

2021 年浙江省杭州市中考数学试卷

一、选择题：本大题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $-(-2021) = (\quad)$

A. -2021

B. 2021

C. $-\frac{1}{2021}$

D. $\frac{1}{2021}$

2. “奋斗者”号载人潜水器此前在马里亚纳海沟创造了 10909 米的我国载人深潜记录。数据 10909 用科学记数法可表示为 $(\quad)$

A. 0.10909×10^5

B. 1.0909×10^4

C. 10.909×10^3

D. 109.09×10^2

3. 因式分解： $1 - 4y^2 = (\quad)$

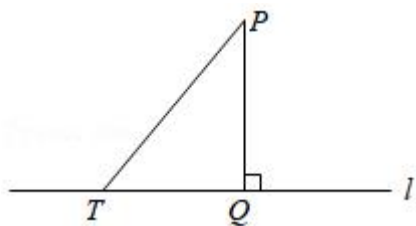
A. $(1 - 2y)(1 + 2y)$

B. $(2 - y)(2 + y)$

C. $(1 - 2y)(2 + y)$

D. $(2 - y)(1 + 2y)$

4. 如图，设点 P 是直线 l 外一点， $PQ \perp l$ ，垂足为点 Q ，点 T 是直线 l 上的一个动点，连结 PT ，则 $(\quad)$



A. $PT \geq 2PQ$

B. $PT \leq 2PQ$

C. $PT \geq PQ$

D. $PT \leq PQ$

5. 下列计算正确的是 $(\quad)$

A. $\sqrt{2^2} = 2$

B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$

C. $\sqrt{2^2} = \pm 2$

D. $\sqrt{(-2)^2} = \pm 2$

6. 某景点今年四月接待游客 25 万人次，五月接待游客 60.5 万人次。设该景点今年四月到五月接待游客人次的增长率为 x ($x > 0$)，则 $(\quad)$

A. $60.5(1 - x) = 25$

B. $25(1 - x) = 60.5$

C. $60.5(1 + x) = 25$

D. $25(1 + x) = 60.5$

7. 某轨道列车共有 3 节车厢，设乘客从任意一节车厢上车的机会均等。某天甲、乙两位乘客同时乘同一列轨道列车，则甲和乙从同一节车厢上车的概率是 $(\quad)$

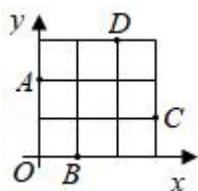
A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

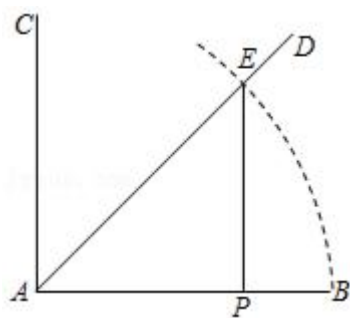
C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

8. 在“探索函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数 a, b, c 与图象的关系”活动中，老师给出了直角坐标系中的四个点： $A(0, 2)$, $B(1, 0)$, $C(3, 1)$, $D(2, 3)$. 同学们探索了经过这四个点中的三个点的二次函数图象，发现这些图象对应的函数表达式各不相同，其中 a 的值最大为 ()



- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{2}$
9. 已知线段 AB ，按如下步骤作图：①作射线 AC ，使 $AC \perp AB$ ；②作 $\angle BAC$ 的平分线 AD ；③以点 A 为圆心， AB 长为半径作弧，交 AD 于点 E ；④过点 E 作 $EP \perp AB$ 于点 P ，则 $AP:AB =$ ()



- A. $1: \sqrt{5}$ B. $1: 2$ C. $1: \sqrt{3}$ D. $1: \sqrt{2}$
10. 已知 y_1 和 y_2 均是以 x 为自变量的函数，当 $x = m$ 时，函数值分别是 M_1 和 M_2 ，若存在实数 m ，使得 $M_1 + M_2 = 0$ ，则称函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 。以下函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 的是 ()

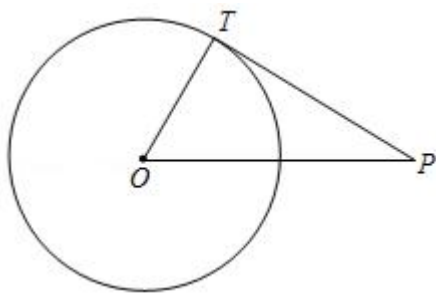
- A. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x - 1$ B. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x + 1$
- C. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x - 1$ D. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x + 1$

二、填空题：本大题有 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分。

11. (4 分) 计算： $\sin 30^\circ =$ _____.

12. (4 分) 计算： $2a + 3a =$ _____.

13. (4 分) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 1，点 P 是 $\odot O$ 外一点，且 $OP = 2$. 若 PT 是 $\odot O$ 的切线， T 为切点，连结 OT ，则 $PT =$ _____.

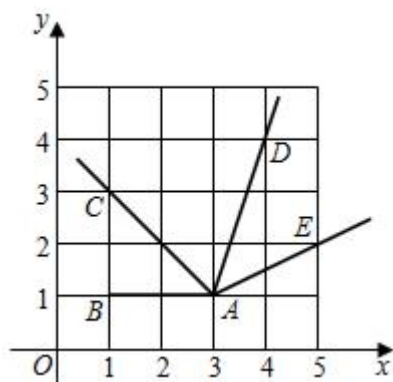


14. (4分) 现有甲、乙两种糖果的单价与千克数如下表所示.

