

2017 年浙江省湖州市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

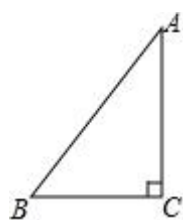
1. (3 分) 实数 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 中，无理数是 ()

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

2. (3 分) 在平面直角坐标系中，点 P (1, 2) 关于原点的对称点 P'的坐标是 ()

A. (1, 2) B. (-1, 2) C. (1, -2) D. (-1, -2)

3. (3 分) 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，则 $\cos B$ 的值是 ()



A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

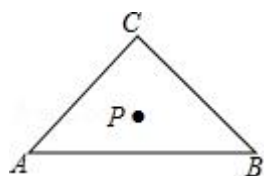
4. (3 分) 一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x > x - 1 \\ \frac{1}{2}x \leq 1 \end{cases}$ 的解是 ()

A. $x > -1$ B. $x \leq 2$ C. $-1 < x \leq 2$ D. $x > -1$ 或 $x \leq 2$

5. (3 分) 数据 -2, -1, 0, 1, 2, 4 的中位数是 ()

A. 0 B. 0.5 C. 1 D. 2

6. (3 分) 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $AB=6$ ，点 P 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，则点 P 到 AB 所在直线的距离等于 ()

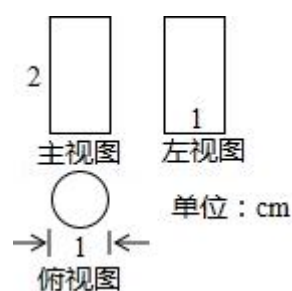


- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. (3分) 一个布袋里装有4个只有颜色不同的球, 其中3个红球, 1个白球. 从布袋里摸出1个球, 记下颜色后放回, 搅匀, 再摸出1个球, 则两次摸到的球都是红球的概率是 ()

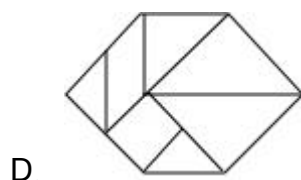
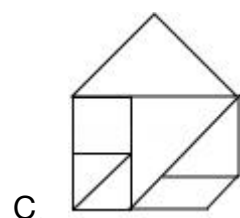
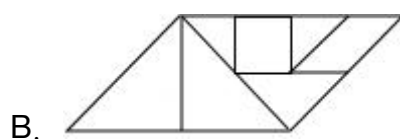
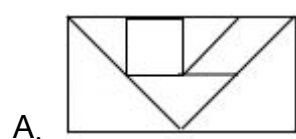
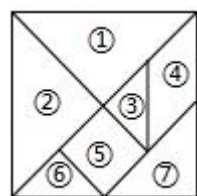
- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{9}{16}$

8. (3分) 如图是按1:10的比例画出的一个几何体的三视图, 则该几何体的侧面积是 ()



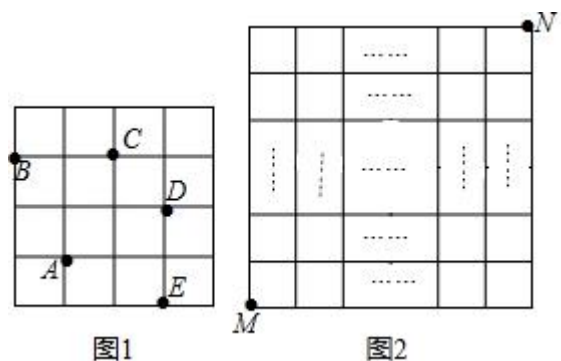
- A. 200cm^2 B. 600cm^2 C. $100\pi\text{cm}^2$ D. $200\pi\text{cm}^2$

9. (3分) 七巧板是我国祖先的一项卓越创造. 下列四幅图中有三幅是小明用如图所示的七巧板拼成的, 则不是小明拼成的那副图是 ()



10. (3分) 在每个小正方形的边长为1的网格图形中, 每个小正方形的顶点称为格点. 从一个格点移动到与之相距 $\sqrt{5}$ 的另一个格点的运动称为一次跳马变

换. 例如, 在 4×4 的正方形网格图形中 (如图 1), 从点 A 经过一次跳马变换可以到达点 B, C, D, E 等处. 现有 20×20 的正方形网格图形 (如图 2), 则从该正方形的顶点 M 经过跳马变换到达与其相对的顶点 N, 最少需要跳马变换的次数是 ()



- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

二、填空题 (每题 4 分, 满分 24 分, 将答案填在答题纸上)

11. (4 分) 把多项式 $x^2 - 3x$ 因式分解, 正确的结果是_____.

12. (4 分) 要使分式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义, x 的取值应满足_____.

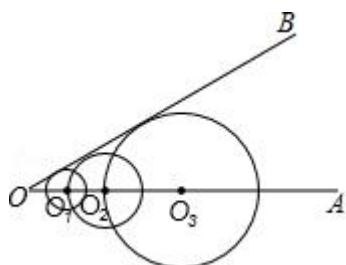
13. (4 分) 已知一个多边形的每一个外角都等于 72° , 则这个多边形的边数是_____.

14. (4 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$. 以 AB 为直径作半圆 O , 交 BC 于点 D . 若 $\angle BAC=40^\circ$, 则 $\widehat{AD}$ 的度数是_____度.

