

2015 年浙江省湖州市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. (3 分) (2015•湖州) -5 的绝对值为 ()

- A. -5 B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. (3 分) (2015•湖州) 当 $x=1$ 时, 代数式 $4-3x$ 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. (3 分) (2015•湖州) 4 的算术平方根是 ()

- A. ± 2 B. 2 C. -2 D. $\sqrt{2}$

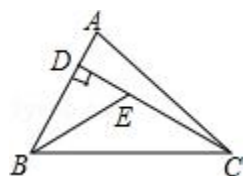
4. (3 分) (2015•湖州) 若一个圆锥的侧面展开图是半径为 18cm , 圆心角为 240° 的扇形, 则这个圆锥的底面半径长是 ()

- A. 6cm B. 9cm C. 12cm D. 18cm

5. (3 分) (2015•湖州) 已知一组数据的方差是 3 , 则这组数据的标准差是 ()

- A. 9 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{3}$

6. (3 分) (2015•湖州) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的高线, BE 平分 $\angle ABC$, 交 CD 于点 E , $BC=5$, $DE=2$, 则 $\triangle BCE$ 的面积等于 ()

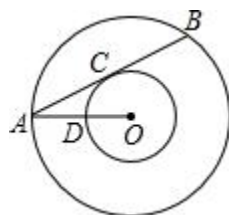


- A. 10 B. 7 C. 5 D. 4

7. (3 分) (2015•湖州) 一个布袋内只装有 1 个黑球和 2 个白球, 这些球除颜色外其余都相同, 随机摸出一个球后放回并搅匀, 再随机摸出一个球, 则两次摸出的球都是黑球的概率是 ()

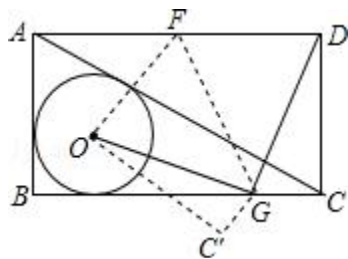
- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

8. (3 分) (2015•湖州) 如图, 以点 O 为圆心的两个圆中, 大圆的弦 AB 切小圆于点 C , OA 交小圆于点 D , 若 $OD=2$, $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$, 则 AB 的长是 ()



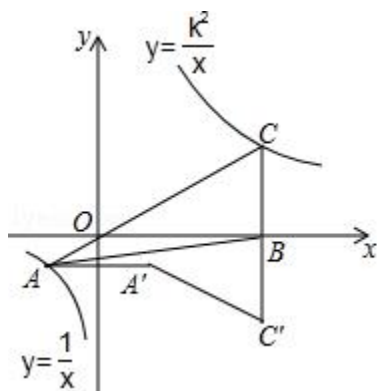
- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. 8 D. $4\sqrt{3}$

9. (3分) (2015•湖州) 如图, AC 是矩形 ABCD 的对角线, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 现将矩形 ABCD 按如图所示的方式折叠, 使点 D 与点 O 重合, 折痕为 FG. 点 F, G 分别在边 AD, BC 上, 连结 OG, DG. 若 $OG \perp DG$, 且 $\odot O$ 的半径长为 1, 则下列结论不成立的是 ()



- A. $CD+DF=4$ B. $CD-DF=2\sqrt{3}-3$ C. $BC+AB=2\sqrt{3}+4$ D. $BC-AB=2$

10. (3分) (2015•湖州) 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, O 是坐标原点, 点 A 是函数 $y=\frac{1}{x}$ ($x<0$) 图象上一点, AO 的延长线交函数 $y=\frac{k^2}{x}$ ($x>0$, k 是不等于 0 的常数) 的图象于点 C, 点 A 关于 y 轴的对称点为 A', 点 C 关于 x 轴的对称点为 C', 交于 x 轴于点 B, 连结 AB, AA', A'C'. 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 6, 则由线段 AC, CC', C'A', A'A 所围成的图形的面积等于 ()

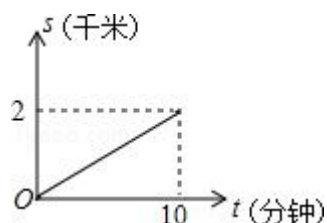


- A. 8 B. 10 C. $3\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{6}$

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

11. (4分) (2015•湖州) 计算: $2^3 \times (\frac{1}{2})^2 =$ _____.

12. (4分) (2015•湖州) 放学后, 小明骑车回家, 他经过的路程 s (千米) 与所用时间 t (分钟) 的函数关系如图所示, 则小明的骑车速度是_____千米/分钟.

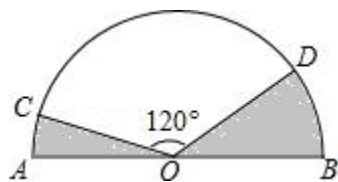


13. (4分) (2015•湖州) 在“争创美丽校园，争做文明学生”示范校评比活动中，10位评委给某校的评分情况下表所示：

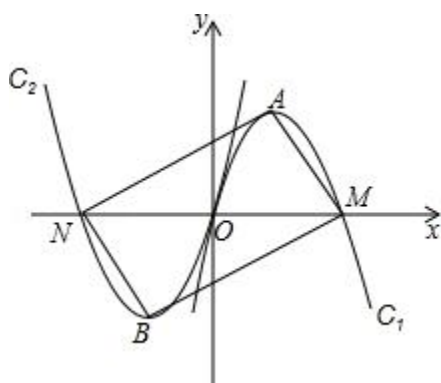
评分 (分)	80	85	90	95
评委人数	1	2	5	2

则这10位评委评分的平均数是_____分.

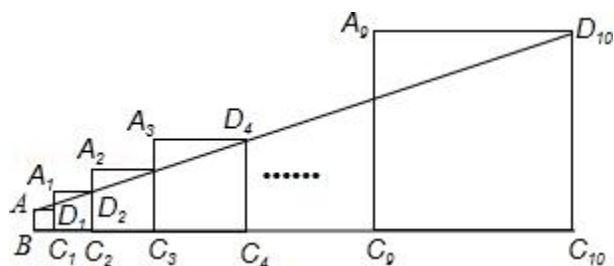
14. (4分) (2015•湖州) 如图，已知C、D是以AB为直径的半圆周上的两点，O是圆心，半径OA=2， $\angle COD=120^\circ$ ，则图中阴影部分的面积等于_____.



15. (4分) (2015•湖州) 如图，已知抛物线 $C_1: y=a_1x^2+b_1x+c_1$ 和 $C_2: y=a_2x^2+b_2x+c_2$ 都经过原点，顶点分别为A、B，与x轴的另一交点分别为M、N，如果点A与点B，点M与点N都关于原点O成中心对称，则称抛物线 C_1 和 C_2 为姐妹抛物线，请你写出一对姐妹抛物线 C_1 和 C_2 ，使四边形ANBM恰好是矩形，你所写的一对抛物线解析式是_____和_____.