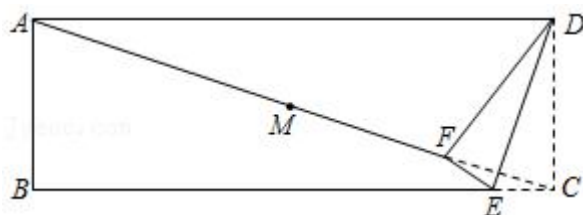
	甲种糖果	乙种糖果
单价 (元/千克)	30	20
千克数	2	3

将这 2 千克甲种糖果和 3 千克乙种糖果混合成 5 千克什锦糖果, 若商家用加权平均数来确定什锦糖果的单价, 则这 5 千克什锦糖果的单价为 _____ 元/千克.

15. (4分) 如图, 在直角坐标系中, 以点 $A(3, 1)$ 为端点的四条射线 AB , AC , AD , AE 分别过点 $B(1, 1)$, 点 $C(1, 3)$, 点 $D(4, 4)$, 点 $E(5, 2)$, 则 $\angle BAC$ _____ $\angle DAE$ (填 “ $>$ ”、“ $=$ ”、“ $<$ ” 中的一个).



16. (4分) 如图是一张矩形纸片 $ABCD$, 点 M 是对角线 AC 的中点, 点 E 在 BC 边上, 把 $\triangle DCE$ 沿直线 DE 折叠, 使点 C 落在对角线 AC 上的点 F 处, 连接 DF , EF . 若 $MF = AB$, 则 $\angle DAF =$ _____ 度.



三、解答题: 本大题有 7 个小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17. (6分) 以下是圆圆解不等式组 $\begin{cases} 2(1+x) > -1 \text{ ①} \\ -(1-x) > -2 \text{ ②} \end{cases}$ 的解答过程:

解: 由①, 得 $2+x > -1$,

所以 $x > -3$.

由②, 得 $1-x > 2$,

所以 $-x > 1$,

所以 $x > -1$.

所以原不等式组的解集是 $x > -1$.

圆圆的解答过程是否有错误? 如果有错误, 请写出正确的解答过程.

18. (8分) 为了解某校某年级学生一分钟跳绳情况, 对该年级全部 360 名学生进行一分钟跳绳次数的测试, 并把测得数据分成四组, 绘制成如图所示的频数表和未完成的频数分布直方图 (每一组不含前一个边界值, 含后一个边界值).

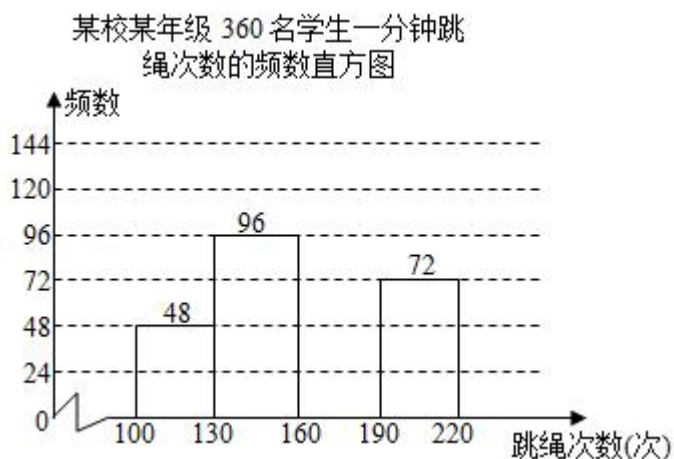
某校某年级 360 名学生一分钟跳绳次数的频数表

组别 (次)	频数
100 ~ 130	48
130 ~ 160	96
160 ~ 190	a
190 ~ 220	72

(1) 求 a 的值;

(2) 把频数分布直方图补充完整;

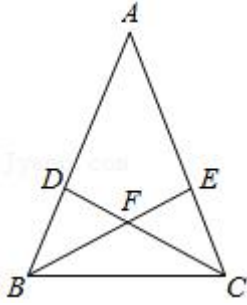
(3) 求该年级一分钟跳绳次数在 190 次以上的学生数占该年级全部学生数的百分比.



19. (8分) 在① $AD = AE$, ② $\angle ABE = \angle ACD$, ③ $FB = FC$ 这三个条件中选择其中一个, 补充在下面的问题中, 并完成问题的解答.

问题: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, 点 D 在 AB 边上(不与点 A , 点 B 重合), 点 E 在 AC 边上(不与点 A , 点 C 重合), 连接 BE , CD , BE 与 CD 相交于点 F . 若 _____, 求证: $BE = CD$.

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.



20. (10分) 在直角坐标系中, 设函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ (k_1 是常数, $k_1 > 0$, $x > 0$) 与函数 $y_2 = k_2x$

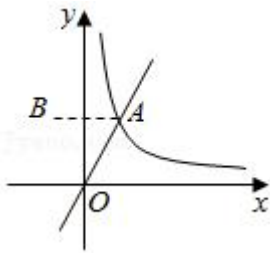
(k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 的图象交于点 A , 点 A 关于 y 轴的对称点为点 B .

(1) 若点 B 的坐标为 $(-1, 2)$,

①求 k_1, k_2 的值;

②当 $y_1 < y_2$ 时, 直接写出 x 的取值范围;

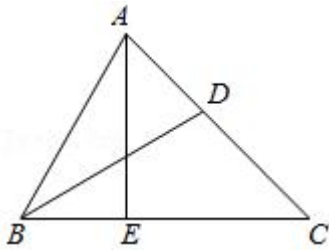
(2) 若点 B 在函数 $y_3 = \frac{k_3}{x}$ (k_3 是常数, $k_3 \neq 0$) 的图象上, 求 $k_1 + k_3$ 的值.



