

2014 年湖北省黄冈市中考数学试卷

一、选择题（下列个题四个选项中，有且仅有一个是正确的．每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2014•黄冈) -8 的立方根是 ()

- A. -2 B. ± 2 C. 2 D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) (2014•黄冈) 如果 α 与 β 互为余角，则 ()

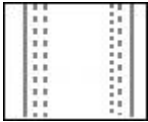
- A. $\alpha + \beta = 180^\circ$ B. $\alpha - \beta = 180^\circ$ C. $\alpha - \beta = 90^\circ$ D. $\alpha + \beta = 90^\circ$

3. (3 分) (2014•黄冈) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $x^6 \div x^5 = x$ C. $(-x^2)^4 = x^6$ D. $x^2 + x^3 = x^5$

4. (3 分) (2014•黄冈) 如图所示的几何体的主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

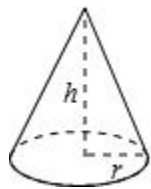
5. (3 分) (2014•黄冈) 函数 $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq 0$ B. $x \geq 2$ C. $x > 2$ 且 $x \neq 0$ D. $x \geq 2$ 且 $x \neq 0$

6. (3 分) (2014•黄冈) 若 α 、 β 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 6 = 0$ 的两根，则 $\alpha^2 + \beta^2 =$ ()

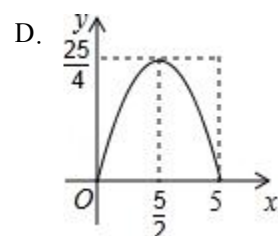
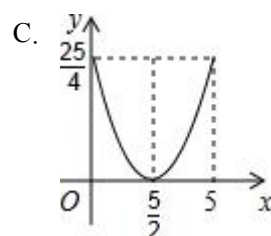
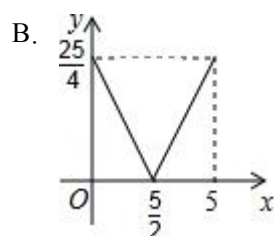
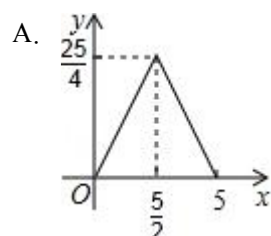
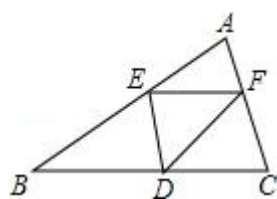
- A. -8 B. 32 C. 16 D. 40

7. (3 分) (2014•黄冈) 如图，圆锥体的高 $h = 2\sqrt{3}$ cm，底面半径 $r = 2$ cm，则圆锥体的全面积为 () cm^2 .



- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 8π C. 12π D. $(4\sqrt{3} + 4)\pi$

8. (3 分) (2014•黄冈) 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 10$ ， BC 边上的高 $h = 5$ ，点 E 在边 AB 上，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ，交 AC 边于点 F 。点 D 为 BC 上一点，连接 DE 、 DF 。设点 E 到 BC 的距离为 x ，则 $\triangle DEF$ 的面积 S 关于 x 的函数图象大致为 ()



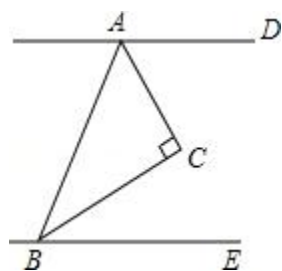
二、填空题 (共 7 小题, 每小题 3 分, 共 21 分)

9. (3 分) (2014•黄冈) 计算: $|- \frac{1}{3}| =$ _____.

10. (3 分) (2014•黄冈) 分解因式: $(2a+1)^2 - a^2 =$ _____.

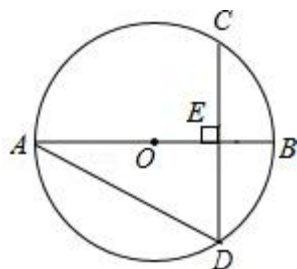
11. (3 分) (2014•黄冈) 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{4}} =$ _____.

12. (3 分) (2014•黄冈) 如图, 若 $AD \parallel BE$, 且 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CBE = 30^\circ$, 则 $\angle CAD =$ _____度.



13. (3 分) (2014•黄冈) 当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, 代数式 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} \div \frac{x - 1}{x^2 + x} + x$ 的值是_____.

14. (3 分) (2014•黄冈) 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 CD 垂直于直径 AB 于点 E , 若 $\angle BAD = 30^\circ$, 且 $BE = 2$, 则 $CD =$ _____.



-
15. (3分) (2014•黄冈) 如图, 在一张长为 8cm, 宽为 6cm 的矩形纸片上, 现要剪下一个腰长为 5cm 的等腰三角形 (要求: 等腰三角形的一个顶点与矩形的一个顶点重合, 其余的两个顶点在矩形的边上). 则剪下的等腰三角形的面积为_____cm².

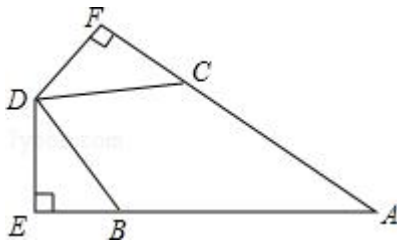


三、解答题 (本大题共 10 小题, 满分共 75 分)

16. (5分) (2014•黄冈) 解不等式组: $\begin{cases} 2x-1 > 5, & \text{①} \\ \frac{3x+1}{2} - 1 \geq x, & \text{②} \end{cases}$, 并在数轴上表示出不等式组的解集.

17. (6分) (2014•黄冈) 浠州县为了改善全县中、小学办学条件, 计划集中采购一批电子白板和投影机. 已知购买 2 块电子白板比购买 3 台投影机多 4000 元, 购买 4 块电子白板和 3 台投影机共需 44000 元. 问购买一块电子白板和一台投影机各需要多少元?

18. (6分) (2014•黄冈) 已知, 如图, $AB=AC$, $BD=CD$, $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 求证: $DE=DF$.

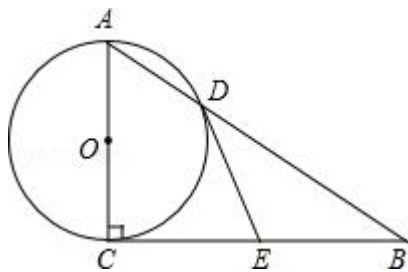


19. (6分) (2014•黄冈) 红花中学现要从甲、乙两位男生和丙、丁两位女生中, 选派两位同学分别作为①号选手和②号选手代表学校参加全县汉字听写大赛.

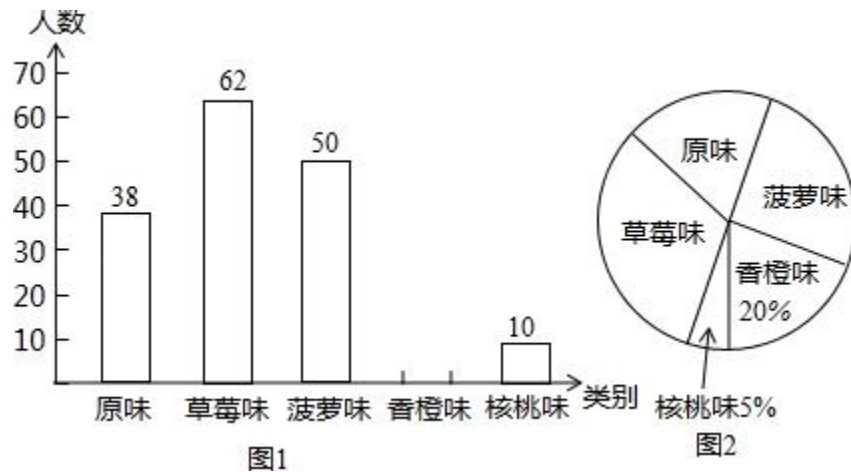
- (1) 请用树状图或列表法列举出各种可能选派的结果;
- (2) 求恰好选派一男一女两位同学参赛的概率.