16. (4分) (2015•湖州) 已知正方形 ABC_1D_1 的边长为1，延长 C_1D_1 到 A_1 ，以 A_1C_1 为边向右作正方形 $A_1C_1C_2D_2$ ，延长 C_2D_2 到 A_2 ，以 A_2C_2 为边向右作正方形 $A_2C_2C_3D_3$ (如图所示)，以此类推... 若 $A_1C_1=2$ ，且点A、 D_2 、 D_3 、...、 D_{10} 都在同一直线上，则正方形 $A_9C_9C_{10}D_{10}$ 的边长是_____.



三、解答题（本题有 8 个小题，共 66 分）

17. (6 分) (2015•湖州) 计算: $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$.

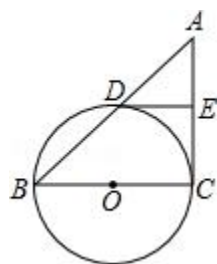
18. (6 分) (2015•湖州) 解不等式组 $\begin{cases} x-2 < 4 \\ 2x-1 > 1 \end{cases}$.

19. (6 分) (2015•湖州) 已知 y 是 x 的一次函数, 当 $x=3$ 时, $y=1$; 当 $x=-2$ 时, $y=-4$, 求这个一次函数的解析式.

20. (8 分) (2015•湖州) 如图, 已知 BC 是 $\odot O$ 的直径, AC 切 $\odot O$ 于点 C , AB 交 $\odot O$ 于点 D , E 为 AC 的中点, 连结 DE .

(1) 若 $AD=DB$, $OC=5$, 求切线 AC 的长;

(2) 求证: ED 是 $\odot O$ 的切线.

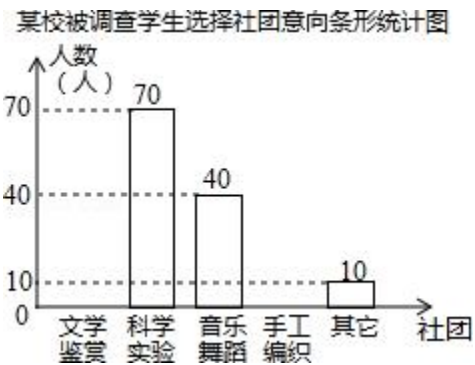


21. (8 分) (2015•湖州) 为了深化课程改革, 某校积极开展校本课程建设, 计划成立“文学鉴赏”、“科学实验”、“音乐舞蹈”和“手工编织”等多个社团, 要求每位学生都自主选择其中一个社团. 为此, 随机调查了本校各年级部分学生选择社团的意向, 并将调查结果绘制成如下统计图表 (不完整):

选择意向	所占百分比
文学鉴赏	a
科学实验	35%
音乐舞蹈	b
手工编织	10%
其他	c

根据统计图表中的信息, 解答下列问题:

- (1) 求本次调查的学生总人数及 a, b, c 的值;
- (2) 将条形统计图补充完整;
- (3) 若该校共有 1200 名学生, 试估计全校选择“科学实验”社团的学生人数.



22. (10 分) (2015•湖州) 某工厂计划在规定时间内生产 24000 个零件. 若每天比原计划多生产 30 个零件, 则在规定时间内可以多生产 300 个零件.

- (1) 求原计划每天生产的零件个数和规定的天数;
- (2) 为了提前完成生产任务, 工厂在安排原有工人按原计划正常生产的同时, 引进 5 组机器人生产流水线共同参与零件生产, 已知每组机器人生产流水线每天生产零件的个数比 20 个工人原计划每天生产的零件总数还多 20%. 按此测算, 恰好提前两天完成 24000 个零件的生产任务, 求原计划安排的工人人数.

23. (10 分) (2015•湖州) 问题背景

已知在 $\triangle ABC$ 中, AB 边上的动点 D 由 A 向 B 运动 (与 A, B 不重合), 点 E 与点 D 同时出发, 由点 C 沿 BC 的延长线方向运动 (E 不与 C 重合), 边结 DE 交 AC 于点 F , 点 H 是线段 AF 上一点.

(1) 初步尝试

如图 1, 若 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $DH \perp AC$, 且点 D, E 的运动速度相等.

求证: $HF = AH + CF$.

小五同学发现可以由以下两种思路解决此问题:

思路一: 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G , 先证 $DH = AH$, 再证 $GF = CF$, 从而证得结论成立;

思路二: 过点 E 作 $EM \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 M , 先证 $CM = AH$, 再证 $HF = MF$, 从而证得结论成立.

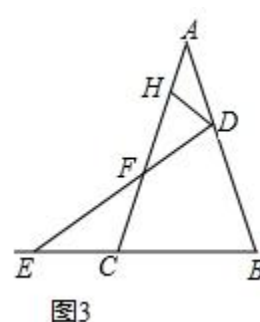
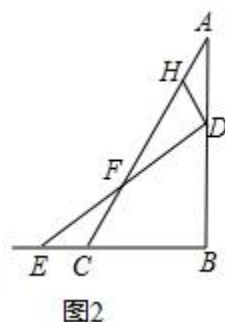
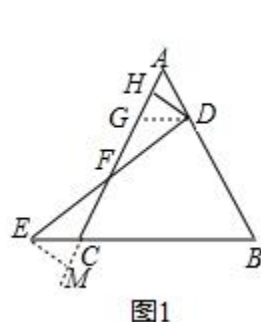
请你任选一种思路, 完整地书写本小题的证明过程 (如用两种方法作答, 则以第一种方法评分);

(2) 类比探究

如图 2, 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ADH = \angle BAC = 36^\circ$, 且 D, E 的运动速度之比是 $\sqrt{3}:1$, 求 $\frac{AC}{HF}$ 的值;

(3) 延伸拓展

如图 3, 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ADH = \angle BAC = 36^\circ$, 记 $\frac{BC}{AB} = m$, 且点 D, E 运动速度相等, 试用含 m 的代数式表示 $\frac{AC}{HF}$ (直接写出结果, 不必写解答过程).



24. (12 分) (2015•湖州) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 线段 AB 的两个端点 $A(0, 2)$, $B(1, 0)$ 分别在 y 轴和 x 轴的正半轴上, 点 C 为线段 AB 的中点, 现将线段 BA 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 BD , 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 D .

(1) 如图 1, 若该抛物线经过原点 O , 且 $a = -\frac{1}{3}$.

①求点 D 的坐标及该抛物线的解析式;

②连结 CD , 问: 在抛物线上是否存在点 P , 使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余? 若存在, 请求出所有满足条件的点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由;

(2) 如图 2, 若该抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 $E(1, 1)$, 点 Q 在抛物线上, 且满足 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余. 若符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 请直接写出 a 的取值范围.

