

2014 年湖北省黄石市中考数学试卷

一、仔细选一选（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）下面每个小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项所对应的字母在答题卷中相应的格子涂黑，注意可用多种不同的方法来选取正确答案.

1. (3 分) (2014 年湖北黄石) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

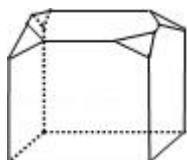
2. (3 分) (2014 年湖北黄石)磁湖是黄石一颗璀璨的明珠，据统计，在今年“五一”期间，游览磁湖的人数为 21.22 万人，这一数据用科学记数法可表示为 ()

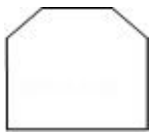
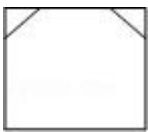
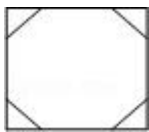
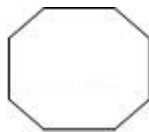
- A. 21.22×10^4 人 B. 2.122×10^6 人 C. 2.122×10^5 人 D. 2.122×10^4 人

3. (3 分) (2014 年湖北黄石)下列计算正确的是 ()

- A. $-3x^2y \cdot 5x^2y = 2x^2y$ B. $-2x^2y^3 \cdot 2x^3y = -2x^5y^4$
C. $35x^3y^2 \div 5x^2y = 7xy$ D. $(-2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2$

4. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图，一个正方体被截去四个角后得到一个几何体，它的俯视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

5. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图，一个矩形纸片，剪去部分后得到一个三角形，则图中 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数是 ()

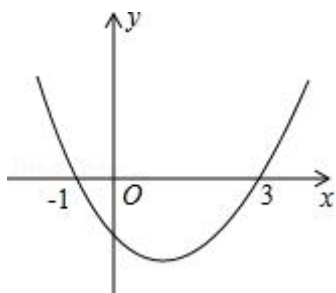


- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

6. (3 分) (2014 年湖北黄石)学校团委在“五四青年节”举行“感动校园十大人物”颁奖活动中,九 (4) 班决定从甲、乙、丙、丁四人中随机派两名代表参加此活动,则甲乙两人恰有一人参加此活动的概率是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

7. (3 分) (2014 年湖北黄石)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象如图,则函数值 $y > 0$ 时, x 的取值范围是 ()

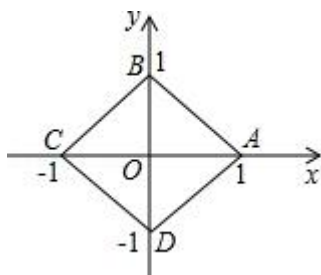


- A. $x < -1$ B. $x > 3$ C. $-1 < x < 3$ D. $x < -1$ 或 $x > 3$

8. (3 分) (2014 年湖北黄石)以下命题是真命题的是 ()

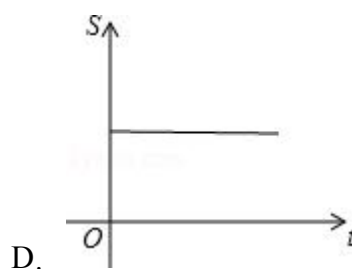
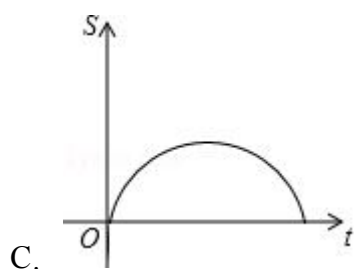
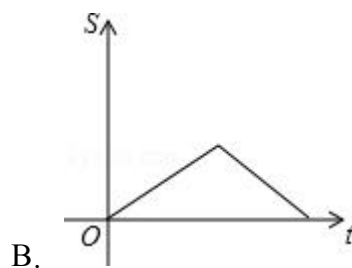
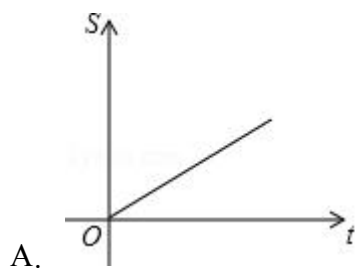
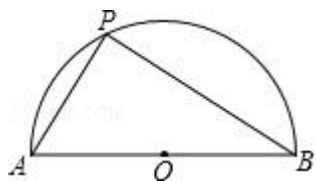
- A. 梯形是轴对称图形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 四边相等的四边形是正方形
D. 有两条相互垂直的对称轴的四边形是菱形

9. (3 分) (2014 年湖北黄石)正方形 ABCD 在直角坐标系中的位置如下图表示,将正方形 ABCD 绕点 A 顺时针方向旋转 180° 后, C 点的坐标是 ()



- A. (2, 0) B. (3, 0) C. (2, -1) D. (2, 1)

10. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图, AB 是半圆 O 的直径, 点 P 从点 A 出发, 沿半圆弧 AB 顺时针方向匀速移动至点 B, 运动时间为 t , $\triangle ABP$ 的面积为 S , 则下列图象能大致刻画 S 与 t 之间的关系的是 ()

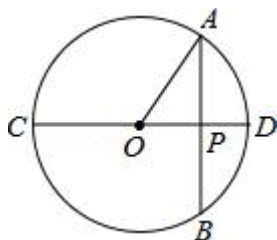


二、认真填一填 (本题有 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

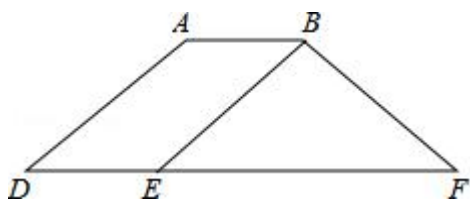
11. (3 分) (2014 年湖北黄石) 函数 $y = \sqrt{2x - 3}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

12. (3 分) (2014 年湖北黄石) 分解因式: $4x^2 - 9 =$ _____.

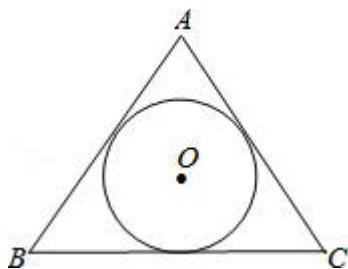
13. (3 分) (2014 年湖北黄石) 如图, 圆 O 的直径 $CD = 10\text{cm}$, 且 $AB \perp CD$, 垂足为 P , $AB = 8\text{cm}$, 则 $\sin \angle OAP =$ _____.



14. (3 分) (2014 年湖北黄石) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle D = 45^\circ$, $AB = 1$, $CD = 3$, $BE \parallel AD$ 交 CD 于 E , 则 $\triangle BCE$ 的周长为_____.



15. (3 分) (2014 年湖北黄石)一般地, 如果在一次实验中, 结果落在区域 D 中每一个点都是等可能的, 用 A 表示“实验结果落在 D 中的某个小区域 M 中”这个事件, 那么事件 A 发生的概率 $P_A = \frac{M}{D}$. 如图, 现在等边 $\triangle ABC$ 内射入一个点, 则该点落在 $\triangle ABC$ 内切圆中的概率是_____.



16. (3 分) (2014 年湖北黄石)观察下列等式:

第一个等式: $a_1 = \frac{3}{1 \times 2 \times 2^2} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2}$;

第二个等式: $a_2 = \frac{4}{2 \times 3 \times 2^3} = \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3}$;

第三个等式: $a_3 = \frac{5}{3 \times 4 \times 2^4} = \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4}$;

第四个等式: $a_4 = \frac{6}{4 \times 5 \times 2^5} = \frac{1}{4 \times 2^4} - \frac{1}{5 \times 2^5}$.

