

2011 年湖北省黄冈市中考数学试卷

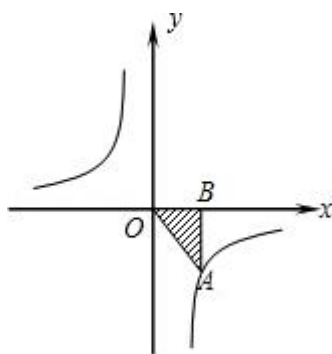
一、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) $-\frac{1}{2}$ 的倒数是_____.

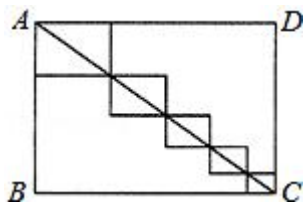
2. (3 分) 分解因式: $8a^2 - 2 =$ _____.

3. (3 分) 要使式子 $\frac{\sqrt{a+2}}{a}$ 有意义, 则 a 的取值范围为_____.

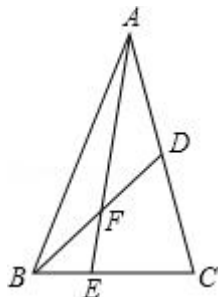
4. (3 分) 如图: 点 A 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上, $AB \perp x$ 轴于 B , 且 $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = 2$, 则 k
=_____.



5. (3 分) 如图: 矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 10$, $BC = 8$, 则图中五个小矩形的周长之和
为_____.



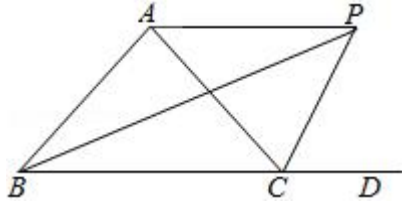
6. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中 E 是 BC 上的一点, $EC = 2BE$, 点 D 是 AC 的中点, 设 $\triangle ABC$, $\triangle ADF$, $\triangle BEF$ 的面积分别为 $S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ADF}$, $S_{\triangle BEF}$, 且 $S_{\triangle ABC} = 12$, 则 $S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BEF}$
=_____.



7. (3 分) 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=1+a \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y < 2$, 则 a 的取值范围

为_____.

8. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P , 若 $\angle BPC = 40^\circ$, 则 $\angle CAP =$ _____.



二、选择题 (共 7 小题, 每小题 3 分, 满分 21 分)

9. (3分) $\cos 30^\circ =$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

10. (3分) 计算 $-2^2 + (-2)^2 - (-\frac{1}{2})^{-1}$ 的正确结果是 ()

A. 2 B. -2 C. 6 D. 10

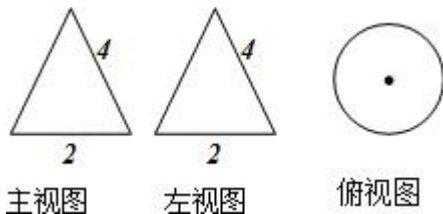
11. (3分) 下列说法中

- ①一个角的两边分别垂直于另一角的两边, 则这两个角相等
②数据 5, 2, 7, 1, 2, 4 的中位数是 3, 众数是 2
③等腰梯形既是中心对称图形, 又是轴对称图形
④Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 两直角边 a 、 b 分别是方程 $x^2 - 7x + 7 = 0$ 的两个根, 则 AB 边上的中线长为 $\frac{1}{2}\sqrt{35}$

正确命题有 ()

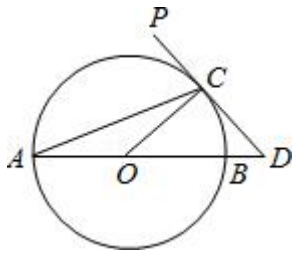
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

12. (3分) 一个几何体的三视图如下: 其中主视图和左视图都是腰长为 4, 底边为 2 的等腰三角形, 则这个几何体侧面展开图的面积为 ()



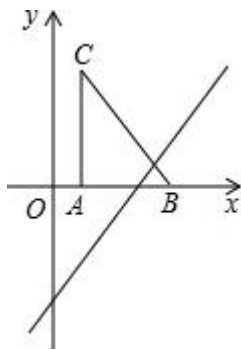
A. 2π B. $\frac{1}{2}\pi$ C. 4π D. 8π

13. (3分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, PD 切 $\odot O$ 于点 C , 交 AB 的延长线于 D , 且 $CO = CD$, 则 $\angle PCA =$ ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 67.5°

14. (3分) 如图, 把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 放在直角坐标系内, 其中 $\angle CAB = 90^\circ$, $BC = 5$, 点 A 、 B 的坐标分别为 $(1, 0)$ 、 $(4, 0)$. 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移, 当点 C 落在直线 $y = 2x - 6$ 上时, 线段 BC 扫过的面积为 ()



- A. 4 B. 8 C. 16 D. $8\sqrt{2}$

15. (3分) 已知函数 $y = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & (x \leq 3) \\ (x-5)^2 - 1 & (x \geq 3) \end{cases}$, 若使 $y = k$ 成立的 x 值恰好有三个, 则 k 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、解答题 (共 9 小题, 满分 75 分)

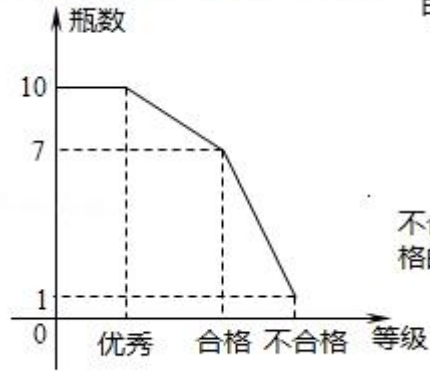
16. (5分) 解方程: $\frac{2}{x} + \frac{x}{x+3} = 1$.

