

2014 年湖北省荆州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题只有唯一正确答案，每小题 3 分，共 30 分）

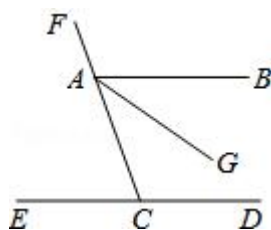
1. (3 分) (2014•荆州) 若 $\square \times (-2) = 1$ ，则 $\square$ 内填一个实数应该是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) (2014•荆州) 下列运算正确的是 ()

- A. $3^{-1} = -3$ B. $\sqrt{9} = \pm 3$ C. $(ab^2)^3 = a^3b^6$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

3. (3 分) (2014•荆州) 如图， $AB \parallel ED$ ， AG 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ECF = 70^\circ$ ，则 $\angle FAG$ 的度数是 ()



- A. 155° B. 145° C. 110° D. 35°

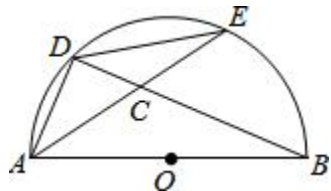
4. (3 分) (2014•荆州) 将抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度后，得到的抛物线解析式是 ()

- A. $y = (x - 4)^2 - 6$ B. $y = (x - 4)^2 - 2$ C. $y = (x - 2)^2 - 2$ D. $y = (x - 1)^2 - 3$

5. (3 分) (2014•荆州) 已知 α 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 较大的根，则下面对 α 的估计正确的是 ()

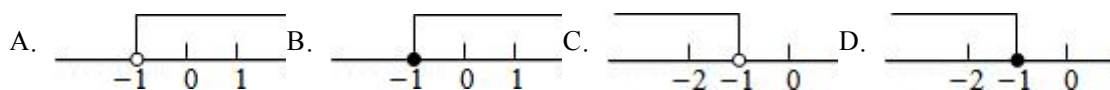
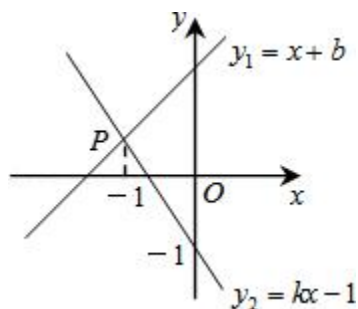
- A. $0 < \alpha < 1$ B. $1 < \alpha < 1.5$ C. $1.5 < \alpha < 2$ D. $2 < \alpha < 3$

6. (3 分) (2014•荆州) 如图， AB 是半圆 O 的直径， D, E 是半圆上任意两点，连结 AD, DE, AE 与 BD 相交于点 C ，要使 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 相似，可以添加一个条件，下列添加的条件其中错误的是 ()



- A. $\angle ACD = \angle DAB$ B. $AD = DE$ C. $AD^2 = BD \cdot CD$ D. $AD \cdot AB = AC \cdot BD$

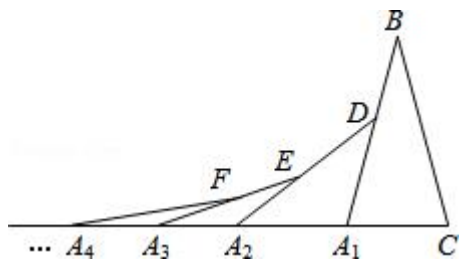
7. (3 分) (2014•荆州) 如图，直线 $y_1 = x + b$ 与 $y_2 = kx - 1$ 相交于点 P ，点 P 的横坐标为 -1，则关于 x 的不等式 $x + b > kx - 1$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



8. (3分) (2014•荆州) 已知点 $P(1-2a, a-2)$ 关于原点的对称点在第一象限内, 且 a 为整数, 则关于 x 的分式方程 $\frac{x+1}{x-a} = 2$ 的解是 ()

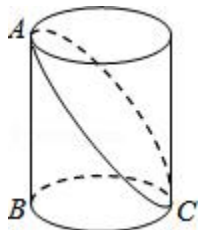
- A. 5 B. 1 C. 3 D. 不能确定

9. (3分) (2014•荆州) 如图, 在第1个 $\triangle A_1BC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $A_1B = CB$; 在边 A_1B 上任取一点 D , 延长 CA_1 到 A_2 , 使 $A_1A_2 = A_1D$, 得到第2个 $\triangle A_1A_2D$; 在边 A_2D 上任取一点 E , 延长 A_1A_2 到 A_3 , 使 $A_2A_3 = A_2E$, 得到第3个 $\triangle A_2A_3E$, ... 按此做法继续下去, 则第 n 个三角形中以 A_n 为顶点的内角度数是 ()



- A. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 75^\circ$ B. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 65^\circ$ C. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 75^\circ$ D. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 85^\circ$

10. (3分) (2014•荆州) 如图, 已知圆柱底面的周长为 $4dm$, 圆柱高为 $2dm$, 在圆柱的侧面上, 过点 A 和点 C 嵌有一圈金属丝, 则这圈金属丝的周长最小为 ()



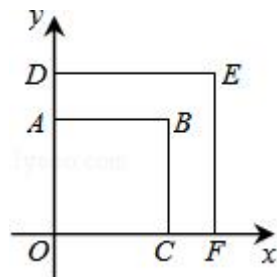
- A. $4\sqrt{2}dm$ B. $2\sqrt{2}dm$ C. $2\sqrt{5}dm$ D. $4\sqrt{5}dm$

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3分) (2014•荆州) 化简 $\sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - 4 \times \sqrt{\frac{1}{8}} \times (1 - \sqrt{2})^0$ 的结果是_____.

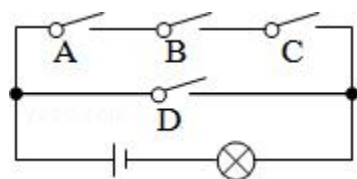
12. (3分) (2014•荆州) 若 $-2x^m \cdot y^2$ 与 $3x^4y^{2m+n}$ 是同类项, 则 $m-3n$ 的立方根是_____.

13. (3分) (2014•荆州) 如图, 正方形 $OABC$ 与正方形 $ODEF$ 是位似图形, 点 O 为位似中心, 相似比为 $1:\sqrt{2}$, 点 A 的坐标为 $(0, 1)$, 则点 E 的坐标是_____.

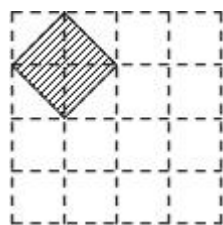


14. (3分) (2014•荆州) 我们知道, 无限循环小数都可以转化为分数. 例如: 将 $0.\dot{3}$ 转化为分数时, 可设 $0.\dot{3}=x$, 则 $x=0.3+\frac{1}{10}x$, 解得 $x=\frac{1}{3}$, 即 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$. 仿此方法, 将 $0.\dot{4}\dot{5}$ 化成分数是_____.

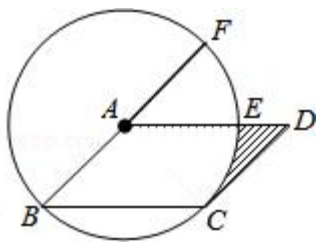
15. (3分) (2014•荆州) 如图, 电路图上有四个开关 A 、 B 、 C 、 D 和一个小灯泡, 闭合开关 D 或同时闭合开关 A 、 B 、 C 都可使小灯泡发光, 则任意闭合其中两个开关, 小灯泡发光的概率是_____.



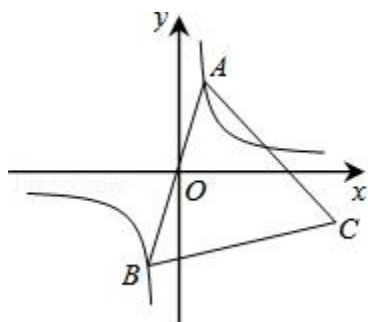
16. (3分) (2014•荆州) 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 每个小正方形的顶点称为格点, 左上角阴影部分是一个以格点为顶点的正方形 (简称格点正方形). 若再作一个格点正方形, 并涂上阴影, 使这两个格点正方形无重叠面积, 且组成的图形是轴对称图形, 又是中心对称图形, 则这个格点正方形的作法共有_____种.