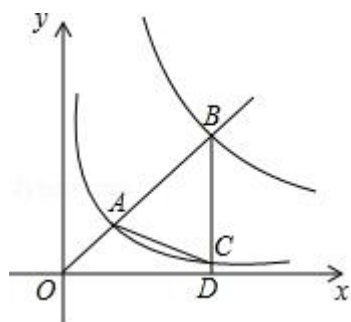


15. (4 分) 如图, 已知 $\angle AOB=30^\circ$, 在射线 OA 上取点 O_1 , 以 O_1 为圆心的圆与 OB 相切; 在射线 O_1A 上取点 O_2 , 以 O_2 为圆心, O_2O_1 为半径的圆与 OB 相

切；在射线 O_2A 上取点 O_3 ，以 O_3 为圆心， O_3O_2 为半径的圆与 OB 相切；...；
在射线 O_9A 上取点 O_{10} ，以 O_{10} 为圆心， $O_{10}O_9$ 为半径的圆与 OB 相切。若 $\odot O_1$ 的半径为 1，则 $\odot O_{10}$ 的半径长是_____。



16. (4 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=kx$ ($k>0$) 分别交反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=\frac{9}{x}$ 在第一象限的图象于点 A ， B ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D ，交 $y=\frac{1}{x}$ 的图象于点 C ，连结 AC 。若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 k 的值是_____。



三、解答题 (本大题共 8 小题，共 66 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (6 分) 计算: $2 \times (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{8}$.

18. (6 分) 解方程: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1} + 1$.

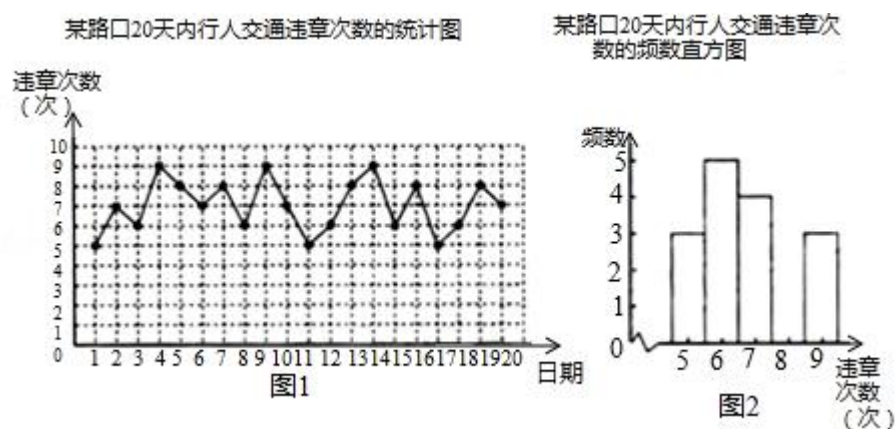
19. (6分) 对于任意实数 a, b , 定义关于“ $\otimes$ ”的一种运算如下: $a \otimes b = 2a - b$. 例

如: $5 \otimes 2 = 2 \times 5 - 2 = 8$, $(-3) \otimes 4 = 2 \times (-3) - 4 = -10$.

(1) 若 $3 \otimes x = -2011$, 求 x 的值;

(2) 若 $x \otimes 3 < 5$, 求 x 的取值范围.

20. (8分) 为积极创建全国文明城市, 某市对某路口的行人交通违章情况进行了 20 天的调查, 将所得数据绘制成如下统计图 (图 2 不完整):



请根据所给信息, 解答下列问题:

(1) 第 7 天, 这一路口的行人交通违章次数是多少次? 这 20 天中, 行人交通违章 6 次的有多少天?

(2) 请把图 2 中的频数直方图补充完整; (温馨提示: 请画在答题卷相对应的图上)

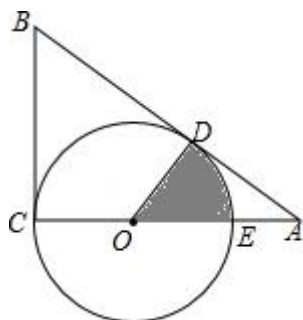
(3) 通过宣传教育后, 行人的交通违章次数明显减少. 经对这一路口的再次调查发现, 平均每天的行人交通违章次数比第一次调查时减少了 4 次, 求通过宣传

教育后，这一路口平均每天还出现多少次行人的交通违章？

21. (8 分) 如图, O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 上一点, 以 OC 为半径的 $\odot O$ 与斜边 AB 相切于点 D , 交 OA 于点 E . 已知 $BC=\sqrt{3}$, $AC=3$.

(1) 求 AD 的长;

(2) 求图中阴影部分的面积.



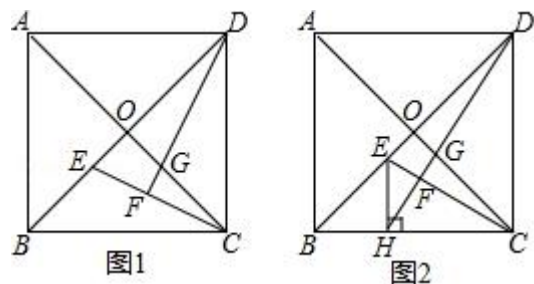
22. (10 分) 已知正方形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O .

(1) 如图 1, E , G 分别是 OB , OC 上的点, CE 与 DG 的延长线相交于点 F . 若 $DF \perp CE$, 求证: $OE=OG$;

(2) 如图 2, H 是 BC 上的点, 过点 H 作 $EH \perp BC$, 交线段 OB 于点 E, 连结 DH 交 CE 于点 F, 交 OC 于点 G. 若 $OE=OG$,

①求证: $\angle ODG = \angle OCE$;

②当 $AB=1$ 时, 求 HC 的长.



23. (10 分) 湖州素有鱼米之乡之称, 某水产养殖大户为了更好地发挥技术优势, 一次性收购了 20000kg 淡水鱼, 计划养殖一段时间后再出售. 已知每天放养的费用相同, 放养 10 天的总成本为 30.4 万元; 放养 20 天的总成本为 30.8 万元 (总成本=放养总费用+收购成本).

