

2021 年浙江省嘉兴市中考数学试卷

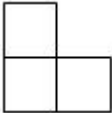
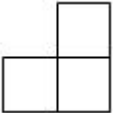
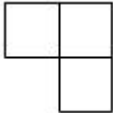
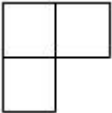
一、选择题（本题有 10 小题，每题 3 分，共 30 分，请选出各题中唯一的正确选项，不选、多选错选，均不得分）

1. 2021 年 5 月 22 日，我国自主研发的“祝融号”火星车成功到达火星表面．已知火星与地球的最近距离约为 55000000 千米，数据 55000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 55×10^6 B. 5.5×10^7 C. 5.5×10^8 D. 0.55×10^8

2. 如图是由四个相同的小正方体组成的立体图形，它的俯视图为（ ）



- A.  B.  C.  D. 

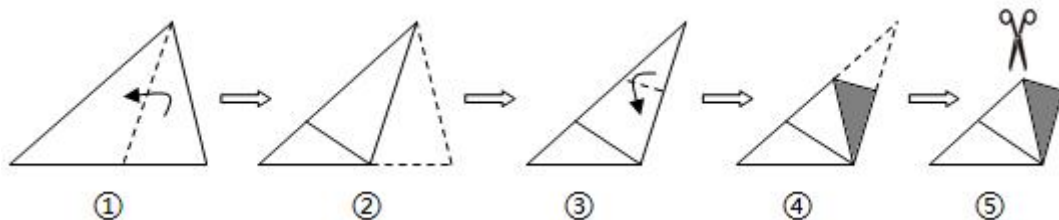
3. 能说明命题“若 x 为无理数，则 x^2 也是无理数”是假命题的反例是（ ）

- A. $x = \sqrt{2} - 1$ B. $x = \sqrt{2} + 1$ C. $x = 3\sqrt{2}$ D. $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

4. 已知三个点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，其中 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ ，下列结论中正确的是（ ）

- A. $y_2 < y_1 < 0 < y_3$ B. $y_1 < y_2 < 0 < y_3$ C. $y_3 < 0 < y_2 < y_1$ D. $y_3 < 0 < y_1 < y_2$

5. 将一张三角形纸片按如图步骤①至④折叠两次得图⑤，然后剪出图⑤中的阴影部分，则阴影部分展开铺平后的图形是（ ）



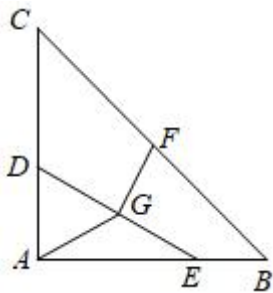
- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 矩形 D. 菱形

6. 5 月 1 日至 7 日，我市每日最高气温如图所示，则下列说法错误的是（ ）

5月1日至7日最高气温统计图



- A. 中位数是 33°C
- B. 众数是 33°C
- C. 平均数是 $\frac{197}{7}^{\circ}\text{C}$
- D. 4日至5日最高气温下降幅度较大
7. 已知平面内有 $\odot O$ 和点 A, B , 若 $\odot O$ 半径为 2cm , 线段 $OA = 3\text{cm}$, $OB = 2\text{cm}$, 则直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系为 ()
- A. 相离 B. 相交 C. 相切 D. 相交或相切
8. 为迎接建党一百周年, 某校举行歌唱比赛. 901 班啦啦队买了两种价格的加油棒助威, 其中缤纷棒共花费 30 元, 荧光棒共花费 40 元, 缤纷棒比荧光棒少 20 根, 缤纷棒单价是荧光棒的 1.5 倍. 若设荧光棒的单价为 x 元, 根据题意可列方程为 ()
- A. $\frac{40}{1.5x} - \frac{30}{x} = 20$ B. $\frac{40}{x} - \frac{30}{1.5x} = 20$
- C. $\frac{30}{x} - \frac{40}{1.5x} = 20$ D. $\frac{30}{1.5x} - \frac{40}{x} = 20$
9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^{\circ}$, $AB = AC = 5$, 点 D 在 AC 上, 且 $AD = 2$, 点 E 是 AB 上的动点, 连结 DE , 点 F, G 分别是 BC 和 DE 的中点, 连结 AG, FG , 当 $AG = FG$ 时, 线段 DE 长为 ()



- A. $\sqrt{13}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$ D. 4

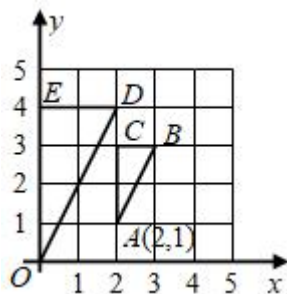
10. 已知点 $P(a, b)$ 在直线 $y = -3x - 4$ 上, 且 $2a - 5b \leq 0$, 则下列不等式一定成立的是()

- A. $\frac{a}{b} \leq \frac{5}{2}$ B. $\frac{a}{b} \geq \frac{5}{2}$ C. $\frac{b}{a} \geq \frac{2}{5}$ D. $\frac{b}{a} \leq \frac{2}{5}$

二、填空题 (本题有 6 小题, 每题 4 分, 共 24 分)

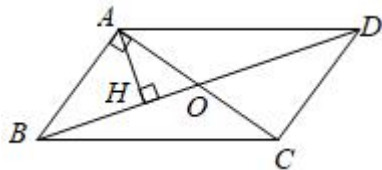
11. (4 分) 已知二元一次方程 $x + 3y = 14$, 请写出该方程的一组整数解 _____.

12. (4 分) 如图, 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle ODE$ 是位似图形, 则它们位似中心的坐标是 _____.



13. (4 分) 观察下列等式: $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, ... 按此规律, 则第 n 个等式为 $2n - 1 =$ _____.

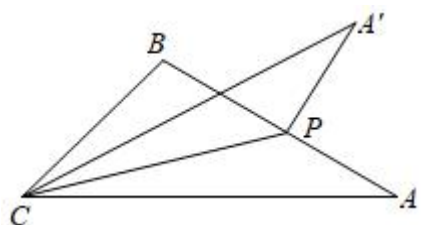
14. (4 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 交于点 O , $AB \perp AC$, $AH \perp BD$ 于点 H , 若 $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, 则 AH 的长为 _____.



15. (4 分) 看了《田忌赛马》故事后, 小杨用数学模型来分析: 齐王与田忌的上中下三个等级的三匹马记分如表, 每匹马只赛一场, 两数相比, 大数为胜, 三场两胜则赢. 已知齐王的三匹马出场顺序为 10, 8, 6. 若田忌的三匹马随机出场, 则田忌能赢得比赛的概率为 _____.

马匹 姓名	下等马	中等马	上等马
齐王	6	8	10
田忌	5	7	9

16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2$, 点 P 从点 A 出发沿 AB 方向运动, 到达点 B 时停止运动, 连结 CP , 点 A 关于直线 CP 的对称点为 A' , 连结 $A'C$, $A'P$. 在运动过程中, 点 A' 到直线 AB 距离的最大值是 _____; 点 P 到达点 B 时, 线段 $A'P$ 扫过的面积为 _____.



三、解答题 (本题有 8 小题, 第 17~19 题每题 6 分, 第 20, 21 题每题 8 分, 第 22, 23 题每题 10 分, 第 24 题 12 分, 共 66 分)

17. (6分) (1) 计算: $2^{-1} + \sqrt{12} - \sin 30^\circ$;

(2) 化简并求值: $1 - \frac{a}{a+1}$, 其中 $a = -\frac{1}{2}$.