21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 边于点 D , $AE \perp BC$ 于点 E . 已知 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.

(1) 求证: $AB = BD$;

(2) 若 $AE = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



22. (12分) 在直角坐标系中, 设函数 $y = ax^2 + bx + 1$ (a, b 是常数, $a \neq 0$).

(1) 若该函数的图象经过 $(1, 0)$ 和 $(2, 1)$ 两点, 求函数的表达式, 并写出函数图象的顶点坐标;

(2) 写出一组 a, b 的值, 使函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点, 并说明理由.

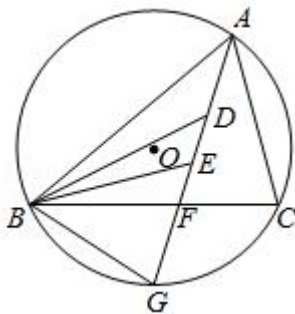
(3) 已知 $a = b = 1$, 当 $x = p, q$ (p, q 是实数, $p \neq q$) 时, 该函数对应的函数值分别为 P, Q . 若 $p + q = 2$, 求证: $P + Q > 6$.

23. (12分) 如图, 锐角三角形 ABC 内接于 $\odot O$, $\angle BAC$ 的平分线 AG 交 $\odot O$ 于点 G , 交 BC 边于点 F , 连接 BG .

(1) 求证: $\triangle ABG \sim \triangle AFC$.

(2) 已知 $AB = a, AC = AF = b$, 求线段 FG 的长 (用含 a, b 的代数式表示).

(3) 已知点 E 在线段 AF 上 (不与点 A , 点 F 重合), 点 D 在线段 AE 上 (不与点 A , 点 E 重合), $\angle ABD = \angle CBE$, 求证: $BG^2 = GE \cdot GD$.



2021 年浙江省杭州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $-(-2021) = (\quad)$

- A. -2021 B. 2021 C. $-\frac{1}{2021}$ D. $\frac{1}{2021}$

【分析】直接利用相反数的概念：只有符号不同的两个数互为相反数，即可得出答案．

【解答】解： $-(-2021) = 2021$ ．

故选： B ．

2. “奋斗者”号载人潜水器此前在马里亚纳海沟创造了 10909 米的我国载人深潜记录．数据 10909 用科学记数法可表示为 $(\quad)$

- A. 0.10909×10^5 B. 1.0909×10^4
C. 10.909×10^3 D. 109.09×10^2

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可．

【解答】解： $10909 = 1.0909 \times 10^4$ ．

故选： B ．

3. 因式分解： $1 - 4y^2 = (\quad)$

- A. $(1 - 2y)(1 + 2y)$ B. $(2 - y)(2 + y)$
C. $(1 - 2y)(2 + y)$ D. $(2 - y)(1 + 2y)$

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出答案．

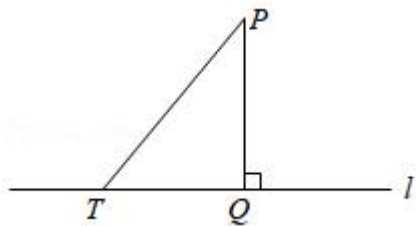
【解答】解： $1 - 4y^2$

$$= 1 - (2y)^2$$

$$= (1 - 2y)(1 + 2y).$$

故选： A ．

4. 如图，设点 P 是直线 l 外一点， $PQ \perp l$ ，垂足为点 Q ，点 T 是直线 l 上的一个动点，连结 PT ，则 $(\quad)$



- A. $PT \geq 2PQ$ B. $PT \leq 2PQ$ C. $PT \geq PQ$ D. $PT \leq PQ$

【分析】根据垂线的性质“垂线段最短”即可得到结论.

【解答】解： $\because PQ \perp l$ ，点 T 是直线 l 上的一个动点，连结 PT ，

$\therefore PT \geq PQ$ ，

故选：C.

5. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2^2} = 2$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. $\sqrt{2^2} = \pm 2$ D. $\sqrt{(-2)^2} = \pm 2$

【分析】求出 $\sqrt{2^2} = 2$ ， $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ，再逐个判断即可.

【解答】解：A. $\sqrt{2^2} = 2$ ，故本选项符合题意；

B. $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ，故本选项不符合题意；

C. $\sqrt{2^2} = 2$ ，故本选项不符合题意；

D. $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ，故本选项不符合题意；

故选：A.

6. 某景点今年四月接待游客 25 万人次，五月接待游客 60.5 万人次. 设该景点今年四月到五月接待游客人次的增长率为 x ($x > 0$)，则 ()

- A. $60.5(1-x) = 25$ B. $25(1-x) = 60.5$
C. $60.5(1+x) = 25$ D. $25(1+x) = 60.5$

【分析】依题意可知四月份接待游客 25 万，则五月份接待游客人次为：25(1+x)，进而得出答案.

【解答】解：设该景点今年四月到五月接待游客人次的增长率为 x ($x > 0$)，则
 $25(1+x) = 60.5$.

故选：D.