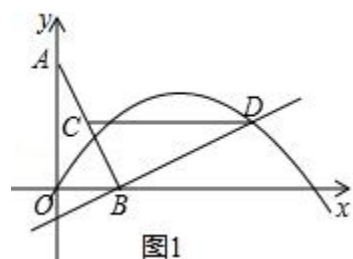


图1

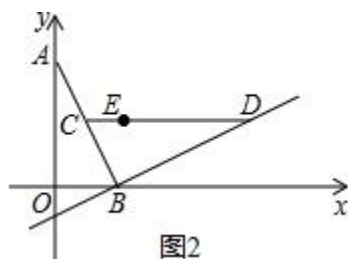


图2

2015 年浙江省湖州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2015•湖州) -5 的绝对值为 ()

- A. -5 B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

考点: 绝对值.

分析: 根据绝对值的概念: 数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值可直接得到答案.

解答: 解: -5 的绝对值为 5 ,

故选: B.

点评: 此题主要考查了绝对值, 关键是掌握绝对值规律总结: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0 .

2. (3 分) (2015•湖州) 当 $x=1$ 时, 代数式 $4-3x$ 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

考点: 代数式求值.

专题: 计算题.

分析: 把 x 的值代入原式计算即可得到结果.

解答: 解: 当 $x=1$ 时, 原式 $=4-3=1$,

故选 A.

点评: 此题考查了代数式求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

3. (3 分) (2015•湖州) 4 的算术平方根是 ()

- A. ± 2 B. 2 C. -2 D. $\sqrt{2}$

考点: 算术平方根.

分析: 根据开方运算, 可得一个数的算术平方根.

解答: 解: 4 的算术平方根是 2,

故选: B.

点评: 本题考查了算术平方根, 注意一个正数只有一个算术平方根.

4. (3 分) (2015•湖州) 若一个圆锥的侧面展开图是半径为 18cm, 圆心角为 240° 的扇形, 则这个圆锥的底面半径长是 ()

- A. 6cm B. 9cm C. 12cm D. 18cm

考点: 圆锥的计算.

分析: 利用弧长公式可得圆锥的侧面展开图的弧长, 除以 2π 即为圆锥的底面半径.

解答: 解: 圆锥的弧长为: $\frac{240\pi \times 18}{180} = 24\pi$,

$\therefore$ 圆锥的底面半径为 $24\pi \div 2\pi = 12$,

故选 C.

点评: 考查了圆锥的计算, 用到的知识点为: 圆锥的侧面展开图的弧长等于圆锥的底面周长;

5. (3 分) (2015•湖州) 已知一组数据的方差是 3, 则这组数据的标准差是 ()

- A. 9 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{3}$

考点: 标准差; 方差.

分析: 根据标准差是方差的算术平方根, 即可得出答案.

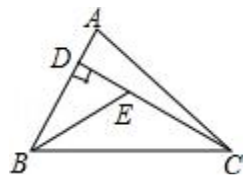
解答: 解: $\because$ 数据的方差是 $S^2 = 3$,

$\therefore$ 这组数据的标准差是 $\sqrt{3}$;

故选 D.

点评: 本题考查了标准差, 关键是掌握标准差和方差的关系, 标准差即方差的算术平方根; 注意标准差和方差一样都是非负数.

6. (3分) (2015•湖州) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 AB 边上的高线, BE 平分 $\angle ABC$, 交 CD 于点 E , $BC=5$, $DE=2$, 则 $\triangle BCE$ 的面积等于 ()



- A. 10 B. 7 C. 5 D. 4

考点: 角平分线的性质.

分析: 作 $EF \perp BC$ 于 F , 根据角平分线的性质求得 $EF=DE=2$, 然后根据三角形面积公式求得即可.

解答: 解: 作 $EF \perp BC$ 于 F ,

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $ED \perp AB$, $EF \perp BC$,

$\therefore EF=DE=2$,

$$\therefore S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5,$$

故选 C.

点评: 本题考查了角的平分线的性质以及三角形的面积, 作出辅助线求得三角形的高是解题的关键.

7. (3分) (2015•湖州) 一个布袋内只装有 1 个黑球和 2 个白球, 这些球除颜色外其余都相同, 随机摸出一个球后放回并搅匀, 再随机摸出一个球, 则两次摸出的球都是黑球的概率是 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

考点: 列表法与树状图法.

分析: 列表将所有等可能的结果列举出来, 利用概率公式求解即可.

解答: 解: 列表得:

	黑	白	白
黑	(黑, 黑)	(黑, 白)	(黑, 白)
白	(白, 黑)	(白, 白)	(白, 白)

白	(黑, 白)	(白, 白)	(白, 白)
---	--------	--------	--------

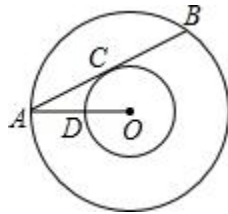
∴共 9 种等可能的结果，两次都是黑色的情况有 1 种，

∴两次摸出的球都是黑球的概率为 $\frac{1}{9}$ ，

故选 D.

点评: 本题考查了列表法与树状图法的知识，解决本题时采用了两个独立事件同时发生的概率等于两个独立事件单独发生的概率的积，难度不大.

8. (3 分) (2015•湖州) 如图，以点 O 为圆心的两个圆中，大圆的弦 AB 切小圆于点 C，OA 交小圆于点 D，若 $OD=2$ ， $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$ ，则 AB 的长是 ()



- A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. 8 D. $4\sqrt{3}$

考点: 切线的性质.

分析: 连接 OC，利用切线的性质知 $OC \perp AB$ ，由垂径定理得 $AB=2AC$ ，因为 $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$ ，

易得 $\frac{OC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，代入得结果.

解答: 解：连接 OC，

∵大圆的弦 AB 切小圆于点 C，

∴ $OC \perp AB$ ，

∴ $AB=2AC$ ，

∵ $OD=2$ ，

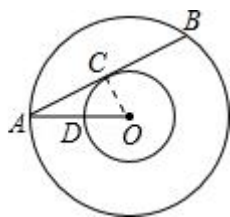
∴ $OC=2$ ，

∵ $\tan \angle OAB = \frac{1}{2}$ ，

∴ $AC=4$ ，

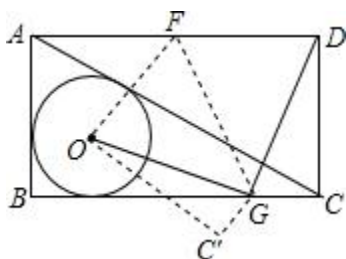
∴ $AB=8$ ，

故选 C.