按上述规律, 回答以下问题:

(1) 用含 n 的代数式表示第 n 个等式: $a_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、全面答一答 (本题有 9 个小题, 共 72 分) 解答应写出文字说明, 证明过程或推演步骤, 如果觉得有的题目有点困难, 那么把自己能写出的解答尽量写出来.

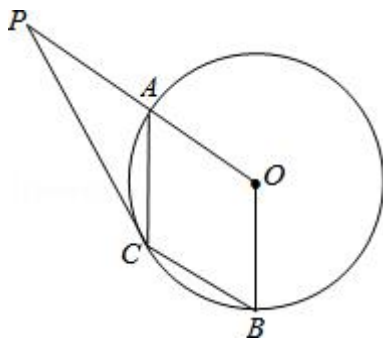
17. (7 分) (2014 年湖北黄石)计算: $|\sqrt{3} - 5| + 2\cos 30^\circ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + (9 - \sqrt{3})^0 + \sqrt{4}$.

18. (7 分) (2014 年湖北黄石)先化简, 后计算: $(1 - \frac{3}{x}) \div (x - \frac{6x-9}{x})$, 其中 $x = \sqrt{2014} + 3$.

19. (7 分) (2014 年湖北黄石)如图, A、B 是圆 O 上的两点, $\angle AOB = 120^\circ$, C 是 AB 弧的中点.

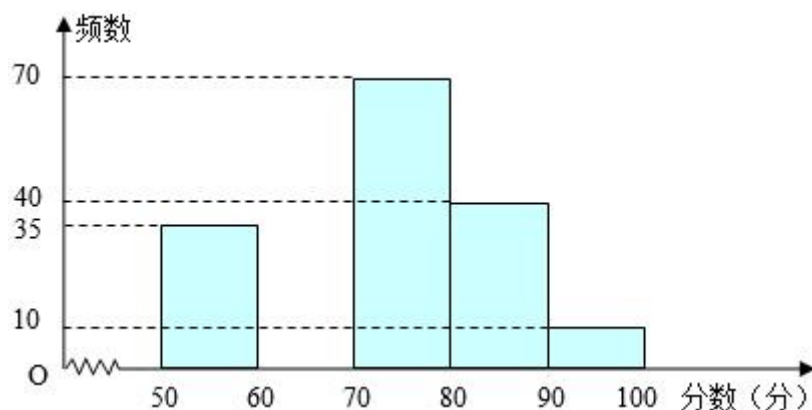
(1) 求证: AB 平分 $\angle OAC$;

(2) 延长 OA 至 P 使得 $OA = AP$, 连接 PC, 若圆 O 的半径 $R = 1$, 求 PC 的长.



20. (8 分) (2014 年湖北黄石)解方程:
$$\begin{cases} 5x^2 - 4y^2 = 20 \\ \sqrt{15}x - 2y = 2\sqrt{15} \end{cases}$$

21. (8 分) (2014 年湖北黄石)为创建“国家园林城市”, 某校举行了以“爱我黄石”为主题的图片制作比赛, 评委会对 200 名同学的参赛作品打分发现, 参赛者的成绩 x 均满足 $50 \leq x < 100$, 并制作了频数分布直方图, 如图.

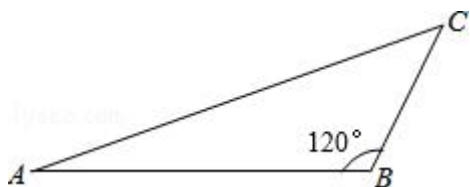


根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 请补全频数分布直方图；
- (2) 若依据成绩，采取分层抽样的方法，从参赛同学中抽 40 人参加图片制作比赛总结大会，则从成绩 $80 \leq x < 90$ 的选手中应抽多少人？
- (3) 比赛共设一、二、三等奖，若只有 25% 的参赛同学能拿到一等奖，则一等奖的分数线是多少？

22. (8 分) (2014 年湖北黄石)小明听说“武黄城际列车”已经开通，便设计了如下问题：如图，以往从黄石 A 坐客车到武昌客运站 B，现在可以在 A 坐城际列车到武汉青山站 C，再从青山站 C 坐市内公共汽车到武昌客运站 B. 设 $AB=80\text{km}$, $BC=20\text{km}$, $\angle ABC=120^\circ$. 请你帮助小明解决以下问题：

- (1) 求 A、C 之间的距离；(参考数据 $\sqrt{21}=4.6$)
- (2) 若客车的平均速度是 60km/h ，市内的公共汽车的平均速度为 40km/h ，城际列车的平均速度为 180km/h ，为了最短时间到达武昌客运站，小明应该选择哪种乘车方案？请说明理由。(不计候车时间)



23. (8 分) (2014 年湖北黄石)某校九 (3) 班去大冶茗山乡花卉基地参加社会实践活动，该基地有玫瑰花和薰衣草两种花卉，活动后，小明编制了一道数学题：

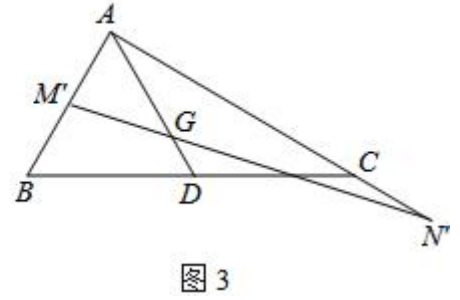
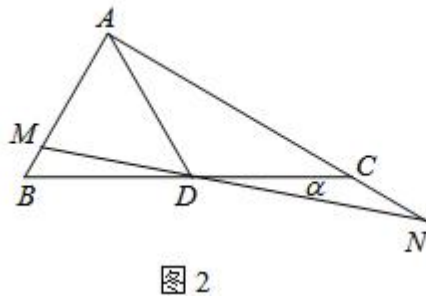
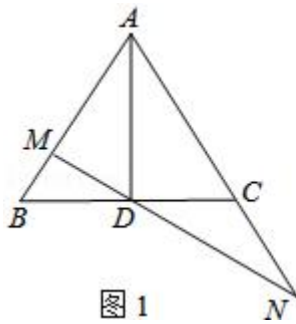
花卉基地有甲乙两家种植户，种植面积与卖花总收入如下表. (假设不同种植户种植的同种花卉每亩卖花平均收入相等)

种植户	玫瑰花种植面积 (亩)	薰衣草种植面积 (亩)	卖花总收入 (元)
甲	5	3	33500
乙	3	7	43500

- (1) 试求玫瑰花，薰衣草每亩卖花的平均收入各是多少？
- (2) 甲、乙种植户计划合租 30 亩地用来种植玫瑰花和薰衣草，根据市场调查，要求玫瑰花的种植面积大于薰衣草的种植面积 (两种花卉的种植面积均为整数亩)，花卉基地对种植玫瑰花的种植给予补贴，种植玫瑰花的面积不超过 15 亩的部分，每亩补贴 100 元；超过 15 亩但不超过 20 亩的部分，每亩补贴 200 元；超过 20 亩的部分每亩补贴 300 元. 为了使总收入不低于 127500 元，则他们有几种种植方案？

24. (9 分) (2014 年湖北黄石)AD 是△ABC 的中线，将 BC 边所在直线绕点 D 顺时针旋转 α 角，交边 AB 于点 M，交射线 AC 于点 N，设 $AM=xAB$ ， $AN=yAC$ ($x, y \neq 0$).