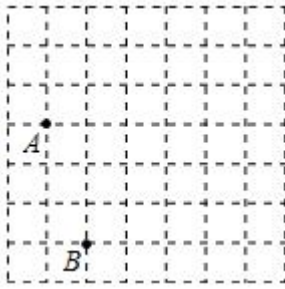
18. (6分) 小敏与小霞两位同学解方程 $3(x-3) = (x-3)^2$ 的过程如下框:

小敏: 两边同除以 $(x-3)$, 得 $3 = x - 3$, 则 $x = 6$.	小霞: 移项, 得 $3(x-3) - (x-3)^2 = 0$, 提取公因式, 得 $(x-3)(3-x-3) = 0$. 则 $x-3=0$ 或 $3-x-3=0$, 解得 $x_1=3$, $x_2=0$.
--	---

你认为他们的解法是否正确? 若正确请在框内打“√”; 若错误请在框内打“×”, 并写出你的解答过程.

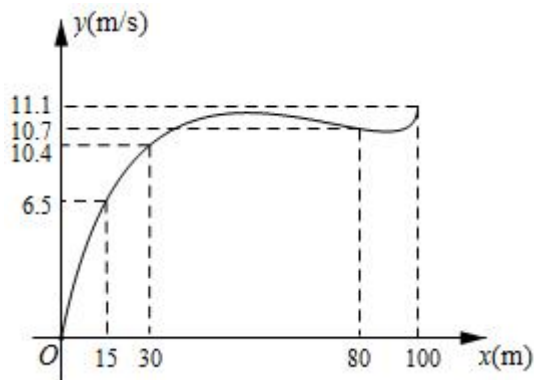
19. (6分) 如图, 在 7×7 的正方形网格中, 网格线的交点称为格点, 点 A , B 在格点上, 每一个小正方形的边长为 1.

- (1) 以 AB 为边画菱形, 使菱形的其余两个顶点都在格点上 (画出一个即可).
- (2) 计算你所画菱形的面积.



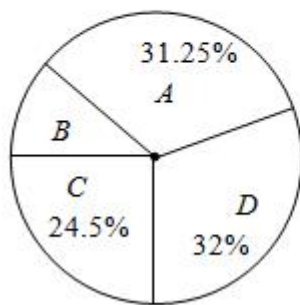
20. (8分) 根据数学家凯勒的“百米赛跑数学模型”，前30米称为“加速期”，30米~80米为“中途期”，80米~100米为“冲刺期”。市田径队把运动员小斌某次百米跑训练时速度 y (m/s) 与路程 x (m) 之间的观测数据，绘制成曲线如图所示。

- (1) y 是关于 x 的函数吗？为什么？
- (2) “加速期”结束时，小斌的速度为多少？
- (3) 根据如图提供的信息，给小斌提一条训练建议。

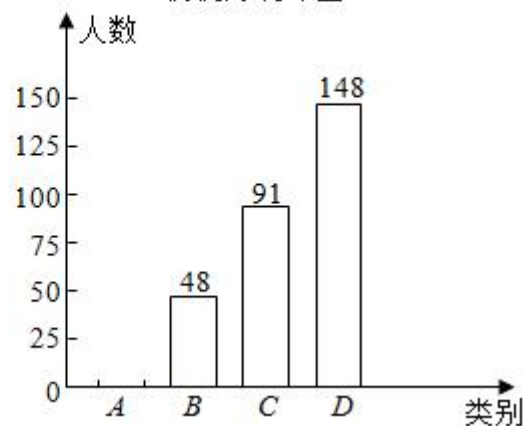


21. (8分) 某市为了了解八年级学生视力健康状况，在全市随机抽查了400名八年级学生2021年初的视力数据，并调取该批学生2020年初的视力数据，制成如图统计图（不完整）：

400名八年级学生2021年初视力统计图



该批400名学生2020年初视力统计图



青少年视力健康标准

类别	视力	健康状况
A	视力 ≥ 5.0	视力正常
B	4.9	轻度视力不良
C	$4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$	中度视力不良
D	视力 ≤ 4.5	重度视力不良

根据以上信息，请解答：

(1) 分别求出被抽查的 400 名学生 2021 年初轻度视力不良（类别 B ）的扇形圆心角度数和 2020 年初视力正常（类别 A ）的人数。

(2) 若 2021 年初该市有八年级学生 2 万人，请估计这些学生 2021 年初视力正常的人数比 2020 年初增加了多少人？

(3) 国家卫健委要求，全国初中生视力不良率控制在 69% 以内。请估计该市八年级学生 2021 年初视力不良率是否符合要求？并说明理由。

22. (10 分) 一酒精消毒瓶如图 1， AB 为喷嘴， $\triangle BCD$ 为按压柄， CE 为伸缩连杆， BE 和 EF 为导管，其示意图如图 2， $\angle DBE = \angle BEF = 108^\circ$ ， $BD = 6\text{cm}$ ， $BE = 4\text{cm}$ 。当按压柄 $\triangle BCD$ 按压到底时， BD 转动到 BD' ，此时 $BD' \parallel EF$ （如图 3）。

(1) 求点 D 转动到点 D' 的路径长；

(2) 求点 D 到直线 EF 的距离（结果精确到 0.1cm ）。

（参考数据： $\sin 36^\circ \approx 0.59$ ， $\cos 36^\circ \approx 0.81$ ， $\tan 36^\circ \approx 0.73$ ， $\sin 72^\circ \approx 0.95$ ， $\cos 72^\circ \approx 0.31$ ， $\tan 72^\circ \approx 3.08$ ）



图 1

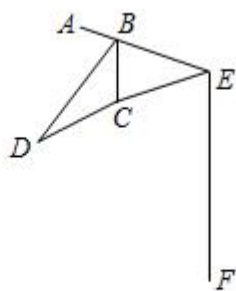


图 2

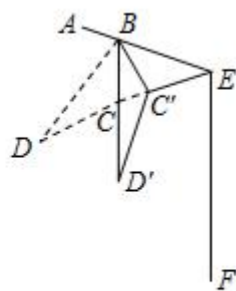


图 3

23. (10 分) 已知二次函数 $y = -x^2 + 6x - 5$.

(1) 求二次函数图象的顶点坐标;

(2) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 函数的最大值和最小值分别为多少?

(3) 当 $t \leq x \leq t+3$ 时, 函数的最大值为 m , 最小值为 n , 若 $m - n = 3$, 求 t 的值.

24. (12 分) 小王在学习浙教版九上课本第 72 页例 2 后, 进一步开展探究活动: 将一个矩

形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$), 得到矩形 $AB'C'D'$, 连结 BD .

[探究 1] 如图 1, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 C' 恰好在 DB 延长线上. 若 $AB = 1$, 求 BC 的长.

[探究 2] 如图 2, 连结 AC' , 过点 D' 作 $D'M \parallel AC'$ 交 BD 于点 M . 线段 $D'M$ 与 DM 相等吗? 请说明理由.

[探究 3] 在探究 2 的条件下, 射线 DB 分别交 AD' , AC' 于点 P , N (如图 3), 发现线段 DN , MN , PN 存在一定的数量关系, 请写出这个关系式, 并加以证明.