17. (3分) (2014•荆州) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 以点 A 为圆心, AB 的长为半径的圆恰好与 CD 相切于点 C , 交 AD 于点 E , 延长 BA 与 $\odot A$ 相交于点 F . 若 $\widehat{EF}$ 的长为 $\frac{\pi}{2}$, 则图中阴影部分的面积为_____.



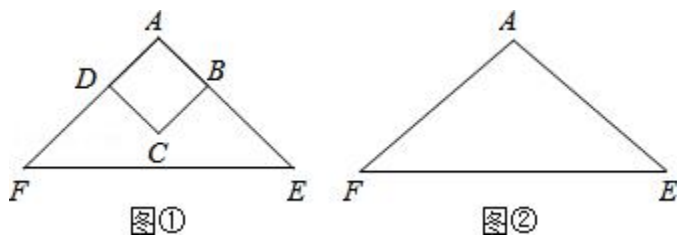
18. (3分) (2014•荆州) 如图, 已知点 A 是双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 在第一象限的分支上的一个动点, 连结 AO 并延长交另一分支于点 B , 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$, 点 C 在第四象限. 随着点 A 的运动, 点 C 的位置也不断变化, 但点 C 始终在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 上运动, 则 k 的值是_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 共 66 分)

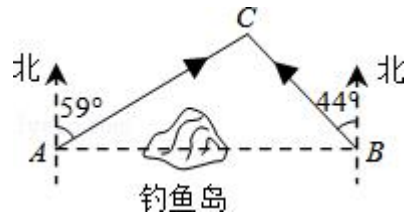
19. (7分) (2014•荆州) 先化简, 再求值: $(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{a}{b - a}) \div \frac{b^2}{a^2 - ab}$, 其中 a, b 满足 $\sqrt{a+1} + |b - \sqrt{3}| = 0$.

20. (8分) (2014•荆州) 如图①, 正方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 分别在等腰直角 $\triangle AEF$ 的腰 AE, AF 上, 点 C 在 $\triangle AEF$ 内, 则有 $DF = BE$ (不必证明). 将正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 后, 连结 BE, DF . 请在图②中用实线补全图形, 这时 $DF = BE$ 还成立吗? 请说明理由.



21. (8分) (2014•荆州) 钓鱼岛自古以来就是中国的领土. 如图, 我国甲、乙两艘海监执法船某天在钓鱼岛附近海域巡航, 某一时刻这两艘船分别位于钓鱼岛正西方向的 A 处和正东方向的 B 处, 这时两船同时接到立即赶往 C 处海域巡查的任务, 并测得 C 处位于 A 处北偏东 59° 方向、位于 B 处北偏西 44° 方向. 若甲、乙两船分别沿 AC , BC 方向航行, 其平均速度分别是 20 海里/小时, 18 海里/小时, 试估算哪艘船先赶到 C 处.

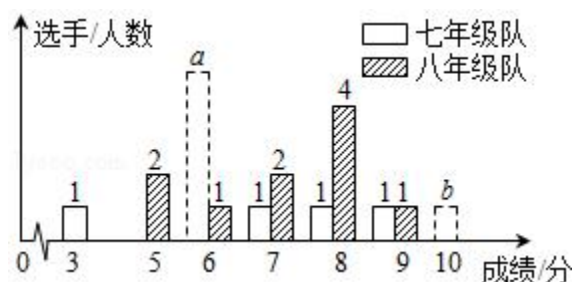
(参考数据: $\cos 59^\circ \approx 0.52$, $\sin 46^\circ \approx 0.72$)



22. (9分) (2014•荆州) 我市某中学七、八年级各选派 10 名选手参加学校举办的“爱我荆门”知识竞赛, 计分采用 10 分制, 选手得分均为整数, 成绩达到 6 分或 6 分以上为合格, 达到 9 分或 10 分为优秀. 这次竞赛后, 七、八年级两支代表队选手成绩分布的条形统计图和成绩统计分析表如下, 其中七年级代表队得 6 分、10 分的选手人数分别为 a , b .

队别	平均分	中位数	方差	合格率	优秀率
七年级	6.7	m	3.41	90%	n
八年级	7.1	7.5	1.69	80%	10%

- (1) 请依据图表中的数据, 求 a , b 的值;
- (2) 直接写出表中的 m , n 的值;
- (3) 有人说七年级的合格率、优秀率均高于八年级, 所以七年级队成绩比八年级队好, 但也有人认为八年级队成绩比七年级队好. 请你给出两条支持八年级队成绩好的理由.



23. (10 分) (2014•荆州) 我国中东部地区雾霾天气趋于严重, 环境治理已刻不容缓. 我市某电器商场根据民众健康需要, 代理销售某种家用空气净化器, 其进价是 200 元/台. 经过市场销售后发现: 在一个月内, 当售价是 400 元/台时, 可售出 200 台, 且售价每降低 10 元, 就可多售出 50 台. 若供货商规定这种空气净化器售价不能低于 300 元/台, 代理销售商每月要完成不低于 450 台的销售任务.

(1) 试确定月销售量 y (台) 与售价 x (元/台) 之间的函数关系式; 并求出自变量 x 的取值范围;

(2) 当售价 x (元/台) 定为多少时, 商场每月销售这种空气净化器所获得的利润 w (元) 最大? 最大利润是多少?

24. (12 分) (2014•荆州) 已知: 函数 $y=ax^2 - (3a+1)x+2a+1$ (a 为常数).

(1) 若该函数图象与坐标轴只有两个交点, 求 a 的值;

(2) 若该函数图象是开口向上的抛物线, 与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C , 且 $x_2 - x_1 = 2$.

①求抛物线的解析式;

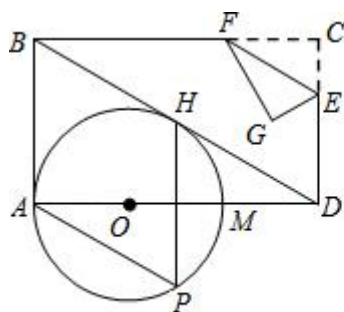
②作点 A 关于 y 轴的对称点 D , 连结 BC , DC , 求 $\sin \angle DCB$ 的值.

25. (12 分) (2014•荆州) 如图①, 已知: 在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上有一点 O , $OA=\sqrt{3}$, 以 O 为圆心, OA 长为半径作圆, 交 AD 于 M , 恰好与 BD 相切于 H , 过 H 作弦 $HP \parallel AB$, 弦 $HP=3$. 若点 E 是 CD 边上一动点 (点 E 与 C, D 不重合), 过 E 作直线 $EF \parallel BD$ 交 BC 于 F , 再把 $\triangle CEF$ 沿着动直线 EF 对折, 点 C 的对应点为 G . 设 $CE=x$, $\triangle EFG$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 S .

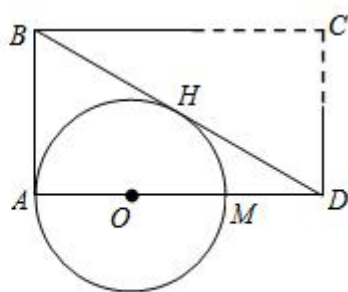
(1) 求证: 四边形 $ABHP$ 是菱形;

(2) 问 $\triangle EFG$ 的直角顶点 G 能落在 $\odot O$ 上吗? 若能, 求出此时 x 的值; 若不能, 请说明理由;

(3) 求 S 与 x 之间的函数关系式, 并直接写出 FG 与 $\odot O$ 相切时, S 的值.



图①



图②(备用图)

2014 年湖北省荆州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题只有唯一正确答案，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2014•荆州) 若 $\square \times (-2) = 1$ ，则 $\square$ 内填一个实数应该是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

分析: 根据乘积是 1 的两个数互为倒数解答.

解答: 解: $\because -\frac{1}{2} \times (-2) = 1$,

$\therefore \square$ 内填一个实数应该是 $-\frac{1}{2}$.

故选 D.

点评: 本题考查了有理数的乘法，是基础题，注意利用了倒数的定义.

2. (3 分) (2014•荆州) 下列运算正确的是 ()

- A. $3^{-1} = -3$ B. $\sqrt{9} = \pm 3$ C. $(ab^2)^3 = a^3b^6$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

考点: 同底数幂的除法; 算术平方根; 幂的乘方与积的乘方; 负整数指数幂.