20. (7分) (2014•黄冈) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 以 AC 为直径的 $\odot O$ 与 AB 边交于点 D , 过点 D 的切线, 交 BC 于点 E .

- (1) 求证: $EB=EC$;
- (2) 若以点 O 、 D 、 E 、 C 为顶点的四边形是正方形, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.



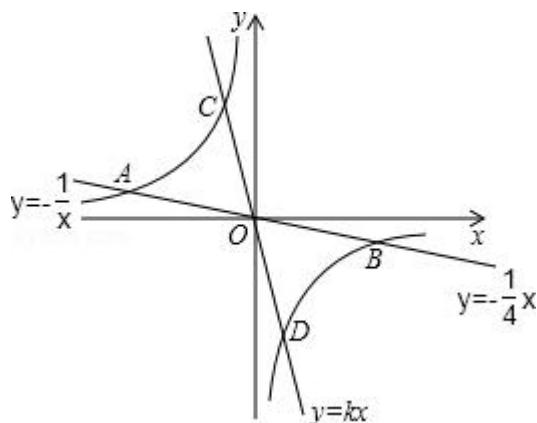
21. (7 分) (2014•黄冈) 某市为了增强学生体质, 全面实施“学生饮用奶”营养工程. 某品牌牛奶供应商提供了原味、草莓味、菠萝味、香橙味、核桃味五种口味的牛奶提供学生饮用. 浉马中学为了了解学生对不同口味牛奶的喜好, 对全校订购牛奶的学生进行了随机调查 (每盒各种口味牛奶的体积相同), 绘制了如图两张不完整的人数统计图:



- (1) 本次被调查的学生有_____名;
- (2) 补全上面的条形统计图 1, 并计算出喜好“菠萝味”牛奶的学生人数在扇形统计图 2 中所占圆心角的度数;
- (3) 该校共有 1200 名学生订购了该品牌的牛奶, 牛奶供应商每天只为每名订购牛奶的学生配送一盒牛奶. 要使学生每天都喝到自己喜好的口味的牛奶, 牛奶供应商每天送往该校的牛奶中, 草莓味要比原味多送多少盒?

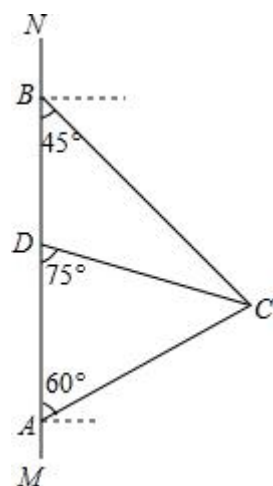
22. (9 分) (2014•黄冈) 如图, 已知双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与两直线 $y = -\frac{1}{4}x$, $y = -kx$ ($k > 0$, 且 $k \neq \frac{1}{4}$) 分别相交于 A、B、C、D 四点.

- (1) 当点 C 的坐标为 $(-1, 1)$ 时, A、B、D 三点坐标分别是 A (_____, _____), B (_____, _____), D (_____, _____).
- (2) 证明: 以点 A、D、B、C 为顶点的四边形是平行四边形.
- (3) 当 k 为何值时, $\square ADBC$ 是矩形.



23. (7 分) (2014•黄冈) 如图, 在南北方向的海岸线 MN 上, 有 A、B 两艘巡逻船, 现均收到故障船 C 的求救信号. 已知 A、B 两船相距 $100(\sqrt{3}+1)$ 海里, 船 C 在船 A 的北偏东 60° 方向上, 船 C 在船 B 的东南方向上, MN 上有一观测点 D, 测得船 C 正好在观测点 D 的南偏东 75° 方向上.

- (1) 分别求出 A 与 C, A 与 D 之间的距离 AC 和 AD (如果运算结果有根号, 请保留根号).
- (2) 已知距观测点 D 处 100 海里范围内有暗礁. 若巡逻船 A 沿直线 AC 去营救船 C, 在去营救的途中有无触暗礁危险? (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



24. (9 分) (2014•黄冈) 某地实行医疗保险 (以下简称“医保”) 制度. 医保机构规定:

- 一：每位居民年初缴纳医保基金 70 元；
- 二：居民每个人当年治病所花的医疗费（以定点医院的治疗发票为准），年底按下列方式（见表一）报销所治病的医疗费用：

居民个人当年治病所花费的医疗费	医疗费报销方法
不超过 n 元的部分	全部由医保基金承担（即全部报销）
超过 n 元但不超过 6000 元的部分	个人承担 $k\%$ ，其余部分由医保基金承担
超过 6000 元的部分	个人承担 20%，其余部分由医保基金承担

如果设一位居民当年治病花费的医疗费为 x 元，他个人实际承担的医疗费用（包括医疗费中个人承担部分和年初缴纳的医保基金）记为 y 元.

(1) 当 $0 \leq x \leq n$ 时, $y=70$; 当 $n < x \leq 6000$ 时, $y=$

$$\begin{cases} 70 & (0 \leq x \leq n) \\ 0.0k(x-n)+70 & (n < x \leq 6000) \end{cases}$$
(用含 n 、 k 、 x 的式子表示).

(2) 表二是该地 A、B、C 三位居民 2013 年治病所花费的医疗费和个人实际承担的医疗费用，根据表中的数据，求出 n 、 k 的值.

表二：

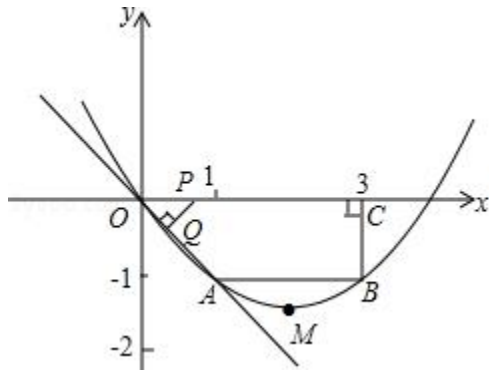
居民	A	B	C
某次治病所花费的治疗费用 x （元）	400	800	1500
个人实际承担的医疗费用 y （元）	70	190	470

(3) 该地居民周大爷 2013 年治病所花费的医疗费共 32000 元，那么这一年他个人实际承担的医疗费用是多少元？

25. (13 分) (2014•黄冈) 已知：如图，在四边形 OABC 中， $AB \parallel OC$ ， $BC \perp x$ 轴于点 C， $A(1, -1)$ ， $B(3, -1)$ ，动点 P 从点 O 出发，沿着 x 轴正方向以每秒 2 个单位长度的速

度移动. 过点 P 作 PQ 垂直于直线 OA , 垂足为点 Q , 设点 P 移动的时间 t 秒 ($0 < t < 2$), $\triangle OPQ$ 与四边形 $OABC$ 重叠部分的面积为 S .