17. (6分) 为了加强食品安全管理, 有关部门对某大型超市的甲、乙两种品牌食用油共抽取 18 瓶进行检测, 检测结果分成“优秀”、“合格”和“不合格”三个等级, 数据处理后制成以下折线统计图和扇形统计图.

(1) 甲、乙两种品牌食用油各被抽取了多少瓶用于检测?

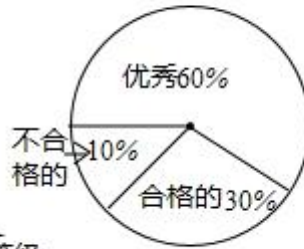
(2) 在该超购买一瓶乙品牌食用油, 请估计能买到“优秀”等级的概率是多少?

两种品牌食用油检测结果折线图



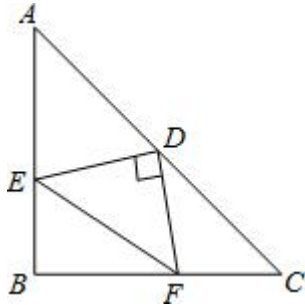
图(1)

甲种品牌食用油检测结果扇形分布图



图(2)

18. (7分) 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ABC = 90^\circ$, D 为 AC 边上中点, 过 D 点作 $DE \perp DF$, 交 AB 于 E , 交 BC 于 F , 若 $AE = 4$, $FC = 3$, 求 EF 长.



19. (7分) 有 3 张扑克牌, 分别是红桃 3、红桃 4 和黑桃 5. 把牌洗匀后甲先抽取一张, 记下花色和数字后将牌放回, 洗匀后乙再抽取一张.

(1) 先后两次抽得的数字分别记为 s 和 t , 求 $|s - t| \geq 1$ 的概率.

(2) 甲、乙两人做游戏, 现有两种方案. A 方案: 若两次抽得相同花色则甲胜, 否则乙胜. B 方案: 若两次抽得数字和为奇数则甲胜, 否则乙胜. 请问甲选择哪种方案胜率更高?

20. (8分) 今年我省干旱灾情严重, 甲地急需抗旱用水 15 万吨, 乙地 13 万吨. 现有两水库决定各调出 14 万吨水支援甲、乙两地抗旱. 从 A 地到甲地 50 千米, 到乙地 30 千米; 从 B 地到甲地 60 千米, 到乙地 45 千米

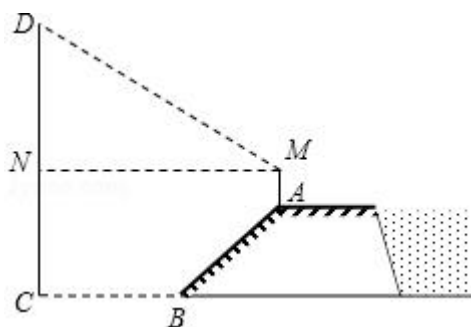
(1) 设从 A 水库调往甲地的水量为 x 万吨, 完成下表:

水量/万吨 调入地 调出地	甲	乙	总计
A	x		14
B			14

总计	15	13	28
----	----	----	----

(2) 请设计一个调运方案, 使水的调运总量尽可能小. (调运量 = 调运水的重量 $\times$ 调运的距离, 单位: 万吨 $\cdot$ 千米)

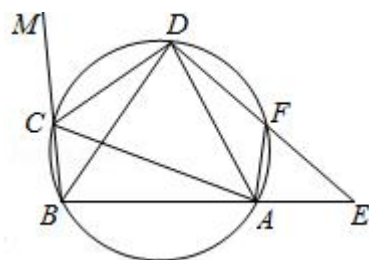
21. (8分) 如图, 防洪大堤的横断面是梯形, 背水坡 AB 的坡比 $i = 1 : \sqrt{3}$ (指坡面的铅直高度与水平宽度的比), 且 $AB = 20m$. 身高为 $1.7m$ 的小明站在大堤 A 点, 测得高压电线杆顶端点 D 的仰角为 30° . 已知地面 CB 宽 $30m$, 求高压电线杆 CD 的高度 (结果保留三个有效数字, $\sqrt{3} \approx 1.732$).



22. (8分) 如图, 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, CD 为 $\angle BCA$ 的外角的平分线, F 为 $\widehat{AD}$ 上一点, $BC = AF$, 延长 DF 与 BA 的延长线交于 E .

(1) 求证: $\triangle ABD$ 为等腰三角形.

(2) 求证: $AC \cdot AF = DF \cdot FE$.