分析: 运用负整数指数幂的法则运算，开平方的方法，同底数幂的除法以及幂的乘方计算.

解答: 解: A、 $3^{-1} = \frac{1}{3} \neq 3a$ ，故 A 选项错误;

B、 $\sqrt{9} = 3 \neq \pm 3$ ，故 B 选项错误;

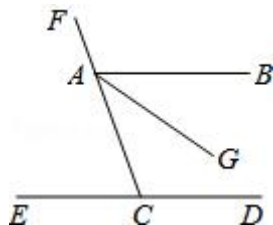
C、 $(ab^2)^3 = a^3b^6$ 故 C 选项正确;

D、 $a^6 \div a^2 = a^4 \neq a^3$ ，故 D 选项错误.

故选: C.

点评: 此题考查了负整数指数幂的运算，开平方，同底数幂的除法以及幂的乘方等知识，解题要注意细心.

3. (3 分) (2014•荆州) 如图， $AB \parallel ED$ ， AG 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ECF = 70^\circ$ ，则 $\angle FAG$ 的度数是 ()



- A. 155° B. 145° C. 110° D. 35°

考点: 平行线的性质.

分析: 首先，由平行线的性质得到 $\angle BAC = \angle ECF = 70^\circ$ ；然后利用邻补角的定义、角平分线的定义来求 $\angle FAG$ 的度数.

解答: 解: 如图， $\because AB \parallel ED$ ， $\angle ECF = 70^\circ$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle BAC &= \angle ECF = 70^\circ, \\ \therefore \angle FAB &= 180^\circ - \angle BAC = 110^\circ. \\ \text{又} \because AG &\text{平分} \angle BAC, \\ \therefore \angle BAG &= \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ, \\ \therefore \angle FAG &= \angle FAB + \angle BAG = 145^\circ.\end{aligned}$$

故选：B.

点评： 本题考查了平行线的性质. 根据“两直线平行，内错角相等”求得 $\angle BAC$ 的度数是解题的难点.

4. (3 分) (2014•荆州) 将抛物线 $y=x^2-6x+5$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度后，得到的抛物线解析式是 ()

A. $y=(x-4)^2-6$ B. $y=(x-4)^2-2$ C. $y=(x-2)^2-2$ D. $y=(x-1)^2-3$

考点： 二次函数图象与几何变换.

专题： 几何变换.

分析： 先把 $y=x^2-6x+5$ 配成顶点式，得到抛物线的顶点坐标为 (3, -4)，再把点 (3, -4) 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度得到点的坐标为 (4, -2)，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式.

解答： 解： $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$ ，即抛物线的顶点坐标为 (3, -4)，
把点 (3, -4) 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度得到点的坐标为 (4, -2)，
所以平移后得到的抛物线解析式为 $y=(x-4)^2-2$.

故选 B.

点评： 本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

5. (3 分) (2014•荆州) 已知 α 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，则下面对 α 的估计正确的是 ()

A. $0 < \alpha < 1$ B. $1 < \alpha < 1.5$ C. $1.5 < \alpha < 2$ D. $2 < \alpha < 3$

考点： 解一元二次方程-公式法；估算无理数的大小.

分析： 先求出方程的解，再求出 $\sqrt{5}$ 的范围，最后即可得出答案.

解答： 解：解方程 $x^2-x-1=0$ 得： $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$\because \alpha$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，

$$\therefore \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\because 2 < \sqrt{5} < 3,$$

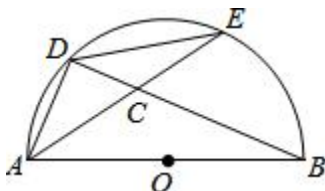
$$\therefore 3 < 1+\sqrt{5} < 4,$$

$$\therefore \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2,$$

故选 C.

点评: 本题考查了解一元二次方程, 估算无理数的大小的应用, 题目是一道比较典型的题目, 难度适中.

6. (3 分) (2014•荆州) 如图, AB 是半圆 O 的直径, D, E 是半圆上任意两点, 连结 AD, DE, AE 与 BD 相交于点 C , 要使 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 相似, 可以添加一个条件. 下列添加的条件其中错误的是 ()



- A. $\angle ACD = \angle DAB$ B. $AD = DE$ C. $AD^2 = BD \cdot CD$ D. $AD \cdot AB = AC \cdot BD$

考点: 相似三角形的判定; 圆周角定理.

分析: 由 $\angle ADC = \angle ADB$, 根据有两角对应相等的三角形相似与两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似, 即可求得答案; 注意排除法在解选择题中的应用.

解答: 解: 如图, $\angle ADC = \angle ADB$,

A、 $\because \angle ACD = \angle DAB$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA$, 故本选项正确;

B、 $\because AD = DE$,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{DE}$,

$\therefore \angle DAE = \angle B$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA$, 故本选项正确;

C、 $\because AD^2 = BD \cdot CD$,

$\therefore AD : BD = CD : AD$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA$, 故本选项正确;

D、 $\because AD \cdot AB = AC \cdot BD$,

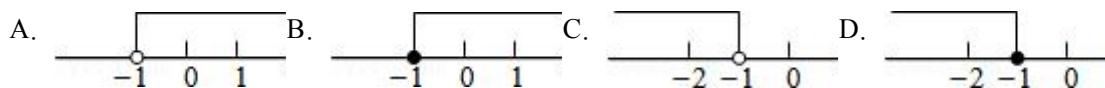
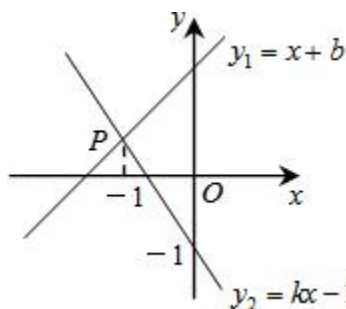
$\therefore AD : BD = AC : AB$,

但 $\angle ADC = \angle ADB$ 不是公共角, 故本选项错误.

故选 D.

点评: 此题考查了相似三角形的判定以及圆周角定理. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

7. (3 分) (2014•荆州) 如图, 直线 $y_1 = x + b$ 与 $y_2 = kx - 1$ 相交于点 P , 点 P 的横坐标为 -1 , 则关于 x 的不等式 $x + b > kx - 1$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



考点：一次函数与一元一次不等式；在数轴上表示不等式的解集.

专题：数形结合.

分析：观察函数图象得到当 $x > -1$ 时，函数 $y = x + b$ 的图象都在 $y = kx - 1$ 的图象上方，所以不等式 $x + b > kx - 1$ 的解集为 $x > -1$ ，然后根据用数轴表示不等式解集的方法对各选项进行判断.

解答：解：当 $x > -1$ 时， $x + b > kx - 1$ ，即不等式 $x + b > kx - 1$ 的解集为 $x > -1$.
故选 A.

点评：本题考查了一次函数与一元一次不等式：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = ax + b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y = kx + b$ 在 x 轴上（或下）方部分所有的点的横坐标所构成的集合．也考查了在数轴上表示不等式的解集.

8. (3 分) (2014•荆州) 已知点 $P(1 - 2a, a - 2)$ 关于原点的对称点在第一象限内，且 a 为整数，则关于 x 的分式方程 $\frac{x+1}{x-a} = 2$ 的解是 ()

A. 5 B. 1 C. 3 D. 不能确定

考点：解分式方程；关于原点对称的点的坐标.

专题：计算题.

分析：根据 P 关于原点对称点在第一象限，得到 P 横纵坐标都小于 0，求出 a 的范围，确定出 a 的值，代入方程计算即可求出解.

解答：解：∵ 点 $P(1 - 2a, a - 2)$ 关于原点的对称点在第一象限内，且 a 为整数，

$$\therefore \begin{cases} 1 - 2a < 0 \\ a - 2 < 0 \end{cases},$$

解得： $\frac{1}{2} < a < 2$ ，即 $a = 1$ ，

当 $a = 1$ 时，所求方程化为 $\frac{x+1}{x-1} = 2$ ，

去分母得： $x + 1 = 2x - 2$ ，

解得： $x = 3$ ，

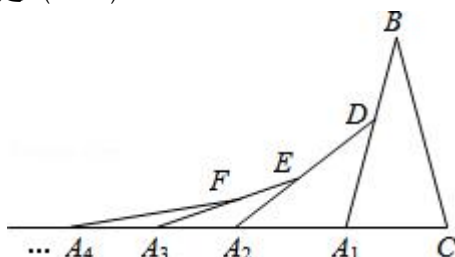
经检验 $x = 3$ 是分式方程的解，

则方程的解为 3.