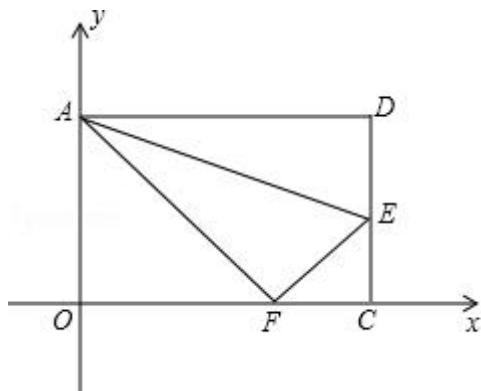
- (1) 如图 1，当△ABC 为等边三角形且 $\alpha=30^\circ$ 时证明： $\triangle AMN \sim \triangle DMA$ ；
- (2) 如图 2，证明： $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ ；
- (3) 如图 3，当 G 是 AD 上任意一点时 (点 G 不与 A 重合)，过点 G 的直线交边 AB 于 M'，交射线 AC 于点 N'，设 $AG=nAD$ ， $AM'=x'AB$ ， $AN'=y'AC$ ($x', y' \neq 0$)，猜想： $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$ 是否成立？并说明理由.



25. (10 分) (2014 年湖北黄石)如图，在矩形 $ABCD$ 中，把点 D 沿 AE 对折，使点 D 落在 OC 上的 F 点，已知 $AO=8$ ， $AD=10$ 。

- (1) 求 F 点的坐标；
- (2) 如果一条不与抛物线对称轴平行的直线与该抛物线仅有一个交点，我们把这条直线称为抛物线的切线，已知抛物线经过点 O ， F ，且直线 $y=6x-36$ 是该抛物线的切线，求抛物线的解析式；

(3) 直线 $y=k(x-3)-\frac{35}{4}$ 与 (2) 中的抛物线交于 P、Q 两点, 点 B 的坐标为 $(3, -\frac{35}{4})$, 求证: $\frac{1}{PB}+\frac{1}{QB}$ 为定值. (参考公式: 在平面直角坐标系中, 若 M (x_1, y_1) , N (x_2, y_2) , 则 M, N 两点间的距离为 $|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$)



2014 年湖北省黄石市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、仔细选一选（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）下面每个小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项所对应的字母在答题卷中相应的格子涂黑，注意可用多种不同的方法来选取正确答案.

1. (3 分) (2014 年湖北黄石) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【分析】根据乘积为 1 的两个数互为倒数，可得答案.

【解答】解： $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 -3.

故选：A.

【点评】本题考查了倒数，分子分母交换位置是求一个数的倒数的关键.

2. (3 分) (2014 年湖北黄石)磁湖是黄石一颗璀璨的明珠，据统计，在今年“五一”期间，游览磁湖的人数为 21.22 万人，这一数据用科学记数法可表示为 ()

- A. 21.22×10^4 人 B. 2.122×10^6 人 C. 2.122×10^5 人 D. 2.122×10^4 人

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：21.22 万 = 212200 用科学记数法表示为： 2.122×10^5 .

故选： 2.122×10^5 .

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2014 年湖北黄石)下列计算正确的是 ()

A. $-3x^2y \cdot 5x^2y = 2x^2y$

B. $-2x^2y^3 \cdot 2x^3y = -2x^5y^4$

C. $35x^3y^2 \div 5x^2y = 7xy$

D. $(-2x - y)(2x + y) = 4x^2 - y^2$

【考点】整式的除法；单项式乘单项式；平方差公式.

【专题】计算题.

【分析】A、原式利用单项式乘以单项式法则计算得到结果，即可做出判断；

B、原式利用单项式乘以单项式法则计算得到结果，即可做出判断；

C、原式利用单项式除以单项式法则计算得到结果，即可做出判断；

D、原式利用完全平方公式展开得到结果，即可做出判断.

【解答】解：A、 $-3x^2y \cdot 5x^2y = -15x^4y^2$ ，故选项错误；

B、 $-2x^2y^3 \cdot 2x^3y = -4x^5y^4$ ，故选项错误；

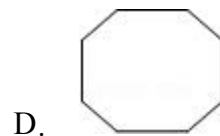
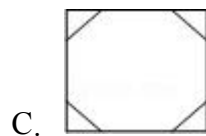
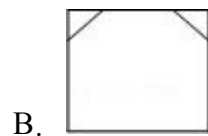
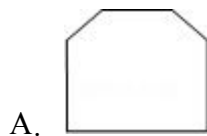
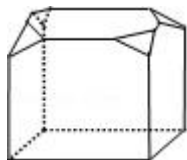
C、 $35x^3y^2 \div 5x^2y = 7xy$ ，故选项正确；

D、 $(-2x - y)(2x + y) = -(2x + y)^2 = -4x^2 - 4xy - y^2$ ，故选项错误.

故选 C.

【点评】此题考查了整式的除法，单项式乘除单项式，以及平方差公式，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

4. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图，一个正方体被截去四个角后得到一个几何体，它的俯视图是 ()



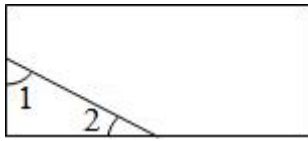
【考点】简单组合体的三视图.

【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图, 可得答案.

【解答】解: 从上面看是一个正方形并且每个角有一个三角形,
故选: C.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图, 从上面看得到的图形是俯视图.

5. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图, 一个矩形纸片, 剪去部分后得到一个三角形, 则图中 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数是 ()



- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

【考点】直角三角形的性质.

【分析】根据直角三角形两锐角互余解答.

【解答】解: 由题意得, 剩下的三角形是直角三角形,
所以, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

故选 C.

【点评】本题考查了直角三角形两锐角互余的性质, 熟记性质是解题的关键.

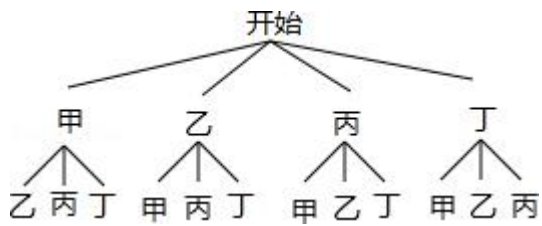
6. (3 分) (2014 年湖北黄石)学校团委在“五四青年节”举行“感动校园十大人物”颁奖活动中, 九 (4) 班决定从甲、乙、丙、丁四人中随机派两名代表参加此活动, 则甲乙两人恰有一人参加此活动的概率是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】列表法与树状图法

【分析】首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与甲乙两人恰有一人参加此活动的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

【解答】解：画树状图得：



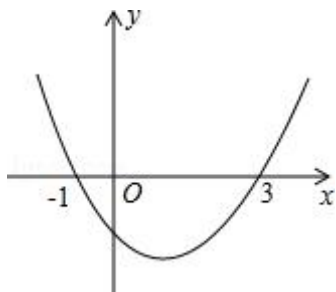
∴共有 12 种等可能的结果，甲乙两人恰有一人参加此活动的有 8 种情况，

∴甲乙两人恰有一人参加此活动的概率是： $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

故选 A.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

7. (3 分) (2014 年湖北黄石)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 的图象如图，则函数值 $y>0$ 时， x 的取值范围是 ()



- A. $x < -1$ B. $x > 3$ C. $-1 < x < 3$ D. $x < -1$ 或 $x > 3$

【考点】二次函数与不等式 (组)．

【分析】根据图象，写出函数图象在 x 轴上方部分的 x 的取值范围即可．

【解答】解：由图可知， $x < -1$ 或 $x > 3$ 时， $y > 0$ ．

故选 D.

【点评】本题考查了二次函数与不等式，此类题目，利用数形结合的思想求解更简便．

8. (3 分) (2014 年湖北黄石)以下命题是真命题的是 ()

- A. 梯形是轴对称图形
- B. 对角线相等的四边形是矩形
- C. 四边相等的四边形是正方形
- D. 有两条相互垂直的对称轴的四边形是菱形

【考点】命题与定理有

【分析】根据等腰图形的性质对 A 矩形判断；根据矩形、正方形和菱形的判定方法分别对 B、C、D 矩形判断.