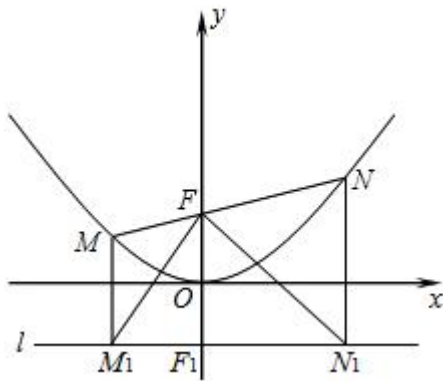
23. (12分) 我市某镇的一种特产由于运输原因, 长期只能在当地销售. 当地政府对该特产的销售投资收益为: 每投入 x 万元, 可获得利润 $P = -\frac{1}{100}(x-60)^2 + 41$ (万元). 当地政府拟在“十二·五”规划中加快开发该特产的销售, 其规划方案为: 在规划前后对该项目每年最多可投入 100 万元的销售投资, 在实施规划 5 年的前两年中, 每年都从 100 万元中拨出 50 万元用于修建一条公路, 两年修成, 通车前该特产只能在当地销售; 公路通车后的 3 年中, 该特产既在本地销售, 也在外地销售. 在外地销售的投资收益为: 每投入 x 万元, 可获利润 $Q = -\frac{99}{100}(100-x)^2 + \frac{294}{5}(100-x) + 160$ (万元).

- (1) 若不进行开发, 求 5 年所获利润的最大值是多少?
- (2) 若按规划实施, 求 5 年所获利润 (扣除修路后) 的最大值是多少?
- (3) 根据 (1)、(2) 该方案是否具有实施价值?

24. (14 分) 如图所示, 过点 $F(0, 1)$ 的直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 交于 $M(x_1, y_1)$

和 $N(x_2, y_2)$ 两点 (其中 $x_1 < 0, x_2 > 0$).

- (1) 求 b 的值.
- (2) 求 $x_1 \cdot x_2$ 的值.
- (3) 分别过 M, N 作直线 $l: y = -1$ 的垂线, 垂足分别是 M_1 和 N_1 . 判断 $\triangle M_1FN_1$ 的形状, 并证明你的结论.
- (4) 对于过点 F 的任意直线 MN , 是否存在一条定直线 m (m 是常数), 使 m 与以 MN 为直径的圆相切? 如果有, 请求出这条直线 m 的解析式; 如果没有, 请说明理由.



2011 年湖北省黄冈市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. 【分析】根据倒数的定义直接解答即可.

【解答】解： $\because (-\frac{1}{2}) \times (-2) = 1$,

$\therefore -\frac{1}{2}$ 的倒数是 -2 .

【点评】本题考查倒数的基本概念，即若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数. 属于基础题.

2. 【分析】先提取公因式 2，再根据平方差公式进行二次分解即可求得答案.

【解答】解： $8a^2 - 2$,

$$= 2(4a^2 - 1),$$

$$= 2(2a+1)(2a-1).$$

故答案为： $2(2a+1)(2a-1)$.

【点评】本题考查了提公因式法，公式法分解因式. 注意分解要彻底.

3. 【分析】根据二次根式的性质和分式的意义，被开方数大于或等于 0，分母不等于 0，可以求出 x 的范围.

【解答】解：根据题意得： $a+2 \geq 0$ 且 $a \neq 0$,

解得： $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$.

故答案为： $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$.

【点评】本题考查的知识点为：分式有意义，分母不为 0；二次根式的被开方数是非负数.

4. 【分析】先根据反比例函数图象所在的象限判断出 k 的符号，再根据 $S_{\triangle AOB} = 2$ 求出 k 的值即可.

【解答】解： $\because$ 反比例函数的图象在二、四象限，

$$\therefore k < 0,$$

$$\because S_{\triangle AOB} = 2,$$

$$\therefore |k| = 4,$$

$$\therefore k = -4.$$

故答案为： -4 .

【点评】本题考查的是反比例系数 k 的几何意义，即在反比例函数的图象上任意一点象

坐标轴作垂线，这一点和垂足以及坐标原点所构成的三角形的面积是 $\frac{|k|}{2}$ ，且保持不变.

5. 【分析】运用平移个观点，五个小矩形的上边之和等于 AD ，下边之和等于 BC ，同理，它们的左边之和等于 AB ，右边之和等于 CD ，可知五个小矩形的周长之和为矩形 $ABCD$ 的周长.

【解答】解：由勾股定理，得 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 6$,

将五个小矩形的所有上边平移至 AD ，所有下边平移至 BC ，所有左边平移至 AB ，所有右边平移至 CD ,

$\therefore$ 五个小矩形的周长之和 $= 2(AB + BC) = 2 \times (6 + 8) = 28$.

故答案为：28.

【点评】本题考查了平移的性质的运用. 关键是运用平移的观点，将小矩形的四边平移，与大矩形的周长进行比较.

6. 【分析】 $S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BEF} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE}$ ，所以求出三角形 ABD 的面积和三角形 ABE 的面积即可，因为 $EC = 2BE$ ，点 D 是 AC 的中点，且 $S_{\triangle ABC} = 12$ ，就可以求出三角形 ABD 的面积和三角形 ABE 的面积.

【解答】解： $\because$ 点 D 是 AC 的中点，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6.$$

$$\therefore EC = 2BE, S_{\triangle ABC} = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 12 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE} = (S_{\triangle ADF} + S_{\triangle BDF}) - (S_{\triangle BDF} + S_{\triangle BEF}) = S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BEF},$$

$$\text{即 } S_{\triangle ADF} - S_{\triangle BEF} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE} = 6 - 4 = 2.$$

故答案为：2.

【点评】本题考查三角形的面积，关键知道当高相等时，面积等于底边的比，根据此可求出三角形的面积，然后求出差.