故选 C

点评: 此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定要注意要验根．

9. (3 分) (2014•荆州) 如图，在第 1 个 $\triangle A_1BC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ， $A_1B=CB$ ；在边 A_1B 上任取一点 D ，延长 CA_1 到 A_2 ，使 $A_1A_2=A_1D$ ，得到第 2 个 $\triangle A_1A_2D$ ；在边 A_2D 上任取一点 E ，延长 A_1A_2 到 A_3 ，使 $A_2A_3=A_2E$ ，得到第 3 个 $\triangle A_2A_3E$ ，... 按此做法继续下去，则第 n 个三角形中以 A_n 为顶点的内角度数是 ()



- A. $(\frac{1}{2})^n \cdot 75^\circ$ B. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 65^\circ$ C. $(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot 75^\circ$ D. $(\frac{1}{2})^n \cdot 85^\circ$

考点: 等腰三角形的性质.

专题: 规律型.

分析: 先根据等腰三角形的性质求出 $\angle BA_1C$ 的度数，再根据三角形外角的性质及等腰三角形的性质分别求出 $\angle DA_2A_1$ ， $\angle EA_3A_2$ 及 $\angle FA_4A_3$ 的度数，找出规律即可得出第 n 个三角形中以 A_n 为顶点的内角度数.

解答: 解：∵ 在 $\triangle CBA_1$ 中， $\angle B=30^\circ$ ， $A_1B=CB$ ，

$$\therefore \angle BA_1C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 75^\circ,$$

∵ $A_1A_2=A_1D$ ， $\angle BA_1C$ 是 $\triangle A_1A_2D$ 的外角，

$$\therefore \angle DA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle BA_1C = \frac{1}{2} \times 75^\circ;$$

同理可得，

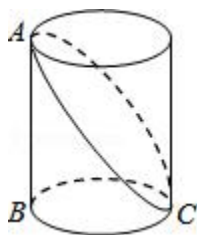
$$\angle EA_3A_2 = (\frac{1}{2})^2 \times 75^\circ, \quad \angle FA_4A_3 = (\frac{1}{2})^3 \times 75^\circ,$$

$$\therefore \text{第 } n \text{ 个三角形中以 } A_n \text{ 为顶点的内角度数是 } (\frac{1}{2})^{n-1} \times 75^\circ.$$

故选：C.

点评: 本题考查的是等腰三角形的性质及三角形外角的性质，根据题意得出 $\angle DA_2A_1$ ， $\angle EA_3A_2$ 及 $\angle FA_4A_3$ 的度数，找出规律是解答此题的关键．

10. (3 分) (2014•荆州) 如图，已知圆柱底面的周长为 $4dm$ ，圆柱高为 $2dm$ ，在圆柱的侧面上，过点 A 和点 C 嵌有一圈金属丝，则这圈金属丝的周长最小为 ()



A. $4\sqrt{2}dm$

B. $2\sqrt{2}dm$

C. $2\sqrt{5}dm$

D. $4\sqrt{5}dm$

考点：平面展开-最短路径问题.

分析：要求丝线的长，需将圆柱的侧面展开，进而根据“两点之间线段最短”得出结果，在求线段长时，根据勾股定理计算即可.

解答：解：如图，把圆柱的侧面展开，得到矩形，则这圈金属丝的周长最小为 $2AC$ 的长度.

$\because$ 圆柱底面的周长为 $4dm$ ，圆柱高为 $2dm$ ，

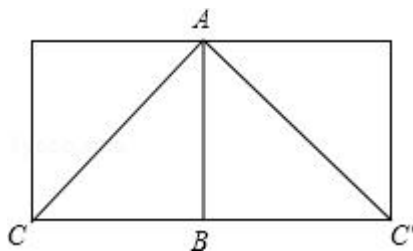
$\therefore AB=2dm$ ， $BC=BC'=2dm$ ，

$\therefore AC^2=2^2+2^2=4+4=8$ ，

$\therefore AC=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 这圈金属丝的周长最小为 $2AC=4\sqrt{2}cm$.

故选 A.



点评： 本题考查了平面展开 - 最短路径问题，圆柱的侧面展开图是一个矩形，此矩形的长等于圆柱底面周长，高等于圆柱的高，本题就是把圆柱的侧面展开成矩形，“化曲面为平面”，用勾股定理解决.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. (3 分) (2014•荆州) 化简 $\sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{3}} - 4 \times \sqrt{\frac{1}{8}} \times (1 - \sqrt{2})^0$ 的结果是 $\sqrt{2}$.

考点： 二次根式的混合运算；零指数幂.

专题： 计算题.

分析： 先把各二次根式化为最简二次根式，再根据二次根式的乘法法则和零指数幂的意义计算得到原式 $= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$ ，然后合并即可.

解答： 解：原式 $= 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times 1$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}.$$

故答案为 $\sqrt{2}$.

点评： 本题考查了二次根式的混合运算：先把各二次根式化为最简二次根式，再进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式. 也考查了零指数幂.

12. (3 分) (2014•荆州) 若 $-2x^m \cdot n y^2$ 与 $3x^4 y^{2m+n}$ 是同类项，则 $m - 3n$ 的立方根是 $\underline{2}$.

考点：立方根；合并同类项；解二元一次方程组.

分析：根据同类项的定义可以得到 m ， n 的值，继而求出 $m - 3n$ 的立方根.

解答：解：若 $-2x^m - ny^2$ 与 $3x^4y^{2m+n}$ 是同类项，

$$\therefore \begin{cases} m - n = 4 \\ 2m + n = 2 \end{cases},$$

$$\text{解方程得：} \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}.$$

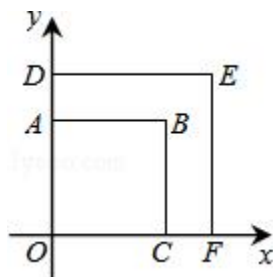
$$\therefore m - 3n = 2 - 3 \times (-2) = 8.$$

8 的立方根是 2.

故答案为 2.

点评：本题考查了同类项的概念以及立方根的求法，解体的关键是根据定义求出对应 m 、 n 的值.

13. (3 分) (2014•荆州) 如图，正方形 $OABC$ 与正方形 $ODEF$ 是位似图形，点 O 为位似中心，相似比为 $1: \sqrt{2}$ ，点 A 的坐标为 $(0, 1)$ ，则点 E 的坐标是 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



考点：位似变换；坐标与图形性质.

分析：由题意可得 $OA: OD = 1: \sqrt{2}$ ，又由点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，即可求得 OD 的长，又由正方形的性质，即可求得 E 点的坐标.

解答：解：∵ 正方形 $OABC$ 与正方形 $ODEF$ 是位似图形， O 为位似中心，相似比为 $1: \sqrt{2}$ ，
∴ $OA: OD = 1: \sqrt{2}$ ，

∵ 点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，

即 $OA = 1$ ，

$$\therefore OD = \sqrt{2},$$

∵ 四边形 $ODEF$ 是正方形，

$$\therefore DE = OD = \sqrt{2}.$$

∴ E 点的坐标为： $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

故答案为： $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

点评：此题考查了位似变换的性质与正方形的性质. 此题比较简单，注意理解位似变换与相似比的定义是解此题的关键.

14. (3 分) (2014•荆州) 我们知道，无限循环小数都可以转化为分数. 例如：将 $0.\dot{3}$ 转化

为分数时，可设 $0.\dot{3} = x$ ，则 $x = 0.3 + \frac{1}{10}x$ ，解得 $x = \frac{1}{3}$ ，即 $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$. 仿此方法，将 $0.\dot{4}\dot{5}$ 化成分

数是 $\frac{45}{99}$.

考点：一元一次方程的应用.

分析:

设 $x = 0.\dot{4}5$, 则 $x = 0.4545\ldots$ ①, 根据等式性质得: $100x = 45.4545\ldots$ ②, 再由 ② - ① 得方程 $100x - x = 45$, 解方程即可.