【解答】解：A、等腰梯形是轴对称图形，所以 A 选项错误；

B、对角线相等的平行四边形是矩形，所以 B 选项错误；

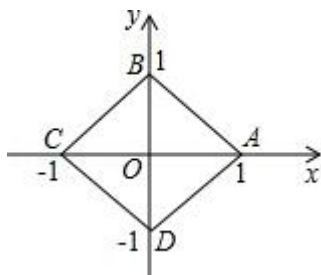
C、四边相等且有一个角为 90° 的四边形是正方形，所以 C 选项错误；

D、有两条相互垂直的对称轴的四边形是菱形，所以 D 选项正确.

故选 D.

【点评】本题考查了命题与定理：判断事物的语句叫命题；正确的命题称为真命题，错误的命题称为假命题；经过推理论证的真命题称为定理.

9. (3 分) (2014 年湖北黄石)正方形 ABCD 在直角坐标系中的位置如下图所示，将正方形 ABCD 绕点 A 顺时针方向旋转 180° 后，C 点的坐标是 ()



- A. (2, 0)
- B. (3, 0)
- C. (2, -1)
- D. (2, 1)

【考点】坐标与图形变化-旋转.

【分析】正方形 ABCD 绕点 A 顺时针方向旋转 180° 后，C 点的对应点与 C 一定关于 A 对称，A 是对称点连线的中点，据此即可求解.

【解答】解：AC=2，

则正方形ABCD绕点A顺时针方向旋转 180° 后C的对应点设是 C' ，则 $AC'=AC=2$ ，

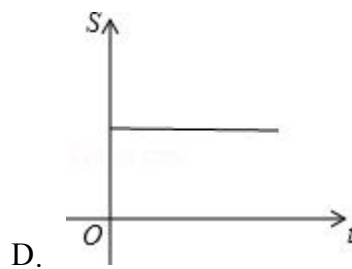
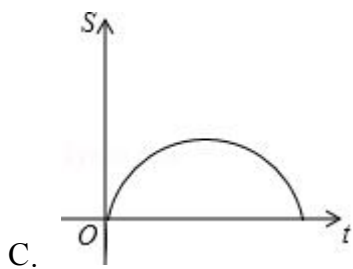
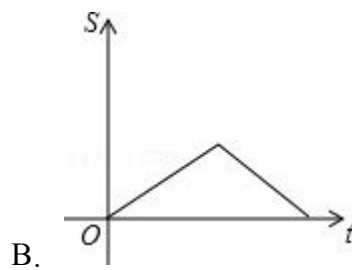
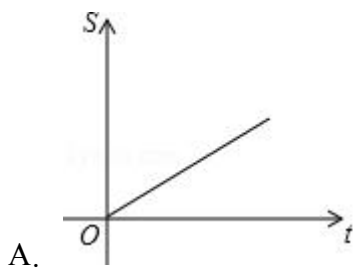
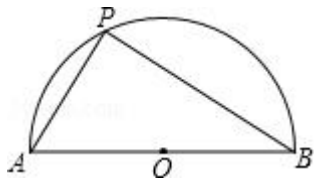
则 $OC'=3$ ，

故 C' 的坐标是 $(3, 0)$ ．

故选B．

【点评】本题考查了旋转的性质，理解C点的对应点与C一定关于A对称，A是对称点连线的中点是关键．

10. (3分) (2014年湖北黄石)如图，AB是半圆O的直径，点P从点A出发，沿半圆弧AB顺时针方向匀速移动至点B，运动时间为 t ， $\triangle ABP$ 的面积为 S ，则下列图象能大致刻画 S 与 t 之间的关系的是（ ）



【考点】动点问题的函数图象．

【分析】根据点P到AB的距离变化，利用三角形的面积分析解答即可．

【解答】解：点 P 在弧 AB 上运动时，随着时间 t 的增大，点 P 到 AB 的距离先变大，

当到达弧 AB 的中点时，最大，

然后逐渐变小，直至到达点 B 时为 0，

并且点 P 到 AB 的距离的变化不是直线变化，

$\therefore$ AB 的长度等于半圆的直径，

$\therefore \triangle ABP$ 的面积为 S 与 t 的变化情况相同，

纵观各选项，只有 C 选项图象符合．

故选 C．

【点评】 本题考查了动点问题的函数图象，读懂题目信息，理解 $\triangle ABP$ 的面积的变化情况与点 P 到 AB 的距离的变化情况相同是解题的关键．

二、认真填一填（本题有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. (3 分) (2014 年湖北黄石)函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \geq \frac{3}{2}$ ．

【考点】 函数自变量的取值范围．

【分析】 根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解．

【解答】 解：由题意得， $2x-3 \geq 0$ ，

解得 $x \geq \frac{3}{2}$ ．

故答案为： $x \geq \frac{3}{2}$ ．

【点评】 本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负．

12. (3 分) (2014 年湖北黄石)分解因式： $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$ ．

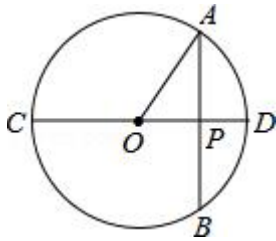
【考点】 因式分解-运用公式法. 菁优网版权所有

【分析】 先整理成平方差公式的形式, 再利用平方差公式进行分解因式.

【解答】 解: $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$.

【点评】 本题主要考查平方差公式分解因式, 熟记公式结构是解题的关键.

13. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图, 圆 O 的直径 $CD=10\text{cm}$, 且 $AB \perp CD$, 垂足为 P, $AB=8\text{cm}$, 则 $\sin \angle OAP = \frac{3}{5}$.



【考点】 垂径定理; 勾股定理; 锐角三角函数的定义

【专题】 计算题.

【分析】 根据垂径定理由 $AB \perp CD$ 得到 $AP = \frac{1}{2}AB = 4\text{cm}$, 再在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中, 利用勾股定理计算出 $OP=3$, 然后根据正弦的定义求解.

【解答】 解: $\because AB \perp CD$,

$$\therefore AP = BP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中, $OA = \frac{1}{2}CD = 5$,

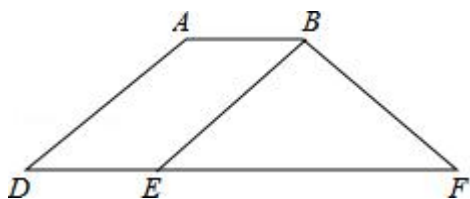
$$\therefore OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = 3,$$

$$\therefore \sin \angle OAP = \frac{OP}{OA} = \frac{3}{5}.$$

故答案为 $\frac{3}{5}$.

【点评】 本题考查了垂径定理: 平分弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧. 也考查了勾股定理和锐角三角函数.

14. (3 分) (2014 年湖北黄石)如图, 在等腰梯形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $\angle D=45^\circ$, $AB=1$, $CD=3$, $BE \parallel AD$ 交 CD 于 E, 则 $\triangle BCE$ 的周长为 $2+2\sqrt{2}$.



【考点】 等腰梯形的性质.

【分析】 首先根据等腰梯形的性质可得 $\angle D = \angle C = 45^\circ$, 进而得到 $\angle EBC = 90^\circ$, 然后证明四边形 ABED 是平行四边形, 可得 $AB = DE = 1$, 再得 $EC = 2$, 然后再根据勾股定理可得 BE 长, 进而得到 $\triangle BCE$ 的周长.