7. 【分析】先解关于关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=1+a \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解集，其解集由 a 表示；然后将其代入 $x+y < 2$ ，再来解关于 a 的不等式即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} 3x+y=1+a, & \text{①} \\ x+3y=3, & \text{②} \end{cases}$$

由① - ② $\times 3$ ，解得

$$y = 1 - \frac{a}{8};$$

由① $\times 3$ - ②，解得

$$x = \frac{3a}{8};$$

$\therefore$ 由 $x+y < 2$ ，得

$$1 + \frac{a}{4} < 2,$$

$$\text{即 } \frac{a}{4} < 1,$$

解得， $a < 4$.

解法 2：
$$\begin{cases} 3x+y=1+a, & \text{①} \\ x+3y=3, & \text{②} \end{cases}$$

由①+②得 $4x+4y = 4+a$,

$$x+y = 1 + \frac{a}{4},$$

$\therefore$ 由 $x+y < 2$ ，得

$$1 + \frac{a}{4} < 2,$$

$$\text{即 } \frac{a}{4} < 1,$$

解得， $a < 4$.

故答案是： $a < 4$.

【点评】 本题综合考查了解二元一次方程组、解一元一次不等式．解答此题时，采用了“加减消元法”来解二元一次方程组；在解不等式时，利用了不等式的基本性质：

(1) 不等式的两边同时加上或减去同一个数或整式不等号的方向不变；

(2) 不等式的两边同时乘以或除以同一个正数不等号的方向不变．

8. **【分析】** 根据外角与内角性质得出 $\angle BAC$ 的度数，再利用角平分线的性质以及直角三角形全等的判定，得出 $\angle CAP = \angle FAP$ ，即可得出答案．

【解答】 解：延长 BA ，作 $PN \perp BD$ ， $PF \perp BA$ ， $PM \perp AC$ ，

设 $\angle PCD = x^\circ$ ，

$\because CP$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ACP = \angle PCD = x^\circ$, $PM = PN$,

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABP = \angle PBC$, $PF = PN$,

$\therefore PF = PM$,

$\because \angle BPC = 40^\circ$,

$\therefore \angle ABP = \angle PBC = \angle PCD - \angle BPC = (x - 40)^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 2x^\circ - (x^\circ - 40^\circ) - (x^\circ - 40^\circ) = 80^\circ$,

$\therefore \angle CAF = 100^\circ$,

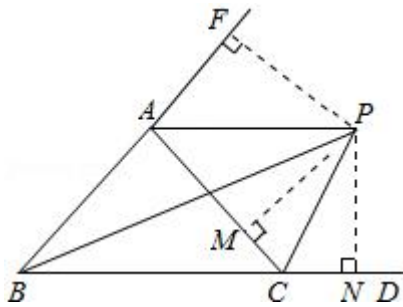
在 $\text{Rt}\triangle PFA$ 和 $\text{Rt}\triangle PMA$ 中,

$$\therefore \begin{cases} PA = PA \\ PM = PF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle PFA \cong \text{Rt}\triangle PMA$ (HL),

$\therefore \angle FAP = \angle PAC = 50^\circ$.

故答案为: 50° .



【点评】 此题主要考查了角平分线的性质以及三角形外角的性质和直角三角全等的判定等知识, 根据角平分线的性质得出 $PM = PN = PF$ 是解决问题的关键.

二、选择题 (共 7 小题, 每小题 3 分, 满分 21 分)

9. **【分析】** 直接根据 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 进行解答即可.

【解答】 解: 因为 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 C 正确.

故选: C.

【点评】 本题考查的是特殊角的三角函数值, 熟记各特殊角的三角函数值是解答此题的关键.

10. 【分析】首先求得 $-2^2 = -4$, $(-2)^2 = 4$ 与 $(-\frac{1}{2})^{-1} = -2$, 然后利用有理数的运算求解即可求得答案.

【解答】解: 原式 $= -4 + 4 - (-2) = 2$.

故选: A.

【点评】本题主要考查了有理数的乘方, 负指数幂的运算. 题目比较简单, 注意负整数指数为正整数指数的倒数.

11. 【分析】①一个角的两边垂直于另一个角的两边, 这两个角互补或相等.

②在这组数据中, 中位数是 2 和 4 的平均数, 出现次数最多的数是 2, 可以求出中位数和众数.

③等腰梯形是轴对称, 而不是中心对称.

④利用根与系数的关系得到 $a+b=7$, $ab=7$, 然后利用勾股定理求出斜边 AB , 得到斜边中线的长.

【解答】解: ①一个角的两边垂直于另一个角的两边, 这两个角互补或相等, 所以①错误.

②数据 1, 2, 2, 4, 5, 7, 中位数是 $\frac{1}{2}(2+4) = 3$, 其中 2 出现的次数最多, 众数是 2, 所以②正确.

③等腰梯形只是轴对称图形, 而不是中心对称图形, 所以③错误.

④根据根与系数的关系有: $a+b=7$, $ab=7$,

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 49 - 14 = 35,$$

即: $AB^2 = 35$,

$$AB = \sqrt{35}$$

$\therefore AB$ 边上的中线的长为 $\frac{1}{2}\sqrt{35}$. 所以④正确.

故选: C.

【点评】本题考查的是根与系数的关系, 利用基本概念对每个命题进行分析, 作出正确的判断.

12. 【分析】由几何体的主视图和左视图都是等腰三角形, 俯视图是圆, 可以判断这个几何体是圆锥.

【解答】解: 依题意知母线长 $l=4$, 底面半径 $r=1$,

则由圆锥的侧面积公式得 $S = \pi rl = \pi \cdot 1 \cdot 4 = 4\pi$.

故选：C.