解答:

解: 设 $x = 0.\dot{4}5$, 则 $x = 0.4545\ldots$ ①,

根据等式性质得: $100x = 45.4545\ldots$ ②,

由 ② - ① 得: $100x - x = 45.4545\ldots - 0.4545\ldots$,

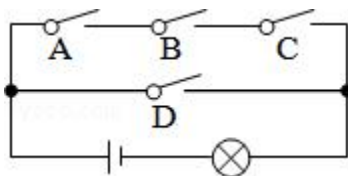
即: $100x - x = 45$,

解方程得: $x = \frac{45}{99}$.

故答案为 $\frac{45}{99}$.

点评: 此题主要考查了一元一次方程的应用, 关键是正确理解题意, 看懂例题的解题方法.

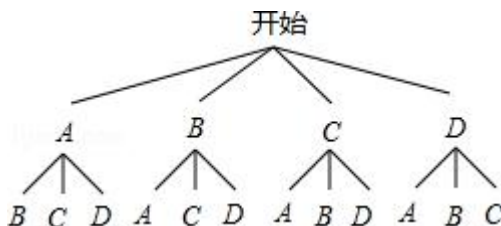
15. (3 分) (2014•荆州) 如图, 电路图上有四个开关 A 、 B 、 C 、 D 和一个小灯泡, 闭合开关 D 或同时闭合开关 A 、 B 、 C 都可使小灯泡发光, 则任意闭合其中两个开关, 小灯泡发光的概率是 $\frac{1}{2}$.



考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与小灯泡发光的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果, 现任意闭合其中两个开关, 则小灯泡发光的有 6 种情况,

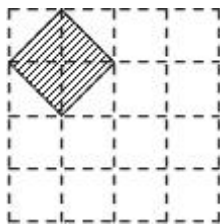
$\therefore$ 小灯泡发光的概率为: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

16. (3 分) (2014•荆州) 如图, 在 4×4 的正方形网格中, 每个小正方形的顶点称为格点, 左上角阴影部分是一个以格点为顶点的正方形 (简称格点正方形). 若再作一个格点正方形,

并涂上阴影,使这两个格点正方形无重叠面积,且组成的图形是轴对称图形,又是中心对称图形,则这个格点正方形的作法共有 4 种.

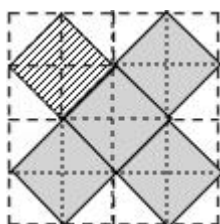


考点: 利用旋转设计图案; 利用轴对称设计图案.

分析: 利用轴对称图形以及中心对称图形的性质与定义, 进而得出符合题意的答案.

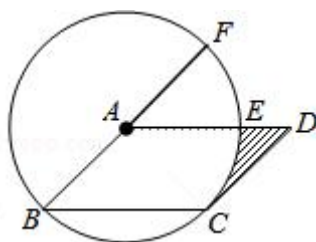
解答: 解: 如图所示: 这个格点正方形的作法共有 4 种.

故答案为: 4.



点评: 此题主要考查了利用轴对称以及旋转设计图案, 正确把握中心对称以及轴对称图形的定义是解题关键.

17. (3 分) (2014•荆州) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 以点 A 为圆心, AB 的长为半径的圆恰好与 CD 相切于点 C , 交 AD 于点 E , 延长 BA 与 $\odot A$ 相交于点 F . 若 $\widehat{EF}$ 的长为 $\frac{\pi}{2}$, 则图中阴影部分的面积为 $2 - \frac{\pi}{2}$.



考点: 切线的性质; 平行四边形的性质; 弧长的计算; 扇形面积的计算.

分析: 求图中阴影部分的面积, 就要从图中分析阴影部分的面积是由哪几部分组成的. 很显然图中阴影部分的面积 = $\triangle ACD$ 的面积 - 扇形 ACE 的面积, 然后按各图形的面积公式计算即可.

解答: 解: 连接 AC ,

$\because DC$ 是 $\odot A$ 的切线,

$\therefore AC \perp CD$,

又 $\because AB = AC = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle CAD = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ,$$

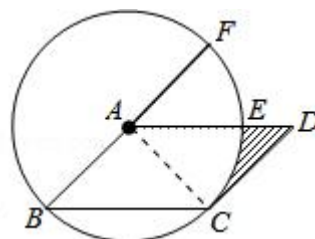
$$\therefore \widehat{EF} \text{ 的长为 } \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \frac{45\pi r}{180},$$

$$\text{解得: } r = 2,$$

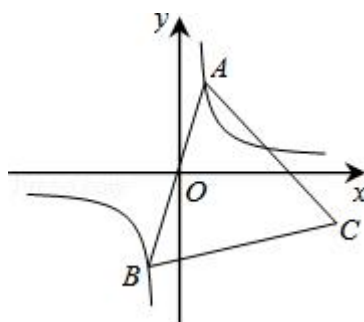
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ACD} - S_{\text{扇形} ACD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{45\pi \times 2^2}{360} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{故答案为: } 2 - \frac{\pi}{2}.$$



点评: 本题主要考查了扇形的面积计算方法, 不规则图形的面积通常转化为规则图形的面积的和差.

18. (3分) (2014•荆州) 如图, 已知点 A 是双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 在第一象限的分支上的一个动点, 连结 AO 并延长交另一分支于点 B , 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$, 点 C 在第四象限. 随着点 A 的运动, 点 C 的位置也不断变化, 但点 C 始终在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 上运动, 则 k 的值是 -6.



考点: 反比例函数图象上点的坐标特征; 等边三角形的性质; 相似三角形的判定与性质; 特殊角的三角函数值.

专题: 动点型.

分析: 连接 OC , 易证 $AO \perp OC$, $OC = \sqrt{3}OA$. 由 $\angle AOC = 90^\circ$ 想到构造 K 型相似, 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴, 垂足为 E , 过点 C 作 $CF \perp y$ 轴, 垂足为 F , 可证 $\triangle AEO \sim \triangle OFC$. 从而得到 $OF = \sqrt{3}AE$, $FC = \sqrt{3}EO$. 设点 A 坐标为 (a, b) 则 $ab = 2$, 可得 $FC \cdot OF = 6$. 设点 C 坐标为 (x, y) , 从而有 $FC \cdot OF = -xy = -6$, 即 $k = xy = -6$.

解答:

解: $\because$ 双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 关于原点对称,

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于原点对称.

$\therefore OA = OB$.

连接 OC , 如图所示.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $OA = OB$,

$\therefore OC \perp AB$. $\angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore \tan \angle OAC = \frac{OC}{OA} = \sqrt{3}$.

$\therefore OC = \sqrt{3}OA$.

过点 A 作 $AE \perp y$ 轴, 垂足为 E ,

过点 C 作 $CF \perp y$ 轴, 垂足为 F ,

$\because AE \perp OE$, $CF \perp OF$, $OC \perp OA$,

$\therefore \angle AEO = \angle FOC$, $\angle AOE = 90^\circ - \angle FOC = \angle OCF$.

$\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFC$.

$\therefore \frac{AE}{OF} = \frac{EO}{FC} = \frac{AO}{OC}$.

$\because OC = \sqrt{3}OA$,

$\therefore OF = \sqrt{3}AE$, $FC = \sqrt{3}EO$.

设点 A 坐标为 (a, b) ,

$\because$ 点 A 在第一象限,

$\therefore AE = a$, $OE = b$.

$\therefore OF = \sqrt{3}AE = \sqrt{3}a$, $FC = \sqrt{3}EO = \sqrt{3}b$.

$\because$ 点 A 在双曲线 $y = \frac{2}{x}$ 上,

$\therefore ab = 2$.

$\therefore FC \cdot OF = \sqrt{3}b \cdot \sqrt{3}a = 3ab = 6$

设点 C 坐标为 (x, y) ,

$\because$ 点 C 在第四象限,

$\therefore FC = x$, $OF = -y$.

$\therefore FC \cdot OF = x \cdot (-y) = -xy$

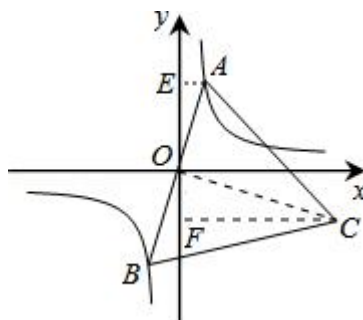
$= 6$.

$\therefore xy = -6$.