7. 某轨道列车共有 3 节车厢，设乘客从任意一节车厢上车的机会均等. 某天甲、乙两位乘客同时乘同一列轨道列车，则甲和乙从同一节车厢上车的概率是 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

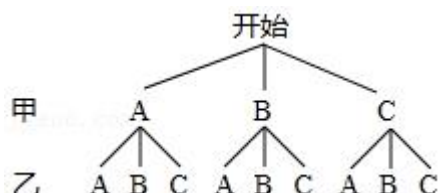
C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【分析】画树状图，共有 9 种等可能的结果，甲和乙从同一节车厢上车的结果有 3 种，再由概率公式求解即可．

【解答】解：把 3 节车厢分别记为 A 、 B 、 C ，

画树状图如图：

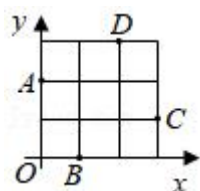


共有 9 种等可能的结果，甲和乙从同一节车厢上车的结果有 3 种，

$\therefore$ 甲和乙从同一节车厢上车的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故选：C．

8. 在“探索函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数 a 、 b 、 c 与图象的关系”活动中，老师给出了直角坐标系中的四个点： $A(0, 2)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(3, 1)$ 、 $D(2, 3)$ ．同学们探索了经过这四个点中的三个点的二次函数图象，发现这些图象对应的函数表达式各不相同，其中 a 的值最大为（ ）



A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{1}{2}$

【分析】比较任意三个点组成的二次函数，比较开口方向，开口向下，则 $a < 0$ ，只需把开口向上的二次函数解析式求出即可．

【解答】解：由图象知， A 、 B 、 D 组成的点开口向上， $a > 0$ ；

A 、 B 、 C 组成的二次函数开口向上， $a > 0$ ；

B 、 C 、 D 三点组成的二次函数开口向下， $a < 0$ ；

A 、 D 、 C 三点组成的二次函数开口向下， $a < 0$ ；

即只需比较 A 、 B 、 D 组成的二次函数和 A 、 B 、 C 组成的二次函数即可．

设 A 、 B 、 C 组成的二次函数为 $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ ，

把 $A(0, 2)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(3, 1)$ 代入上式得，

$$\begin{cases} c_1=2 \\ a_1+b_1+c_1=0 \\ 9a_1+3b_1+c_1=1 \end{cases},$$

解得 $a_1 = \frac{5}{6}$;

设 A 、 B 、 D 组成的二次函数为 $y = ax^2 + bx + c$,

把 $A(0, 2)$, $B(1, 0)$, $D(2, 3)$ 代入上式得,

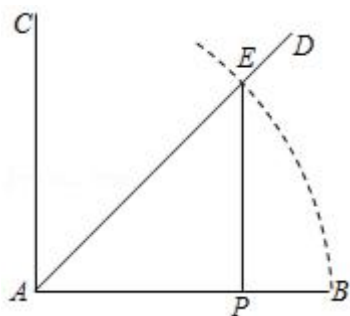
$$\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases},$$

解得 $a = \frac{5}{2}$,

即 a 最大的值为 $\frac{5}{2}$,

故选: A .

9. 已知线段 AB , 按如下步骤作图: ①作射线 AC , 使 $AC \perp AB$; ②作 $\angle BAC$ 的平分线 AD ; ③以点 A 为圆心, AB 长为半径作弧, 交 AD 于点 E ; ④过点 E 作 $EP \perp AB$ 于点 P , 则 AP : $AB = (\quad)$



- A. $1: \sqrt{5}$ B. $1: 2$ C. $1: \sqrt{3}$ D. $1: \sqrt{2}$

【分析】直接利用基本作图方法得出 $AP = PE$, 再结合等腰直角三角形的性质表示出 AE , AP 的长, 即可得出答案.

【解答】解: $\because AC \perp AB$,

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle EAB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$\because EP \perp AB$,

$$\therefore \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAP = \angle AEP = 45^\circ,$$

$$\therefore AP = PE,$$

$$\therefore \text{设 } AP = PE = x,$$

$$\text{故 } AE = AB = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AP : AB = x : \sqrt{2}x = 1 : \sqrt{2}.$$

故选：D.

10. 已知 y_1 和 y_2 均是以 x 为自变量的函数，当 $x = m$ 时，函数值分别是 M_1 和 M_2 ，若存在实数 m ，使得 $M_1 + M_2 = 0$ ，则称函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 。以下函数 y_1 和 y_2 具有性质 P 的是 ()

A. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x - 1$

B. $y_1 = x^2 + 2x$ 和 $y_2 = -x + 1$

C. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x - 1$

D. $y_1 = -\frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -x + 1$

【分析】根据题干信息可知，直接令 $y_1 + y_2 = 0$ ，若方程有解，则具有性质 P ，若无解，则不具有性质 P 。

【解答】解：A. 令 $y_1 + y_2 = 0$ ，则 $x^2 + 2x - x - 1 = 0$ ，解得 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ，即函数 y_1 和 y_2 具有性质 P ，符合题意；

B. 令 $y_1 + y_2 = 0$ ，则 $x^2 + 2x - x + 1 = 0$ ，整理得， $x^2 + x + 1 = 0$ ，方程无解，即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P ，不符合题意；

C. 令 $y_1 + y_2 = 0$ ，则 $-\frac{1}{x} - x - 1 = 0$ ，整理得， $x^2 + x + 1 = 0$ ，方程无解，即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P ，不符合题意；

D. 令 $y_1 + y_2 = 0$ ，则 $-\frac{1}{x} - x + 1 = 0$ ，整理得， $x^2 - x + 1 = 0$ ，方程无解，即函数 y_1 和 y_2 不具有性质 P ，不符合题意；

故选：A.