点评: 本题主要考查了切线的性质和垂径定理, 连接过切点的半径是解答此题的关键.

9. (3 分) (2015•湖州) 如图, AC 是矩形 ABCD 的对角线, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 现将矩形 ABCD 按如图所示的方式折叠, 使点 D 与点 O 重合, 折痕为 FG. 点 F, G 分别在边 AD, BC 上, 连结 OG, DG. 若 $OG \perp DG$, 且 $\odot O$ 的半径长为 1, 则下列结论不成立的是 ()

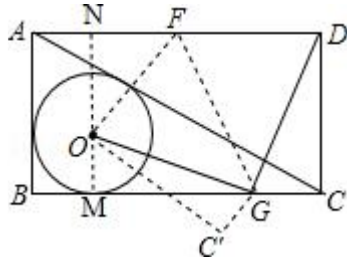


- A. $CD+DF=4$ B. $CD-DF=2\sqrt{3}-3$ C. $BC+AB=2\sqrt{3}+4$ D. $BC-AB=2$

考点: 三角形的内切圆与内心; 翻折变换 (折叠问题).

分析: 设 $\odot O$ 与 BC 的切点为 M, 连接 MO 并延长 MO 交 AD 于点 N, 证明 $\triangle OMG \cong \triangle GCD$, 得到 $OM=GC=1$, $CD=GM=BC-BM-GC=BC-2$. 设 $AB=a$, $BC=b$, $AC=c$, $\odot O$ 的半径为 r , $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆可得 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, 所以 $c=a+b-2$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用勾股定理求得 $a_1=1+\sqrt{3}$, $a_2=1-\sqrt{3}$ (舍去), 从而求出 a , b 的值, 所以 $BC+AB=2\sqrt{3}+4$. 再设 $DF=x$, 在 $\text{Rt}\triangle ONF$ 中, $FN=3+\sqrt{3}-1-x$, $OF=x$, $ON=1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$, 由勾股定理可得 $(2+\sqrt{3}-x)^2+(\sqrt{3})^2=x^2$, 解得 $x=4-\sqrt{3}$, 从而得到 $CD-DF=\sqrt{3}+1-(4-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$, $CD+DF=\sqrt{3}+1+4-\sqrt{3}=5$. 即可解答.

解答: 解: 如图,



设 $\odot O$ 与BC的切点为M, 连接MO并延长MO交AD于点N,

$\therefore$ 将矩形ABCD按如图所示的方式折叠, 使点D与点O重合, 折痕为FG,

$\therefore OG=DG$,

$\therefore OG \perp DG$,

$\therefore \angle MGO + \angle DGC = 90^\circ$,

$\therefore \angle MOG + \angle MGO = 90^\circ$,

$\therefore \angle MOG = \angle DGC$,

在 $\triangle OMG$ 和 $\triangle GCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle OMG = \angle DCG = 90^\circ \\ \angle MOG = \angle DGC \\ OG = DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle OMG \cong \triangle GCD$,

$\therefore OM = GC = 1$, $CD = GM = BC - BM - GC = BC - 2$.

$\therefore AB = CD$,

$\therefore BC - AB = 2$.

设 $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $\odot O$ 的半径为 r ,

$\odot O$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的内切圆可得 $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$,

$\therefore c = a+b-2$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, 由勾股定理可得 $a^2 + b^2 = (a+b-2)^2$,

整理得 $2ab - 4a - 4b + 4 = 0$,

又 $\therefore BC - AB = 2$ 即 $b = 2+a$, 代入可得 $2a(2+a) - 4a - 4(2+a) + 4 = 0$,

解得 $a_1 = 1 + \sqrt{3}$, $a_2 = 1 - \sqrt{3}$ (舍去),

$\therefore a = 1 + \sqrt{3}$, $b = 3 + \sqrt{3}$,

$\therefore BC + AB = 2\sqrt{3} + 4$.

再设 $DF=x$ ，在 $Rt\triangle ONF$ 中， $FN=3+\sqrt{3}-1-x$ ， $OF=x$ ， $ON=1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$ ，

由勾股定理可得 $(2+\sqrt{3}-x)^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2$ ，

解得 $x=4-\sqrt{3}$ ，

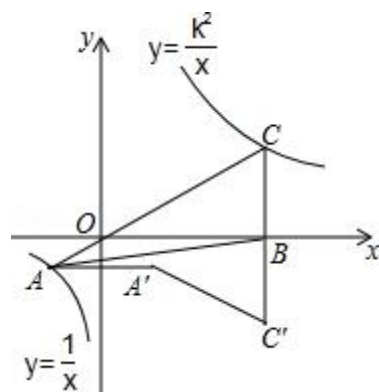
$\therefore CD-DF=\sqrt{3}+1-(4-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$ ， $CD+DF=\sqrt{3}+1+4-\sqrt{3}=5$ 。

综上只有选项 A 错误，

故选 A。

点评： 本题考查了三角形的内切圆和内心，切线的性质，勾股定理，矩形的性质等知识点的综合应用，解决本题的关键是三角形内切圆的性质。

10. (3 分) (2015•湖州) 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中， O 是坐标原点，点 A 是函数 $y=\frac{1}{x}$ ($x<0$) 图象上一点， AO 的延长线交函数 $y=\frac{k^2}{x}$ ($x>0$ ， k 是不等于 0 的常数) 的图象于点 C ，点 A 关于 y 轴的对称点为 A' ，点 C 关于 x 轴的对称点为 C' ，交于 x 轴于点 B ，连结 AB ， AA' ， $A'C'$ 。若 $\triangle ABC$ 的面积等于 6，则由线段 AC ， CC' ， $C'A'$ ， $A'A$ 所围成的图形的面积等于 ()



- A. 8 B. 10 C. $3\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{6}$

考点： 反比例函数综合题。

分析： 过 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D ，连接 OA' ，设 $A(a, \frac{1}{a})$ ， $C(b, \frac{k^2}{b})$ ，由 $\triangle OAD \sim \triangle BCO$ ，

得到 $\frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle BCO}} = (\frac{OD}{OB})^2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，根据反比例函数的系数 k 的几何意义得到 $S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2}$ ，

$S_{\triangle BOC} = \frac{k^2}{2}$, 求出 $k^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, 得到 $k = -\frac{b}{a}$, 根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot b + \frac{k^2}{2} = 6$, 列出关于 k 的方程 $k^2 + k - 12 = 0$, 求得 $k = 3$, 由于点 A 关于 y 轴的对称点为 A' , 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' , 得到 OA' , OC' 在同一条直线上, 于是得到由线段 AC , CC' , $C'A'$, $A'A$ 所围成的图形的面积 $= S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OBC'} + S_{\triangle OAA'} = 10$.