$\because$ 点 C 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$\therefore k = xy = -6$.

故答案为: -6 .



点评: 本题考查了等边三角形的性质、反比例函数的性质、相似三角形的判定与性质、点与坐标之间的关系、特殊角的三角函数值等知识，有一定的难度．由 $\angle AOC=90^\circ$ 联想到构造 K 型相似是解答本题的关键．

三、解答题（本大题共 7 题，共 66 分）

19. (7 分) (2014•荆州) 先化简，再求值： $(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{a}{b - a}) \div \frac{b^2}{a^2 - ab}$ ，其中 a, b

满足 $\sqrt{a+1} + |b - \sqrt{3}| = 0$ ．

考点: 分式的化简求值；非负数的性质：绝对值；非负数的性质：算术平方根．

专题: 计算题．

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，利用非负数的性质求出 a 与 b 的值，代入计算即可求出值．

解答:

$$\text{解: 原式} = [\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} - \frac{a}{a-b}] \cdot \frac{a(a-b)}{b^2} = \frac{b}{a-b} \cdot \frac{a(a-b)}{b^2} = \frac{a}{b},$$

$$\because \sqrt{a+1} + |b - \sqrt{3}| = 0,$$

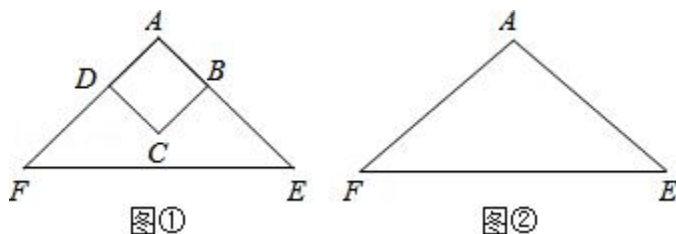
$$\therefore \begin{cases} a+1=0 \\ b-\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } a = -1, b = \sqrt{3},$$

$$\text{则原式} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

点评: 此题考查了分式的化简求值，以及非负数的性质，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

20. (8 分) (2014•荆州) 如图①，正方形 $ABCD$ 的边 AB, AD 分别在等腰直角 $\triangle AEF$ 的腰 AE, AF 上，点 C 在 $\triangle AEF$ 内，则有 $DF=BE$ (不必证明)．将正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 后，连结 BE, DF ．请在图②中用实线补全图形，这时 $DF=BE$ 还成立吗？请说明理由．



考点: 全等三角形的判定与性质；等腰直角三角形；正方形的性质．

分析：根据旋转角求出 $\angle FAD = \angle EAB$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $BE = DF$ 。

解答：解： $DF = BE$ 还成立；

理由： $\because$ 正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度 α ，

$\therefore \angle FAD = \angle EAB$ ，

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ABE$ 中

$$\begin{cases} AF = AE \\ \angle FAD = \angle EAB \\ AD = AB \end{cases}$$

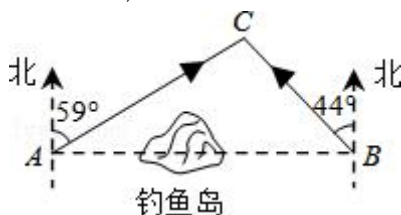
$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABE$ (SAS)

$\therefore DF = BE$ 。

点评：本题考查了旋转的性质，正方形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质，熟记各性质求出三角形全等是解题的关键。

21. (8分) (2014•荆州) 钓鱼岛自古以来就是中国的领土。如图，我国甲、乙两艘海监执法船某天在钓鱼岛附近海域巡航，某一时刻这两艘船分别位于钓鱼岛正西方向的 A 处和正东方向的 B 处，这时两船同时接到立即赶往 C 处海域巡查的任务，并测得 C 处位于 A 处北偏东 59° 方向、位于 B 处北偏西 44° 方向。若甲、乙两船分别沿 AC ， BC 方向航行，其平均速度分别是 20 海里/小时，18 海里/小时，试估算哪艘船先赶到 C 处。

(参考数据： $\cos 59^\circ \approx 0.52$ ， $\sin 46^\circ \approx 0.72$)



考点：解直角三角形的应用-方向角问题。

分析：作 $CD \perp AB$ 于点 D ，由题意得： $\angle ACD = 59^\circ$ ， $\angle DCB = 44^\circ$ ，设 CD 的长为 a 海里，分别在 $Rt\triangle ACD$ 中，和在 $Rt\triangle BCD$ 中，用 a 表示出 AC 和 BC ，然后除以速度即可求得时间，比较即可确定答案

解答：解：如图，作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

由题意得： $\angle ACD = 59^\circ$ ， $\angle DCB = 44^\circ$ ，

设 CD 的长为 a 海里，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中， $\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$ ，

$$\therefore AC = \frac{CD}{\cos \angle ACD} = \frac{a}{0.52} \approx 1.92a;$$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BCD$ 中， $\frac{CD}{BC} = \cos \angle BCD$ ，

$$\therefore BC = \frac{CD}{\cos \angle BCD} = \frac{a}{0.72} \approx 1.39a;$$

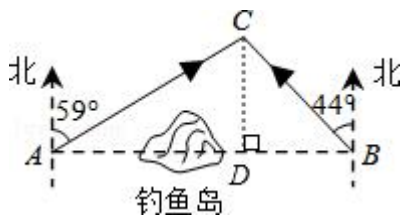
$\therefore$ 其平均速度分别是 20 海里/小时，18 海里/小时，

$$\therefore 1.92a \div 20 = 0.096a, 1.39a \div 18 = 0.077a,$$

$\therefore a > 0$ ，

$$\therefore 0.096a > 0.077a,$$

∴乙先到达.

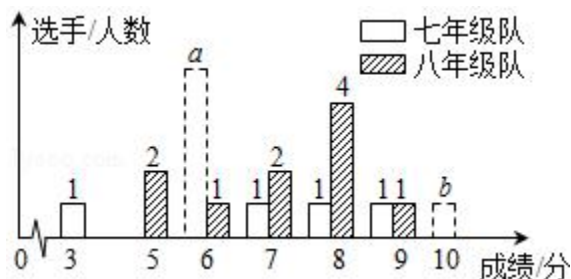


点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解决本题的关键在于设出未知数 a , 使得运算更加方便, 难度中等.

22. (9 分) (2014•荆州) 我市某中学七、八年级各选派 10 名选手参加学校举办的“爱我荆门”知识竞赛, 计分采用 10 分制, 选手得分均为整数, 成绩达到 6 分或 6 分以上为合格, 达到 9 分或 10 分为优秀. 这次竞赛后, 七、八年级两支代表队选手成绩分布的条形统计图和成绩统计分析表如下, 其中七年级代表队得 6 分、10 分的选手人数分别为 a , b .

队别	平均分	中位数	方差	合格率	优秀率
七年级	6.7	m	3.41	90%	n
八年级	7.1	7.5	1.69	80%	10%

- (1) 请依据图表中的数据, 求 a , b 的值;
- (2) 直接写出表中的 m , n 的值;
- (3) 有人说七年级的合格率、优秀率均高于八年级, 所以七年级队成绩比八年级队好, 但也有人认为八年级队成绩比七年级队好. 请你给出两条支持八年级队成绩好的理由.



考点: 条形统计图; 统计表; 加权平均数; 中位数; 方差.

专题: 计算题.

- 分析:**
- (1) 根据题中数据求出 a 与 b 的值即可;
 - (2) 根据 (1) a 与 b 的值, 确定出 m 与 n 的值即可;
 - (3) 从方差, 平均分角度考虑, 给出两条支持八年级队成绩好的理由即可.

解答: 解: (1) 根据题意得: $a=5$, $b=1$;

(2) 七年级成绩为 3, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 中位数为 6, 即 $m=6$;

优秀率为 $\frac{1+1}{10} = \frac{1}{5} = 20\%$, 即 $n=20\%$;

(3) 八年级平均分高于七年级, 方差小于七年级, 成绩比较稳定, 故八年级队比七年级队成绩好.

点评: 此题考查了条形统计图, 扇形统计图, 以及中位数, 平均数, 以及方差, 弄清题意是

解本题的关键.