二、填空题：本大题有 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分。

11. (4 分) 计算： $\sin 30^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

【分析】根据 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 直接解答即可.

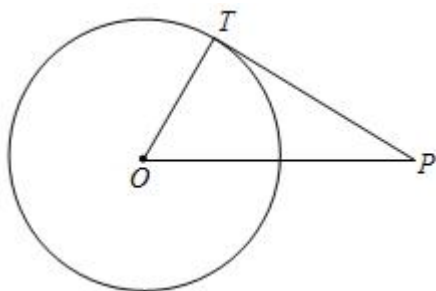
【解答】解： $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

12. (4 分) 计算： $2a + 3a = \underline{\underline{5a}}$.

【分析】根据合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变求解．

【解答】解： $2a+3a=5a$ ，故答案为 $5a$ ．

- 13.（4分）如图，已知 $\odot O$ 的半径为1，点 P 是 $\odot O$ 外一点，且 $OP=2$ ．若 PT 是 $\odot O$ 的切线， T 为切点，连结 OT ，则 $PT=$ $\sqrt{3}$ ．



【分析】根据圆的切线性质可得出 $\triangle OPT$ 为直角三角形，再利用勾股定理求得 PT 长度．

【解答】解： $\because PT$ 是 $\odot O$ 的切线， T 为切点，

$$\therefore OT \perp PT,$$

在 $\text{Rt}\triangle OPT$ 中， $OT=1$ ， $OP=2$ ，

$$\therefore PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

故： $PT = \sqrt{3}$ ．

- 14.（4分）现有甲、乙两种糖果的单价与千克数如下表所示．

	甲种糖果	乙种糖果
单价（元/千克）	30	20
千克数	2	3

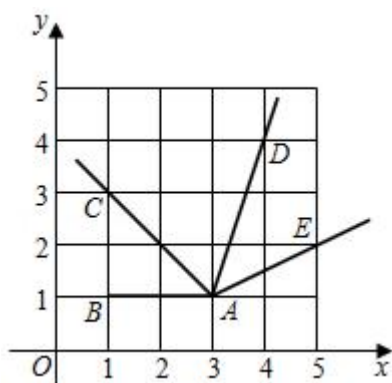
将这2千克甲种糖果和3千克乙种糖果混合成5千克什锦糖果，若商家用加权平均数来确定什锦糖果的单价，则这5千克什锦糖果的单价为 24 元/千克．

【分析】将两种糖果的总价算出，用它们的和除以混合后的总重量即可．

【解答】解：这5千克什锦糖果的单价为： $(30 \times 2 + 20 \times 3) \div 5 = 24$ （元/千克）．

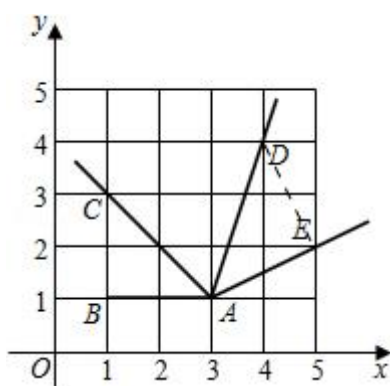
故答案为：24．

- 15.（4分）如图，在直角坐标系中，以点 $A(3, 1)$ 为端点的四条射线 AB ， AC ， AD ， AE 分别过点 $B(1, 1)$ ，点 $C(1, 3)$ ，点 $D(4, 4)$ ，点 $E(5, 2)$ ，则 $\angle BAC$ $=$ $\angle DAE$ （填“ $>$ ”、“ $=$ ”、“ $<$ ”中的一个）．



【分析】在直角坐标系中构造直角三角形，根据三角形边之间的关系推出角之间的关系．

【解答】解：连接 DE ，



由上图可知 $AB = 2$ ， $BC = 2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BAC = 45^\circ$ ，

又 $\because AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

同理可得 $DE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

$AD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

则在 $\triangle ADE$ 中，有 $AE^2 + DE^2 = AD^2$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

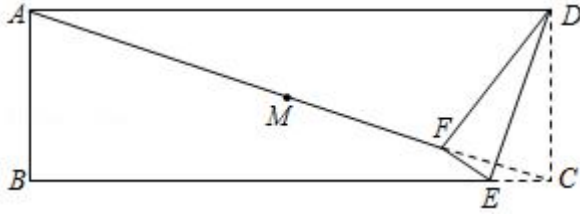
$\therefore \angle DAE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DAE$ ，

故答案为： = ．

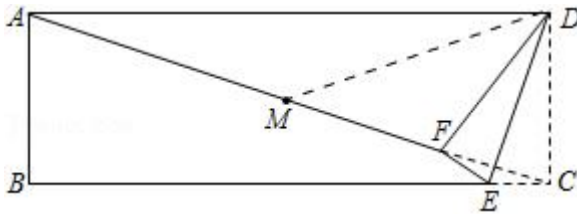
- 16.（4分）如图是一张矩形纸片 $ABCD$ ，点 M 是对角线 AC 的中点，点 E 在 BC 边上，把 $\triangle DCE$ 沿直线 DE 折叠，使点 C 落在对角线 AC 上的点 F 处，连接 DF ， EF ．若 $MF = AB$ ，

则 $\angle DAF =$ 18 度.