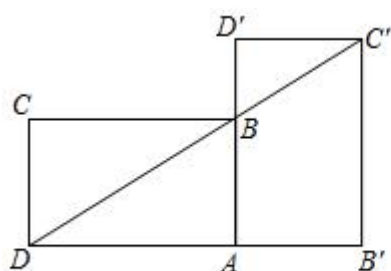


图1

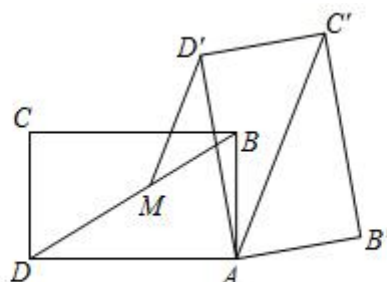


图2

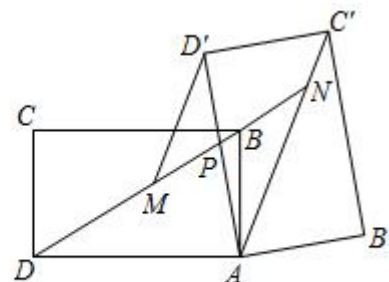


图3

2021 年浙江省嘉兴市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题有 10 小题，每题 3 分，共 30 分，请选出各题中唯一的正确选项，不选、多选错选，均不得分）

1. 2021 年 5 月 22 日，我国自主研发的“祝融号”火星车成功到达火星表面．已知火星与地球的最近距离约为 55000000 千米，数据 55000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 55×10^6 B. 5.5×10^7 C. 5.5×10^8 D. 0.55×10^8

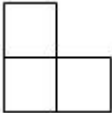
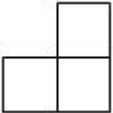
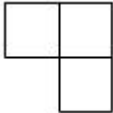
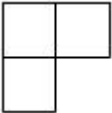
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数．

【解答】解：55000000 = 5.5×10^7 ．

故选：B．

2. 如图是由四个相同的小正方体组成的立体图形，它的俯视图为（ ）



- A.  B.  C.  D. 

【分析】找到从上面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中．

【解答】解：从上面看，底层右边是一个小正方形，上层是两个小正方形，右齐．

故选：C．

3. 能说明命题“若 x 为无理数，则 x^2 也是无理数”是假命题的反例是（ ）

- A. $x = \sqrt{2} - 1$ B. $x = \sqrt{2} + 1$ C. $x = 3\sqrt{2}$ D. $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

【分析】根据题意，只要 x^2 是有理数，即求出各个选项中 x^2 的值，再判断即可．

【解答】解：($\sqrt{2} - 1$)² = $3 - 2\sqrt{2}$ ，是无理数，不符合题意；

($\sqrt{2} + 1$)² = $3 + 2\sqrt{2}$ ，是无理数，不符合题意；

($3\sqrt{2}$)² = 18，是有理数，符合题意；

($\sqrt{3} - \sqrt{2}$)² = $5 - 2\sqrt{6}$ ，是无理数，不符合题意；

故选：C.

4. 已知三个点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 其中 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$, 下列结论中正确的是 ()

A. $y_2 < y_1 < 0 < y_3$ B. $y_1 < y_2 < 0 < y_3$ C. $y_3 < 0 < y_2 < y_1$ D. $y_3 < 0 < y_1 < y_2$

【分析】先根据反比例函数的解析式判断出函数图象所在的象限, 再根据 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ 即可得出结论

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中, $k = 2 > 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于一、三象限, 且在每一象限内, y 随 x 的增大而减小.

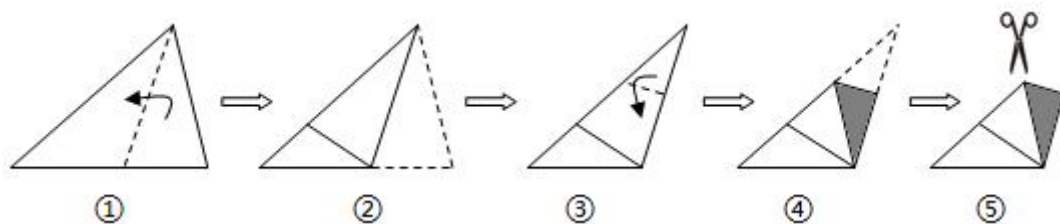
$\because x_1 < x_2 < 0 < x_3$,

$\therefore A$ 、 B 两点在第三象限, C 点在第一象限,

$\therefore y_2 < y_1 < 0 < y_3$.

故选: A.

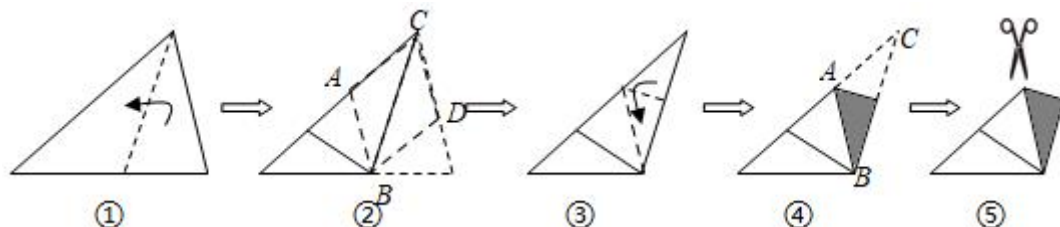
5. 将一张三角形纸片按如图步骤①至④折叠两次得图⑤, 然后剪出图⑤中的阴影部分, 则阴影部分展开铺平后的图形是 ()



A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 矩形 D. 菱形

【分析】对折是轴对称得到的图形, 根据最后得到的图形可得是沿对角线折叠 2 次后, 剪去一个三角形得到的, 按原图返回即可.

【解答】解: 如图, 由题意可知, 剪下的图形是四边形 $BACD$,



由折叠可知 $CA = AB$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,

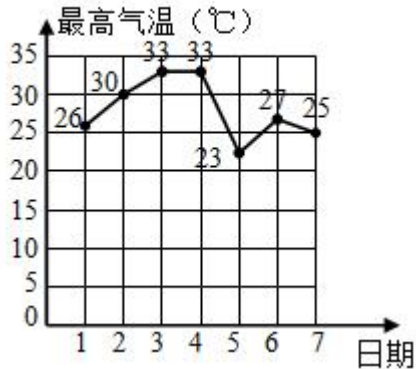
又 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 关于直线 CD 对称,

∴ 四边形 $BACD$ 是菱形,

故选: D .

6. 5月1日至7日, 我市每日最高气温如图所示, 则下列说法错误的是 ()

5月1日至7日最高气温统计图



- A. 中位数是 33°C
B. 众数是 33°C
C. 平均数是 $\frac{197}{7}^{\circ}\text{C}$
D. 4日至5日最高气温下降幅度较大

【分析】 分别确定7个数据的中位数、众数及平均数后即可确定正确的选项.

【解答】 解: A 、7个数排序后为 23, 25, 26, 27, 30, 33, 33, 位于中间位置的数为 27, 所以中位数为 27°C , 故 A 错误, 符合题意;

B 、7个数据中出现次数最多的为 33, 所以众数为 33°C , 正确, 不符合题意;

C 、平均数为 $\frac{1}{7}(23+25+26+27+30+33+33) = \frac{197}{7}$, 正确, 不符合题意;

D 、观察统计表知: 4日至5日最高气温下降幅度较大, 正确, 不符合题意,

故选: A .