23. (10 分) (2014•荆州) 我国中东部地区雾霾天气趋于严重, 环境治理已刻不容缓. 我市某电器商场根据民众健康需要, 代理销售某种家用空气净化器, 其进价是 200 元/台. 经过市场销售后发现: 在一个月内, 当售价是 400 元/台时, 可售出 200 台, 且售价每降低 10 元, 就可多售出 50 台. 若供货商规定这种空气净化器售价不能低于 300 元/台, 代理销售商每月要完成不低于 450 台的销售任务.

(1) 试确定月销售量 y (台) 与售价 x (元/台) 之间的函数关系式; 并求出自变量 x 的取值范围;

(2) 当售价 x (元/台) 定为多少时, 商场每月销售这种空气净化器所获得的利润 w (元) 最大? 最大利润是多少?

考点: 二次函数的应用.

分析: (1) 根据题中条件销售价每降低 10 元, 月销售量就可多售出 50 千克, 即可列出函数关系式;

根据供货商规定这种空气净化器售价不能低于 300 元/台, 代理销售商每月要完成不低于 450 台的销售即可求出 x 的取值.

(2) 用 x 表示 y , 然后再用 x 来表示出 w , 根据函数关系式, 即可求出最大 w ;

解答: 解: (1) 根据题中条件销售价每降低 10 元, 月销售量就可多售出 50 千克,

则月销售量 y (台) 与售价 x (元/台) 之间的函数关系式: $y=200+50\times\frac{400-x}{10}$, 化简

得: $y=-5x+2200$;

供货商规定这种空气净化器售价不能低于 300 元/台, 代理销售商每月要完成不低于 450 台,

$$\text{则} \begin{cases} x \geq 300 \\ -5x+2200 \geq 450 \end{cases},$$

解得: $300 \leq x \leq 350$.

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为: $y=-5x+2200$ ($300 \leq x \leq 350$);

(2) $W=(x-200)(-5x+2200)$,

整理得: $W=-5(x-320)^2+72000$.

$\therefore x=320$ 在 $300 \leq x \leq 350$ 内,

$\therefore$ 当 $x=320$ 时, 最大值为 72000,

即售价定为 320 元/台时, 商场每月销售这种空气净化器所获得的利润 w 最大, 最大利润是 72000 元.

点评: 本题主要考查对于一次函数的应用和掌握, 而且还应用到将函数变形求函数极值的知识.

24. (12 分) (2014•荆州) 已知: 函数 $y=ax^2-(3a+1)x+2a+1$ (a 为常数).

(1) 若该函数图象与坐标轴只有两个交点, 求 a 的值;

(2) 若该函数图象是开口向上的抛物线, 与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C , 且 $x_2-x_1=2$.

①求抛物线的解析式;

②作点 A 关于 y 轴的对称点 D , 连结 BC , DC , 求 $\sin \angle DCB$ 的值.

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 根据 a 取值的不同, 有三种情形, 需要分类讨论, 避免漏解.

(2) ①函数与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点, 则 x_1, x_2 , 满足 $y=0$ 时, 方程的根与系数关系. 因为 $x_2 - x_1 = 2$, 则可平方, 用 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 表示, 则得关于 a 的方程, 可求, 并得抛物线解析式.

②已知解析式则可得 A, B, C, D 坐标, 求 $\sin \angle DCB$, 须作垂线构造直角三角形, 结论易得.

解答: 解: (1) 函数 $y = ax^2 - (3a+1)x + 2a+1$ (a 为常数),
若 $a=0$, 则 $y = -x+1$, 与坐标轴有两个交点 $(0, 1), (1, 0)$;

若 $a \neq 0$ 且图象过原点时, $2a+1=0, a = -\frac{1}{2}$, 有两个交点 $(0, 0), (1, 0)$;

若 $a \neq 0$ 且图象与 x 轴只有一个交点时, 令 $y=0$ 有:

$\Delta = (3a+1)^2 - 4a(2a+1) = 0$, 解得 $a = -1$, 有两个交点 $(0, -1), (1, 0)$.

综上所述: $a=0$ 或 $-\frac{1}{2}$ 或 -1 时, 函数图象与坐标轴有两个交点.

(2) ① $\because$ 函数与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点,
 $\therefore x_1, x_2$ 为 $ax^2 - (3a+1)x + 2a+1 = 0$ 的两个根,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{3a+1}{a}, x_1 x_2 = \frac{2a+1}{a},$$

$$\because x_2 - x_1 = 2,$$

$$\therefore 4 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{3a+1}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2a+1}{a},$$

解得 $a = -\frac{1}{3}$ (函数开口向上, $a > 0$, 舍去), 或 $a = 1$,

$$\therefore y = x^2 - 4x + 3.$$

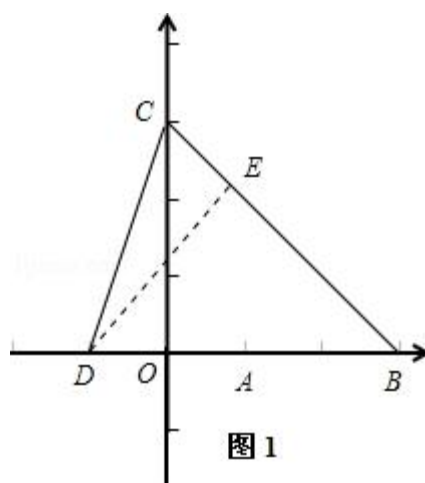
② $\because$ 函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C , 且 $x_1 < x_2$,

$$\therefore A(1, 0), B(3, 0), C(0, 3),$$

$\because D$ 为 A 关于 y 轴的对称点,

$$\therefore D(-1, 0).$$

根据题意画图,



如图 1, 过点 D 作 $DE \perp CB$ 于 E ,

$$\because OC = 3, OB = 3, OC \perp OB,$$

$\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle CBO=45^\circ, \\
&\therefore \triangle EDB \text{ 为等腰直角三角形}, \\
&\text{设 } DE=x, \text{ 则 } EB=x, \\
&\therefore DB=4, \\
&\therefore x^2+x^2=4^2, \\
&\therefore x=2\sqrt{2}, \text{ 即 } DE=2\sqrt{2}. \\
&\text{在 } Rt\triangle COD \text{ 中}, \\
&\therefore DO=1, CO=3, \\
&\therefore CD=\sqrt{DO^2+CO^2}=\sqrt{10}, \\
&\therefore \sin \angle DCB=\frac{DE}{CD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

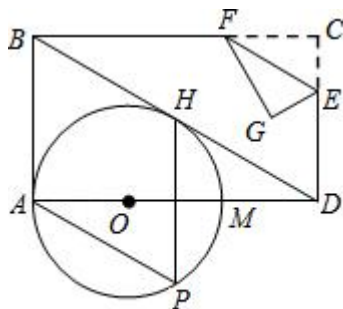
点评: 本题考查了二次函数图象交点性质、韦达定理、特殊三角形及三角函数等知识, 题目考法新颖, 但内容常规基础, 是一道非常值得考生练习的题目.

25. (12分) (2014•荆州) 如图①, 已知: 在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上有一点 O , $OA=\sqrt{3}$, 以 O 为圆心, OA 长为半径作圆, 交 AD 于 M , 恰好与 BD 相切于 H , 过 H 作弦 $HP \parallel AB$, 弦 $HP=3$. 若点 E 是 CD 边上一动点 (点 E 与 C, D 不重合), 过 E 作直线 $EF \parallel BD$ 交 BC 于 F , 再把 $\triangle CEF$ 沿着动直线 EF 对折, 点 C 的对应点为 G . 设 $CE=x$, $\triangle EFG$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 S .

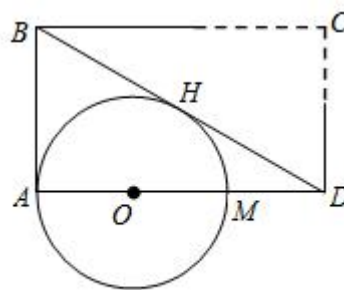
(1) 求证: 四边形 $ABHP$ 是菱形;

(2) 问 $\triangle EFG$ 的直角顶点 G 能落在 $\odot O$ 上吗? 若能, 求出此时 x 的值; 若不能, 请说明理由;

(3) 求 S 与 x 之间的函数关系式, 并直接写出 FG 与 $\odot O$ 相切时, S 的值.