【点评】 本题主要考查三视图的知识和圆锥侧面面积的计算；解决此类图的关键是由三视图得到立体图形；学生由于空间想象能力不够，找不到圆锥的底面半径，或者对圆锥的侧面面积公式运用不熟练，易造成错误.

13. 【分析】 根据图形利用切线的性质，得到 $\angle COD = 45^\circ$ ，连接 AC ， $\angle ACO = 22.5^\circ$ ，所以 $\angle PCA = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$.

【解答】 解：如图， $\because PD$ 切 $\odot O$ 于点 C ，

$$\therefore OC \perp PD,$$

$$\text{又} \because OC = CD,$$

$$\therefore \angle COD = 45^\circ,$$

$$\because AO = CO,$$

$$\therefore \angle ACO = 22.5^\circ,$$

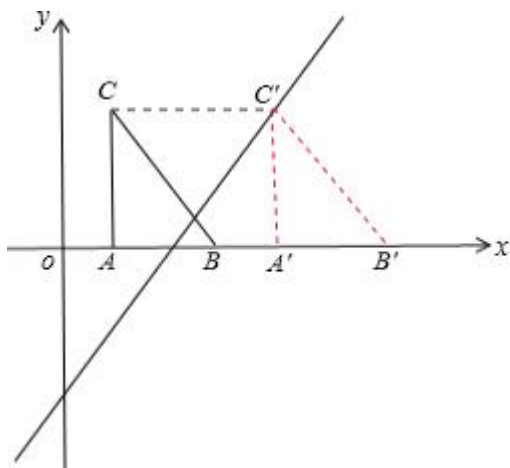
$$\therefore \angle PCA = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ.$$

故选：D.

【点评】 本题考查的是切线的性质，利用切线的性质得到 $OC \perp PD$ ，然后进行计算求出 $\angle PCA$ 的度数.

14. 【分析】 根据题意，线段 BC 扫过的面积应为一平行四边形的面积，其高是 AC 的长，底是点 C 平移的路程. 求当点 C 落在直线 $y = 2x - 6$ 上时的横坐标即可.

【解答】 解：如图所示.



$$\because \text{点 } A、B \text{ 的坐标分别为 } (1, 0)、(4, 0),$$

$$\therefore AB = 3.$$

$$\because \angle CAB = 90^\circ, BC = 5,$$

$$\therefore AC = 4.$$

$$\therefore A'C' = 4.$$

$\therefore$ 点 C' 在直线 $y = 2x - 6$ 上,

$$\therefore 2x - 6 = 4, \text{ 解得 } x = 5.$$

$$\text{即 } OA' = 5.$$

$$\therefore CC' = 5 - 1 = 4.$$

$$\therefore S_{\square BCC'B'} = 4 \times 4 = 16 \text{ (面积单位)}.$$

即线段 BC 扫过的面积为 16 面积单位.

故选: C .

【点评】 此题考查平移的性质及一次函数的综合应用, 解决本题的关键是明确线段 BC 扫过的面积应为一平行四边形的面积.

15. **【分析】** 首先在坐标系中画出已知函数 $y = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & (x \leq 3) \\ (x-5)^2 - 1 & (x \geq 3) \end{cases}$ 的图象, 利用数形结合

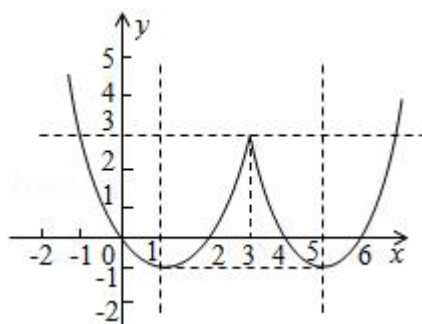
的方法即可找到使 $y = k$ 成立的 x 值恰好有三个的 k 值.

【解答】 解: 函数 $y = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & (x \leq 3) \\ (x-5)^2 - 1 & (x \geq 3) \end{cases}$ 的图象如图:

根据图象知道当 $y = 3$ 时, 对应成立的 x 值恰好有三个,

$$\therefore k = 3.$$

故选: D .



【点评】 此题主要考查了利用二次函数的图象解决交点问题, 解题的关键是把解方程的问题转换为根据函数图象找交点的问题.

三、解答题 (共 9 小题, 满分 75 分)

16. **【分析】** 观察可得最简公分母是 $x(x+3)$, 方程两边乘最简公分母, 可以把分式方程转化为整式方程求解.

【解答】解：方程两边同乘以 $x(x+3)$,

$$\text{得 } 2(x+3) + x^2 = x(x+3),$$

$$2x+6+x^2 = x^2+3x,$$

$$\therefore x = 6$$

检验：把 $x = 6$ 代入 $x(x+3) = 54 \neq 0$,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 6$.

【点评】(1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解；

(2) 解分式方程一定要注意验根.

17. 【分析】(1) 读折线统计图可知，不合格等级的有 1 瓶，读扇形统计图可知甲种品牌有不合格的，且只有 1 瓶，由此可求出甲种品牌的数量，据此解答即可.

(2) 根据随机事件概率大小的求法，找准两点：①符合条件的情况数目；②全部情况的总数；二者的比值就是其发生的概率的大小.

【解答】解：(1) $1 \div 10\% = 10$ (瓶)， $18 - 10 = 8$ (瓶)，

即甲种品牌有 10 瓶，乙种品牌有 8 瓶.

