$$= 9\sqrt{3} - 2\pi;$$

(3) 连结 CD, 如图 2, 由 $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$ 可设 $AB=4x$, $AC=3x$, 设 $BF=y$,

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore CD=BD=2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle F = \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle FDB = \angle DBC = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{BD}{AC} = \frac{BF}{CD}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{3}}{3x} = \frac{y}{2\sqrt{3}},$$

$$\therefore xy=4,$$

$$\therefore \angle FDB = \angle DBC = \angle DAC = \angle FAD,$$

$$\text{而 } \angle DFB = \angle AFD,$$

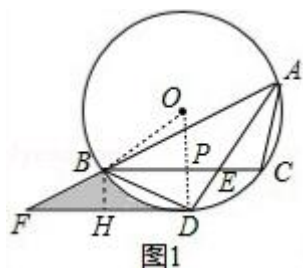
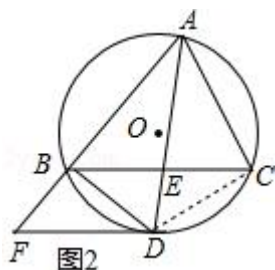
$$\therefore \triangle FDB \sim \triangle FAD,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{BF}{DF}, \text{ 即 } \frac{8-y}{y+4x} = \frac{y}{8-y},$$

$$\text{整理得 } 16 - 4y = xy,$$

$$\therefore 16 - 4y = 4, \text{ 解得 } y=3,$$

即 BF 的长为 3.



【点评】 本题考查了圆的综合题：熟练掌握垂径定理、圆周角定理和切线的判定定理；会计算不规则几何图形的面积；会灵活运用相似三角形的判定与性质计算线段的长.

25. 已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ ($a \neq 0$) 经过点 A $(-1, 0)$ 和 B $(3, 0)$.

(1) 求抛物线 C_1 的解析式，并写出其顶点 C 的坐标；

(2) 如图 1，把抛物线 C_1 沿着直线 AC 方向平移到某处时得到抛物线 C_2 ，此时点 A, C 分别平移到点 D, E 处. 设点 F 在抛物线 C_1 上且在 x 轴的下方，若 $\triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形，求点 F 的坐标；

(3) 如图 2，在 (2) 的条件下，设点 M 是线段 BC 上一动点， $EN \perp EM$ 交直线 BF 于点 N, 点 P 为线段 MN 的中点, 当点 M 从点 B 向点 C 运动时: ① $\tan \angle ENM$ 的值如何变化? 请说明理由; ② 点 M 到达点 C 时, 直接写出点 P 经过的路线长.

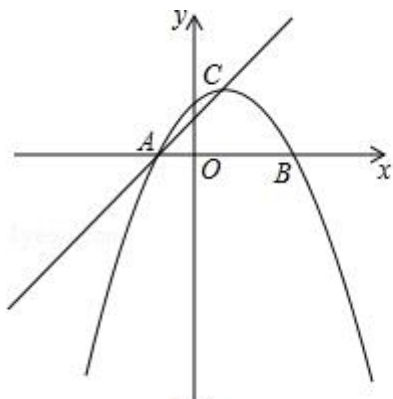


图1

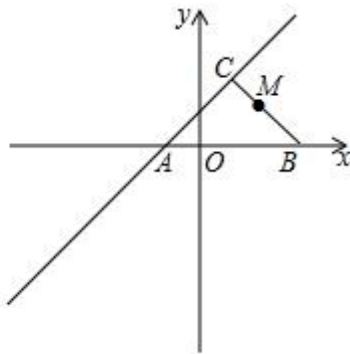


图2

【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据待定系数法即可求得解析式, 把解析式化成顶点式即可求得顶点坐标;

(2) 根据 A、C 的坐标求得直线 AC 的解析式为 $y=x+1$, 根据题意求得 $EF=4$, 求得 $EF \parallel y$ 轴, 设 $F(m, -\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2})$, 则 $E(m, m+1)$, 从而得出 $(m+1) - (-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}) = 4$, 解方程即可求得 F 的坐标;

(3) ①先求得四边形 DFBC 是矩形, 作 $EG \perp AC$, 交 BF 于 G, 然后根据 $\triangle EGN \sim \triangle EMC$, 对应边成比例即可求得 $\tan \angle ENM = \frac{EM}{EN} = 2$;