【解答】 解: $\because$ 梯形 ABCD 是等腰梯形,

$$\therefore \angle D = \angle C = 45^\circ,$$

$$\because EB \parallel AD,$$

$$\therefore \angle BEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD, \quad BE \parallel AD,$$

$$\therefore \text{四边形 ABED 是平行四边形},$$

$$\therefore AB = DE = 1,$$

$$\because CD = 3,$$

$$\therefore EC = 3 - 1 = 2,$$

$$\because EB^2 + CB^2 = EC^2,$$

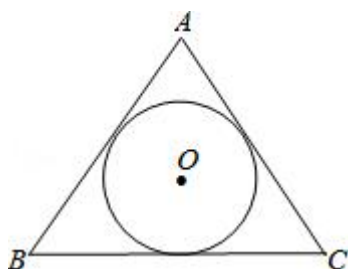
$$\therefore EB = BC = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 的周长为: } 2 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $2+2\sqrt{2}$.

【点评】 此题主要考查了等腰梯形的性质, 以及平行四边形的判定和性质, 勾股定理的应用, 关键是掌握等腰梯形同一底上的两个角相等.

15. (3 分) (2014 年湖北黄石)一般地, 如果在一次实验中, 结果落在区域 D 中每一个点都是等可能的, 用 A 表示“实验结果落在 D 中的某个小区域 M 中”这个事件, 那么事件 A 发生的概率 $P_A = \frac{M}{D}$. 如图, 现在等边 $\triangle ABC$ 内射入一个点, 则该点落在 $\triangle ABC$ 内切圆中的概率是 $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$.



【考点】 三角形的内切圆与内心; 等边三角形的性质; 几何概率.

【分析】 利用等边三角形以及其内切圆的性质以及锐角三角函数关系得出 DO, DC 的长, 进而得出 $\triangle ABC$ 的高, 再利用圆以及三角形面积公式求出即可.

【解答】 解: 连接 CO, DO,

由题意可得: $OD \perp BC$, $\angle OCD = 30^\circ$, 设 $BC = 2x$,

则 $CD = x$, 故 $\frac{DO}{DC} = \tan 30^\circ$,

$$\therefore DO = DC \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}x}{3},$$

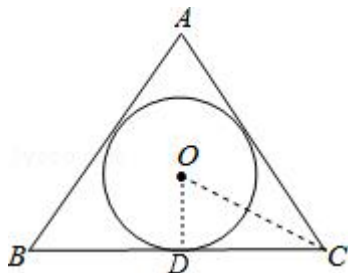
$$\therefore S_{\text{圆}O} = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x \right)^2 = \frac{\pi x^2}{3},$$

$\triangle ABC$ 的高为: $2x \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}x$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2x \times \sqrt{3}x = \sqrt{3}x^2,$$

$$\therefore \text{则该点落在 } \triangle ABC \text{ 内切圆中的概率是: } \frac{\frac{\pi x^2}{3}}{\sqrt{3}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$.



【点评】 此题主要考查了几何概率以及三角形内切圆的性质以及等边三角形的性质等知识, 得出等边三角形与内切圆的关系是解题关键.

16. (3 分) (2014 年湖北黄石) 观察下列等式:

$$\text{第一个等式: } a_1 = \frac{3}{1 \times 2 \times 2^2} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2};$$

$$\text{第二个等式: } a_2 = \frac{4}{2 \times 3 \times 2^3} = \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3};$$

$$\text{第三个等式: } a_3 = \frac{5}{3 \times 4 \times 2^4} = \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4};$$

$$\text{第四个等式: } a_4 = \frac{6}{4 \times 5 \times 2^5} = \frac{1}{4 \times 2^4} - \frac{1}{5 \times 2^5}.$$

按上述规律, 回答以下问题:

$$(1) \text{ 用含 } n \text{ 的代数式表示第 } n \text{ 个等式: } a_n = \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}};$$

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}};$$

$$(2) \text{ 式子 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}.$$

【考点】 规律型: 数字的变化类.

【分析】 (1) 由前四个等是可以看出: 是第几个算式, 等号左边的分母的第一个因数是就是几, 第二个因数是几加 1, 第三个因数是 2 的几加 1 次方, 分子是几加 2; 等号右边分成分子都是 1 的两项差, 第一个分母是几乘 2 的几次方, 第二个分母是几加 1 乘 2 的几加 1 次方; 由此规律解决问题;

(2) 把这 20 个数相加, 化为左边的形式相加, 正好抵消, 剩下第一个数分裂的第一项和最后一个数分裂的后一项, 得出答案即可.

【解答】解：(1) 用含 n 的代数式表示第 n 个等式： $a_n = \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} -$

$$\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$

$$= \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4} + \frac{1}{4 \times 2^4} - \frac{1}{5 \times 2^5} + \dots + \frac{1}{20 \times 2^{20}} - \frac{1}{21 \times 2^{21}} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}.$$

故答案为：(1) $\frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}}, \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}; (2) \frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}.$

【点评】此题考查数字的变化规律，从简单情形入手，找出一般规律，利用规律解决问题.

三、全面答一答 (本题有 9 个小题, 共 72 分) 解答应写出文字说明, 证明过程或推演步骤, 如果觉得有的题目有点困难, 那么把自己能写出的解答尽量写出来.

17. (7 分) (2014 年湖北黄石) 计算: $|\sqrt{3} - 5| + 2\cos 30^\circ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + (9 - \sqrt{3})^0 + \sqrt{4}.$

【考点】实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

【分析】本题涉及零指数幂、负整指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【解答】解: 原式 $= 5 - \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 1 + 2$
 $= 11.$

【点评】本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

18. (7分) (2014年湖北黄石)先化简, 后计算: $(1 - \frac{3}{x}) \div (x - \frac{6x-9}{x})$, 其中 $x = \sqrt{2014} + 3$.

【考点】分式的化简求值

【专题】计算题.

【分析】原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 将 x 的值代入计算即可求出值.

【解答】解: 原式 $= \frac{x-3}{x} \div \frac{(x-3)^2}{x} = \frac{x-3}{x} \cdot \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}$,

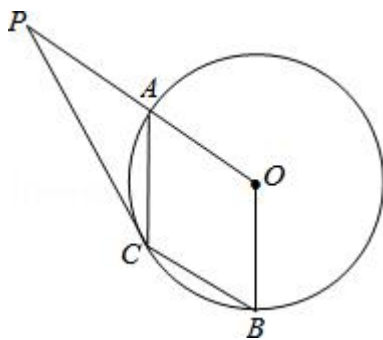
当 $x = \sqrt{2014} + 3$ 时, 原式 $= \frac{1}{x-3} = \frac{1}{\sqrt{2014}}$.

【点评】此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (7分) (2014年湖北黄石)如图, A 、 B 是圆 O 上的两点, $\angle AOB = 120^\circ$, C 是 AB 弧的中点.

(1) 求证: AB 平分 $\angle OAC$;

(2) 延长 OA 至 P 使得 $OA = AP$, 连接 PC , 若圆 O 的半径 $R = 1$, 求 PC 的长.



【考点】菱形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质; 圆心角、弧、弦的关系; 圆周角定理.

【分析】(1) 求出等边三角形 AOC 和等边三角形 OBC , 推出 $OA = OB = BC = AC$, 即可得出答案;

(2) 求出 $AC = OA = AP$, 求出 $\angle PCO = 90^\circ$, $\angle P = 30^\circ$, 即可求出答案.