(2) $\because$ 甲、乙优秀瓶总数为 10 瓶，其中甲品牌食用油的优秀占到 60%，

$$\therefore \text{甲的优秀瓶数为 } 10 \times 60\% = 6 \text{ (瓶)}$$

$$\therefore \text{乙的优秀瓶数为：} 10 - (10 \times 60\%) = 4 \text{ (瓶)},$$

又 $\because$ 乙种品牌共有 8 瓶，

$$\therefore \text{能买到“优秀”等级的概率是 } \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

【点评】本题考查的是扇形统计图和折线统计图的综合运用. 读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

18. 【分析】首先连接 BD ，由已知等腰直角三角形 ABC ，可推出 $BD \perp AC$ 且 $BD = CD = AD$ ， $\angle ABD = 45^\circ$ 再由 $DE \perp DF$ ，可推出 $\angle FDC = \angle EDB$ ，又等腰直角三角形 ABC 可得 $\angle C = 45^\circ$ ，所以 $\triangle EDB \cong \triangle FDC$ ，从而得出 $BE = FC = 3$ ，那么 $AB = 7$ ，则 $BC = 7$ ， $BF = 4$ ，再根据勾股定理求出 EF 的长.

【解答】解：连接 BD ，

$\because$ 等腰直角三角形 ABC 中， D 为 AC 边上中点，

$$\therefore BD \perp AC \text{ (三线合一)}, BD = CD = AD, \angle ABD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C,$$

$$\text{又} \because DE \perp DF,$$

$$\therefore \angle FDC + \angle BDF = \angle EDB + \angle BDF,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle EDB,$$

在 $\triangle EDB$ 与 $\triangle FDC$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle EBD = \angle C \\ BD = CD \\ \angle EDB = \angle FDC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FDC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BE = FC = 3,$$

$$\therefore AB = 7, \text{ 则 } BC = 7,$$

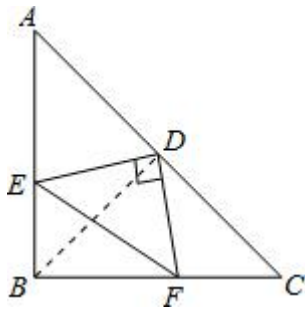
$$\therefore BF = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中,

$$EF^2 = BE^2 + BF^2 = 3^2 + 4^2,$$

$$\therefore EF = 5.$$

答: EF 的长为 5.



【点评】 此题考查的知识点是勾股定理及全等三角形的判定, 关键是由已知先证三角形全等, 求得 BE 和 BF , 再由勾股定理求出 EF 的长.

19. **【分析】** (1) 依据题意先用列表法或画树状图法分析所有等可能的出现结果, 然后根据概率公式求出该事件的概率.

(2) 分别求得两个方案中甲获胜的概率, 比较其大小, 哪个大则甲选择哪种方案好.

【解答】 解: (1) 画树状图得:



列表：

	红桃 3	红桃 4	黑桃 5
红桃 3	(红 3, 红 3)	(红 3, 红 4)	(红 3, 黑 5)
红桃 4	(红 4, 红 3)	(红 4, 红 4)	(红 4, 黑 5)
黑桃 5	(黑 5, 红 3)	(黑 5, 红 4)	(黑 5, 黑 5)

$\therefore$ 一共有 9 种等可能的结果， $|s - t| \geq 1$ 的有 (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 3), (5, 4) 共 6 种，

$\therefore |s - t| \geq 1$ 的概率为： $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ；

(2) $\because$ 两次抽得相同花色的有 5 种，两次抽得数字和为奇数有 4 种，

A 方案： $P(\text{甲胜}) = \frac{5}{9}$ ；

B 方案： $P(\text{甲胜}) = \frac{4}{9}$ ；

$\therefore$ 甲选择 A 方案胜率更高．

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

20. **【分析】** (1) 根据由 A 到甲和乙的总和是 14 万吨，即可表示出由 A 到乙是 (14 - x) 万吨，再根据到甲的总和是 15 万吨，即可表示；

(2) 首先用 x 表示出调运量的和，根据一次函数的性质，即可确定 x 的值，进而确定方案．

【解答】 解：(1) 如图所示：

调入地	甲	乙	总计
水量/万吨			
调出地			

A	X	$14 - x$	14
B	$15 - x$	$x - 1$	14
总 计	15	13	28

(2) 设调运量是 $y = 50x + 30(14 - x) + 60(15 - x) + 45(x - 1)$,

即 $y = 5x + 1275$,

$$\text{依题意有} \begin{cases} x \geq 0 \\ 14 - x \geq 0 \\ 15 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 14 \\ x \leq 15 \\ x \geq 1 \end{cases},$$

解得: $1 \leq x \leq 14$,

$\because 5 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, y 最小.

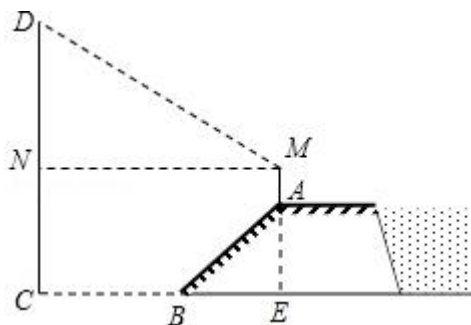
$y_{\text{最小}} = 5 \times 1 + 1275 = 1280$ (万吨·千米)

答: 由 A 到甲 1 万吨, 到乙 13 万吨; 由 B 到甲 14 万吨, 没有向乙地运水, 水的最小调水量为 1280 万吨·千米.