7. 已知平面内有 $\odot O$ 和点 A, B , 若 $\odot O$ 半径为 2cm , 线段 $OA = 3\text{cm}$, $OB = 2\text{cm}$, 则直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系为 ()

- A. 相离 B. 相交 C. 相切 D. 相交或相切

【分析】 根据点与圆的位置关系的判定方法进行判断.

【解答】 解: $\odot O$ 的半径为 2cm , 线段 $OA = 3\text{cm}$, $OB = 2\text{cm}$,

即点 A 到圆心 O 的距离大于圆的半径, 点 B 到圆心 O 的距离等于圆的半径,

∴ 点 A 在 $\odot O$ 外, 点 B 在 $\odot O$ 上,

∴ 直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系为相交或相切,

故选：D.

8. 为迎接建党一百周年，某校举行歌唱比赛. 901 班啦啦队买了两种价格的加油棒助威，其中缤纷棒共花费 30 元，荧光棒共花费 40 元，缤纷棒比荧光棒少 20 根，缤纷棒单价是荧光棒的 1.5 倍. 若设荧光棒的单价为 x 元，根据题意可列方程为 ()

A. $\frac{40}{1.5x} - \frac{30}{x} = 20$

B. $\frac{40}{x} - \frac{30}{1.5x} = 20$

C. $\frac{30}{x} - \frac{40}{1.5x} = 20$

D. $\frac{30}{1.5x} - \frac{40}{x} = 20$

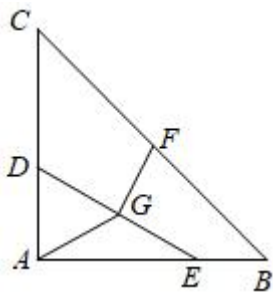
【分析】若设荧光棒的单价为 x 元，则缤纷棒单价是 $1.5x$ 元，根据等量关系“缤纷棒比荧光棒少 20 根”可列方程即可.

【解答】解：若设荧光棒的单价为 x 元，则缤纷棒单价是 $1.5x$ 元，

根据题意可得： $\frac{40}{x} - \frac{30}{1.5x} = 20$.

故选：B.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 5$ ，点 D 在 AC 上，且 $AD = 2$ ，点 E 是 AB 上的动点，连结 DE ，点 F, G 分别是 BC 和 DE 的中点，连结 AG, FG ，当 $AG = FG$ 时，线段 DE 长为 ()



A. $\sqrt{13}$

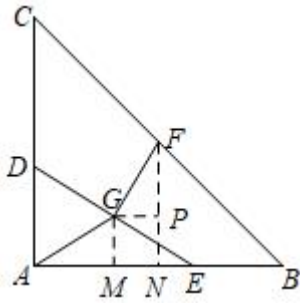
B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

D. 4

【分析】分别过点 G, F 作 AB 的垂线，垂足为 M, N ，过点 G 作 $GP \perp FN$ 于点 P ，由中位线定理及勾股定理可分别表示出线段 AG 和 FG 的长，建立等式可求出结论.

【解答】解：如图，分别过点 G, F 作 AB 的垂线，垂足为 M, N ，过点 G 作 $GP \perp FN$ 于点 P ,



$\therefore$ 四边形 $GMNP$ 是矩形,

$\therefore GM = PN, GP = MN,$

$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 5,$

$\therefore CA \perp AB,$

又 $\because$ 点 G 和点 F 分别是线段 DE 和 BC 的中点,

$\therefore GM$ 和 FN 分别是 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore GM = \frac{1}{2}AD = 1, AM = \frac{1}{2}AE,$

$FN = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}, AN = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2},$

$\therefore MN = AN - AM = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}AE,$

$\therefore PN = 1, FP = \frac{3}{2},$

设 $AE = m,$

$\therefore AM = \frac{1}{2}m, GP = MN = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}m,$

在 $\text{Rt}\triangle AGM$ 中, $AG^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 + 1^2,$

在 $\text{Rt}\triangle GPF$ 中, $GF^2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2,$

$\because AG = GF,$

$\therefore \left(\frac{1}{2}m\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2,$

解得 $m = 3$, 即 $DE = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{13}.$

故选: A .

10. 已知点 $P(a, b)$ 在直线 $y = -3x - 4$ 上, 且 $2a - 5b \leq 0$, 则下列不等式一定成立的是()

A. $\frac{a}{b} \leq \frac{5}{2}$

B. $\frac{a}{b} \geq \frac{5}{2}$

C. $\frac{b}{a} \geq \frac{2}{5}$

D. $\frac{b}{a} \leq \frac{2}{5}$

【分析】结合选项可知，只需要判断出 a 和 b 的正负即可，点 $P(a, b)$ 在直线 $y = -3x - 4$ 上，代入可得关于 a 和 b 的等式，再代入不等式 $2a - 5b \leq 0$ 中，可判断出 a 与 b 正负，即可得出结论.

【解答】解：∵ 点 $P(a, b)$ 在直线 $y = -3x - 4$ 上，

$$\therefore -3a - 4 = b,$$

$$\text{又 } 2a - 5b \leq 0,$$

$$\therefore 2a - 5(-3a - 4) \leq 0,$$

$$\text{解得 } a \leq -\frac{20}{17} < 0,$$

$$\text{当 } a = -\frac{20}{17} \text{ 时, 得 } b = -\frac{8}{17},$$

$$\therefore b \geq -\frac{8}{17},$$

$$\therefore 2a - 5b \leq 0,$$

$$\therefore 2a \leq 5b,$$

$$\therefore \frac{b}{a} \leq \frac{2}{5}.$$

故选：D.

二、填空题（本题有 6 小题，每题 4 分，共 24 分）

11. (4 分) 已知二元一次方程 $x + 3y = 14$ ，请写出该方程的一组整数解 $\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}$ (答案不唯一)_____.

【分析】把 y 看做已知数求出 x ，确定出整数解即可.

【解答】解： $x + 3y = 14$,

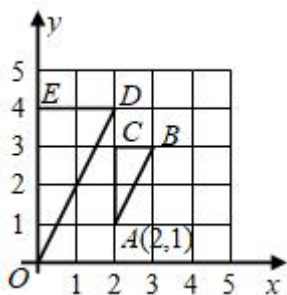
$$x = 14 - 3y,$$

$$\text{当 } y = 1 \text{ 时, } y = 11,$$

$$\text{则方程的一组整数解为 } \begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}.$$

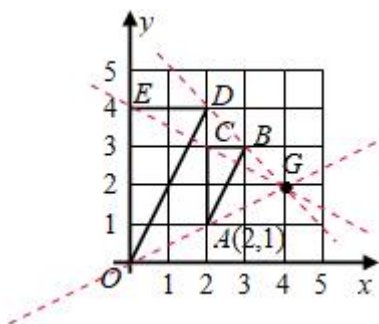
故答案为： $\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}$ (答案不唯一).

12. (4 分) 如图，在直角坐标系中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ODE$ 是位似图形，则它们位似中心的坐标是 (4, 2).