【解答】(1) 证明：连接 OC，

$\because \angle AOB=120^\circ$ ，C 是 AB 弧的中点，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=60^\circ$ ，

$\because OA=OC$ ，

$\therefore \triangle ACO$ 是等边三角形，

$\therefore OA=AC$ ，同理 $OB=BC$ ，

$\therefore OA=AC=BC=OB$ ，

$\therefore$ 四边形 AOBC 是菱形，

$\therefore AB$ 平分 $\angle OAC$ ；

(2) 解：连接 OC，

$\because$ C 为弧 AB 中点， $\angle AOB=120^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC=60^\circ$ ，

$\because OA=OC$ ，

$\therefore \triangle OAC$ 是等边三角形，

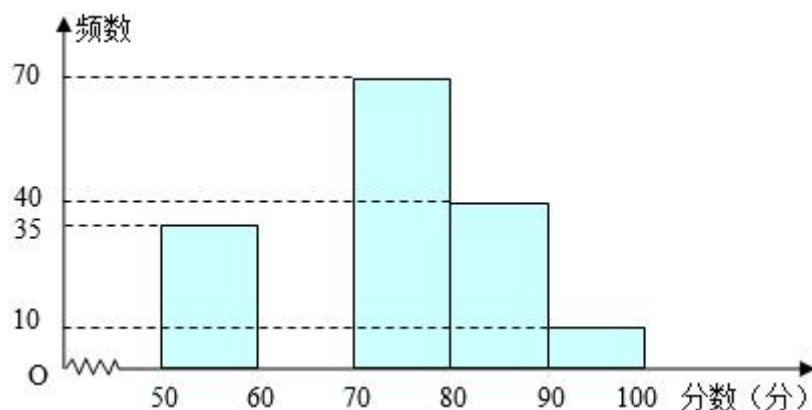
$\because OA=AC$ ，

$\therefore AP=AC$ ，

$\therefore \angle APC=30^\circ$ ，

$\therefore \triangle OPC$ 是直角三角形，

$\therefore PC=\sqrt{3}OC=\sqrt{3}$.



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 请补全频数分布直方图；
- (2) 若依据成绩，采取分层抽样的方法，从参赛同学中抽 40 人参加图片制作比赛总结大会，则从成绩 $80 \leq x < 90$ 的选手中应抽多少人？
- (3) 比赛共设一、二、三等奖，若只有 25% 的参赛同学能拿到一等奖，则一等奖的分数线是多少？

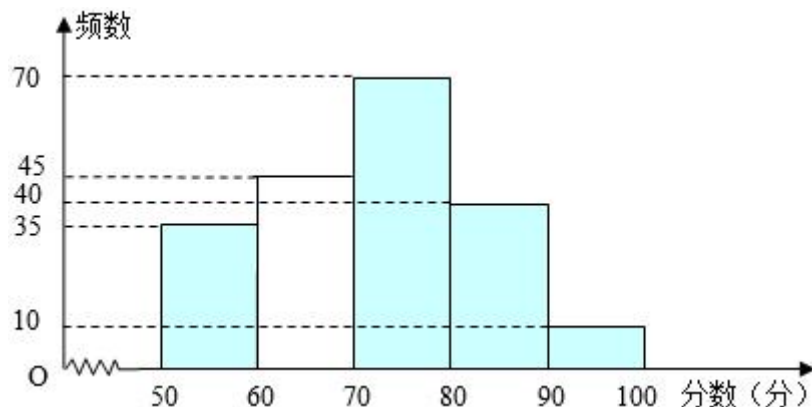
【考点】 频数（率）分布直方图.

【分析】 (1) 利用总人数 200 减去其它各组的人数即可求得第二组的人数，从而作出直方图；

(2) 设抽了 x 人，根据各层抽取的人数的比例相等，即可列方程求解；

(3) 利用总人数乘以一等奖的人数，据此即可判断.

【解答】 解：(1) $200 - (35+40+70+10) = 45$ ，如下图：



(2) 设抽了 x 人，则 $\frac{200}{40} = \frac{40}{x}$ ，解得 $x=8$ ；

(3) 依题意知获一等奖的人数为 $200 \times 25\% = 50$.

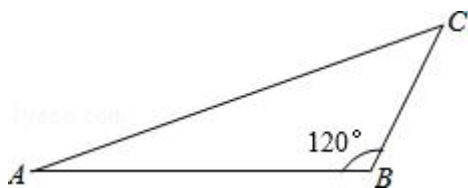
则一等奖的分数线是 80 分.

【点评】 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力; 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

22. (8 分) (2014 年湖北黄石) 小明听说“武黄城际列车”已经开通, 便设计了如下问题: 如图, 以往从黄石 A 坐客车到武昌客运站 B, 现在可以在 A 坐城际列车到武汉青山站 C, 再从青山站 C 坐市内公共汽车到武昌客运站 B. 设 $AB=80\text{km}$, $BC=20\text{km}$, $\angle ABC=120^\circ$. 请你帮助小明解决以下问题:

(1) 求 A、C 之间的距离; (参考数据 $\sqrt{21}=4.6$)

(2) 若客车的平均速度是 60km/h , 市内的公共汽车的平均速度为 40km/h , 城际列车的平均速度为 180km/h , 为了最短时间到达武昌客运站, 小明应该选择哪种乘车方案? 请说明理由. (不计候车时间)



【考点】 勾股定理的应用

【分析】 (1) 过点 C 作 AB 的垂线, 交 AB 的延长线于 E 点, 利用勾股定理求得 AC 的长即可;

(2) 分别求得乘车时间, 然后比较即可得到答案.

【解答】 解: (1) 过点 C 作 AB 的垂线, 交 AB 的延长线于 E 点,

$$\because \angle ABC=120^\circ, BC=20,$$

$$\therefore BE=10, CE=10\sqrt{3}$$

在 $\triangle ACE$ 中,

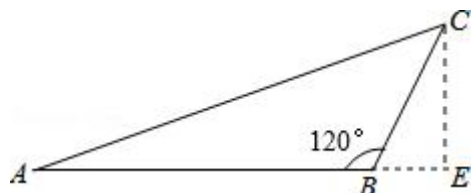
$$\therefore AC^2=8100+300,$$

$$\therefore AC=20\sqrt{21}=20 \times 4.6=92\text{km};$$

(2) 乘客车需时间 $t_1 = \frac{80}{60} = 1\frac{1}{3}$ (小时);

乘列车需时间 $t_2 = \frac{92}{180} + \frac{20}{40} = 1\frac{1}{90}$ (小时);

$\therefore$ 选择城际列车.



【点评】 本题考查了勾股定理的应用，解题的关键是正确的构造直角三角形.

23. (8 分) (2014 年湖北黄石)某校九 (3) 班去大冶茗山乡花卉基地参加社会实践活动，该基地有玫瑰花和薰衣草两种花卉，活动后，小明编制了一道数学题：花卉基地有甲乙两家种植户，种植面积与卖花总收入如下表. (假设不同种植户种植的同种花卉每亩卖花平均收入相等)

种植户	玫瑰花种植面积 (亩)	薰衣草种植面积 (亩)	卖花总收入 (元)
甲	5	3	33500
乙	3	7	43500

(1) 试求玫瑰花，薰衣草每亩卖花的平均收入各是多少？

(2) 甲、乙种植户计划合租 30 亩地用来种植玫瑰花和薰衣草，根据市场调查，要求玫瑰花的种植面积大于薰衣草的种植面积 (两种花卉的种植面积均为整数亩)，花卉基地对种植玫瑰花的种植给予补贴，种植玫瑰花的面积不超过 15 亩的部分，每亩补贴 100 元；超过 15 亩但不超过 20 亩的部分，每亩补贴 200 元；超过 20 亩的部分每亩补贴 300 元. 为了使总收入不低于 127500 元，则他们有几种种植方案？

【考点】 一元一次不等式组的应用；二元一次方程组的应用

【专题】 应用题.

【分析】 (1) 设玫瑰花, 蓑衣草的亩平均收入分别为 x , y 元, 根据表格中的等量关系列出方程组求解;

(2) 设种植玫瑰花 m 亩, 则种植蓑衣草面积为 $(30 - m)$ 亩, 根据玫瑰花的种植面积大于蓑衣草的种植面积, 可得 $m > 15$, 然后分段讨论求解.