②根据勾股定理和三角形相似求得 $EN = \sqrt{10}$, 然后根据三角形中位线定理即可求得.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $C_1: y=ax^2+bx+\frac{3}{2}$ ($a \neq 0$) 经过点 A $(-1, 0)$ 和 B $(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a-b+\frac{3}{2}=0 \\ 9a+3b+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$,

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2,$$

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 $(1, 2)$;

(2) 如图 1, 作 $CH \perp x$ 轴于 H,

$\because A(-1, 0), C(1, 2),$

$\therefore AH=CH=2,$

$\therefore \angle CAB = \angle ACH = 45^\circ,$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=x+1,$

$\because \triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形,

$\therefore \angle DEF = 45^\circ,$ [来源:学科网 ZXXK]

$\therefore \angle DEF = \angle ACH,$

$\therefore EF \parallel y$ 轴,

$\therefore DE=AC=2\sqrt{2},$

$\therefore EF=4,$

设 $F(m, -\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}),$ 则 $E(m, m+1),$

$\therefore (m+1) - (-\frac{1}{2}m^2+m+\frac{3}{2}) = 4,$

解得 $m=\pm 3,$

$\therefore F(-3, -6);$

(3) ① $\tan \angle ENM$ 的值为定值, 不发生变化;

如图 2, $\because DF \perp AC, BC \perp AC,$

$\therefore DC \parallel BC,$

$\therefore DF=BC=AC,$

$\therefore$ 四边形 DFBC 是矩形,

作 $EG \perp AC,$ 交 BF 于 G,

$\therefore EG=BC=AC=2\sqrt{2},$

$$\therefore EN \perp EM,$$

$$\therefore \angle MEN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEM = \angle NEG,$$

$$\therefore \triangle EGN \sim \triangle EMC,$$

$$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{EC}{EG},$$

$$\therefore F(-3, -6), EF = 4,$$

$$\therefore E(-3, -2),$$

$$\therefore C(1, 2),$$

$$\therefore EC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ENM = \frac{EM}{EN} = 2;$$

$\therefore \tan \angle ENM$ 的值为定值，不发生变化；

②点 P 经过的路径是线段 P_1P_2 ，如图 3，

$\therefore$ 四边形 BCEG 是矩形， $GP_2 = CP_2$ ，

$$\therefore EP_2 = BP_2,$$

$$\therefore \triangle EGN \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \frac{EN}{EB} = \frac{EG}{EC},$$

$$\therefore EC = 4\sqrt{2}, EG = BC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore EB = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \frac{EN}{2\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}},$$

$$\therefore EN = \sqrt{10},$$

$\therefore P_1P_2$ 是 $\triangle BEN$ 的中位线,

$$\therefore P_1P_2 = \frac{1}{2}EN = \frac{\sqrt{10}}{2};$$

$\therefore$ 点 M 到达点 C 时, 点 P 经过的路线长为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

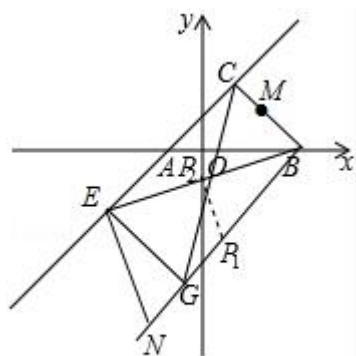


图3

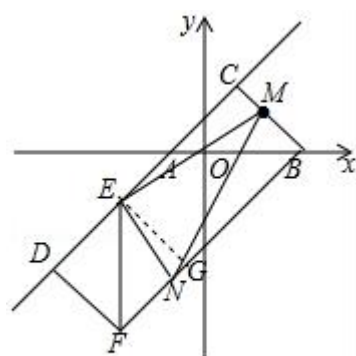


图2

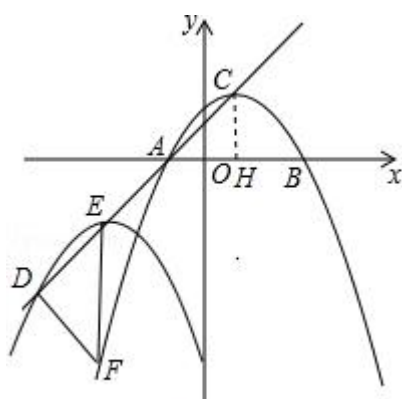


图1

【点评】 本题是二次函数综合题, 考查了待定系数法求二次函数的解析式, 一次函数的解析式, 等腰直角三角形的判定和性质, 三角形相似的判定和性质,

勾股定理的应用等，难点在于 (3) 作辅助线构造出相似三角形和三角形的中位线.