【分析】连接 DM ，利用斜边上的中线等于斜边的一半可得 $\triangle AMD$ 和 $\triangle MCD$ 为等腰三角形， $\angle DAF = \angle MDA$ ， $\angle MCD = \angle MDC$ ；由折叠可知 $DF = DC$ ，可得 $\angle DFC = \angle DCF$ ；由 $MF = AB$ ， $AB = CD$ ， $DF = DC$ ，可得 $FM = FD$ ，进而得到 $\angle FMD = \angle FDM$ ；利用三角形的外角等于和它不相邻的两个内角的和，可得 $\angle DFC = 2\angle FMD$ ；最后在 $\triangle MDC$ 中，利用三角形的内角和定理列出方程，结论可得.

【解答】解：连接 DM ，如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$.

$\because M$ 是 AC 的中点，

$\therefore DM = AM = CM$ ，

$\therefore \angle FAD = \angle MDA$ ， $\angle MDC = \angle MCD$.

$\because DC, DF$ 关于 DE 对称，

$\therefore DF = DC$ ，

$\therefore \angle DFC = \angle DCF$.

$\because MF = AB$ ， $AB = CD$ ， $DF = DC$ ，

$\therefore MF = FD$.

$\therefore \angle FMD = \angle FDM$.

$\because \angle DFC = \angle FMD + \angle FDM$ ，

$\therefore \angle DFC = 2\angle FMD$.

$\because \angle DMC = \angle FAD + \angle ADM$ ，

$\therefore \angle DMC = 2\angle FAD$.

设 $\angle FAD = x^\circ$, 则 $\angle DFC = 4x^\circ$,

$$\therefore \angle MCD = \angle MDC = 4x^\circ .$$

$$\because \angle DMC + \angle MCD + \angle MDC = 180^\circ ,$$

$$\therefore 2x + 4x + 4x = 180 .$$

$$\therefore x = 18 .$$

故答案为：18.

三、解答题：本大题有 7 个小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤。

17. (6 分) 以下是圆圆解不等式组 $\begin{cases} 2(1+x) > -1 \text{ ①} \\ -(1-x) > -2 \text{ ②} \end{cases}$ 的解答过程：

解：由①，得 $2+x > -1$ ，

所以 $x > -3$.

由②，得 $1-x > 2$ ，

所以 $-x > 1$ ，

所以 $x > -1$.

所以原不等式组的解集是 $x > -1$.

圆圆的解答过程是否有错误？如果有错误，请写出正确的解答过程.

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】 解：圆圆的解答过程有错误，

正确过程如下：由①得 $2+2x > -1$ ，

$$\therefore 2x > -3 ,$$

$$\therefore x > -\frac{3}{2} ,$$

由②得 $1-x < 2$ ，

$$\therefore -x < 1 ,$$

$$\therefore x > -1 ,$$

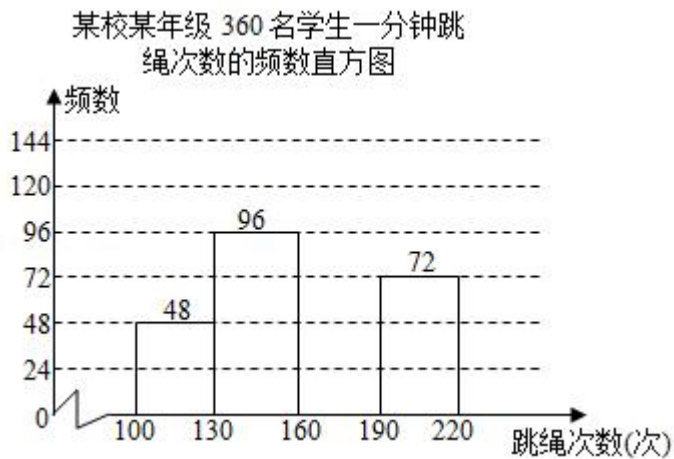
$\therefore$ 不等式组的解集为 $x > -1$.

18. (8 分) 为了解某校某年级学生一分钟跳绳情况，对该年级全部 360 名学生进行一分钟跳绳次数的测试，并把测得数据分成四组，绘制成如图所示的频数表和未完成的频数分布直方图（每一组不含前一个边界值，含后一个边界值）.

某校某年级 360 名学生一分钟跳绳次数的频数表

组别（次）	频数
100 ~ 130	48
130 ~ 160	96
160 ~ 190	a
190 ~ 220	72

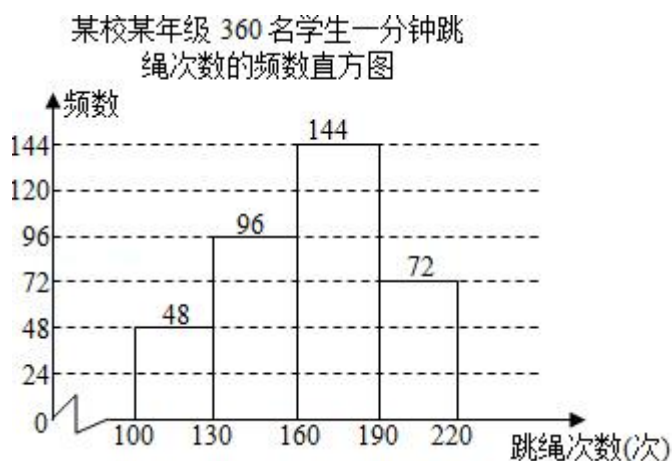
- (1) 求 a 的值；
- (2) 把频数分布直方图补充完整；
- (3) 求该年级一分钟跳绳次数在 190 次以上的学生数占该年级全部学生数的百分比．