【分析】根据图示，对应点的连线都经过同一点，该点就是位似中心．

【解答】解：如图，



点 $G(4, 2)$ 即为所求的位似中心．

故答案是：(4, 2)．

13. (4 分) 观察下列等式： $1 = 1^2 - 0^2$ ， $3 = 2^2 - 1^2$ ， $5 = 3^2 - 2^2$ ， $\cdots$ 按此规律，则第 n 个等式为 $2n - 1 = \underline{n^2 - (n - 1)^2}$ ．

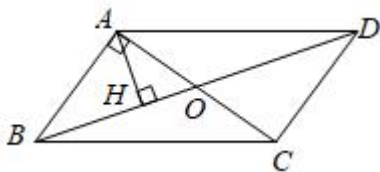
【分析】根据题目中的式子可以发现：等号左边是一些连续的奇数，等号右边第一个数是和左边是第几个奇数一样，第二个数比第一个数少 1，然后即可写出第 n 个等式．

【解答】解： $\because 1 = 1^2 - 0^2$ ， $3 = 2^2 - 1^2$ ， $5 = 3^2 - 2^2$ ， $\cdots$ ，

$\therefore$ 第 n 个等式为 $2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2$ ，

故答案为： $n^2 - (n - 1)^2$ ．

14. (4 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 交于点 O ， $AB \perp AC$ ， $AH \perp BD$ 于点 H ，若 $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，则 AH 的长为 $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ ．



【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中，分别利用勾股定理可求出 BC 和 OB 的长，又 $AH \perp OB$ ，可利用等面积法求出 AH 的长．

【解答】解：如图，

$$\because AB \perp AC, AB = 2, BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2},$$

在 $\square ABCD$ 中， $OA = OC$ ， $OB = OD$ ，

$$\therefore OA = OC = \sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中，

$$OB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6},$$

又 $AH \perp BD$ ，

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot AH = \frac{1}{2}OA \cdot AB, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \cdot AH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2},$$

$$\text{解得 } AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

15. (4分) 看了《田忌赛马》故事后，小杨用数学模型来分析：齐王与田忌的上中下三个等级的三匹马记分如表，每匹马只赛一场，两数相比，大数为胜，三场两胜则赢。已知齐王的三匹马出场顺序为 10，8，6。若田忌的三匹马随机出场，则田忌能赢得比赛的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

马匹 姓名	下等马	中等马	上等马
齐王	6	8	10
田忌	5	7	9

【分析】列表得出所有等可能的情况，田忌能赢得比赛的情况有 1 种，再由概率公式求解即可。

【解答】解：由于田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强，当齐王的三匹马出场顺序为 10，8，6 时，田忌的马按 5，9，7 的顺序出场，田忌才能赢得比赛，

当田忌的三匹马随机出场时，双方马的对阵情况如下：

齐王的马	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下
田忌的马	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上

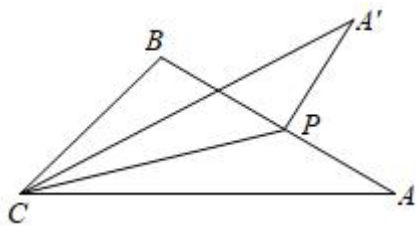
双方马的对阵中，只有一种对阵情况田忌能赢，

$\therefore$ 田忌能赢得比赛的概率为 $\frac{1}{6}$.

16. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ，点 P 从点 A 出发沿 AB 方向运动，到达点 B 时停止运动，连结 CP ，点 A 关于直线 CP 的对称点为 A' ，

连结 $A'C$ ， $A'P$ 。在运动过程中，点 A' 到直线 AB 距离的最大值是 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ；点 P

到达点 B 时，线段 $A'P$ 扫过的面积为 $(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\pi - 1 - \sqrt{3}$ 。



【分析】 如图 1 中，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H 。解直角三角形求出 CA ，当 $CA' \perp AB$ 时，点 A' 到直线 AB 的距离最大，求出 CA' ， CK 。可得结论。如图 2 中，点 P 到达点 B 时，线段 $A'P$ 扫过的面积 $= S_{\text{扇形 } A'CA} - 2S_{\triangle ABC}$ ，由此求解即可。

【解答】 解：如图 1 中，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H 。

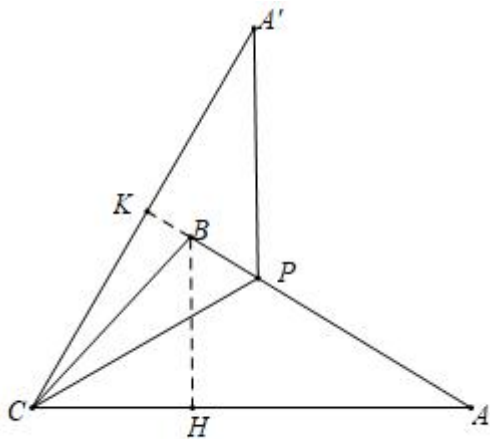


图1

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中， $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 1$ ， $AH = \sqrt{3}BH = \sqrt{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中， $\angle BCH = 45^\circ$ ，

$\therefore CH = BH = 1$ ，

$\therefore AC = CA' = 1 + \sqrt{3}$ ，

当 $CA' \perp AB$ 时，点 A' 到直线 AB 的距离最大，

设 CA' 交 AB 的延长线于 K .

$$\text{在 Rt}\triangle ACK \text{ 中, } CK = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A'K = CA' - CK = 1 + \sqrt{3} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

如图 2 中, 点 P 到达点 B 时, 线段 $A'P$ 扫过的面积 = $S_{\text{扇形 } A'CA} - 2S_{\triangle ABC} =$

$$\frac{90\pi \cdot (1+\sqrt{3})^2}{360} - 2 \times \frac{1}{2} \times (1+\sqrt{3}) \times 1 = (1+\frac{\sqrt{3}}{2})\pi - 1 - \sqrt{3}.$$

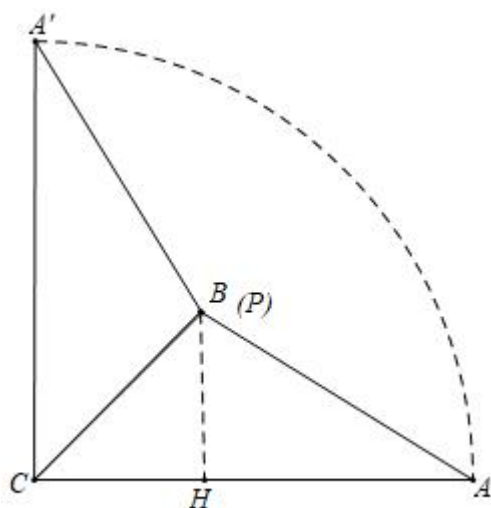


图2

$$\text{故答案为: } \frac{1+\sqrt{3}}{2}, (1+\frac{\sqrt{3}}{2})\pi - 1 - \sqrt{3}.$$

三、解答题 (本题有 8 小题, 第 17~19 题每题 6 分, 第 20, 21 题每题 8 分, 第 22, 23 题每题 10 分, 第 24 题 12 分, 共 66 分)

17. (6 分) (1) 计算: $2^{-1} + \sqrt{12} - \sin 30^\circ$;

(2) 化简并求值: $1 - \frac{a}{a+1}$, 其中 $a = -\frac{1}{2}$.

【分析】 (1) 根据负整数指数幂、算术平方根、特殊角的三角函数值可以解答本题;

(2) 先通分, 然后根据分式的减法法则即可化简题目中的式子, 然后将 a 的值代入化简后的式子即可解答本题.