(1) 设每天的放养费用是 a 万元, 收购成本为 b 万元, 求 a 和 b 的值;

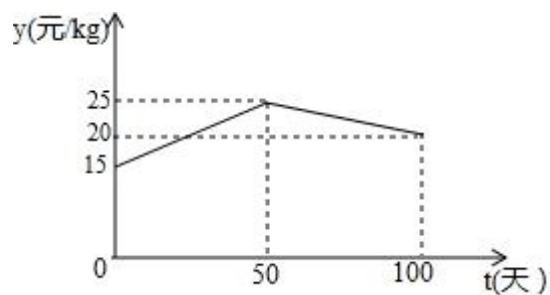
(2) 设这批淡水鱼放养 t 天后的质量为 m (kg), 销售单价为 y 元/kg. 根据以

往经验可知: m 与 t 的函数关系为 $m = \begin{cases} 20000(0 \leq t \leq 50) \\ 100t + 15000(50 < t \leq 100) \end{cases}$; y 与 t 的函数关系如图所示.

①分别求出当 $0 \leq t \leq 50$ 和 $50 < t \leq 100$ 时, y 与 t 的函数关系式;

②设将这批淡水鱼放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元, 求当 t 为何值时, W

最大？并求出最大值. (利润=销售总额 - 总成本)

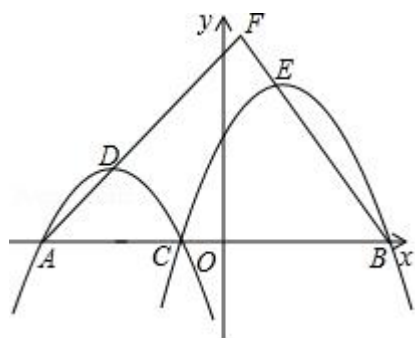


24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 A, B 两点的坐标分别为 $(-4, 0), (4, 0)$, $C(m, 0)$ 是线段 AB 上一点 (与 A, B 点不重合), 抛物线 $L_1: y=ax^2+b_1x+c_1$ ($a < 0$) 经过点 A, C , 顶点为 D , 抛物线 $L_2: y=ax^2+b_2x+c_2$ ($a < 0$) 经过点 C, B , 顶点为 E , AD, BE 的延长线相交于点 F .

(1) 若 $a = -\frac{1}{2}$, $m = -1$, 求抛物线 L_1, L_2 的解析式;

(2) 若 $a = -1$, $AF \perp BF$, 求 m 的值;

(3) 是否存在这样的实数 a ($a < 0$), 无论 m 取何值, 直线 AF 与 BF 都不可能互相垂直? 若存在, 请直接写出 a 的两个不同的值; 若不存在, 请说明理由.



2017 年浙江省湖州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) (2017•湖州) 实数 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 中, 无理数是 ()

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0

【解答】解: 2, $\frac{1}{2}$, 0 是有理数,
 $\sqrt{2}$ 是无理数,

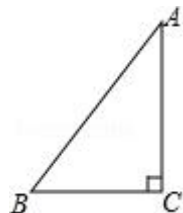
故选: B.

2. (3 分) (2017•湖州) 在平面直角坐标系中, 点 P (1, 2) 关于原点的对称点 P'的坐标是 ()

A. (1, 2) B. (-1, 2) C. (1, -2) D. (-1, -2)

【解答】解: 点 P (1, 2) 关于原点的对称点 P'的坐标是 (-1, -2),
故选: D.

3. (3 分) (2017•湖州) 如图, 已知在 Rt△ABC 中, $\angle C=90^\circ$, AB=5, BC=3, 则 $\cos B$ 的值是 ()



A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【解答】解: 在 Rt△ABC 中, BC=3, AB=5,

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$

故选：A.

4. (3分) (2017•湖州) 一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x > x - 1 \\ \frac{1}{2}x \leq 1 \end{cases}$ 的解是 ()

A. $x > -1$ B. $x \leq 2$ C. $-1 < x \leq 2$ D. $x > -1$ 或 $x \leq 2$

【解答】解：解不等式 $2x > x - 1$ ，得： $x > -1$ ，

解不等式 $\frac{1}{2}x \leq 1$ ，得： $x \leq 2$ ，

则不等式组的解集为 $-1 < x \leq 2$ ，

故选：C.

5. (3分) (2017•湖州) 数据 $-2, -1, 0, 1, 2, 4$ 的中位数是 ()

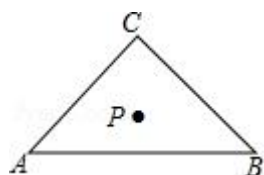
A. 0 B. 0.5 C. 1 D. 2

【解答】解：这组数据的中位数为 $\frac{0+1}{2}=0.5$ ，

故选：B.

6. (3分) (2017•湖州) 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $AB=6$ ，

点 P 是 $Rt\triangle ABC$ 的重心，则点 P 到 AB 所在直线的距离等于 ()



A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【解答】解：连接 CP 并延长，交 AB 于 D，

$\therefore$ P 是 $Rt\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $PD = \frac{1}{3}CD$,

$\therefore \angle C = 90^\circ$,

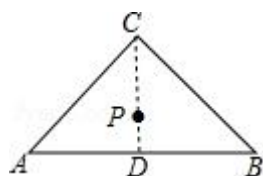
$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 3$,

$\therefore AC = BC$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore CD \perp AB$,

$\therefore PD = 1$, 即点 P 到 AB 所在直线的距离等于 1,

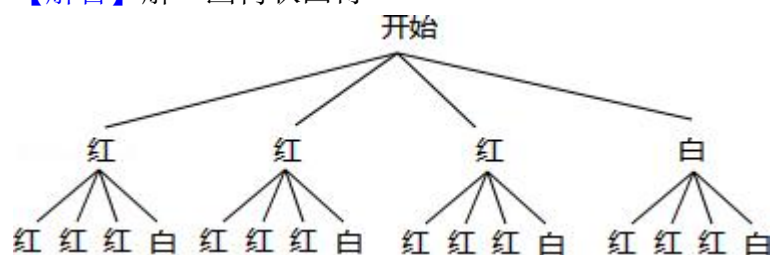
故选: A.