- (1) 求经过 O 、 A 、 B 三点的抛物线的解析式, 并确定顶点 M 的坐标;
- (2) 用含 t 的代数式表示点 P 、点 Q 的坐标;
- (3) 如果将 $\triangle OPQ$ 绕着点 P 按逆时针方向旋转 90° , 是否存在 t , 使得 $\triangle OPQ$ 的顶点 O 或顶点 Q 在抛物线上? 若存在, 请求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;
- (4) 求出 S 与 t 的函数关系式.



2014 年湖北省黄冈市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（下列个题四个选项中，有且仅有一个是正确的．每小题 3 分，共 24 分）

1. (3 分) (2014•黄冈) -8 的立方根是 ()

- A. -2 B. ± 2 C. 2 D. $-\frac{1}{2}$

考点：立方根.

分析：如果一个数 x 的立方等于 a ，那么 x 是 a 的立方根，根据此定义求解即可.

解答：解： $\because -2$ 的立方等于 -8 ,

$\therefore -8$ 的立方根等于 -2 .

故选 A.

点评：此题主要考查了立方根的定义，求一个数的立方根，应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方. 由开立方和立方是互逆运算，用立方的方法求这个数的立方根. 注意一个数的立方根与原数的性质符号相同.

2. (3 分) (2014•黄冈) 如果 α 与 β 互为余角，则 ()

- A. $\alpha + \beta = 180^\circ$ B. $\alpha - \beta = 180^\circ$ C. $\alpha - \beta = 90^\circ$ D. $\alpha + \beta = 90^\circ$

考点：余角和补角.

分析：根据互为余角的定义，可以得到答案.

解答：解：如果 α 与 β 互为余角，则 $\alpha + \beta = 90^\circ$.

故选：D.

点评：此题主要考查了互为余角的性质，正确记忆互为余角的定义是解决问题的关键.

3. (3 分) (2014•黄冈) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $x^6 \div x^5 = x$ C. $(-x^2)^4 = x^6$ D. $x^2 + x^3 = x^5$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析：根据同底数幂的乘法和除法法则可以解答本题.

解答：解：A. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，答案错误；

B. $x^6 \div x^5 = x$ ，答案正确；

C. $(-x^2)^4 = x^8$ ，答案错误；

D. $x^2 + x^3$ 不能合并，答案错误.

故选：B.

点评：主要考查同底数幂相除底数不变指数相减，同底数幂相乘底数不变指数相加，熟记定义是解题的关键.

4. (3 分) (2014•黄冈) 如图所示的几何体的主视图是 ()





考点：简单组合体的三视图.

分析：根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案.

解答：解：从正面看，象一个大梯形减去一个小梯形，
故选：D.

点评：本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图.

5. (3 分) (2014•黄冈) 函数 $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq 0$ B. $x \geq 2$ C. $x > 2$ 且 $x \neq 0$ D. $x \geq 2$ 且 $x \neq 0$

考点：函数自变量的取值范围.

分析：根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0 列式计算即可得解.

解答：解：由题意得， $x - 2 \geq 0$ 且 $x \neq 0$ ，
 $\therefore x \geq 2$.
故选 B.

点评：本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

6. (3 分) (2014•黄冈) 若 α 、 β 是一元二次方程 $x^2 + 2x - 6 = 0$ 的两根，则 $\alpha^2 + \beta^2 =$ ()

- A. -8 B. 32 C. 16 D. 40

考点：根与系数的关系.

专题：计算题.

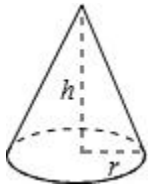
分析：根据根与系数的关系得到 $\alpha + \beta = -2$ ， $\alpha\beta = -6$ ，再利用完全平方公式得到 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ，然后利用整体代入的方法计算.

解答：解：根据题意得 $\alpha + \beta = -2$ ， $\alpha\beta = -6$ ，
所以 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times (-6) = 16$.
故选 C.

点评：本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与系数的关系：若方程两个为 x_1 ， x_2 ，则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

7. (3 分) (2014•黄冈) 如图，圆锥体的高 $h = 2\sqrt{3}$ cm，底面半径 $r = 2$ cm，则圆锥体的全面积为 () cm^2 .



A. $4\sqrt{3}\pi$

B. 8π

C. 12π

D. $(4\sqrt{3}+4)\pi$

考点：圆锥的计算.

分析：表面积=底面积+侧面积= $\pi \times$ 底面半径²+底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$.

解答：解：底面圆的半径为 2，则底面周长= 4π ，

$\therefore$ 底面半径为 2cm、高为 $2\sqrt{3}$ m，

$\therefore$ 圆锥的母线长为 4cm，

$\therefore$ 侧面面积= $\frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 = 8\pi$ ；

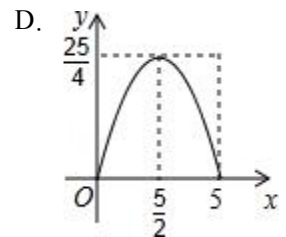
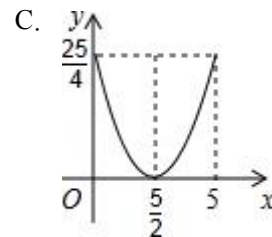
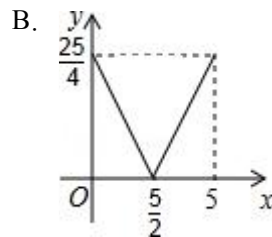
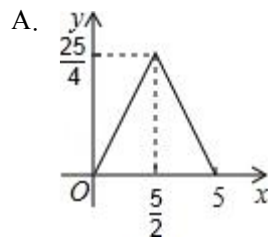
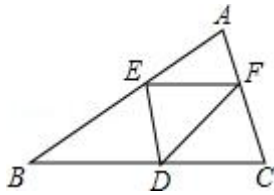
底面积为 4π ，

全面积为： $8\pi + 4\pi = 12\pi \text{cm}^2$.

故选 C.

点评：本题利用了圆的周长公式和扇形面积公式求解，牢记公式是解答本题的关键.

8. (3 分) (2014•黄冈) 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $BC=10$ ， BC 边上的高 $h=5$ ，点 E 在边 AB 上，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ，交 AC 边于点 F . 点 D 为 BC 上一点，连接 DE 、 DF . 设点 E 到 BC 的距离为 x ，则 $\triangle DEF$ 的面积 S 关于 x 的函数图象大致为 ()



考点：动点问题的函数图象.

分析：判断出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ABC$ 相似，根据相似三角形对应边成比例列式求出 EF ，再根据三角形的面积列式表示出 S 与 x 的关系式，然后得到大致图象选择即可.

解答：解： $\because EF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{5-x}{5}$ ，

$\therefore EF = \frac{5-x}{5} \cdot 10 = 10 - 2x$ ，

$$\therefore S = \frac{1}{2} (10 - 2x) \cdot x = -x^2 + 5x = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4},$$

$$\therefore S \text{ 与 } x \text{ 的关系式为 } S = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad (0 < x < 10),$$

纵观各选项，只有 D 选项图象符合.

故选 D.

点评： 本题考查了动点问题函数图象，主要利用了相似三角形的性质，求出 S 与 x 的函数关系式是解题的关键，也是本题的难点.

二、填空题（共 7 小题，每小题 3 分，共 21 分）

9. (3 分) (2014•黄冈) 计算： $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$.

考点： 绝对值.

分析： 根据负数的绝对值等于它的相反数，可得答案案.

解答： 解： $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

点评： 本题考查了绝对值，负数的绝对值是它的相反数.