- 【分析】** (1) 用 360 减去第 1、2、4 组的频数和即可；
- (2) 根据以上所求结果即可补全图形；
- (3) 用第 4 组的频数除以该年级的总人数即可得出答案．

【解答】 解：(1) $a = 360 - (48 + 96 + 72) = 144$ ；

- (2) 补全频数分布直方图如下：

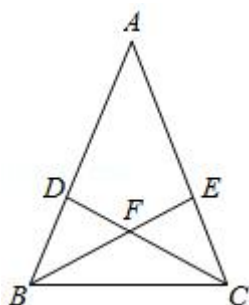


(3) 该年级一分钟跳绳次数在 190 次以上的学生数占该年级全部学生数的百分比为 $\frac{72}{360} \times 100\% = 20\%$.

19. (8 分) 在① $AD = AE$, ② $\angle ABE = \angle ACD$, ③ $FB = FC$ 这三个条件中选择其中一个, 补充在下面的问题中, 并完成问题的解答.

问题: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, 点 D 在 AB 边上 (不与点 A , 点 B 重合), 点 E 在 AC 边上 (不与点 A , 点 C 重合), 连接 BE , CD , BE 与 CD 相交于点 F . 若 ① $AD = AE$ (② $\angle ABE = \angle ACD$ 或 ③ $FB = FC$), 求证: $BE = CD$.

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.



【分析】 若选择条件①, 利用 $\angle ABC = \angle ACB$ 得到 $AB = AC$, 则可根据 “SAS” 可判断 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 从而得到 $BE = CD$;

选择条件②, 利用 $\angle ABC = \angle ACB$ 得到 $AB = AC$, 则可根据 “ASA” 可判断 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 从而得到 $BE = CD$;

选择条件③, 利用 $\angle ABC = \angle ACB$ 得到 $AB = AC$, 再证明 $\angle ABE = \angle ACD$, 则可根据 “ASA” 可判断 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 从而得到 $BE = CD$.

【解答】 证明: 选择条件①的证明为:

$$\because \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = AC,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (SAS),

$\therefore BE = CD$;

选择条件②的证明为:

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore AB = AC$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle ACD \\ AB=AC \\ \angle A = \angle A \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (ASA),

$\therefore BE = CD$;

选择条件③的证明为:

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore AB = AC$,

$\therefore FB = FC$,

$\therefore \angle FBC = \angle FCB$,

$\therefore \angle ABC - \angle FBC = \angle ACB - \angle FCB$,

即 $\angle ABE = \angle ACD$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle ACD \\ AB=AC \\ \angle A = \angle A \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (ASA),

$\therefore BE = CD$.

故答案为① $AD = AE$ (② $\angle ABE = \angle ACD$ 或③ $FB = FC$)

20. (10分) 在直角坐标系中, 设函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ (k_1 是常数, $k_1 > 0$, $x > 0$) 与函数 $y_2 = k_2x$

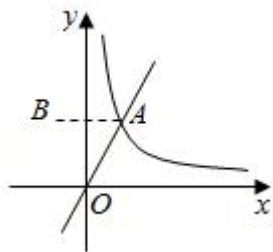
(k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 的图象交于点 A , 点 A 关于 y 轴的对称点为点 B .

(1) 若点 B 的坐标为 $(-1, 2)$,

①求 k_1, k_2 的值;

②当 $y_1 < y_2$ 时, 直接写出 x 的取值范围;

(2) 若点 B 在函数 $y_3 = \frac{k_3}{x}$ (k_3 是常数, $k_3 \neq 0$) 的图象上, 求 $k_1 + k_3$ 的值.



【分析】(1) ①由题意得, 点 A 的坐标是 $(1, 2)$, 分别代入 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ (k_1 是常数, $k_1 > 0, x > 0$), $y_2 = k_2x$ (k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 即可求得 k_1, k_2 的值;

②根据图象即可求得;

(2) 设点 A 的坐标是 (x_0, y) , 则点 B 的坐标是 $(-x_0, y)$, 根据待定系数法即可求得 $k_1 = x_0 \cdot y, k_3 = -x_0 \cdot y$, 即可求得 $k_1 + k_3 = 0$.

【解答】解: (1) ①由题意得, 点 A 的坐标是 $(1, 2)$,

$\therefore$ 函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ (k_1 是常数, $k_1 > 0, x > 0$) 与函数 $y_2 = k_2x$ (k_2 是常数, $k_2 \neq 0$) 的图象交于点 A ,

$$\therefore 2 = \frac{k_1}{1}, 2 = k_2,$$

$$\therefore k_1 = 2, k_2 = 2;$$

②由图象可知, 当 $y_1 < y_2$ 时, x 的取值范围是 $x > 1$;

(2) 设点 A 的坐标是 (x_0, y) , 则点 B 的坐标是 $(-x_0, y)$,

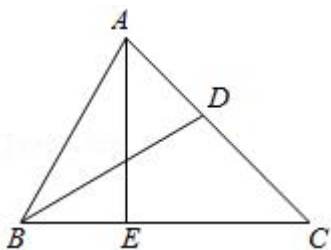
$$\therefore k_1 = x_0 \cdot y, k_3 = -x_0 \cdot y,$$

$$\therefore k_1 + k_3 = 0.$$

21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 边于点 D , $AE \perp BC$ 于点 E . 已知 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.