【解答】 解: (1) $2^{-1} + \sqrt{12} - \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3};$$

$$(2) 1 - \frac{a}{a+1}$$

$$= \frac{a+1}{a+1} - \frac{a}{a+1}$$

$$= \frac{a+1-a}{a+1}$$

$$= \frac{1}{a+1},$$

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原式 $= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2$.

18. (6分) 小敏与小霞两位同学解方程 $3(x-3) = (x-3)^2$ 的过程如下框:

小敏: 两边同除以 $(x-3)$, 得 $3 = x-3$, 则 $x = 6$.	小霞: 移项, 得 $3(x-3) - (x-3)^2 = 0$, 提取公因式, 得 $(x-3)(3-x-3) = 0$. 则 $x-3 = 0$ 或 $3-x-3 = 0$, 解得 $x_1 = 3, x_2 = 0$.
--	--

你认为他们的解法是否正确? 若正确请在框内打“√”; 若错误请在框内打“×”, 并写出你的解答过程.

【分析】 小敏: 没有考虑 $x-3=0$ 的情况;

小霞: 提取公因式时出现了错误.

利用因式分解法解方程即可.

【解答】 解: 小敏: ×;

小霞: ×.

正确的解答方法: 移项, 得 $3(x-3) - (x-3)^2 = 0$,

提取公因式, 得 $(x-3)(3-x+3) = 0$.

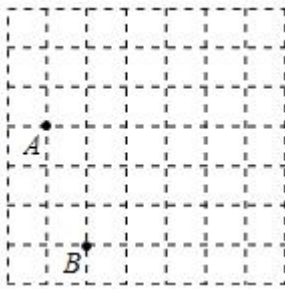
则 $x-3 = 0$ 或 $3-x+3 = 0$,

解得 $x_1 = 3, x_2 = 6$.

19. (6分) 如图, 在 7×7 的正方形网格中, 网格线的交点称为格点, 点 A, B 在格点上, 每一个小正方形的边长为 1.

(1) 以 AB 为边画菱形, 使菱形的其余两个顶点都在格点上 (画出一个即可).

(2) 计算你所画菱形的面积.



【分析】(1) 先以 AB 为边画出一个等腰三角形，再作对称即可；

(2) 根据菱形的面积等于对角线乘积的一半可求得．

【解答】解：(1) 如下图所示：

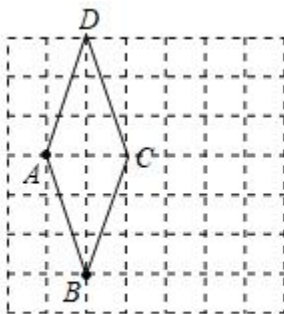


图1

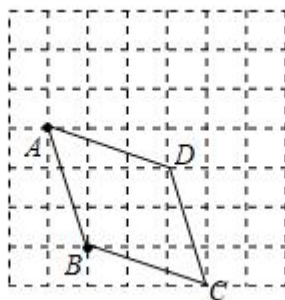


图2

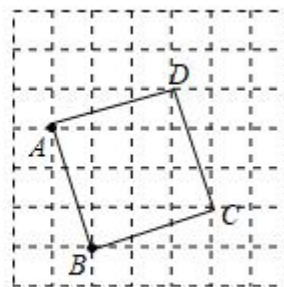


图3

四边形 $ABCD$ 即为所画菱形，(答案不唯一，画出一个即可)．

(2) 图1 菱形面积 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$ ，

图2 菱形面积 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$ ，

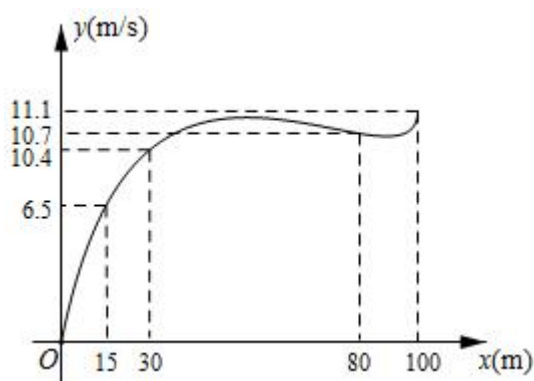
图3 菱形面积 $S = (\sqrt{10})^2 = 10$ ．

20. (8分) 根据数学家凯勒的“百米赛跑数学模型”，前30米称为“加速期”，30米~80米为“中途期”，80米~100米为“冲刺期”．市田径队把运动员小斌某次百米跑训练时速度 y (m/s) 与路程 x (m) 之间的观测数据，绘制成曲线如图所示．

(1) y 是关于 x 的函数吗？为什么？

(2) “加速期”结束时，小斌的速度为多少？

(3) 根据如图提供的信息，给小斌提一条训练建议．



【分析】(1) 根据函数的定义，可直接判断；

(2) 由图象可知，“加速期”结束时，即跑 30 米时，小斌的速度为 $10.4m/s$ 。

(3) 答案不唯一．建议合理即可．

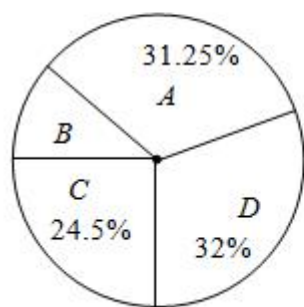
【解答】解：(1) y 是 x 的函数，在这个变化过程中，对于 x 的每一个确定的值， y 都有唯一确定的值与之对应．

(2) “加速期”结束时，小斌的速度为 $10.4m/s$ 。

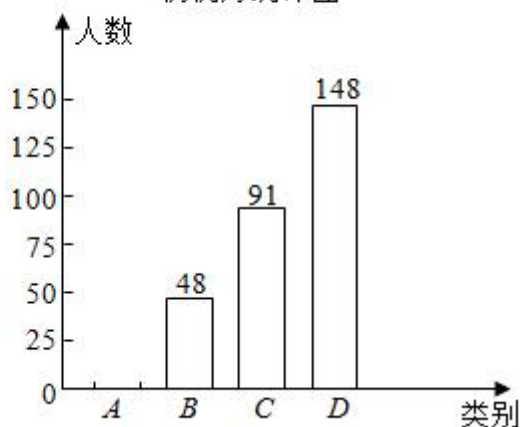
(3) 答案不唯一．例如：根据图象信息，小斌在 80 米左右时速度下降明显，建议增加耐力训练，提高成绩．

21. (8 分) 某市为了解八年级学生视力健康状况，在全市随机抽查了 400 名八年级学生 2021 年初的视力数据，并调取该批学生 2020 年初的视力数据，制成如图统计图（不完整）：

400 名八年级学生 2021 年初视力统计图



该批 400 名学生 2020 年初视力统计图



青少年视力健康标准

类别	视力	健康状况
A	视力 ≥ 5.0	视力正常
B	4.9	轻度视力不

		良
C	$4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$	中度视力不良
D	$\text{视力} \leq 4.5$	重度视力不良