10. (3 分) (2014•黄冈) 分解因式： $(2a+1)^2 - a^2 = (3a+1)(a+1)$.

考点： 因式分解-运用公式法.

分析： 直接利用平方差公式进行分解即可.

解答： 解：原式 $= (2a+1+a)(2a+1-a) = (3a+1)(a+1)$,

故答案为： $(3a+1)(a+1)$.

点评： 此题主要考查了公式法分解因式，关键是掌握平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

11. (3 分) (2014•黄冈) 计算： $\sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

考点： 二次根式的加减法.

分析： 先进行二次根式的化简，然后合并同类二次根式求解.

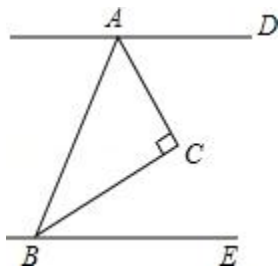
解答： 解：原式 $= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

点评： 本题考查了二次根式的加减法，关键是掌握二次根式的化简以及同类二次根式的合并.

12. (3 分) (2014•黄冈) 如图，若 $AD \parallel BE$ ，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CBE = 30^\circ$ ，则 $\angle CAD = 60$ 度.



考点：平行线的性质.

分析：延长 AC 交 BE 于 F，根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle 1$ ，再根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle CAD = \angle 1$.

解答：解：如图，延长 AC 交 BE 于 F，

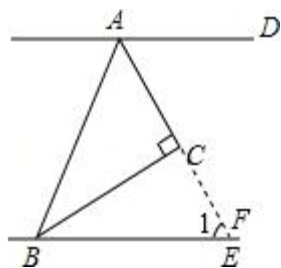
$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle CBE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle 1 = 60^\circ.$$

故答案为：60.



点评：本题考查了平行线的性质，直角三角形两锐角互余的性质，熟记性质是解题的关键.

13. (3 分) (2014•黄冈) 当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时，代数式 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} \div \frac{x - 1}{x^2 + x} + x$ 的值是 $3 - 2\sqrt{2}$.

考点：分式的化简求值.

分析：将除法转化为乘法，因式分解后约分，然后通分相加即可.

解答：

$$\text{解：原式} = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} \cdot \frac{x(x + 1)}{x - 1} + x$$

$$= x(x - 1) + x$$

$$= x^2 - x + x$$

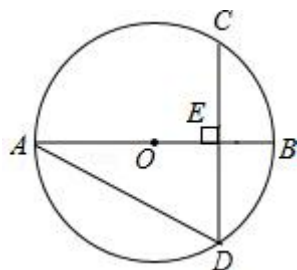
$$= x^2,$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} - 1 \text{ 时, 原式} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{故答案为 } 3 - 2\sqrt{2}.$$

点评：本题考查了分式的化简求值，熟悉除法法则和因式分解是解题的关键.

14. (3 分) (2014•黄冈) 如图，在 $\odot O$ 中，弦 CD 垂直于直径 AB 于点 E，若 $\angle BAD = 30^\circ$ ，且 $BE = 2$ ，则 $CD = 4\sqrt{3}$.



考点：垂径定理；解直角三角形.

专题：计算题.

分析：连结 OD，设 $\odot O$ 的半径为 R ，先根据圆周角定理得到 $\angle BOD = 2\angle BAD = 60^\circ$ ，再根据垂径定理由 $CD \perp AB$ 得到 $DE = CE$ ，在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中， $OE = OB - BE = R - 2$ ，利用余弦的定义得

$$\cos \angle EOD = \cos 60^\circ = \frac{OE}{OD}, \text{ 即 } \frac{R-2}{R} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } R=4, \text{ 则 } OE=2, DE=\sqrt{3}OE=2\sqrt{3}, \text{ 所以}$$

$$CD=2DE=4\sqrt{3}.$$

解答：解：连结 OD，如图，设 $\odot O$ 的半径为 R ，

$$\because \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD = 60^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore DE = CE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中， $OE = OB - BE = R - 2$ ， $OD = R$ ，

$$\therefore \cos \angle EOD = \cos 60^\circ = \frac{OE}{OD},$$

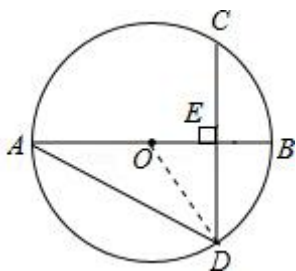
$$\therefore \frac{R-2}{R} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } R=4,$$

$$\therefore OE = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}OE = 2\sqrt{3},$$

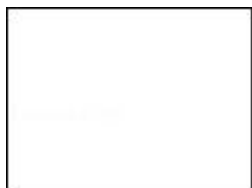
$$\therefore CD = 2DE = 4\sqrt{3}.$$

故答案为 $4\sqrt{3}$.



点评：本题考查了垂径定理：平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了圆周角定理和解直角三角形．

15. (3分) (2014•黄冈) 如图，在一张长为 8cm，宽为 6cm 的矩形纸片上，现要剪下一个腰长为 5cm 的等腰三角形（要求：等腰三角形的一个顶点与矩形的一个顶点重合，其余的两个顶点在矩形的边上），则剪下的等腰三角形的面积为 $\frac{25}{2}$ ， $5\sqrt{6}$ ，10 cm^2 .

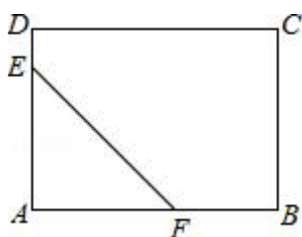


考点：作图—应用与设计作图.

分析：因为等腰三角形腰的位置不明确，所以分（1）腰长在矩形相邻的两边上，（2）一腰在矩形的宽上，（3）一腰在矩形的长上，三种情况讨论.（1） $\triangle AEF$ 为等腰直角三角形，直接利用面积公式求解即可；（2）先利用勾股定理求出 AE 边上的高 BF ，再代入面积公式求解；（3）先求出 AE 边上的高 DF ，再代入面积公式求解.

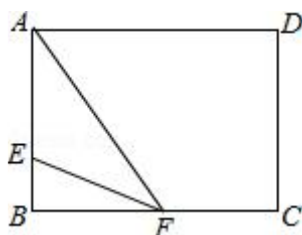
解答：解：分三种情况计算：

（1）当 $AE=AF=5$ 厘米时，



$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2} \text{ 厘米}^2,$$

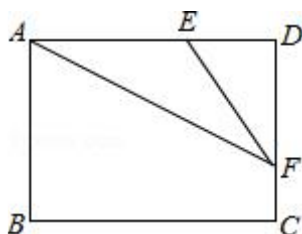
（2）当 $AE=EF=5$ 厘米时，如图



$$BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6} \text{ 厘米},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \text{ 厘米}^2,$$

（3）当 $AE=EF=5$ 厘米时，如图



$$DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ 厘米},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot DF = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 \text{ 厘米}^2.$$

故答案为: $\frac{25}{2}$, $5\sqrt{6}$, 10.

点评: 本题主要考查矩形的角是直角的性质和勾股定理的运用, 要根据三角形的腰长的不确定分情况讨论.

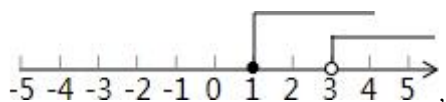
三、解答题 (本大题共 10 小题, 满分共 75 分)

16. (5 分) (2014•黄冈) 解不等式组: $\begin{cases} 2x-1>5, & \textcircled{1} \\ \frac{3x+1}{2}-1\geq x, & \textcircled{2} \end{cases}$, 并在数轴上表示出不等式组的解集.