【点评】 本题主要考查了一次函数的应用, 正确把调运量表示成 x 的函数是解题的关键.

21. **【分析】** 由 i 的值求得大堤的高度 h , 点 A 到点 B 的水平距离 a , 从而求得 MN 的长度, 由仰角求得 DN 的高度, 从而由 DN , AM , h 求得高度 CD .

【解答】 解: 作 $AE \perp CE$ 于 E , 设大堤的高度为 h , 点 A 到点 B 的水平距离为 a ,



$$\because i = 1: \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 坡 AB 与水平的角度为 30° ,

$$\therefore \frac{h}{AB} = \sin 30^\circ, \text{ 即得 } h = \frac{AB}{2} = 10m,$$

$$\frac{a}{AB} = \cos 30^\circ, \text{ 即得 } a = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 10\sqrt{3}m,$$

$$\therefore MN = BC + a = (30 + 10\sqrt{3})m,$$

$\therefore$ 测得高压电线杆顶端点 D 的仰角为 30° ,

$$\therefore \frac{DN}{MN} = \tan 30^\circ,$$

$$\text{解得: } DN = MN \cdot \tan 30^\circ = (30 + 10\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} + 10 \approx 27.32(m),$$

$$\therefore CD = DN + AM + h = 27.32 + 1.7 + 10 = 39.02 \approx 39.0(m).$$

答: 高压电线杆 CD 的高度约为 39.0 米.

【点评】 本题考查了直角三角形在坡度上的应用, 由 i 的值求得大堤的高度和点 A 到点 B 的水平距离, 求得 MN , 由仰角求得 DN 高度, 进而求得总高度.

22. **【分析】** (1) CD 为 $\angle BCA$ 的外角的平分线得到 $\angle MCD = \angle ACD$, 求出 $\angle MCD = \angle DAB$ 推出 $\angle DBA = \angle DAB$ 即可;

(2) 由在 $\triangle CDA$ 与 $\triangle FAE$ 中, $\angle CDA = \angle FAE$, $\angle DCA = \angle AFE$, 得出 $\triangle CDA \sim \triangle FAE$, 即可推出 $CD \cdot EF = AC \cdot AF$.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形,

$$\therefore \angle DCB + \angle DAB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MCD + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MCD = \angle DAB,$$

$\because CD$ 为 $\angle BCA$ 的外角的平分线,

$$\therefore \angle MCD = \angle ACD,$$

$\because \angle DCA$ 和 $\angle DBA$ 都对弧 AFD ,

$$\therefore \angle DCA = \angle DBA,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DBA,$$

$$\therefore DB = DA,$$

$\therefore \triangle ABD$ 为等腰三角形.

(2) 由 (1) 知 $AD = BD$, $BC = AF$, 则弧 AFD = 弧 BCD , 弧 AF = 弧 BC ,

$$\therefore \angle BDC = \angle ADF, \text{ 弧 } CD = \text{弧 } DF, CD = DF, \text{ ①}$$

$$\therefore \angle BDC + \angle BDA = \angle ADF + \angle BDA,$$

$$\text{即 } \angle CDA = \angle BDF,$$

$$\text{而 } \angle FAE + \angle BAF = \angle BDF + \angle BAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle BDF = \angle CDA,$$

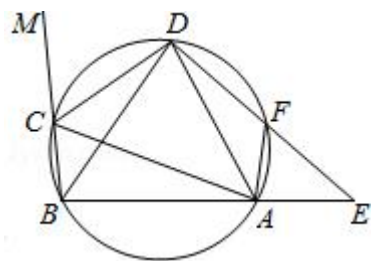
$$\text{同理 } \angle DCA = \angle AFE$$

$$\therefore \text{在 } \triangle CDA \text{ 与 } \triangle FAE \text{ 中, } \angle CDA = \angle FAE, \angle DCA = \angle AFE,$$

$$\therefore \triangle CDA \sim \triangle FAE,$$

$$\therefore \text{即 } CD \cdot EF = AC \cdot AF,$$

又由①有 $AC \cdot AF = DF \cdot EF$ 命题即证.



【点评】 本题主要考查对圆内接四边形，全等三角形的性质和判定，相似三角形的性质和判定，圆周角定理等知识点的理解和掌握，能综合运用这些性质进行推理是证此题的关键.

23. **【分析】** (1) 由可获得利润 $P = -\frac{1}{100}(x-60)^2 + 41$ (万元), 即可知当 $x = 60$ 时, P

最大, 最大值为 41, 继而求得 5 年所获利润的最大值;

(2) 首先求得前两年的获利最大值, 注意前两年: $0 \leq x \leq 50$, 此时因为 P 随 x 的增大而增大, 所以 $x = 50$ 时, P 值最大; 然后后三年: 设每年获利 y , 设当地投资额为 a , 则外

$$\text{地投资额为 } 100 - a, \text{ 即可得函数 } y = P + Q = \left[-\frac{1}{100}(a-60)^2 + 41\right] + \left[-\frac{99}{100}a^2 + \frac{294}{5}a + 160\right],$$

整理求解即可求得最大值, 则可求得按规划实施, 5 年所获利润 (扣除修路后) 的最大值;

(3) 比较可知, 该方案是具有极大的实施价值.