7. (3 分) (2017•湖州) 一个布袋里装有 4 个只有颜色不同的球, 其中 3 个红球, 1 个白球. 从布袋里摸出 1 个球, 记下颜色后放回, 搅匀, 再摸出 1 个球, 则两次摸到的球都是红球的概率是 ()

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{9}{16}$

【解答】解: 画树状图得:

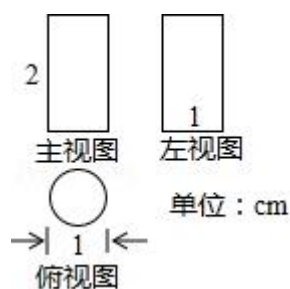


$\therefore$ 共有 16 种等可能的结果, 两次摸出红球的有 9 种情况,

$\therefore$ 两次摸出红球的概率为 $\frac{9}{16}$;

故选 D.

8. (3 分) (2017•湖州) 如图是按 1: 10 的比例画出的一个几何体的三视图, 则该几何体的侧面积是 ()



- A. 200cm^2 B. 600cm^2 C. $100\pi\text{cm}^2$ D. $200\pi\text{cm}^2$

【解答】解：观察三视图知：该几何体为圆柱，高为 2，底面直径为 1，

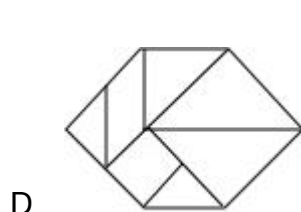
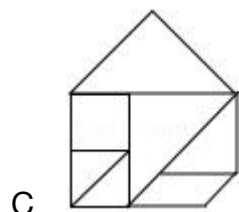
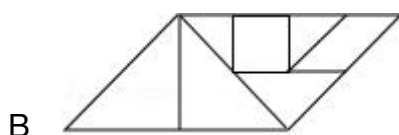
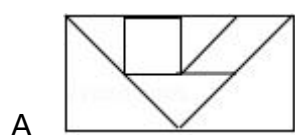
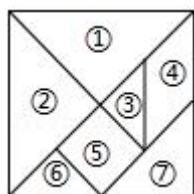
侧面积为： $\pi dh = 2 \times \pi = 2\pi$ ，

$\therefore$ 是按 1: 10 的比例画出的一个几何体的三视图，

$\therefore$ 原几何体的侧面积 $= 100 \times 2\pi = 200\pi$ ，

故选 D.

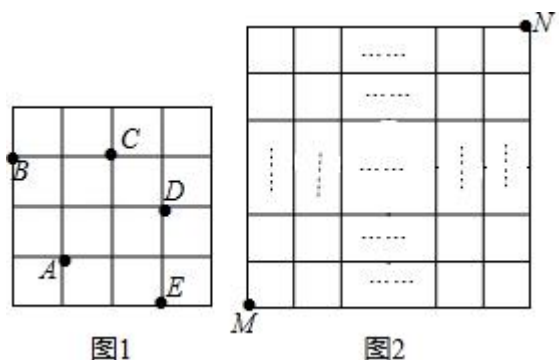
9. (3 分) (2017•湖州) 七巧板是我国祖先的一项卓越创造. 下列四幅图中有三幅是小明用如图所示的七巧板拼成的，则不是小明拼成的那副图是 ()



【解答】解：图 C 中根据图 7、图 4 和图形不符合，故不是由原图这副七巧板拼成的.

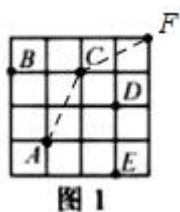
故选 C

10. (3分) (2017•湖州) 在每个小正方形的边长为 1 的网格图形中，每个小正方形的顶点称为格点. 从一个格点移动到与之相距 $\sqrt{5}$ 的另一个格点的运动称为一次跳马变换. 例如，在 4×4 的正方形网格图形中 (如图 1)，从点 A 经过一次跳马变换可以到达点 B, C, D, E 等处. 现有 20×20 的正方形网格图形 (如图 2)，则从该正方形的顶点 M 经过跳马变换到达与其相对的顶点 N，最少需要跳马变换的次数是 ()



A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

【解答】解：如图 1，连接 AC, CF，则 $AF=3\sqrt{2}$,



$\therefore$ 两次变换相当于向右移动 3 格，向上移动 3 格，

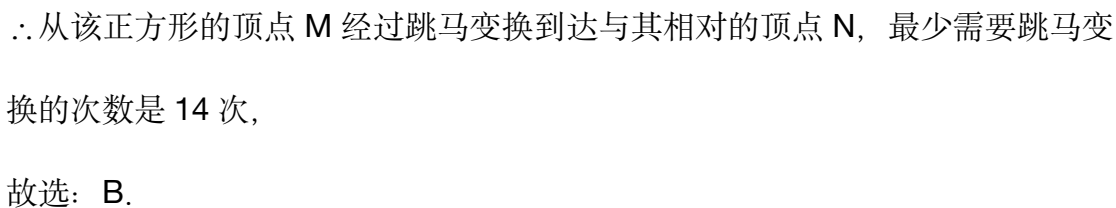
又 $\because MN=20\sqrt{2}$,

$\therefore 20\sqrt{2} \div 3\sqrt{2} = \frac{20}{3}$, (不是整数)

$\therefore$ 按 A - C - F 的方向连续变换 10 次后，相当于向右移动了 $10 \div 2 \times 3 = 15$ 格，

向上移动了 $10 \div 2 \times 3 = 15$ 格，

此时 M 位于如图所示的 5×5 的正方形网格的点 G 处，再按如图所示的方式变换 4 次即可到达点 N 处，



故选: B.