【解答】 解: (1) 设玫瑰花, 蓑衣草的亩平均收入分别为 x , y 元,

依题意得:
$$\begin{cases} 5x+3y=33500 \\ 3x+7y=43500 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x=4000 \\ y=4500 \end{cases}$$

答: 玫瑰花每亩的收入为 4000 元, 蓑衣草每亩的平均收入是 4500 元.

(2) 设种植玫瑰花 m 亩, 则种植蓑衣草面积为 $(30 - m)$ 亩,

依题意得: $m > 30 - m$,

解得: $m > 15$,

当 $15 < m \leq 20$ 时, 总收入 $w = 4000m + 4500(30 - m) + 15 \times 100 + (m - 15) \times 200 \geq 127500$,

解得: $15 < m \leq 20$,

当 $m > 20$ 时, 总收入 $w = 4000m + 4500(30 - m) - 15 \times 100 + 5 \times 200 + (m - 20)$

$\times 300 \geq 127500$,

解得: $m \leq 20$, (不合题意),

综上所述, 种植方案如下:

种植类型	种植面积 (亩)				
	方案一	方案二	方案三	方案四	方案五
玫瑰花	16	17	18	19	20
蓑衣草	14	13	12	11	10

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用及一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是仔细审题, 找到等量关系与不等关系.

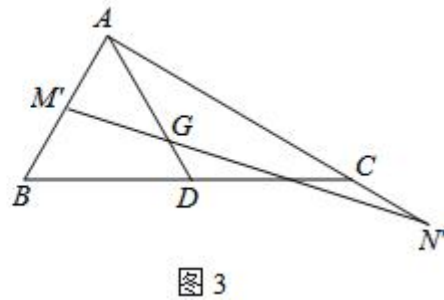
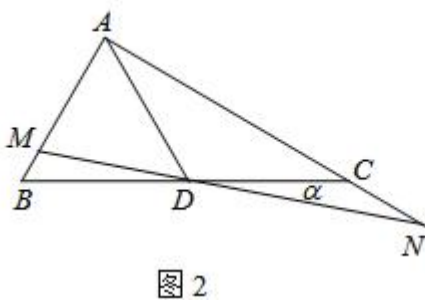
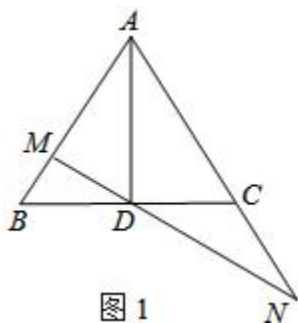
24. (9分) (2014年湖北黄石) AD是 $\triangle ABC$ 的中线, 将BC边所在直线绕点D顺时针旋转 α 角, 交边AB于点M, 交射线AC于点N, 设 $AM=xAB$, $AN=yAC$ ($x, y \neq 0$).

(1) 如图1, 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形且 $\alpha=30^\circ$ 时证明: $\triangle AMN \sim \triangle DMA$;

(2) 如图2, 证明: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$;

(3) 如图3, 当G是AD上任意一点时 (点G不与A重合), 过点G的直线交边AB于 M' , 交射线AC于点 N' , 设 $AG=nAD$, $AM'=x'AB$, $AN'=y'AC$ ($x', y' \neq 0$),

猜想: $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$ 是否成立? 并说明理由.



【考点】相似形综合题.

【分析】 (1) 利用“两角法”证得两个三角形相似;

(2) 如图1, 过点C作 $CF \parallel AB$ 交MN于点F, 构建相似三角形: $\triangle CFN \sim \triangle AMN$, 利用该相似三角形的对应边成比例求得 $\frac{NC}{NA} = \frac{CF}{AM}$. 通过证 $\triangle CFD \cong \triangle BMD$ 得到 $BM=CF$, 利用比例的性质和相关线段的代入得到 $\frac{yAC - AC}{yAC} = \frac{AB - xAB}{xAB}$, 即 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$;

(3) 猜想: $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$ 成立. 需要分类讨论: ①如图乙, 过D作 $MN \parallel M'N'$ 交AB于M, 交AC的延长线于N. 由平行线截线段成比例得到 $\frac{AM'}{AM} = \frac{AG}{AD} = \frac{AN'}{AN}$, 易求 $x = \frac{x'}{n}$, $y = \frac{y'}{n}$, 利用(2)的结果可以求得 $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$;

②如图丙, 当过点D作 $M_1N_1 \parallel M'N'$ 交AB的延长线于 M_1 , 交AC于 N_1 , 则同理可得 $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$.

【解答】(1) 证明: 如图 1, 在 $\triangle AMD$ 中, $\angle MAD=30^\circ$,

$$\angle MDA=60^\circ$$

$$\therefore \angle AMD=90^\circ$$

在 $\triangle AMN$ 中, $\angle AMN=90^\circ$, $\angle MAN=60^\circ$,

$$\therefore \angle AMN=\angle DMA=90^\circ, \quad \angle MAN=\angle MDA,$$

$$\therefore \triangle AMN \sim \triangle DMA;$$

(2) 证明: 如图甲, 过点 C 作 $CF \parallel AB$ 交 MN 于点 F , 则 $\triangle CFN \sim \triangle AMN$

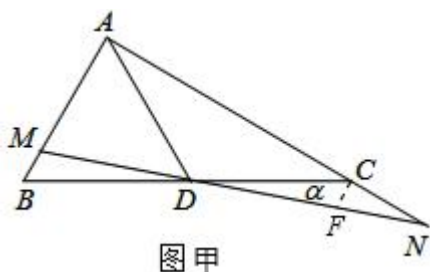


图 甲

$$\therefore \frac{NC}{NA} = \frac{CF}{AM}.$$

易证 $\triangle CFD \cong \triangle BMD$,

$$\therefore BM=CF,$$

$$\therefore \frac{AN-AC}{AN} = \frac{BM}{AM} = \frac{AB-AM}{AM},$$

$$\therefore \frac{yAC-AC}{yAC} = \frac{AB-xAB}{xAB}, \quad \text{即} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2;$$

(3) 猜想: $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$ 成立. 理由如下:

①如图乙, 过 D 作 $MN \parallel M'N'$ 交 AB 于 M , 交 AC 的延长线于 N ,

$$\text{则} \frac{AM'}{AM} = \frac{AG}{AD} = \frac{AN'}{AN}$$

$$\therefore \frac{x'}{x} = n = \frac{y'}{y},$$

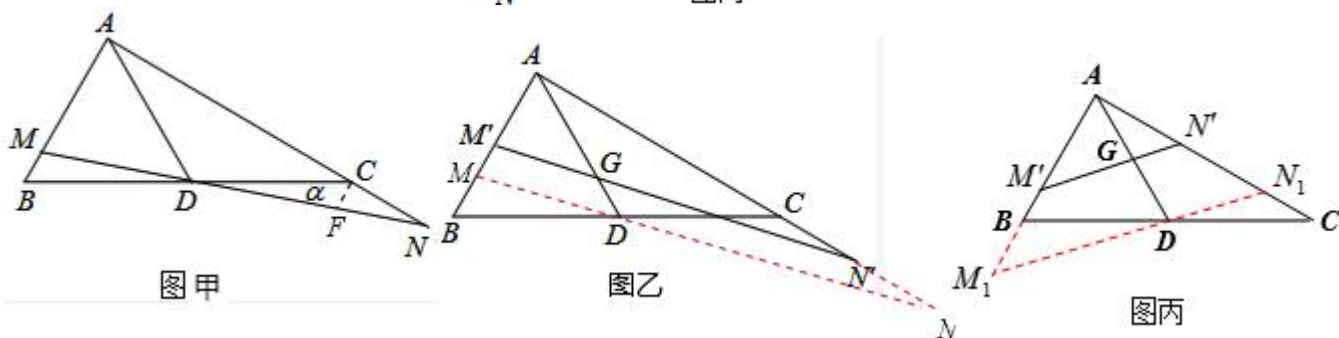
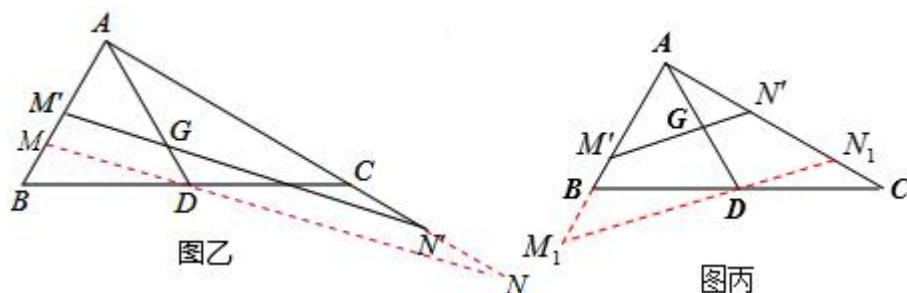
$$\text{即} \quad x = \frac{x'}{n}, \quad y = \frac{y'}{n}$$

由 (2) 知 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

$$\therefore \frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$$

②如图丙，当过点 D 作 $M_1N_1 \parallel M'N'$ 交 AB 的延长线于 M_1 ，交 AC 于 N_1 ，则同

理可得 $\frac{1}{x'} + \frac{1}{y'} = \frac{2}{n}$.



【点评】 本题考查了相似三角形的综合题型. 此题涉及到的知识点有相似三角形的判定与性质，平行线截线段成比例等. 此题的难点在于辅助线的作法，解题时，需要认真的思考才能理清解题思路.

25. (10 分) (2014 年湖北黄石)如图，在矩形 ABCD 中，把点 D 沿 AE 对折，使点 D 落在 OC 上的 F 点，已知 AO=8，AD=10.

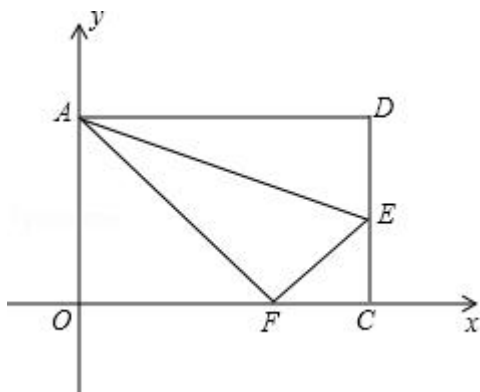
(1) 求 F 点的坐标;

(2) 如果一条不与抛物线对称轴平行的直线与该抛物线仅有一个交点，我们把这条直线称为抛物线的切线，已知抛物线经过点 O，F，且直线 $y=6x-36$ 是该抛物线的切线，求抛物线的解析式;

(3) 直线 $y=k(x-3) - \frac{35}{4}$ 与 (2) 中的抛物线交于 P、Q 两点，点 B 的坐标为

$(3, -\frac{35}{4})$ ，求证: $\frac{1}{PB} + \frac{1}{QB}$ 为定值. (参考公式: 在平面直角坐标系中，若 M $(x_1,$

$y_1)$ ，N (x_2, y_2) ，则 M、N 两点间的距离为 $|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$)



【考点】二次函数综合题.

【分析】(1) 根据折叠的性质得到 $AF=AD$, 所以在在直角 $\triangle AOF$ 中, 利用勾股定理来求 OF 的长度, 然后由点 F 在 x 轴上易求点 F 的坐标;

(2) 已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标, 所以可以设抛物线的交点式方程 $y=a(x-0)(x-6)$, 即 $y=ax(x-6)$ ($a \neq 0$). 根据抛物线的切线的定义知, 直线 $y=6x-36$ 与该抛物线有一个交点, 则联立两个函数解析式, 得到关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - (6a+6)x + 36 = 0$, 则该方程的根的判别式 $\Delta = 0$;

(3) 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 假设 $x_1 > 3$, $x_2 < 3$. 根据抛物线与直线的交点坐标的求法得到: $x^2 - (6+k)x + 3k + \frac{35}{4} = 0$, 根据根与系数的关系求得 $x_1 + x_2 = 6+k$, $x_1 \cdot x_2 = 3k + \frac{35}{4}$. 利用两点间的距离公式推知

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{QB} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}}{3(x_1+x_2) - x_1x_2 - 9}, \text{ 易求 } \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+k^2}}{9 - \frac{35}{4}} = 4 \text{ 为定值.}$$

【解答】解: (1) 由折叠的性质得到: $\triangle ADE \cong \triangle AFE$, 则 $AF=AD$.

又 $\because AD=10$, $AO=8$,

$$\therefore OF = \sqrt{AF^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$\therefore F(6, 0)$;

(2) 依题意可设过点 O、F 的抛物线解析式为 $y=a(x-0)(x-6)$, 即 $y=ax(x-6)$ ($a \neq 0$).

依题意知, 抛物线与直线 $y=6x-36$ 相切,

$$\therefore \begin{cases} y=ax(x-6) \\ y=6x-36 \end{cases},$$

$\therefore ax^2 - (6a+6)x + 36 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (6a+6)^2 - 4a \times 36 = 0,$$

解得 $a=1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-6x$;

(3) 证明: 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 假设 $x_1 > 3$, $x_2 < 3$.

$$\text{依题意得 } \begin{cases} y=k(x-3) - \frac{35}{4}, \\ y=x^2-6x \end{cases},$$

$$\text{得 } x^2 - (6+k)x + 3k + \frac{35}{4} = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 6+k, \quad x_1 \cdot x_2 = 3k + \frac{35}{4}.$$

$$\therefore \frac{1}{PB} + \frac{1}{QB} = \frac{1}{\sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1 + \frac{35}{4})^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_2-3)^2 + (y_2 + \frac{35}{4})^2}}$$

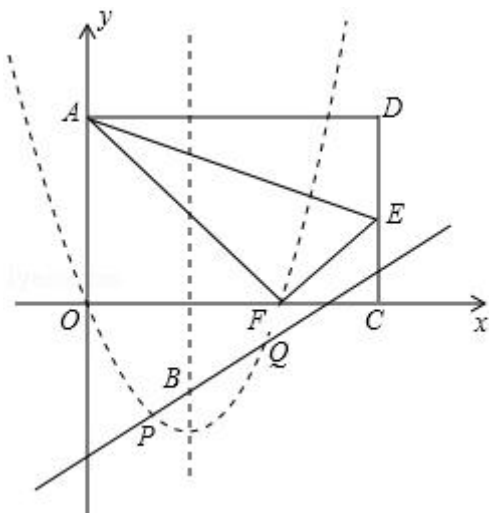
$$= \frac{1}{\sqrt{(x_1-3)^2 + k^2(x_1-3)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_2-3)^2 + k^2(x_2-3)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{1}{x_1-3} + \frac{1}{3-x_2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{x_1 - x_2}{3(x_1+x_2) - x_1x_2 - 9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}}{3(x_1+x_2) - x_1x_2 - 9}$$

$$\text{即 } \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+k^2}}{9 - \frac{35}{4}} = 4 \text{ 为定值.}$$



【点评】 本题主要考查了二次函数解析式的确定、函数图象交点的求法等知识. 解题时, 要学生掌握数形结合的数学思想方法. 另外, 解答 (3) 题时, 需要熟悉两点间的距离公式.