根据以上信息，请解答：

（1）分别求出被抽查的 400 名学生 2021 年初轻度视力不良（类别 B ）的扇形圆心角度数和 2020 年初视力正常（类别 A ）的人数。

（2）若 2021 年初该市有八年级学生 2 万人，请估计这些学生 2021 年初视力正常的人数比 2020 年初增加了多少人？

（3）国家卫健委要求，全国初中生视力不良率控制在 69% 以内。请估计该市八年级学生 2021 年初视力不良率是否符合要求？并说明理由。

【分析】（1）利用 2021 年初视力不良的百分比乘 360° 即可求解。

（2）分别求出 2021、2020 年初视力正常的人数即可求解。

（3）用 $1 - 31.25\%$ 即可得该市八年级学生 2021 年视力不良率，即可判断。

【解答】解：（1）被抽查的 400 名学生 2021 年初轻度视力不良的扇形圆心角度数 $= 360^\circ \times (1 - 31.25\% - 24.5\% - 32\%) = 44.1^\circ$ 。

该批 400 名学生 2020 年初视力正常人数 $= 400 - 48 - 91 - 148 = 113$ （人）。

（2）该市八年级学生 2021 年初视力正常人数 $= 20000 \times 31.25\% = 6250$ （人）。

这些学生 2020 年初视力正常的人数 $= 20000 \times \frac{113}{400} = 5650$ （人）。

$\therefore$ 增加的人数 $= 6250 - 5650 = 600$ （人）。

（3）该市八年级学生 2021 年视力不良率 $= 1 - 31.25\% = 68.75\%$ 。

$\therefore 68.75\% < 69\%$ 。

$\therefore$ 该市八年级学生 2021 年初视力不良率符合要求。

22.（10 分）一酒精消毒瓶如图 1， AB 为喷嘴， $\triangle BCD$ 为按压柄， CE 为伸缩连杆， BE 和 EF 为导管，其示意图如图 2， $\angle DBE = \angle BEF = 108^\circ$ ， $BD = 6\text{cm}$ ， $BE = 4\text{cm}$ 。当按压柄 $\triangle BCD$ 按压到底时， BD 转动到 BD' ，此时 $BD' \parallel EF$ （如图 3）。

（1）求点 D 转动到点 D' 的路径长；

（2）求点 D 到直线 EF 的距离（结果精确到 0.1cm ）。

(参考数据: $\sin 36^\circ \approx 0.59$, $\cos 36^\circ \approx 0.81$, $\tan 36^\circ \approx 0.73$, $\sin 72^\circ \approx 0.95$, $\cos 72^\circ \approx 0.31$, $\tan 72^\circ \approx 3.08$)



图 1

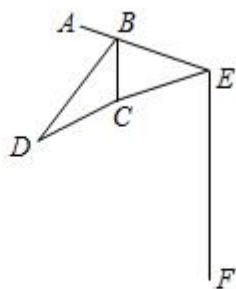


图 2

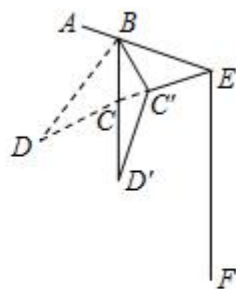


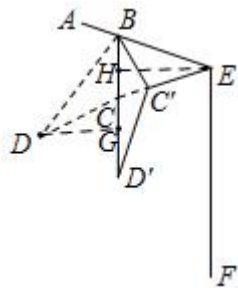
图 3

【分析】(1) 由 $BD' \parallel EF$, 求出 $\angle D'BE = 72^\circ$, 可得 $\angle DBD' = 36^\circ$, 根据弧长公式即可求出点 D 转动到点 D' 的路径长为 $\frac{36\pi \times 6}{180} = \frac{6}{5}\pi$;

(2) 过 D 作 $DG \perp BD'$ 于 G , 过 E 作 $EH \perp BD'$ 于 H , $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, 求出 $DG = BD \cdot \sin 36^\circ = 3.54$, $\text{Rt}\triangle BEH$ 中, $HE = 3.80$, 故 $DG + HE \approx 7.3$, 即点 D 到直线 EF 的距离为 7.3cm ,

【解答】解: $\because BD' \parallel EF, \angle BEF = 108^\circ$,
 $\therefore \angle D'BE = 180^\circ - \angle BEF = 72^\circ$,
 $\because \angle DBE = 108^\circ$,
 $\therefore \angle DBD' = \angle DBE - \angle D'BE = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$,
 $\because BD = 6$,
 $\therefore$ 点 D 转动到点 D' 的路径长为 $\frac{36\pi \times 6}{180} = \frac{6}{5}\pi$;

(2) 过 D 作 $DG \perp BD'$ 于 G , 过 E 作 $EH \perp BD'$ 于 H , 如图:



$\text{Rt}\triangle BDG$ 中, $DG = BD \cdot \sin 36^\circ \approx 6 \times 0.59 = 3.54$,

$\text{Rt}\triangle BEH$ 中, $HE = BE \cdot \sin 72^\circ \approx 4 \times 0.95 = 3.80$,

$\therefore DG + HE = 3.54 + 3.80 = 7.34 \approx 7.3$,

$\because BD' \parallel EF$,

∴点 D 到直线 EF 的距离约为 7.3cm ,

答: 点 D 到直线 EF 的距离约为 7.3cm .

23. (10分) 已知二次函数 $y = -x^2 + 6x - 5$.

(1) 求二次函数图象的顶点坐标;

(2) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 函数的最大值和最小值分别为多少?

(3) 当 $t \leq x \leq t+3$ 时, 函数的最大值为 m , 最小值为 n , 若 $m - n = 3$, 求 t 的值.

【分析】 (1) 解析式化成顶点式即可求得;

(2) 根据二次函数图象上点的坐标特征即可求得最大值和最小值;

(3) 分三种情况讨论, 根据二次函数的性质得到最大值 m 和最小值 n , 进而根据 $m - n = 3$ 得到关于 t 的方程, 解方程即可.

【解答】 解: (1) $\because y = -x^2 + 6x - 5 = (x - 3)^2 + 4$,

∴顶点坐标为 $(3, 4)$;

(2) $\because$ 顶点坐标为 $(3, 4)$,

∴当 $x = 3$ 时, $y_{\text{最大值}} = 4$,

∴当 $1 \leq x \leq 3$ 时, y 随着 x 的增大而增大,

∴当 $x = 1$ 时, $y_{\text{最小值}} = 0$,

∴当 $3 < x \leq 4$ 时, y 随着 x 的增大而减小,

∴当 $x = 4$ 时, $y_{\text{最小值}} = 3$.

∴当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 函数的最大值为 4 , 最小值为 0 ;

(3) 当 $t \leq x \leq t+3$ 时, 对 t 进行分类讨论,

①当 $t+3 < 3$ 时, 即 $t < 0$, y 随着 x 的增大而增大,

当 $x = t+3$ 时, $m = (t+3)^2 + 6(t+3) - 5 = -t^2 + 4$,

当 $x = t$ 时, $n = -t^2 + 6t - 5$,

∴ $m - n = -t^2 + 4 - (-t^2 + 6t - 5) = -6t + 9$,

∴ $-6t + 9 = 3$, 解得 $t = 1$ (不合题意, 舍去),

②当 $0 \leq t < 3$ 时, 顶点的横坐标在取值范围内,

∴ $m = 4$,

i) 当 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, 在 $x = t$ 时, $n = -t^2 + 6t - 5$,

∴ $m - n = 4 - (-t^2 + 6t - 5) = t^2 - 6t + 9$,

$\therefore t^2 - 6t + 9 = 3$, 解得 $t_1 = 3 - \sqrt{3}$, $t_2 = 3 + \sqrt{3}$ (不合题意, 舍去);

ii) 当 $\frac{3}{2} < t < 3$ 时, 在 $x = t + 3$ 时, $n = -t^2 + 4$,

$\therefore m - n = 4 - (-t^2 + 4) = t^2$,

$\therefore t^2 = 3$, 解得 $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = -\sqrt{3}$ (不合题意, 舍去),

③当 $t \geq 3$ 时, y 随着 x 的增大而减小,

当 $x = t$ 时, $m = -t^2 + 6t - 5$,

当 $x = t + 3$ 时, $n = -(t + 3)^2 + 6(t + 3) - 5 = -t^2 + 4$,

$m - n = -t^2 + 6t - 5 - (-t^2 + 4) = 6t - 9$,

$\therefore 6t - 9 = 3$, 解得 $t = 2$ (不合题意, 舍去),

综上所述, $t = 3 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

24. (12分) 小王在学习浙教版九上课本第72页例2后, 进一步开展探究活动: 将一个矩形

$ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$), 得到矩形 $AB'C'D'$, 连结 BD .