考点: 解一元一次不等式组; 在数轴上表示不等式的解集.

分析: 先求出不等式组中每一个不等式的解集, 再求出它们的公共部分, 然后把不等式的解集表示在数轴上即可.

解答: 解: 解①得: $x>3$,
解②得: $x\geq 1$.



则不等式组的解集是: $x>3$.

点评: 本题考查的是一元一次不等式组的解, 解此类题目常常要结合数轴来判断. 还可以观察不等式的解, 若 $x>$ 较小的数、 $<$ 较大的数, 那么解集为 x 介于两数之间.

17. (6 分) (2014•黄冈) 浠州县为了改善全县中、小学办学条件, 计划集中采购一批电子白板和投影机. 已知购买 2 块电子白板比购买 3 台投影机多 4000 元, 购买 4 块电子白板和 3 台投影机共需 44000 元. 问购买一块电子白板和一台投影机各需要多少元?

考点: 二元一次方程组的应用.

分析: 设购买 1 块电子白板需要 x 元, 一台投影机需要 y 元, 根据①买 2 块电子白板的钱 - 买 3 台投影机的钱 = 4000 元, ②购买 4 块电子白板的费用 + 3 台投影机的费用 = 44000 元, 列出方程组, 求解即可.

解答: 解: 设购买 1 块电子白板需要 x 元, 一台投影机需要 y 元, 由题意得:

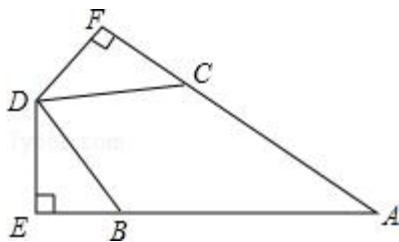
$$\begin{cases} 2x-3y=4000 \\ 4x+3y=44000 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=8000 \\ y=4000 \end{cases}.$$

答: 购买一块电子白板需要 8000 元, 一台投影机需要 4000 元.

点评: 此题主要考查了二元一次方程组的应用, 解题关键是弄清题意, 找出合适的等量关系, 列出方程组.

18. (6 分) (2014•黄冈) 已知, 如图, $AB=AC$, $BD=CD$, $DE\perp AB$ 于点 E , $DF\perp AC$ 于点 F , 求证: $DE=DF$.



考点：全等三角形的判定与性质；角平分线的性质.

专题：证明题.

分析：连接 AD，利用 SSS 得到三角形 ABD 与三角形 ACD 全等，利用全等三角形对应角相等得到 $\angle EAD = \angle FAD$ ，即 AD 为角平分线，再由 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，利用角平分线定理即可得证.

解答：证明：连接 AD，

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 中，

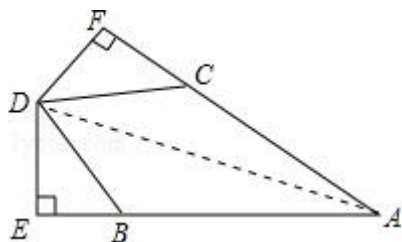
$$\begin{cases} AC=AB \\ CD=BD, \\ AD=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD$ (SSS),

$\therefore \angle EAD = \angle FAD$ ，即 AD 平分 $\angle EAF$ ，

$\therefore DE \perp AE$ ， $DF \perp AF$ ，

$\therefore DE = DF$.



点评：此题考查了全等三角形的判定与性质，以及角平分线定理，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解本题的关键.

19. (6分) (2014•黄冈) 红花中学现要从甲、乙两位男生和丙、丁两位女生中，选派两位同学分别作为①号选手和②号选手代表学校参加全县汉字听写大赛.

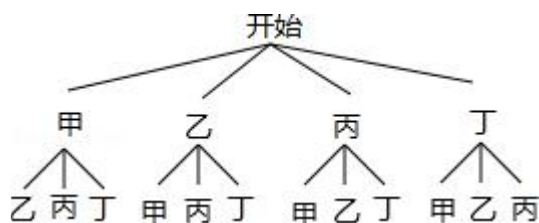
- (1) 请用树状图或列表法列举出各种可能选派的结果；
- (2) 求恰好选派一男一女两位同学参赛的概率.

考点：列表法与树状图法.

分析： (1) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果；

(2) 由 (1) 可求得恰好选派一男一女两位同学参赛的有 8 种情况，然后利用概率公式求解即可求得答案.

解答：解：(1) 画树状图得：



则共有 12 种等可能的结果；

(2) $\because$ 恰好选派一男一女两位同学参赛的有 8 种情况，

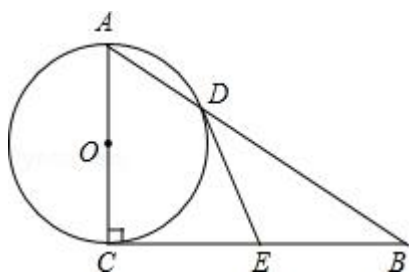
$\therefore$ 恰好选派一男一女两位同学参赛的概率为： $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

点评： 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率。列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件。用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

20. (7 分) (2014•黄冈) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，以 AC 为直径的 $\odot O$ 与 AB 边交于点 D ，过点 D 的切线，交 BC 于点 E 。

(1) 求证： $EB=EC$ ；

(2) 若以点 O 、 D 、 E 、 C 为顶点的四边形是正方形，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。



考点： 切线的性质；正方形的性质。

分析： (1) 连接 BD ，根据直径所对的圆周角是直角，得到直角三角形 ABD 和 BCD ，根据切线的判定定理知 BC 是圆的切线，结合切线长定理得到 $BE=DE$ ，再根据等边对等角以及等角的余角相等证明 $DE=CE$ ；

(2) 当以点 O 、 D 、 E 、 C 为顶点的四边形是正方形时，则 $\triangle DEB$ 是等腰直角三角形，据此即可判断。

解答： (1) 证明：连接 CD ，

$\because AC$ 是直径， $\angle ACD=90^\circ$ ，

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线， $\angle BDA=90^\circ$ 。

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore DE=BE$ (切线长定理)。

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$ 。

又 $\because \angle DCE+\angle EBD=\angle CDE+\angle EDB=90^\circ$ ，

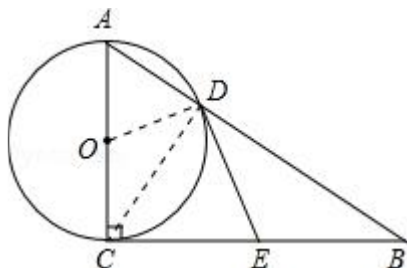
$\therefore \angle DCE=\angle CDE$ ，

$\therefore DE=CE$ ，

又 $\because DE=BE$ ，

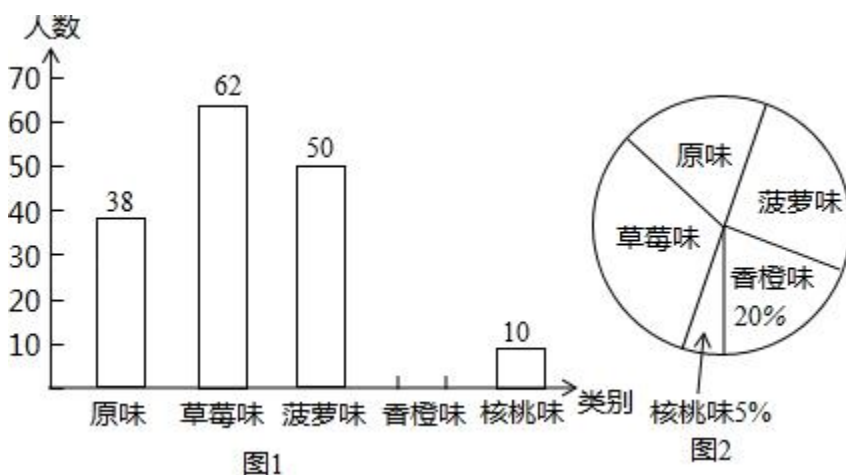
$\therefore DE=BE$ 。

(2) 解: 当以点 O 、 D 、 E 、 C 为顶点的四边形是正方形时, 则 $\angle DEB=90^\circ$,
 又 $\because DE=BE$,
 $\therefore \triangle DEB$ 是等腰直角三角形, 则 $\angle B=45^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.