(1) 求证: $AB = BD$;

(2) 若 $AE = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【分析】(1) 计算出 $\angle ADB$ 和 $\angle BAC$ ，利用等角对等边即可证明；

(2) 利用锐角三角函数求出 BC 即可计算 $\triangle ABC$ 的面积.

【解答】(1) 证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC + \angle C = 75^\circ,$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = BD;$$

(2) 解：在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AE = 3$ ，

$$\therefore BE = \frac{AE}{\tan \angle ABC} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $\angle C = 45^\circ$ ， $AE = 3$ ，

$$\therefore EC = \frac{AE}{\tan C} = 3,$$

$$\therefore BC = 3 + \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{9+3\sqrt{3}}{2}.$$

22. (12分) 在直角坐标系中，设函数 $y = ax^2 + bx + 1$ (a, b 是常数， $a \neq 0$).

(1) 若该函数的图象经过 $(1, 0)$ 和 $(2, 1)$ 两点，求函数的表达式，并写出函数图象的顶点坐标；

(2) 写出一组 a, b 的值，使函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点，并说明理由.

(3) 已知 $a = b = 1$ ，当 $x = p, q$ (p, q 是实数， $p \neq q$) 时，该函数对应的函数值分别为 P, Q . 若 $p + q = 2$ ，求证： $P + Q > 6$.

【分析】(1) 考查使用待定系数法求二次函数解析式，属于基础题，将两点坐标代入，解二元一次方程组即可；

(2) 写出一组 a, b , 使得 $b^2 - 4ac > 0$ 即可;

(3) 已知 $a = b = 1$, 则 $y = x^2 + x + 1$. 容易得到 $P + Q = p^2 + p + 1 + q^2 + q + 1$, 利用 $p + q = 2$, 即 $p = 2 - q$ 代入对代数式 $P + Q$ 进行化简, 并配方得出 $P + Q = 2(q - 1)^2 + 6 \geq 6$. 最后注意利用 $p \neq q$ 条件判断 $q \neq 1$, 得证.

【解答】解: (1) 由题意, 得 $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 2b + 1 = 1 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

所以, 该函数表达式为 $y = x^2 - 2x + 1$.

并且该函数图象的顶点坐标为 $(1, 0)$.

(2) 例如 $a = 1, b = 3$, 此时 $y = x^2 + 3x + 1$,

$$\because b^2 - 4ac = 5 > 0,$$

$\therefore$ 函数 $y = x^2 + 3x + 1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点.

(3) 由题意, 得 $P = p^2 + p + 1, Q = q^2 + q + 1$,

$$\text{所以 } P + Q = p^2 + p + 1 + q^2 + q + 1$$

$$= p^2 + q^2 + 4$$

$$= (2 - q)^2 + q^2 + 4$$

$$= 2(q - 1)^2 + 6 \geq 6,$$

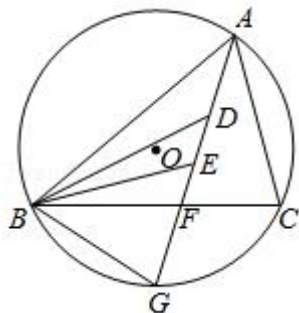
由条件 $p \neq q$, 知 $q \neq 1$. 所以 $P + Q > 6$, 得证.

23. (12分) 如图, 锐角三角形 ABC 内接于 $\odot O$, $\angle BAC$ 的平分线 AG 交 $\odot O$ 于点 G , 交 BC 边于点 F , 连接 BG .

(1) 求证: $\triangle ABG \sim \triangle AFC$.

(2) 已知 $AB = a, AC = AF = b$, 求线段 FG 的长 (用含 a, b 的代数式表示).

(3) 已知点 E 在线段 AF 上 (不与点 A , 点 F 重合), 点 D 在线段 AE 上 (不与点 A , 点 E 重合), $\angle ABD = \angle CBE$, 求证: $BG^2 = GE \cdot GD$.



【分析】(1) 根据 $\angle BAC$ 的平分线 AG 交 $\odot O$ 于点 G , 知 $\angle BAC = \angle FAC$, 由圆周角定理

知 $\angle G = \angle C$ ，即可证 $\triangle ABG \sim \triangle AFC$ ；

(2) 由 (1) 知 $\frac{AB}{AF} = \frac{AG}{AC}$ ，由 $AC = AF$ 得 $AG = AB$ ，即可计算 FG 的长度；

(3) 先证 $\triangle DGB \sim \triangle BGE$ ，得出线段比例关系，即可得证 $BG^2 = GE \cdot GD$ 。

【解答】(1) 证明： $\because AG$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAG = \angle FAC,$$

又 $\because \angle G = \angle C$ ，

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle AFC;$$

(2) 解：由 (1) 知， $\triangle ABG \sim \triangle AFC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AF} = \frac{AG}{AC},$$

$$\because AC = AF = b,$$

$$\therefore AB = AG = a,$$

$$\therefore FG = AG - AF = a - b;$$

(3) 证明： $\because \angle CAG = \angle CBG$ ， $\angle BAG = \angle CAG$ ，

$$\therefore \angle BAG = \angle CBG,$$

$$\because \angle ABD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle BAG + \angle ABD = \angle CBG + \angle CBE = \angle EBG,$$

又 $\because \angle DGB = \angle BGE$ ，

$$\therefore \triangle DGB \sim \triangle BGE,$$

$$\therefore \frac{GD}{BG} = \frac{BG}{GE},$$

$$\therefore BG^2 = GE \cdot GD.$$