解答: 解: 过 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D , 连接 OA' ,

$\because$ 点 A 是函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x < 0$) 图象上一点,

$\therefore$ 设 $A \left(a, \frac{1}{a}\right)$,

$\because$ 点 C 在函数 $y = \frac{k^2}{x}$ ($x > 0$, k 是不等于 0 的常数) 的图象上,

$\therefore$ 设 $C \left(b, \frac{k^2}{b}\right)$,

$\because AD \perp BD$, $BC \perp BD$,

$\therefore \triangle OAD \sim \triangle BCO$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle BCO}} = \left(\frac{OD}{OB}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$,

$\because S_{\triangle ADO} = \frac{1}{2}$, $S_{\triangle BOC} = \frac{k^2}{2}$,

$\therefore k^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$,

$\therefore k = -\frac{b}{a}$,

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot b + \frac{k^2}{2} = 6$,

$\therefore k^2 - \frac{b}{a} = 12$,

$\therefore k^2 + k - 12 = 0$,

解得: $k = 3$, $k = -4$ (不合题意舍去),

$\because$ 点 A 关于 y 轴的对称点为 A' , 点 C 关于 x 轴的对称点为 C' ,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$,

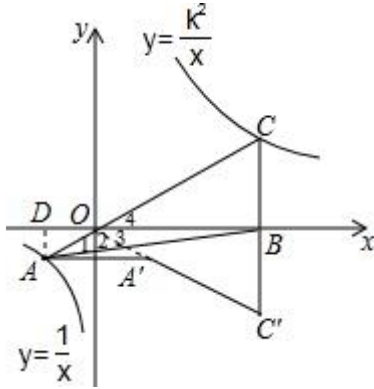
$\therefore OA'$, OC' 在同一条直线上,

$\therefore S_{\triangle OBC'} = S_{\triangle OBC} = \frac{k^2}{2} = \frac{9}{2}$,

$$\because S_{\triangle OAA'} = 2S_{\triangle OAD} = 1,$$

$$\therefore \text{由线段 } AC, CC', C'A', A'A \text{ 所围成的图形的面积} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OBC'} + S_{\triangle OAA'} = 10.$$

故选 B.



点评: 本题考查了反比例函数的图象的性质, 系数 k 的几何意义, 相似三角形的判定和性质, 轴对称的性质, 正确的理解轴对称图形的性质是解题的关键.

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

11. (4 分) (2015•湖州) 计算: $2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{2}$.

考点: 有理数的乘方; 有理数的乘法.

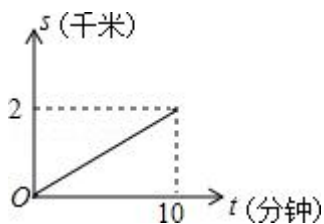
分析: 根据有理数的乘方, 即可解答.

解答: 解: $2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \times \frac{1}{4} = 2,$

故答案为: 2.

点评: 本题考查了有理数的乘方, 解决本题的关键是熟记有理数乘方的定义.

12. (4 分) (2015•湖州) 放学后, 小明骑车回家, 他经过的路程 s (千米) 与所用时间 t (分钟) 的函数关系如图所示, 则小明的骑车速度是 0.2 千米/分钟.



考点: 函数的图象.

分析: 根据函数图象的纵坐标, 可得路程, 根据函数图象的横坐标, 可得时间, 根据路程与时间的关系, 可得答案.

解答: 解: 由纵坐标看出路程是 2 千米,
由横坐标看出时间是 10 分钟,
小明的骑车速度是 $2 \div 10 = 0.2$ (千米/分钟),
故答案为: 0.2.

点评: 本题考查了函数图象, 观察函数图象的纵坐标得出路程, 观察函数图象的横坐标得出时间, 利用了路程与时间的关系.

13. (4 分) (2015•湖州) 在“争创美丽校园, 争做文明学生”示范校评比活动中, 10 位评委给某校的评分情况下表所示:

评分 (分)	80	85	90	95
评委人数	1	2	5	2

则这 10 位评委评分的平均数是 89 分.

考点: 加权平均数.

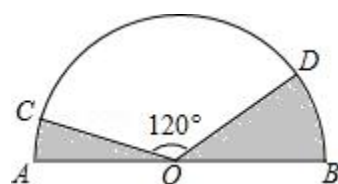
分析: 平均数的计算方法是求出所有数据的和, 然后除以数据的总个数.

解答: 解: 这 10 位评委评分的平均数是:
 $(80 + 85 \times 2 + 90 \times 5 + 95 \times 2) \div 10 = 89$ (分).

故答案为 89.

点评: 本题考查的是加权平均数的求法. 本题易出现的错误是求 80, 85, 90, 95 这四个数的平均数, 对平均数的理解不正确.

14. (4 分) (2015•湖州) 如图, 已知 C, D 是以 AB 为直径的半圆周上的两点, O 是圆心, 半径 $OA = 2$, $\angle COD = 120^\circ$, 则图中阴影部分的面积等于 $\frac{2\pi}{3}$.



考点: 扇形面积的计算.

分析: 图中阴影部分的面积=半圆的面积-圆心角是 120° 的扇形的面积, 根据扇形面积的计算公式计算即可求解.

解答: 解: 图中阴影部分的面积 $= \frac{1}{2}\pi \times 2^2 - \frac{120 \times \pi \times 2^2}{360}$

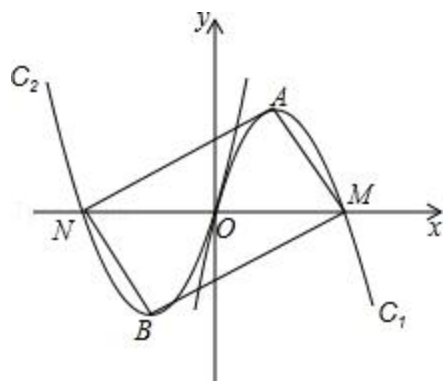
$$= 2\pi - \frac{4}{3}\pi$$
$$= \frac{2}{3}\pi.$$

答: 图中阴影部分的面积等于 $\frac{2}{3}\pi$.

故答案为: $\frac{2}{3}\pi$.

点评: 考查了扇形面积的计算, 求阴影面积的主要思路是将不规则图形面积转化为规则图形的面积.

15. (4分) (2015•湖州) 如图, 已知抛物线 $C_1: y=a_1x^2+b_1x+c_1$ 和 $C_2: y=a_2x^2+b_2x+c_2$ 都经过原点, 顶点分别为 A, B, 与 x 轴的另一交点分别为 M, N, 如果点 A 与点 B, 点 M 与点 N 都关于原点 O 成中心对称, 则称抛物线 C_1 和 C_2 为姐妹抛物线, 请你写出一对姐妹抛物线 C_1 和 C_2 , 使四边形 ANBM 恰好是矩形, 你所写的一对抛物线解析式是 $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$ 和 $y=\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$.