点评: 本题考查了切线的性质以及切线长定理、圆周角定理, 解题的关键是连接 CD 构造直角三角形.

21. (7 分) (2014•黄冈) 某市为了增强学生体质, 全面实施“学生饮用奶”营养工程. 某品牌牛奶供应商提供了原味、草莓味、菠萝味、香橙味、核桃味五种口味的牛奶提供学生饮用. 浠马中学为了了解学生对不同口味牛奶的喜好, 对全校订购牛奶的学生进行了随机调查 (每盒各种口味牛奶的体积相同), 绘制了如图两张不完整的人数统计图:



- (1) 本次被调查的学生有 200 名;
- (2) 补全上面的条形统计图 1, 并计算出喜好“菠萝味”牛奶的学生人数在扇形统计图 2 中所占圆心角的度数;
- (3) 该校共有 1200 名学生订购了该品牌的牛奶, 牛奶供应商每天只为每名订购牛奶的学生配送一盒牛奶. 要使学生每天都喝到自己喜好的口味的牛奶, 牛奶供应商每天送往该校的牛奶中, 草莓味要比原味多送多少盒?

考点: 条形统计图; 扇形统计图.

分析: (1) 喜好“核桃味”牛奶的学生人数除以它所占的百分比即可得本次被调查的学生人数;
 (2) 用本次被调查的学生的总人数减去喜好原味、草莓味、菠萝味、核桃味的人数得出喜好香橙味的人数, 补全条形统计图即可, 用喜好“菠萝味”牛奶的学生人数除以总人数再乘以 360° , 即可得喜好“菠萝味”牛奶的学生人数在扇形统计图 2 中所占圆心角的度数;
 (3) 用喜好草莓味的人数占的百分比减去喜好原味的人数占的百分比, 再乘以该校的总人数

即可.

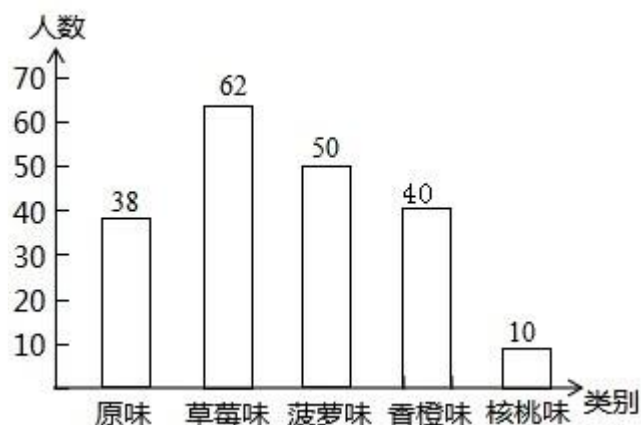
解答: 解: (1) $10 \div 5\% = 200$ (名)

答: 本次被调查的学生有 200 名,

故答案为: 200;

(2) $200 - 38 - 62 - 50 - 10 = 40$ (名),

条形统计图如下:



$$\frac{50}{200} \times 360^\circ = 90^\circ,$$

答: 喜好“菠萝味”牛奶的学生人数在扇形统计图 2 中所占圆心角的度数为 90° ;

$$(3) 1200 \times \left(\frac{62}{200} - \frac{38}{200} \right) = 144 \text{ (盒)},$$

答: 草莓味要比原味多送 144 盒.

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用; 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

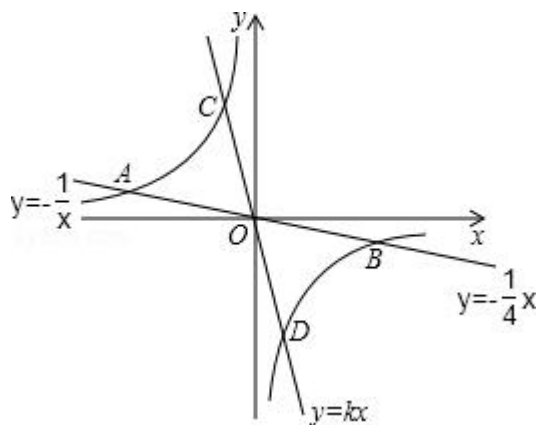
22. (9 分) (2014·黄冈) 如图, 已知双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与两直线 $y = -\frac{1}{4}x$, $y = -kx$ ($k > 0$, 且 $k \neq \frac{1}{4}$)

分别相交于 A、B、C、D 四点.

(1) 当点 C 的坐标为 $(-1, 1)$ 时, A、B、D 三点坐标分别是 A $(\underline{-2}, \underline{-\frac{1}{2}})$, B $(\underline{2}, \underline{-\frac{1}{2}})$, D $(\underline{1}, \underline{-1})$.

(2) 证明: 以点 A、D、B、C 为顶点的四边形是平行四边形.

(3) 当 k 为何值时, $\square ADBC$ 是矩形.



考点：反比例函数综合题.

专题：综合题.

分析：(1) 由 C 坐标，利用反比例函数的中心对称性确定出 D 坐标，联立双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与直线 $y = -\frac{1}{4}x$ ，求出 A 与 B 坐标即可；

(2) 由反比例函数为中心对称图形，利用中心对称性质得到 $OA=OB$ ， $OC=OD$ ，利用对角线互相平分的四边形为平行四边形即可得证；

(3) 由 A 与 B 坐标，利用两点间的距离公式求出 AB 的长，联立双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与直线 $y = -kx$ ，表示出 CD 的长，根据对角线相等的平行四边形为矩形，得到 $AB=CD$ ，即可求出此时 k 的值.