[探究1]如图1, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 点 C' 恰好在 DB 延长线上. 若 $AB = 1$, 求 BC 的长.

[探究2]如图2, 连结 AC' , 过点 D' 作 $D'M \parallel AC'$ 交 BD 于点 M . 线段 $D'M$ 与 DM 相等吗? 请说明理由.

[探究3]在探究2的条件下, 射线 DB 分别交 AD' , AC' 于点 P , N (如图3), 发现线段 DN , MN , PN 存在一定的数量关系, 请写出这个关系式, 并加以证明.

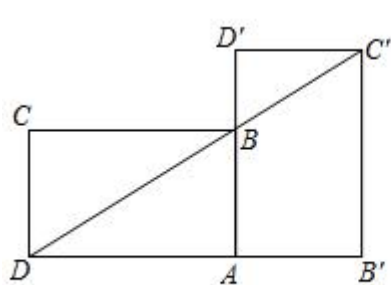


图1

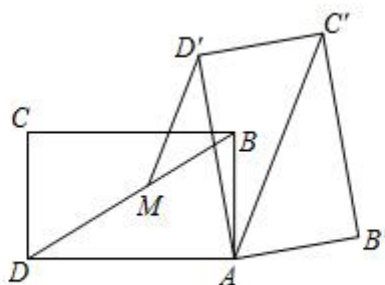


图2

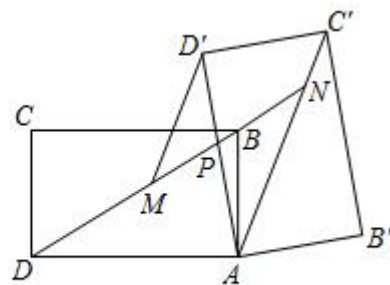


图3

【分析】 (1) 如图1, 设 $BC = x$, 由旋转的性质得出 $AD' = AD = BC = x$, $D'C' = AB' = AB = 1$, 证明 $\triangle D'C'B \sim \triangle ADB$, 由相似三角形的性质得出 $\frac{D'C'}{AD} = \frac{D'B}{AB}$, 由比例线段得出方程 $\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$, 求出 x 的值即可得出答案;

(2) 连接 DD' , 证明 $\triangle AC'D' \cong \triangle DAB$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $\angle D'AC' = \angle ADB$, 由等腰三角形的性质得出 $\angle ADD' = \angle AD'D$, 证出 $\angle MDD' = \angle MD'D$, 则可得出结论;

(3) 连接 AM , 证明 $\triangle AD'M \cong \triangle ADM$ (SSS), 由全等三角形的性质得出 $\angle MAD' = \angle MAD$,

得出 $MN = AN$, 证明 $\triangle NPA \sim \triangle NAD$, 由相似三角形的性质得出 $\frac{PN}{AN} = \frac{AN}{DN}$, 则可得出结论.

【解答】解: (1) 如图 1, 设 $BC = x$,

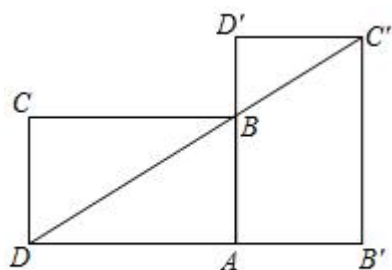


图1

$\because$ 矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到矩形 $AB' C' D'$,

$\therefore$ 点 A, B, D' 在同一直线上,

$\therefore AD' = AD = BC = x, D'C = AB' = AB = 1,$

$\therefore D'B = AD' - AB = x - 1,$

$\because \angle BAD = \angle D' = 90^\circ,$

$\therefore D'C \parallel DA,$

又 $\because$ 点 C 在 DB 的延长线上,

$\therefore \triangle D'C'B \sim \triangle ADB,$

$$\therefore \frac{D'C'}{AD} = \frac{D'B}{AB},$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1},$$

解得 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (不合题意, 舍去),

$$\therefore BC = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(2) $D'M = DM$.

证明: 如图 2, 连接 DD' ,

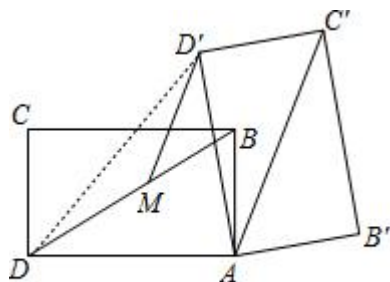


图2

$\because D'M \parallel AC',$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AD'M = \angle D'AC', \\
&\because AD' = AD, \angle AD'C' = \angle DAB = 90^\circ, D'C' = AB, \\
&\therefore \triangle AC'D' \cong \triangle DAB \text{ (SAS)}, \\
&\therefore \angle D'AC' = \angle ADB, \\
&\therefore \angle ADB = \angle AD'M, \\
&\because AD' = AD, \\
&\therefore \angle ADD' = \angle AD'D, \\
&\therefore \angle MDD' = \angle MD'D, \\
&\therefore D'M = DM;
\end{aligned}$$

(3) 关系式为 $MN^2 = PN \cdot DN$.

证明：如图 3，连接 AM ，

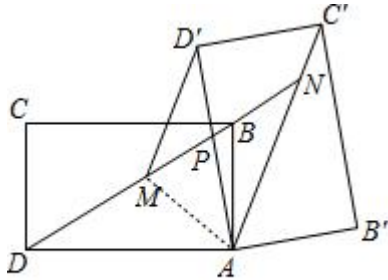


图3

$$\begin{aligned}
&\because D'M = DM, AD' = AD, AM = AM, \\
&\therefore \triangle AD'M \cong \triangle ADM \text{ (SSS)}, \\
&\therefore \angle MAD' = \angle MAD, \\
&\because \angle AMN = \angle MAD + \angle NDA, \angle NAM = \angle MAD' + \angle NAP, \\
&\therefore \angle AMN = \angle NAM, \\
&\therefore MN = AN,
\end{aligned}$$

在 $\triangle NAP$ 和 $\triangle NDA$ 中， $\angle ANP = \angle DNA$ ， $\angle NAP = \angle NDA$ ，

$$\therefore \triangle NPA \sim \triangle NAD,$$

$$\therefore \frac{PN}{AN} = \frac{AN}{DN},$$

$$\therefore AN^2 = PN \cdot DN,$$

$$\therefore MN^2 = PN \cdot DN.$$