考点: 二次函数图象与几何变换.

专题: 新定义.

分析: 连接 AB, 根据姐妹抛物线的二次项的系数互为相反数, 一次项系数相等且不等于零, 常数项都是零, 设抛物线 C_1 的解析式为 $y=ax^2+bx$,

根据四边形 ANBM 恰好是矩形可得 $\triangle AOM$ 是等边三角形, 设 $OM=2$, 则点 A 的坐标是 $(1, \sqrt{3})$, 求出抛物线 C_1 的解析式, 从而求出抛物线 C_2 的解析式.

解答: 解: 连接 AB,

根据姐妹抛物线的定义, 可得姐妹抛物线的二次项的系数互为相反数, 一次项系数相等且不等于零, 常数项都是零,

设抛物线 C_1 的解析式为 $y=ax^2+bx$,

根据四边形 ANBM 恰好是矩形可得: $OA=OM$,

$\therefore OA=MA$,

$\therefore \triangle AOM$ 是等边三角形,

设 $OM=2$, 则点 A 的坐标是 $(1, \sqrt{3})$,

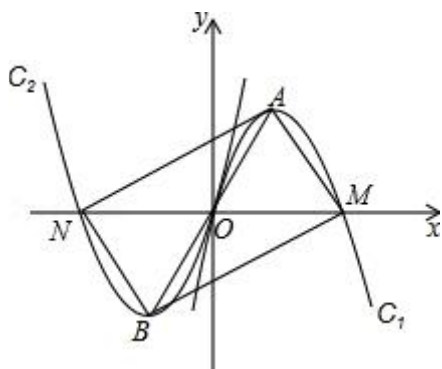
$$\text{则} \begin{cases} \sqrt{3}=a+b \\ 0=4a+2b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-\sqrt{3} \\ b=2\sqrt{3} \end{cases}$$

则抛物线 C_1 的解析式为 $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$,

抛物线 C_2 的解析式为 $y=\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$,

故答案为: $y=-\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x$.

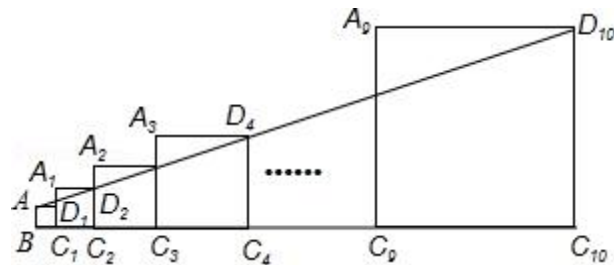


点评: 此题考查了二次函数的图象与几何变换, 用到的知识点是姐妹抛物线的定义、二次函数的图象与性质、矩形的判定, 关键是根据姐妹抛物线的定义得出姐妹抛物线的二次项的系数、一次项系数、常数项之间的关系.

16. (4 分) (2015•湖州) 已知正方形 ABC_1D_1 的边长为 1, 延长 C_1D_1 到 A_1 , 以 A_1C_1 为边向右作正方形 $A_1C_1C_2D_2$, 延长 C_2D_2 到 A_2 , 以 A_2C_2 为边向右作正方形 $A_2C_2C_3D_3$ (如图所

示), 以此类推.... 若 $A_1C_1=2$, 且点 $A, D_2, D_3, \dots, D_{10}$ 都在同一直线上, 则正方形 $A_9C_9C_{10}D_{10}$

的边长是 $\frac{3^8}{2^7}$.



考点: 相似三角形的判定与性质; 正方形的性质.

专题: 规律型.

分析: 延长 D_4A 和 C_1B 交于 O , 根据正方形的性质和三角形相似的性质即可求得各个正方形的边长, 从而得出规律, 即可求得正方形 $A_9C_9C_{10}D_{10}$ 的边长.

解答: 解: 延长 D_4A 和 C_1B 交于 O ,

$$\because AB \parallel A_2C_1,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle D_2OC_2,$$

$$\therefore \frac{OB}{OC_2} = \frac{AB}{D_2C_2},$$

$$\because AB=BC_1=1, D_2C_2=C_1C_2=2,$$

$$\therefore \frac{OB}{OC_2} = \frac{AB}{D_2C_2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore OC_2=2OB,$$

$$\therefore OB=BC_2=3,$$

$$\therefore OC_2=6,$$

设正方形 $A_2C_2C_3D_3$ 的边长为 x_1 ,

同理证得: $\triangle D_2OC_2 \sim \triangle D_3OC_3$,

$$\therefore \frac{2}{x_1} = \frac{6}{6+x_1}, \text{ 解得, } x_1=3,$$

$\therefore$ 正方形 $A_2C_2C_3D_3$ 的边长为 3,

设正方形 $A_3C_3C_4D_4$ 的边长为 x_2 ,

同理证得: $\triangle D_3OC_3 \sim \triangle D_4OC_4$,

$$\therefore \frac{3}{x_2} = \frac{9}{9+x_2}, \text{ 解得 } x_2 = \frac{9}{2},$$

$\therefore$ 正方形 $A_3C_3C_4D_4$ 的边长为 $\frac{9}{2}$;

设正方形 $A_4C_4C_5D_5$ 的边长为 x_3 ,

同理证得: $\triangle D_4OC_4 \sim \triangle D_5OC_5$,

$$\therefore \frac{\frac{9}{2}}{x_3} = \frac{\frac{27}{2}}{\frac{27}{2}+x_3}, \text{ 解得 } x = \frac{27}{4},$$

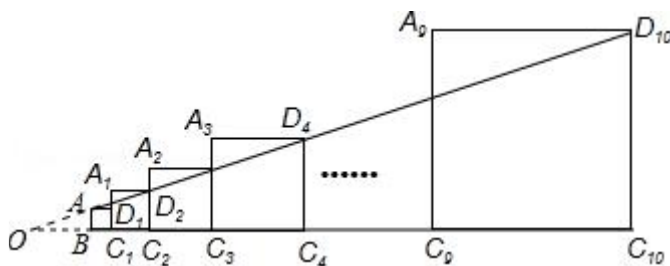
$\therefore$ 正方形 $A_4C_4C_5D_5$ 的边长为 $\frac{27}{4}$;

以此类推....

正方形 $A_{n-1}C_{n-1}C_nD_n$ 的边长为 $\frac{3^{n-2}}{2^{n-3}}$;

$\therefore$ 正方形 $A_9C_9C_{10}D_{10}$ 的边长为 $\frac{3^8}{2^7}$.

故答案为 $\frac{3^8}{2^7}$.



点评: 本题考查了正方形的性质, 相似三角形的判定和性质, 求得前五个正方形的边长得出规律是解题的关键.