解答：解：(1) $\because C(-1, 1)$ ，C，D 为双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与直线 $y = -kx$ 的两个交点，且双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 为中心对称图形，
 $\therefore D(1, -1)$ ，

$$\text{联立得：} \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{4}x \end{cases},$$

消去 y 得： $-\frac{1}{4}x = -\frac{1}{x}$ ，即 $x^2 = 4$ ，

解得： $x = 2$ 或 $x = -2$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = -\frac{1}{2}$ ；当 $x = -2$ 时， $y = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore A(-2, \frac{1}{2})$ ， $B(2, -\frac{1}{2})$ ；

故答案为： $-2, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1, -1$ ；

(2) $\because$ 双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 为中心对称图形，且双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 与两直线 $y = -\frac{1}{4}x$ ， $y = -kx$ ($k > 0$ ，

且 $k \neq \frac{1}{4}$) 分别相交于 A、B、C、D 四点,

$\therefore OA=OB, OC=OD,$

则以点 A、D、B、C 为顶点的四边形是平行四边形;

(3) 若 $\square ADBC$ 是矩形, 可得 $AB=CD,$

$$\text{联立得: } \begin{cases} y = -\frac{1}{x}, \\ y = -kx \end{cases}$$

消去 y 得: $-\frac{1}{x} = -kx$, 即 $x^2 = \frac{1}{k}$,

解得: $x = \sqrt{\frac{1}{k}}$ 或 $x = -\sqrt{\frac{1}{k}}$,

当 $x = \sqrt{\frac{1}{k}}$ 时, $y = -\sqrt{k}$; 当 $x = -\sqrt{\frac{1}{k}}$ 时, $y = \sqrt{k}$,

$\therefore C(-\sqrt{\frac{1}{k}}, \sqrt{k}), D(\sqrt{\frac{1}{k}}, -\sqrt{k}),$

$$\therefore CD = \sqrt{\left(-\sqrt{\frac{1}{k}} - \sqrt{\frac{1}{k}}\right)^2 + (\sqrt{k} + \sqrt{k})^2} = AB = \sqrt{(-2 - 2)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{17},$$

整理得: $(4k - 1)(k - 4) = 0,$

解得: $k = \frac{1}{4}$ (不合题意, 舍去) 或 $k = 4,$

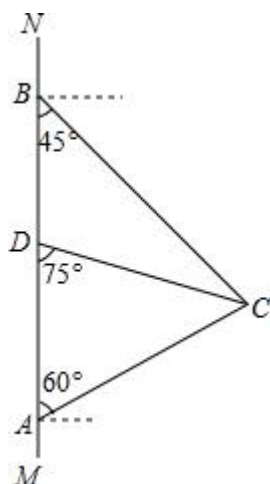
则当 $k = 4$ 时, $\square ADBC$ 是矩形.

点评: 此题属于反比例函数综合题, 涉及的知识有: 坐标与图形性质, 一次函数与反比例函数的交点, 平行四边形, 矩形的判定, 两点间的距离公式, 以及中心图形性质, 熟练掌握性质是解本题的关键.

23. (7 分) (2014•黄冈) 如图, 在南北方向的海岸线 MN 上, 有 A、B 两艘巡逻船, 现均收到故障船 C 的求救信号. 已知 A、B 两船相距 $100(\sqrt{3}+1)$ 海里, 船 C 在船 A 的北偏东 60° 方向上, 船 C 在船 B 的东南方向上, MN 上有一观测点 D, 测得船 C 正好在观测点 D 的南偏东 75° 方向上.

(1) 分别求出 A 与 C, A 与 D 之间的距离 AC 和 AD (如果运算结果有根号, 请保留根号).

(2) 已知距观测点 D 处 100 海里范围内有暗礁. 若巡逻船 A 沿直线 AC 去营救船 C, 在去营救的途中有无触暗礁危险? (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73$)



考点：解直角三角形的应用-方向角问题.

分析： (1) 作 $CE \perp AB$, 设 $AE = x$ 海里, 则 $BE = CE = \sqrt{3}x$ 海里. 根据 $AB = AE + BE = x + \sqrt{3}x = 100(\sqrt{3} + 1)$, 求得 x 的值后即可求得 AC 的长; 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 同理求出 AD 的长;

(2) 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 根据 AD 的长和 $\angle DAF$ 的度数求线段 DF 的长后与 100 比较即可得到答案.

解答： 解: (1) 如图, 作 $CE \perp AB$,

由题意得: $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$,

设 $AE = x$ 海里,

在 $Rt\triangle AEC$ 中, $CE = AE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$;

在 $Rt\triangle BCE$ 中, $BE = CE = \sqrt{3}x$.

$\therefore AE + BE = x + \sqrt{3}x = 100(\sqrt{3} + 1)$,

解得: $x = 100$.

$AC = 2x = 200$.

在 $\triangle ACD$ 中, $\angle DAC = 60^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$, 则 $\angle ACD = 45^\circ$.

过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ,

设 $AF = y$, 则 $DF = CF = \sqrt{3}y$,

$\therefore AC = y + \sqrt{3}y = 200$,

解得: $y = 100(\sqrt{3} - 1)$,

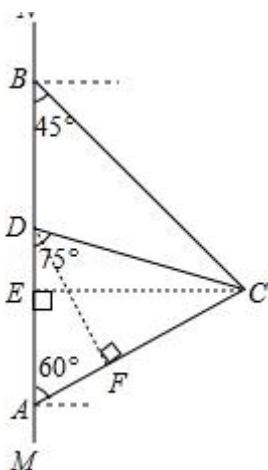
$\therefore AD = 2y = 200(\sqrt{3} - 1)$.

答: A 与 C 之间的距离 AC 为 200 海里, A 与 D 之间的距离 AD 为 $200(\sqrt{3} - 1)$ 海里.

(2) 由 (1) 可知, $DF = \sqrt{3}AF = \sqrt{3} \times 100(\sqrt{3} - 1) \approx 127$

$\therefore 127 > 100$,

所以巡逻船 A 沿直线 AC 航线, 在去营救的途中没有触暗礁危险.



点评： 本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是从实际问题中整理出直角三角形并选择合适的边角关系解答．

24. (9 分) (2014•黄冈) 某地实行医疗保险（以下简称“医保”）制度．医保机构规定：

一：每位居民年初缴纳医保基金 70 元；

二：居民每个人当年治病所花的医疗费（以定点医院的治疗发票为准），年底按下列方式（见表一）报销所治病的医疗费用：

居民个人当年治病所花费的医疗费	医疗费报销方法
不超过 n 元的部分	全部由医保基金承担（即全部报销）
超过 n 元但不超过 6000 元的部分	个人承担 $k\%$ ，其余部分由医保基金承担
超过 6000 元的部分	个人承担 20%，其余部分由医保基金承担

如果设一位居民当年治病花费的医疗费为 x 元，他个人实际承担的医疗费用（包括医疗费中个人承担部分和年初缴纳的医保基金）记为 y 元．

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq x \leq n \text{ 时, } y=70; \text{ 当 } n < x \leq 6000 \text{ 时, } y = \begin{cases} 70 & (0 \leq x \leq n) \\ 0.0k(x-n) + 70 & (n < x \leq 6000) \end{cases}$$

(用含 n 、 k 、 x 的式子表示)．

(2) 表二是该地 A、B、C 三位居民 2013 年治病所花费的医疗费和个人实际承担的医疗费用，根据表中的数据，求出 n 、 k 的值．

表二：

居民	A	B	C
某次治病所花费的治疗费用 x (元)	400	800	1500
个人实际承担的医疗费用 y (元)	70	190	470

(3) 该地居民周大爷 2013 年治病所花费的医疗费共 32000 元，那么这一年他个人实际承担的医疗费用是多少元？

考点： 一次函数的应用；列代数式；二元一次方程组的应用．

分析： (1) 根据医疗报销的比例，可得答案；

(2) 根据医疗费用的报销费用，可得方程组，再解方程组，可得答案；

(3) 根据个人承担部分的费用，可得代数式，可得答案．

解答： 解：(1) 由题意得

$$y = \begin{cases} 70 & (0 \leq x \leq n) \\ 0.0k(x-n) + 70 & (n < x \leq 6000) \end{cases};$$

$$(2) \text{ 由 A、B、C 三人的花销得 } \begin{cases} 0.0k(400-n) + 70 = 70 \\ 0.0k(800-n) + 70 = 190 \\ 0.0k(1500-n) + 70 = 470 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 40 \\ n = 500 \end{cases};$$

(3) 由题意得

$$\begin{aligned} & 70 + (6000 - 500) \times 40\% + (32000 - 6000) \times 20\% \\ &= 70 + 2200 + 5200 \\ &= 7470 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

答：这一年他个人实际承担的医疗费用是 7470 元.