11. (4分) (2017·湖州) 把多项式 $x^2 - 3x$ 因式分解, 正确的结果是 $x(x-3)$.

故答案为: $x(x-3)$.

解得 $x \neq 2$.

故答案是： $x \neq 2$.

故答案为: 5.

第 15 页 (共 29 页)



【解答】解：连接 AD、OD，

$\because AB$ 为直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ，

即 $AD \perp BC$ ，

$\because AB = AC$ ，

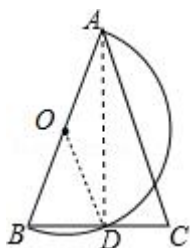
$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 20^\circ$ ， $BD = DC$ ，

$\therefore \angle ABD = 70^\circ$ ，

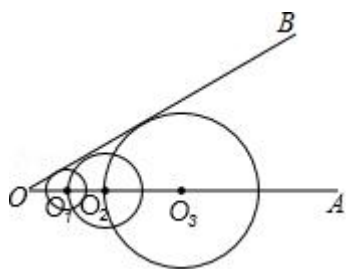
$\therefore \angle AOD = 140^\circ$

$\therefore \widehat{AD}$ 的度数为 140° ；

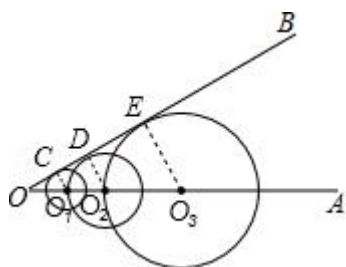
故答案为 140.



15. (4 分) (2017•湖州) 如图，已知 $\angle AOB = 30^\circ$ ，在射线 OA 上取点 O_1 ，以 O_1 为圆心的圆与 OB 相切；在射线 O_1A 上取点 O_2 ，以 O_2 为圆心， O_2O_1 为半径的圆与 OB 相切；在射线 O_2A 上取点 O_3 ，以 O_3 为圆心， O_3O_2 为半径的圆与 OB 相切；...；在射线 O_9A 上取点 O_{10} ，以 O_{10} 为圆心， $O_{10}O_9$ 为半径的圆与 OB 相切。若 $\odot O_1$ 的半径为 1，则 $\odot O_{10}$ 的半径长是 2^9 。



【解答】解：作 O_1C 、 O_2D 、 O_3E 分别 $\perp OB$,



$$\therefore \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore OO_1 = 2CO_1, \quad OO_2 = 2DO_2, \quad OO_3 = 2EO_3,$$

$$\therefore O_1O_2 = DO_2, \quad O_2O_3 = EO_3,$$

$\therefore$ 圆的半径呈 2 倍递增,

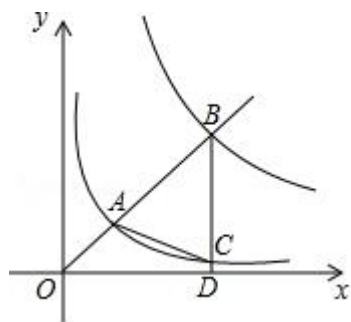
$$\therefore \odot O_n \text{ 的半径为 } 2^{n-1} CO_1,$$

$$\therefore \odot O_1 \text{ 的半径为 } 1,$$

$$\therefore \odot O_{10} \text{ 的半径长} = 2^9,$$

故答案为 2^9 .

16. (4 分) (2017•湖州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y=kx$ ($k > 0$) 分别交反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=\frac{9}{x}$ 在第一象限的图象于点 A, B, 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D, 交 $y=\frac{1}{x}$ 的图象于点 C, 连结 AC. 若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 则 k 的值是 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



【解答】解：∵点B是 $y=kx$ 和 $y=\frac{9}{x}$ 的交点， $y=kx=\frac{9}{x}$ ，

解得： $x=\frac{3}{\sqrt{k}}$ ， $y=3\sqrt{k}$ ，

∴点B坐标为 $(\frac{3}{\sqrt{k}}, 3\sqrt{k})$ ，

点A是 $y=kx$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 的交点， $y=kx=\frac{1}{x}$ ，

解得： $x=\frac{1}{\sqrt{k}}$ ， $y=\sqrt{k}$ ，

∴点A坐标为 $(\frac{1}{\sqrt{k}}, \sqrt{k})$ ，

∵ $BD \perp x$ 轴，

∴点C横坐标为 $\frac{3}{\sqrt{k}}$ ，纵坐标为 $\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{k}}}=\frac{\sqrt{k}}{3}$ ，

∴点A坐标为 $(\frac{3}{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}}{3})$ ，

∴ $BA \neq AC$ ，

若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，

① $AB=BC$ ，则 $\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k}})^2+(3\sqrt{k}-\sqrt{k})^2}=3\sqrt{k}-\frac{\sqrt{k}}{3}$ ，

解得： $k=\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ；

$$\textcircled{2} AC=BC, \text{ 则 } \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\sqrt{k} - \frac{\sqrt{k}}{3}\right)^2} = 3\sqrt{k} - \frac{\sqrt{k}}{3},$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{15}}{5};$$

$$\text{故答案为 } k = \frac{3\sqrt{7}}{7} \text{ 或 } \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (6 分) (2017•湖州) 计算: $2 \times (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{8}$.

【解答】解: 原式 $= 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$$= 2.$$

18. (6 分) (2017•湖州) 解方程: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$.