图①



图②(备用图)

考点: 圆的综合题; 含 30° 度角的直角三角形; 菱形的判定; 矩形的性质; 垂径定理; 切线的性质; 切线长定理; 轴对称的性质; 特殊角的三角函数值.

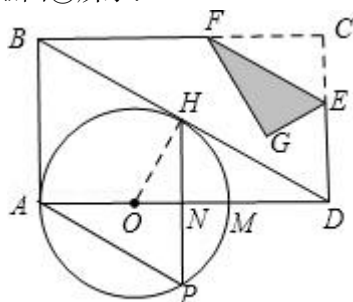
专题: 压轴题.

分析: (1) 连接 OH , 可以求出 $\angle HOD=60^\circ$, $\angle HDO=30^\circ$, 从而可以求出 $AB=3$, 由 $HP \parallel AB$, $HP=3$ 可证到四边形 $ABHP$ 是平行四边形, 再根据切线长定理可得 $BA=BH$, 即可证到四边形 $ABHP$ 是菱形.

(2) 当点 G 落到 AD 上时, 可以证到点 G 与点 M 重合, 可求出 $x=2$.

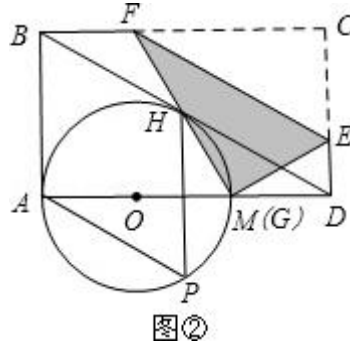
(3) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 如图①, $S=S_{\triangle EGF}$, 只需求出 FG , 就可得到 S 与 x 之间的函数关系式; 当 $2 < x \leq 3$ 时, 如图④, $S=S_{\triangle GEF}-S_{\triangle SGR}$, 只需求出 SG 、 RG , 就可得到 S 与 x 之间的函数关系式. 当 FG 与 $\odot O$ 相切时, 如图⑤, 易得 $FK=AB=3$, $KQ=AQ-AK=2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}x$. 再由 $FK=\sqrt{3}KQ$ 即可求出 x , 从而求出 S .

解答: 解: (1) 证明: 连接 OH , 如图①所示.



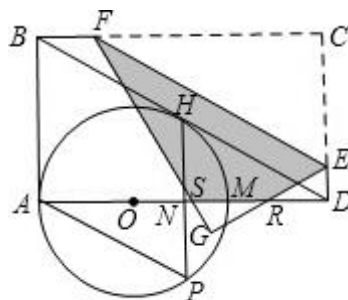
图①

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = AD$, $AB = CD$.
 $\because HP \parallel AB$,
 $\therefore \angle ANH + \angle BAD = 180^\circ$.
 $\therefore \angle ANH = 90^\circ$.
 $\therefore HN = PN = \frac{1}{2}HP = \frac{3}{2}$.
 $\because OH = OA = \sqrt{3}$,
 $\therefore \sin \angle HON = \frac{HN}{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\therefore \angle HON = 60^\circ$
 $\because BD$ 与 $\odot O$ 相切于点 H ,
 $\therefore OH \perp BD$.
 $\therefore \angle HDO = 30^\circ$.
 $\therefore OD = 2\sqrt{3}$.
 $\therefore AD = 3\sqrt{3}$.
 $\therefore BC = 3\sqrt{3}$.
 $\because \angle BAD = 90^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$.
 $\therefore \tan \angle BDA = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 $\therefore AB = 3$.
 $\because HP = 3$,
 $\therefore AB = HP$.
 $\because AB \parallel HP$,
 $\therefore$ 四边形 $ABHP$ 是平行四边形.
 $\because \angle BAD = 90^\circ$, AM 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore BA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A .
 $\because BD$ 与 $\odot O$ 相切于点 H ,
 $\therefore BA = BH$.
 $\therefore$ 平行四边形 $ABHP$ 是菱形.
 (2) $\triangle EFG$ 的直角顶点 G 能落在 $\odot O$ 上.
 如图②所示, 点 G 落到 AD 上.



$\because EF \parallel BD$,
 $\therefore \angle FEC = \angle CDB$.
 $\because \angle CDB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CEF = 60^\circ$.
 由折叠可得: $\angle GEF = \angle CEF = 60^\circ$.
 $\therefore \angle GED = 60^\circ$.
 $\because CE = x$,
 $\therefore GE = CE = x$, $ED = DC - CE = 3 - x$.
 $\therefore \cos \angle GED = \frac{ED}{GE} = \frac{3-x}{x} = \frac{1}{2}$.
 $\therefore x = 2$.
 $\therefore GE = 2$, $ED = 1$.
 $\therefore GD = \sqrt{3}$.
 $\therefore OG = AD - AO - GD = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.
 $\therefore OG = OM$.
 $\therefore$ 点 G 与点 M 重合.
 此时 $\triangle EFG$ 的直角顶点 G 落在 $\odot O$ 上, 对应的 x 的值为 2.
 $\therefore$ 当 $\triangle EFG$ 的直角顶点 G 落在 $\odot O$ 上时, 对应的 x 的值为 2.

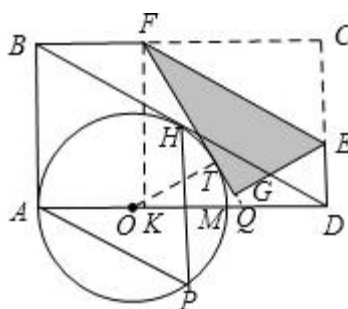
(3) ①如图①,
 在 $Rt\triangle EGF$ 中,
 $\tan \angle FEG = \frac{FG}{GE} = \frac{FG}{x} = \sqrt{3}$.
 $\therefore FG = \sqrt{3}x$.
 $\therefore S = \frac{1}{2}GE \cdot FG = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$.
 ②如图③,



$$\begin{aligned} ED &= 3 - x, \quad RE = 2ED = 6 - 2x, \\ GR &= GE - ER = x - (6 - 2x) = 3x - 6. \\ \therefore \tan \angle SRG &= \frac{SG}{RG} = \frac{\sqrt{3}}{3x - 6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \therefore SG &= \sqrt{3} (x - 2). \\ \therefore S_{\triangle SGR} &= \frac{1}{2} SG \cdot RG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} (x - 2) \cdot (3x - 6). \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} (x - 2)^2. \\ \therefore S_{\triangle GEF} &= \frac{\sqrt{3}}{2} x^2, \\ \therefore S &= S_{\triangle GEF} - S_{\triangle SGR} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} (x - 2)^2. \\ &= -\sqrt{3} x^2 + 6\sqrt{3} x - 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

综上所述: 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $S = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$; 当 $2 < x \leq 3$ 时, $S = -\sqrt{3}x^2 + 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}$.

当 FG 与 $\odot O$ 相切于点 T 时, 延长 FG 交 AD 于点 Q , 过点 F 作 $FK \perp AD$, 垂足为 K , 如图④所示.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore BC \parallel AD, \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$
 $\therefore \angle AQF = \angle CFG = 60^\circ$.
 $\because OT = \sqrt{3}$,
 $\therefore OQ = 2$.
 $\therefore AQ = \sqrt{3} + 2$.
 $\because \angle FKA = \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,

∴ 四边形 $ABFK$ 是矩形.

$$\therefore FK=AB=3, \quad AK=BF=3\sqrt{3}-\sqrt{3}x.$$

$$\therefore KQ=AQ-AK=(\sqrt{3}+2)-(3\sqrt{3}-\sqrt{3}x)=2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}x.$$

在 $Rt\triangle FKQ$ 中, $\tan \angle FQK = \frac{FK}{QK} = \sqrt{3}.$

$$\therefore FK = \sqrt{3}QK.$$

$$\therefore 3 = \sqrt{3}(2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}x).$$

解得: $x = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

$$\therefore 0 \leq 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq 2,$$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{31\sqrt{3}}{6} - 6.$$

$$\therefore FG \text{ 与 } \odot O \text{ 相切时, } S \text{ 的值为 } \frac{31\sqrt{3}}{6} - 6.$$

点评: 本题考查了矩形的性质、菱形的性质、切线的性质、切线长定理、垂径定理、轴对称性质、特殊角的三角函数值、 30° 角所对的直角边等于斜边的一半、等腰三角形的性质等知识, 综合性非常强.