点评： 本题考查了一次函数的应用，根据题意列函数解析式是解题关键.

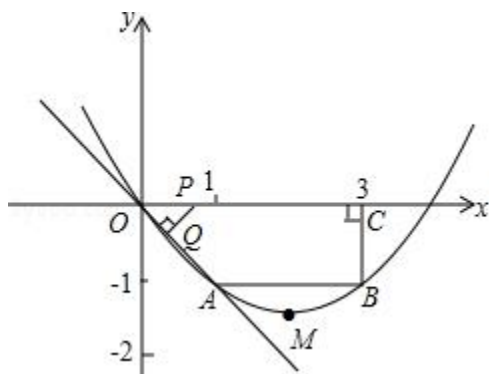
25. (13 分) (2014·黄冈) 已知：如图，在四边形 OABC 中， $AB \parallel OC$ ， $BC \perp x$ 轴于点 C， $A(1, -1)$ ， $B(3, -1)$ ，动点 P 从点 O 出发，沿着 x 轴正方向以每秒 2 个单位长度的速度移动. 过点 P 作 PQ 垂直于直线 OA，垂足为点 Q，设点 P 移动的时间 t 秒 ($0 < t < 2$)， $\triangle OPQ$ 与四边形 OABC 重叠部分的面积为 S.

(1) 求经过 O、A、B 三点的抛物线的解析式，并确定顶点 M 的坐标；

(2) 用含 t 的代数式表示点 P、点 Q 的坐标；

(3) 如果将 $\triangle OPQ$ 绕着点 P 按逆时针方向旋转 90° ，是否存在 t，使得 $\triangle OPQ$ 的顶点 O 或顶点 Q 在抛物线上？若存在，请求出 t 的值；若不存在，请说明理由；

(4) 求出 S 与 t 的函数关系式.



考点： 二次函数综合题.

专题： 压轴题.

分析： (1) 设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$)，然后把点 A、B 的坐标代入求出 a、b 的值，即可得解，再把函数解析式整理成顶点式形式，然后写出顶点 M 的坐标；

(2) 根据点 P 的速度求出 OP，即可得到点 P 的坐标，再根据点 A 的坐标求出 $\angle AOC = 45^\circ$ ，然后判断出 $\triangle POQ$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质求出点 Q 的坐标即可；

(3) 根据旋转的性质求出点 O、Q 的坐标，然后分别代入抛物线解析式，求解即可；

(4) 求出点 Q 与点 A 重合时的 $t=1$ ，点 P 与点 C 重合时的 $t=1.5$ ， $t=2$ 时 PQ 经过点 B，然后分① $0 < t \leq 1$ 时，重叠部分的面积等于 $\triangle POQ$ 的面积，② $1 < t \leq 1.5$ 时，重叠部分的面积等于两个等腰直角三角形的面积的差，③ $1.5 < t < 2$ 时，重叠部分的面积等于梯形的面积减去一个等腰直角三角形的面积分别列式整理即可得解。

解答：解：(1) 设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx$ ($a \neq 0$)，
把点 A (1, -1)，B (3, -1) 代入得，

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 9a+3b=-1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x,$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{3}(x-2)^2-\frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{顶点 M 的坐标为 } (2, -\frac{4}{3});$$

(2) $\because$ 点 P 从点 O 出发速度是每秒 2 个单位长度，

$$\therefore OP=2t,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2t, 0)$ ，

$\therefore A(1, -1)$ ，

$\therefore \angle AOC=45^\circ$ ，

$\therefore$ 点 Q 到 x 轴、y 轴的距离都是 $\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2} \times 2t=t$ ，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(t, -t)$ ；

(3) $\because \triangle OPQ$ 绕着点 P 按逆时针方向旋转 90° ，

$\therefore$ 旋转后点 O、Q 的对应点的坐标分别为 $(2t, -2t)$ ， $(3t, -t)$ ，

若顶点 O 在抛物线上，则 $\frac{1}{3} \times (2t)^2 - \frac{4}{3} \times (2t) = -2t$ ，

$$\text{解得 } t=\frac{1}{2},$$

若顶点 Q 在抛物线上，则 $\frac{1}{3} \times (3t)^2 - \frac{4}{3} \times (3t) = -t$ ，

$$\text{解得 } t=1,$$

综上所述，存在 $t=\frac{1}{2}$ 或 1，使得 $\triangle OPQ$ 的顶点 O 或顶点 Q 在抛物线上；

(4) 点 Q 与点 A 重合时， $OP=1 \times 2=2$ ， $t=2 \div 2=1$ ，

点 P 与点 C 重合时， $OP=3$ ， $t=3 \div 2=1.5$ ，

$t=2$ 时， $OP=2 \times 2=4$ ， $PC=4-3=1$ ，此时 PQ 经过点 B，

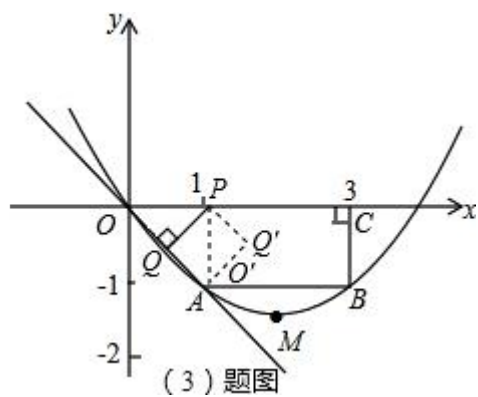
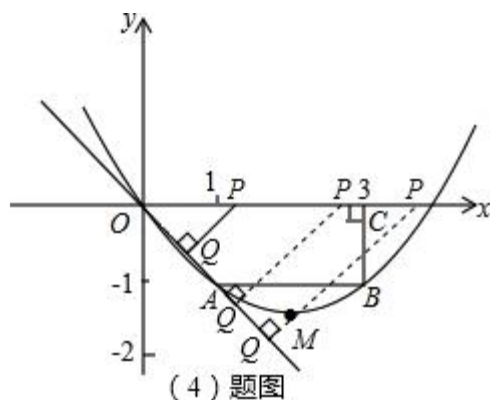
所以，分三种情况讨论：

$$\textcircled{1} 0 < t \leq 1 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times (2t) \times \frac{2t-t^2}{2},$$

$$\textcircled{2} 1 < t \leq 1.5 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times (2t) \times \frac{2t}{2} - \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 = 2t - 1;$$

$$\textcircled{3} 1.5 < t < 2 \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times (2+3) \times 1 - \frac{1}{2} \times [1 - (2t-3)]^2 = -2(t-2)^2 + \frac{5}{2};$$

$$\text{所以, } S \text{ 与 } t \text{ 的关系式为 } S = \begin{cases} t^2 & (0 < t \leq 1) \\ 2t - 1 & (1 < t \leq 1.5) \\ -2(t-2)^2 + \frac{5}{2} & (1.5 < t < 2) \end{cases}.$$



点评：本题是二次函数综合题型，主要利用了待定系数法求二次函数解析式，等腰直角三角形的性质，二次函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，难点在于（4）随着运动时间的变化，根据重叠部分的形状的不同分情况讨论，作出图形更形象直观。