三、解答题 (本题有 8 个小题, 共 66 分)

17. (6 分) (2015•湖州) 计算: $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$.

考点: 分式的加减法.

专题：计算题.

分析：原式利用同分母分式的减法法则计算，约分即可得到结果.

解答：解：原式 $=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b.$

点评：此题考查了分式的加减法，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (6分) (2015•湖州) 解不等式组 $\begin{cases} x-2 < 4 \\ 2x-1 > 1 \end{cases}.$

考点：解一元一次不等式组.

分析：先求出每个不等式的解集，再根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集即可.

解答：解： $\begin{cases} x-2 < 4 \textcircled{1} \\ 2x-1 > 1 \textcircled{2} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得： $x < 6$,

解不等式②得： $x > 1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $1 < x < 6$.

点评：本题考查了解一元一次不等式组的应用，解此题的关键是能根据不等式的解集求出不等式组的解集，难度适中.

19. (6分) (2015•湖州) 已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=3$ 时， $y=1$ ；当 $x=-2$ 时， $y=-4$ ，求这个一次函数的解析式.

考点：待定系数法求一次函数解析式.

分析：一次函数解析式为 $y=kx+b$ ，将 x 与 y 的两对值代入求出 k 与 b 的值，即可确定出一次函数解析式.

解答：解：设一次函数解析式为 $y=kx+b$,

将 $x=3$, $y=1$; $x=-2$, $y=-4$ 代入得： $\begin{cases} 3k+b=1 \\ -2k+b=-4 \end{cases},$

解得： $k=1$, $b=-2$.

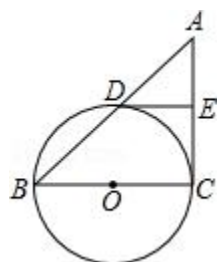
则一次函数解析式为 $y=x-2$.

点评: 此题考查了待定系数法求一次函数解析式, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

20. (8分) (2015•湖州) 如图, 已知 BC 是 $\odot O$ 的直径, AC 切 $\odot O$ 于点 C , AB 交 $\odot O$ 于点 D , E 为 AC 的中点, 连结 DE .

(1) 若 $AD=DB$, $OC=5$, 求切线 AC 的长;

(2) 求证: ED 是 $\odot O$ 的切线.



考点: 切线的判定与性质.

分析: (1) 连接 CD , 由直径所对的圆周角为直角可得: $\angle BDC=90^\circ$, 即可得: $CD \perp AB$, 然后根据 $AD=DB$, 进而可得 CD 是 AB 的垂直平分线, 进而可得 $AC=BC=2OC=10$;

(2) 连接 OD , 先由直角三角形中线的性质可得 $DE=EC$, 然后根据等边对等角可得 $\angle 1=\angle 2$, 由 $OD=OC$, 根据等边对等角可得 $\angle 3=\angle 4$, 然后根据切线的性质可得 $\angle 2+\angle 4=90^\circ$, 进而可得: $\angle 1+\angle 3=90^\circ$, 进而可得: $DE \perp OD$, 从而可得: ED 是 $\odot O$ 的切线.

解答: (1) 解: 连接 CD ,

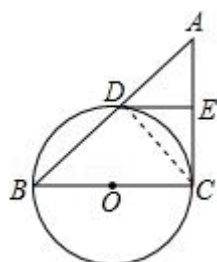


图1

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BDC=90^\circ$,

即 $CD \perp AB$,

$\because AD=DB$, $OC=5$,

$\therefore CD$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AC=BC=2OC=10;$$

(2) 证明: 连接 OD, 如图所示,

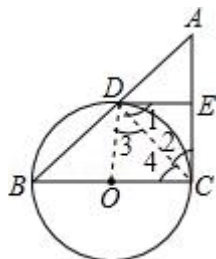


图2

$\because \angle ADC=90^\circ$, E 为 AC 的中点,

$$\therefore DE=EC=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle 1=\angle 2,$$

$$\because OD=OC,$$

$$\therefore \angle 3=\angle 4,$$

$\because AC$ 切 $\odot O$ 于点 C,

$$\therefore AC \perp OC,$$

$$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=90^\circ,$$

即 $DE \perp OD$,

$\therefore ED$ 是 $\odot O$ 的切线.

点评: 此题考查了切线的判定与性质, 解题的关键是: 熟记切线的判定定理与性质定理, 经过半径的外端, 并且垂直于这条半径的直线是圆的切线; 圆的切线垂直于过切点的直径.

21. (8 分) (2015•湖州) 为了深化课程改革, 某校积极开展校本课程建设, 计划成立“文学鉴赏”、“科学实验”、“音乐舞蹈”和“手工编织”等多个社团, 要求每位学生都自主选择其中一个社团. 为此, 随机调查了本校各年级部分学生选择社团的意向, 并将调查结果绘制成如下统计图表 (不完整):

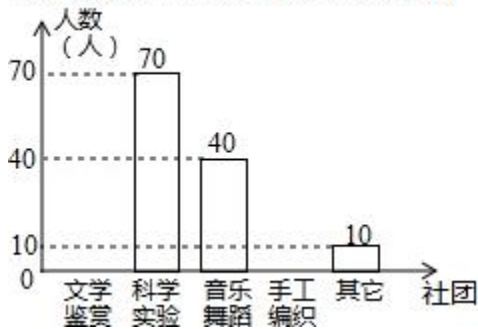
选择意向	所占百分比
文学鉴赏	a
科学实验	35%

音乐舞蹈	b
手工编织	10%
其他	c

根据统计图表中的信息，解答下列问题：

- (1) 求本次调查的学生总人数及 a, b, c 的值；
- (2) 将条形统计图补充完整；
- (3) 若该校共有 1200 名学生，试估计全校选择“科学实验”社团的学生人数.

某校被调查学生选择社团意向条形统计图



考点：条形统计图；用样本估计总体；统计表.

分析： (1) 先计算出本次调查的学生总人数，再分别计算出百分比，即可解答；

(2) 根据百分比，计算出文学鉴赏和手工编织的人数，即可补全条形统计图；

(3) 用总人数乘以“科学实验”社团的百分比，即可解答.