【解答】解: 方程两边都乘以 $x-1$ 得: $2 = 1 + x - 1$,

$$\text{解得: } x = 2,$$

$$\text{检验: } \because \text{当 } x=2 \text{ 时, } x-1 \neq 0,$$

$$\therefore x=2 \text{ 是原方程的解,}$$

$$\text{即原方程的解为 } x=2.$$

19. (6 分) (2017•湖州) 对于任意实数 a, b , 定义关于“ $\otimes$ ”的一种运算如下:

$$a \otimes b = 2a - b. \text{ 例如: } 5 \otimes 2 = 2 \times 5 - 2 = 8, (-3) \otimes 4 = 2 \times (-3) - 4 = -10.$$

(1) 若 $3 \otimes x = -2011$, 求 x 的值;

(2) 若 $x \otimes 3 < 5$, 求 x 的取值范围.

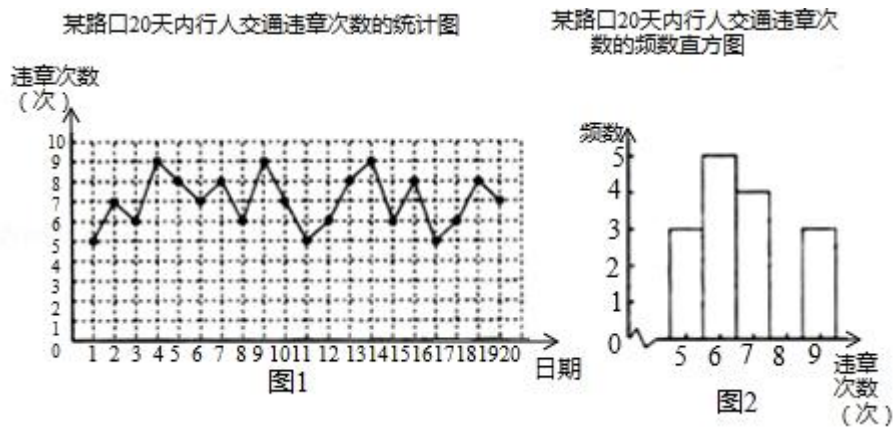
【解答】解: (1) 根据题意, 得: $2 \times 3 - x = -2011$,

$$\text{解得: } x = 2017;$$

(2) 根据题意，得： $2x - 3 < 5$ ，

解得： $x < 4$ 。

20. (8 分) (2017•湖州) 为积极创建全国文明城市，某市对某路口的行人交通违章情况进行了 20 天的调查，将所得数据绘制成如下统计图 (图 2 不完整)：



请根据所给信息，解答下列问题：

(1) 第 7 天，这一路口的行人交通违章次数是多少次？这 20 天中，行人交通违章 6 次的有多少天？

(2) 请把图 2 中的频数直方图补充完整；(温馨提示：请画在答题卷相对应的图上)

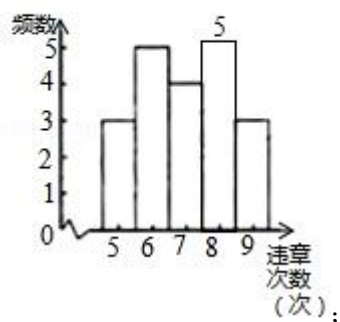
(3) 通过宣传教育后，行人的交通违章次数明显减少。经对这一路口的再次调查发现，平均每天的行人交通违章次数比第一次调查时减少了 4 次，求通过宣传教育后，这一路口平均每天还出现多少次行人的交通违章？

【解答】解：(1) 根据统计图可得：第 7 天，这一路口的行人交通违章次数是 8 次；

这 20 天，行人交通违章 6 次的有 5 天；

(2) 根据折线图可得交通违章次数是 8 次的天数是 5。

某路口20天内行人交通违章次数的频数直方图



(3) 第一次调查, 平均每天行人的交通违章次数是 $\frac{5 \times 3 + 6 \times 5 + 7 \times 4 + 8 \times 5 + 9 \times 3}{20} = 7$ (次).

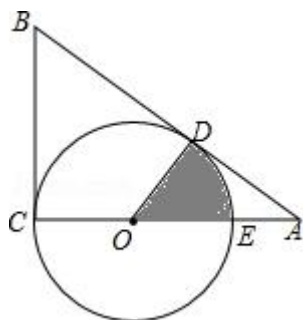
$$7 - 4 = 3.$$

答: 通过宣传教育后, 这一路口平均每天还出现 3 次行人的交通违章.

21. (8 分) (2017·湖州) 如图, O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 上一点, 以 OC 为半径的 $\odot O$ 与斜边 AB 相切于点 D , 交 OA 于点 E . 已知 $BC = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

(1) 求 AD 的长;

(2) 求图中阴影部分的面积.



【解答】解:

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because BC = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{3},$$

$\because BC \perp OC$,

$\therefore BC$ 是圆的切线,

∵ ⊙O 与斜边 AB 相切于点 D,

∴ BD=BC,

∴ AD=AB - BD=2√3 - √3=√3;

(2) 在 Rt△ABC 中,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

∴ ∠A=30°,

∵ ⊙O 与斜边 AB 相切于点 D,

∴ OD ⊥ AB,

∴ ∠AOD=90° - ∠A=60°,

$$\therefore \frac{OD}{AD} = \tan A = \tan 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{OD}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

∴ OD=1,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6}.$$

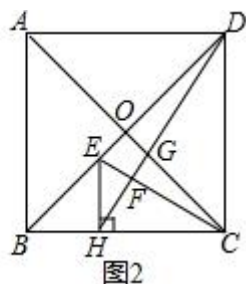
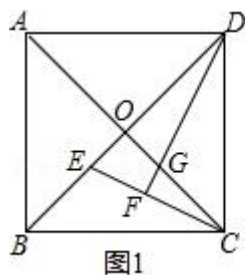
22. (10 分) (2017•湖州) 已知正方形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O.