$$\text{【解答】解: (1) } \because \text{每投入 } x \text{ 万元, 可获得利润 } P = -\frac{1}{100}(x-60)^2 + 41 \text{ (万元),}$$

$$\therefore \text{当 } x = 60 \text{ 时, 所获利润最大, 最大值为 41 万元,}$$

$$\therefore \text{若不进行开发, 5 年所获利润的最大值是: } 41 \times 5 = 205 \text{ (万元);}$$

(2) 前两年: $0 \leq x \leq 50$, 此时因为 P 随 x 的增大而增大,

所以 $x = 50$ 时, P 值最大, 即这两年的获利最大为: $2 \times [-\frac{1}{100}(50 - 60)^2 + 41] = 80$ (万元),

后三年: 设每年获利 y , 设当地投资额为 a , 则外地投资额为 $100 - a$,

$$\therefore Q = -\frac{99}{100}[100 - (100 - a)]^2 + \frac{294}{5}[100 - (100 - a)] + 160 = -\frac{99}{100}a^2 + \frac{294}{5}a + 160,$$

$$\therefore y = P + Q = [-\frac{1}{100}(a - 60)^2 + 41] + [-\frac{99}{100}a^2 + \frac{294}{5}a + 160] = -a^2 + 60a + 165 = -(a - 30)^2 + 1065,$$

$\therefore$ 当 $a = 30$ 时, y 最大且为 1065,

$\therefore$ 这三年的获利最大为 $1065 \times 3 = 3195$ (万元),

$\therefore$ 5 年所获利润 (扣除修路后) 的最大值是: $80 + 3195 = 3275$ (万元).

(3) 有很大的实施价值.

规划后 5 年总利润为 3275 万元, 不实施规划方案仅为 205 万元, 故具有很大的实施价值.

【点评】 此题考查了二次函数的实际应用问题. 解题的关键是理解题意, 找到合适函数取得最大值, 是解此题的关键, 还要注意后三年的最大值的求解方法.

24. **【分析】** (1) 把点 F 的坐标代入直线可以确定 b 的值.

(2) 联立直线与抛物线, 代入 (1) 中求出的 b 值, 利用根与系数的关系可以求出 $x_1 \cdot x_2$ 的值.

(3) 确定 M_1 , N_1 的坐标, 利用两点间的距离公式, 分别求出 M_1F^2 , N_1F^2 , $M_1N_1^2$, 然后用勾股定理判断三角形的形状.

(4) 根据题意可知 $y = -1$ 总与该圆相切.

【解答】 解: (1) $\because$ 直线 $y = kx + b$ 过点 $F(0, 1)$,

$$\therefore b = 1;$$

(2) $\because$ 直线 $y = kx + b$ 与抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 交于 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 两点,

$$\therefore \text{可以得出: } kx + b = \frac{1}{4}x^2,$$

$$\text{整理得: } \frac{1}{4}x^2 - kx - 1 = 0,$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}, c = -1,$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = -4,$$

(3) $\triangle M_1FN_1$ 是直角三角形 (F 点是直角顶点).

理由如下: $\because FM_1^2 = FF_1^2 + M_1F_1^2 = x_1^2 + 4,$

$$FN_1^2 = FF_1^2 + F_1N_1^2 = x_2^2 + 4,$$

$$M_1N_1^2 = (x_2 - x_1)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 8,$$

$$\therefore FM_1^2 + FN_1^2 = M_1N_1^2,$$

$\therefore \triangle M_1FN_1$ 是以 F 点为直角顶点的直角三角形.

(4) 符合条件的定直线 m 即为直线 $l: y = -1$.

过 M 作 $MH \perp NN_1$ 于 H , $MN^2 = MH^2 + NH^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$

$$= (x_1 - x_2)^2 + [(kx_1 + 1) - (kx_2 + 1)]^2,$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + k^2 (x_1 - x_2)^2,$$

$$= (k^2 + 1) (x_1 - x_2)^2,$$

$$= (k^2 + 1) [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2]$$

$$= (k^2 + 1) (16k^2 + 16)$$

$$= 16 (k^2 + 1)^2,$$

$$\therefore MN = 4 (k^2 + 1),$$

分别取 MN 和 M_1N_1 的中点 P, P_1 ,

$$PP_1 = \frac{1}{2} (MM_1 + NN_1) = \frac{1}{2} (y_1 + 1 + y_2 + 1) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2 + 2) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) + 1 = \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)$$

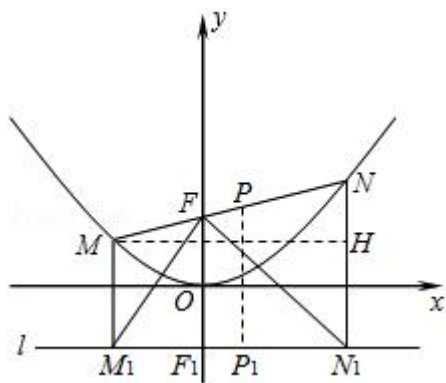
$$+ 2 = 2k^2 + 2,$$

$$\therefore PP_1 = \frac{1}{2} MN$$

即线段 MN 的中点到直线 l 的距离等于 MN 长度的一半.

$\therefore$ 以 MN 为直径的圆与 l 相切.

即对于过点 F 的任意直线 MN , 存在一条定直线 m , 使 m 与以 MN 为直径的圆相切, 这条直线 m 的解析式是 $y = -1$.



【点评】 本题考查的是二次函数的综合题，

- (1) 由点 F 的坐标求出 b 的值.
- (2) 结合直线与抛物线的解析式，利用根与系数的关系求出代数式的值.
- (3) 用两点间的距离公式，判断三角形的形状.
- (4) 根据点与圆的位置判断直线与圆的位置.