(1) 如图 1, E, G 分别是 OB, OC 上的点, CE 与 DG 的延长线相交于点 F. 若 DF ⊥ CE, 求证: OE=OG;

(2) 如图 2, H 是 BC 上的点, 过点 H 作 EH ⊥ BC, 交线段 OB 于点 E, 连结 DH 交 CE 于点 F, 交 OC 于点 G. 若 OE=OG,

①求证: ∠ODG=∠OCE;

②当 $AB=1$ 时, 求 HC 的长.



【解答】(1) 证明: 如图 1 中, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$, $OD=OC$,

$\therefore \angle DOG = \angle COE = 90^\circ$,

$\therefore \angle OEC + \angle OCE = 90^\circ$,

$\therefore DF \perp CE$,

$\therefore \angle OEC + \angle ODG = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODG = \angle OCE$,

$\therefore \triangle DOG \cong \triangle COE$ (ASA),

$\therefore OE=OG$.

(2) ①证明: 如图 2 中, $\because OG=OE$, $\angle DOG = \angle COE = 90^\circ$, $OD=OC$,

$\therefore \triangle ODG \cong \triangle OCE$,

$\therefore \angle ODG = \angle OCE$.

②解: 设 $CH=x$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $AB=1$,

$\therefore BH=1-x$, $\angle DBC = \angle BDC = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore EH \perp BC$,

$\therefore \angle BEH = \angle EBH = 45^\circ$,

$$\therefore EH=BH=1-x,$$

$$\because \angle ODG = \angle OCE,$$

$$\therefore \angle BDC - \angle ODG = \angle ACB - \angle OCE,$$

$$\therefore \angle HDC = \angle ECH,$$

$$\because EH \perp BC,$$

$$\therefore \angle EHC = \angle HCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CHE \sim \triangle DCH,$$

$$\therefore \frac{EH}{HC} = \frac{HC}{CD},$$

$$\therefore HC^2 = EH \cdot CD,$$

$$\therefore x^2 = (1-x) \cdot 1,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 或 } \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore HC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

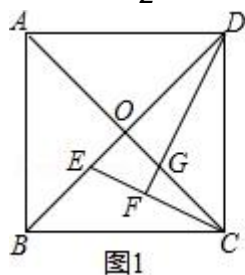


图1

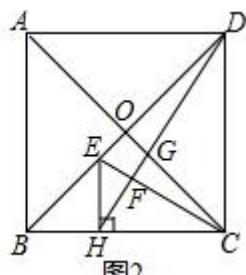


图2

23. (10分) (2017·湖州) 湖州素有鱼米之乡之称，某水产养殖大户为了更好地发挥技术优势，一次性收购了 20000kg 淡水鱼，计划养殖一段时间后再出售. 已知每天放养的费用相同，放养 10 天的总成本为 30.4 万元；放养 20 天的总成本为 30.8 万元 (总成本=放养总费用+收购成本).

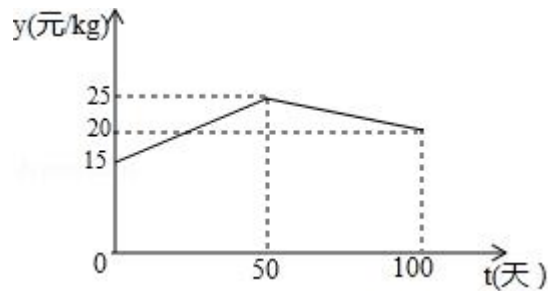
(1) 设每天的放养费用是 a 万元，收购成本为 b 万元，求 a 和 b 的值；

(2) 设这批淡水鱼放养 t 天后的质量为 m (kg)，销售单价为 y 元/kg. 根据以

往经验可知：m 与 t 的函数关系为 $m = \begin{cases} 20000(0 \leq t \leq 50) \\ 100t + 15000(50 < t \leq 100) \end{cases}$ ；y 与 t 的函数关系如图所示.

①分别求出当 $0 \leq t \leq 50$ 和 $50 < t \leq 100$ 时，y 与 t 的函数关系式；

②设将这批淡水鱼放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元，求当 t 为何值时，W 最大？并求出最大值.（利润=销售总额-总成本）



【解答】解：（1）由题意，得：
$$\begin{cases} 10a + b = 30.4 \\ 20a + b = 30.8 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a = 0.04 \\ b = 30 \end{cases}$$

答：a 的值为 0.04，b 的值为 30；

（2）①当 $0 \leq t \leq 50$ 时，设 y 与 t 的函数解析式为 $y = k_1 t + n_1$,

将 (0, 15)、(50, 25) 代入，得：
$$\begin{cases} n_1 = 15 \\ 50k_1 + n_1 = 25 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{5} \\ n_1 = 15 \end{cases}$$

$\therefore$ y 与 t 的函数解析式为 $y = \frac{1}{5}t + 15$;

当 $50 < t \leq 100$ 时，设 y 与 t 的函数解析式为 $y = k_2 t + n_2$,

将点 (50, 25)、(100, 20) 代入，得：
$$\begin{cases} 50k_2 + n_2 = 25 \\ 100k_2 + n_2 = 20 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k_2 = -\frac{1}{10} \\ n_2 = 30 \end{cases}$$

∴ y 与 t 的函数解析式为 $y = -\frac{1}{10}t + 30$;

②由题意, 当 $0 \leq t \leq 50$ 时,

$$W = 20000 \left(\frac{1}{5}t + 15 \right) - (400t + 300000) = 3600t,$$

$$\therefore 3600 > 0,$$

∴ 当 $t = 50$ 时, $W_{\text{最大值}} = 180000$ (元);

$$\text{当 } 50 < t \leq 100 \text{ 时, } W = (100t + 15000) \left(-\frac{1}{10}t + 30 \right) - (400t + 300000)$$

$$= -10t^2 + 1100t + 150000$$

$$= -10(t - 55)^2 + 180250,$$

$$\therefore -10 < 0,$$

∴ 当 $t = 55$ 时, $W_{\text{最大值}} = 180250$ (元),

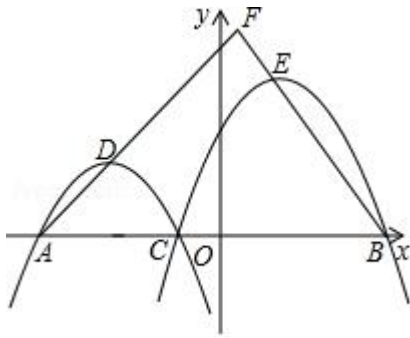
综上所述, 放养 55 天时, W 最大, 最大值为 180250 元.

24. (12 分) (2017·湖州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 A , B 两点的坐标分别为 $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $C(m, 0)$ 是线段 AB 上一点 (与 A , B 点不重合), 抛物线 $L_1: y = ax^2 + b_1x + c_1$ ($a < 0$) 经过点 A , C , 顶点为 D , 抛物线 $L_2: y = ax^2 + b_2x + c_2$ ($a < 0$) 经过点 C , B , 顶点为 E , AD , BE 的延长线相交于点 F .

(1) 若 $a = -\frac{1}{2}$, $m = -1$, 求抛物线 L_1 , L_2 的解析式;

(2) 若 $a = -1$, $AF \perp BF$, 求 m 的值;

(3) 是否存在这样的实数 a ($a < 0$), 无论 m 取何值, 直线 AF 与 BF 都不可能互相垂直? 若存在, 请直接写出 a 的两个不同的值; 若不存在, 请说明理由.



【解答】解：（1）将 A、C 点代入 $y=ax^2+b_1x+c_1$ 中，可得：

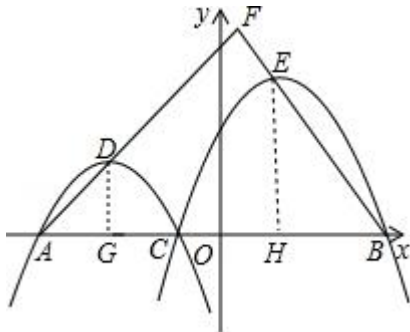
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times (-1)^2 - b_1 + c_1 = 0 \\ -\frac{1}{2} \times (-4)^2 - 4b_1 + c_1 = 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b_1 = -\frac{5}{2}, \\ c_1 = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 L_1 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 2$;

$$\text{同理可得: } \begin{cases} -\frac{1}{2} \times (-1)^2 - b_2 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4b_2 + c_2 = 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b_2 = \frac{3}{2}, \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 L_2 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 2$;

（2）如图，过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于点 G，过点 E 作 $EH \perp x$ 轴于点 H，



$$\text{由题意得: } \begin{cases} 0 = -16 - 4b_1 + c_1 \\ 0 = -m^2 + b_1m + c_1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b_1 = m - 4 \\ c_1 = 4m \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 L_1 解析式为 $y = -x^2 + (m-4)x + 4m$;

$$\therefore \text{点 D 坐标为 } \left(\frac{m-4}{2}, \frac{m^2+8m+16}{4} \right),$$

$$\therefore DG = \frac{m^2+8m+16}{4} = \frac{(m+4)^2}{4}, \quad AG = \frac{m+4}{2};$$

同理可得：抛物线 L_2 解析式为 $y = -x^2 + (m+4)x - 4m$;

$$\therefore EH = \frac{m^2-8m+16}{4} = \frac{(m-4)^2}{4}, \quad BH = \frac{4-m}{2},$$

∵ $AF \perp BF$, $DG \perp x$ 轴, $EH \perp x$ 轴,

∴ $\angle AFB = \angle AGD = \angle EHB = 90^\circ$,

∴ $\angle DAG + \angle ADG = 90^\circ$, $\angle DAG + \angle EBH = 90^\circ$,

∴ $\angle ADG = \angle EBH$,

∴ 在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle EBH$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADG = \angle EBH \\ \angle AGD = \angle EHB = 90^\circ \end{cases}$$

∴ $\triangle ADG \sim \triangle EBH$,

$$\therefore \frac{DG}{BH} = \frac{AG}{EH},$$

$$\therefore \frac{\frac{(m+4)^2}{4}}{\frac{4-m}{2}} = \frac{\frac{m+4}{2}}{\frac{(m-4)^2}{4}}, \text{ 化简得: } m^2 = 12,$$

解得: $m = \pm 2\sqrt{3}$;

(3) 存在, 例如: $a = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$;

当 $a = -\frac{1}{3}$ 时, 代入 A, C 可以求得:

抛物线 L_1 解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}(m-4)x + \frac{4}{3}m$;

同理可得: 抛物线 L_2 解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}(m+4)x - \frac{4}{3}m$;

∴ 点 D 坐标为 $(\frac{m-4}{2}, \frac{(m+4)^2}{12})$, 点 E 坐标为 $(\frac{m+4}{2}, \frac{(m-4)^2}{12})$;

∴ 直线 AF 斜率为 $\frac{\frac{(m+4)^2}{12}}{\frac{4+m}{2}}$, 直线 BF 斜率为 $\frac{\frac{(m-4)^2}{12}}{\frac{m-4}{2}}$;

若要 $AF \perp BF$, 则直线 AF, BF 斜率乘积为 -1 ,

即 $\frac{\frac{(m+4)^2}{12}}{\frac{4+m}{2}} \times \frac{\frac{(m-4)^2}{12}}{\frac{m-4}{2}} = -1$, 化简得: $m^2 = -20$, 无解;

同理可求得 $a = -\frac{1}{4}$ 亦无解.