解答： 解：(1) 本次调查的学生总人数是： $70 \div 35\% = 200$ (人)，

$$b = 40 \div 200 = 20\%,$$

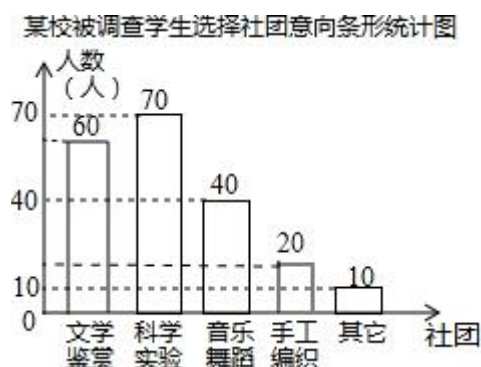
$$c = 10 \div 200 = 5\%,$$

$$a = 1 - (35\% + 20\% + 10\% + 5\%) = 30\%.$$

(2) 文学鉴赏的人数： $30\% \times 200 = 60$ (人)，

手工编织的人数： $10\% \times 200 = 20$ (人)，

如图所示，



(3) 全校选择“科学实验”社团的学生人数： $1200 \times 35\% = 420$ (人)。

点评： 本题考查条形统计图，解决本题的关键是读懂图形，获取相关信息。

22. (10 分) (2015•湖州) 某工厂计划在规定时间内生产 24000 个零件. 若每天比原计划多生产 30 个零件, 则在规定时间内可以多生产 300 个零件.

(1) 求原计划每天生产的零件个数和规定的天数;

(2) 为了提前完成生产任务, 工厂在安排原有工人按原计划正常生产的同时, 引进 5 组机器人生产流水线共同参与零件生产, 已知每组机器人生产流水线每天生产零件的个数比 20 个工人原计划每天生产的零件总数还多 20%. 按此测算, 恰好提前两天完成 24000 个零件的生产任务, 求原计划安排的工人人数.

考点： 分式方程的应用；一元一次方程的应用.

分析： (1) 可设原计划每天生产的零件 x 个, 根据时间是一定的, 列出方程求得原计划每天生产的零件个数, 再根据工作时间=工作总量÷工作效率, 即可求得规定的天数;

(2) 可设原计划安排的工人人数为 y 人, 根据等量关系: 恰好提前两天完成 24000 个零件的生产任务, 列出方程求解即可.

解答： 解: (1) 设原计划每天生产的零件 x 个, 依题意有

$$\frac{24000}{x} - \frac{24000+300}{x+30},$$

解得 $x=2400$,

经检验, $x=2400$ 是原方程的根, 且符合题意.

$\therefore$ 规定的天数为 $24000 \div 2400 = 10$ (天).

答: 原计划每天生产的零件 2400 个, 规定的天数是 10 天;

(2) 设原计划安排的工人人数为 y 人, 依题意有

$$[5 \times 20 \times (1+20\%) \times \frac{2400}{y} + 2400] \times (10-2) = 24000,$$

解得 $y=480$,

经检验, $y=480$ 是原方程的根, 且符合题意.

答: 原计划安排的工人人数为 480 人.

点评: 考查了分式方程的应用, 一元一次方程的应用, 分析题意, 找到关键描述语, 找到合适的等量关系是解决问题的关键. 此题等量关系比较多, 主要用到公式: 工作总量=工作效率 $\times$ 工作时间.

23. (10 分) (2015•湖州) 问题背景

已知在 $\triangle ABC$ 中, AB 边上的动点 D 由 A 向 B 运动 (与 A , B 不重合), 点 E 与点 D 同时出发, 由点 C 沿 BC 的延长线方向运动 (E 不与 C 重合), 边结 DE 交 AC 于点 F , 点 H 是线段 AF 上一点.

(1) 初步尝试

如图 1, 若 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $DH \perp AC$, 且点 D , E 的运动速度相等.

求证: $HF=AH+CF$.

小五同学发现可以由以下两种思路解决此问题:

思路一: 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G , 先证 $DH=AH$, 再证 $GF=CF$, 从而证得结论成立;

思路二: 过点 E 作 $EM \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 M , 先证 $CM=AH$, 再证 $HF=MF$, 从而证得结论成立.

请你任选一种思路, 完整地书写本小题的证明过程 (如用两种方法作答, 则以第一种方法评分);

(2) 类比探究

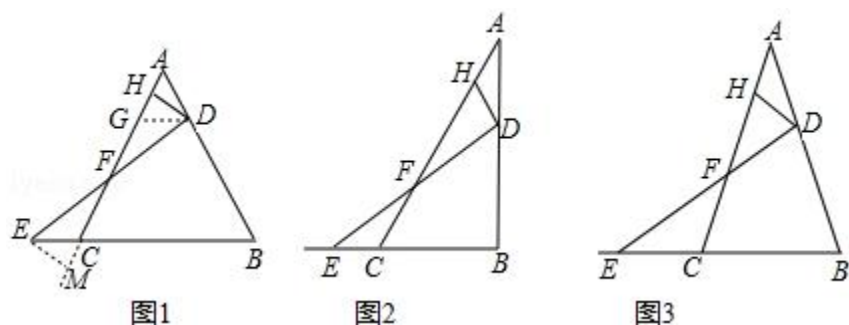
如图 2, 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle ADH=\angle BAC=36^\circ$, 且 D , E 的运动速度之比是 $\sqrt{3}:1$,

求 $\frac{AC}{HF}$ 的值;

(3) 延伸拓展

如图 3, 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle ADH=\angle BAC=36^\circ$, 记 $\frac{BC}{AB}=m$, 且点 D , E 运动速度相

等, 试用含 m 的代数式表示 $\frac{AC}{HF}$ (直接写出结果, 不必写解答过程).



考点: 相似形综合题.

分析: (1) 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 先证明 $\triangle ADG$ 是等边三角形, 得出 $GD=AD=CE$, 再证明 $GH=AH$, 由 ASA 证明 $\triangle GDF \cong \triangle CEF$, 得出 $GF=CF$, 即可得出结论;

(2) 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 先证出 $AH=GH=GD$, $AD=\sqrt{3}GD$, 由题意 $AD=\sqrt{3}CE$, 得出 $GD=CE$, 再证明 $\triangle GDF \cong \triangle CEF$, 得出 $GF=CF$, 即可得出结论;

(3) 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 先证出 $DG=DH=AH$, 再证明 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$, $\triangle ADG \sim \triangle DGH$, $\triangle DGH \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{DG}{AD} = \frac{BC}{AB} = m$, $\frac{GF}{CF} = \frac{DG}{CE} = \frac{DG}{AD} = m$, $\triangle DGH \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{GH}{DG} = \frac{BC}{AB} = m$, $\frac{GH}{AH} = m$, 证明 $\triangle DFG \sim \triangle EFC$, 得出 $\frac{GF}{FC} = \frac{DG}{CE} = m$, $\frac{GH+GF}{AH+FC} = m$, $\frac{AH+FC}{HF} = \frac{1}{m}$, 即可得出结果.

解答: (1) 证明 (选择思路一): 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 如图 1 所示:

则 $\angle ADG = \angle B$, $\angle AGD = \angle ACB$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle B = \angle ACB = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADG = \angle AGD = \angle A$,

$\therefore \triangle ADG$ 是等边三角形,

$\therefore GD=AD=CE$,

$\because DH \perp AC$,

$\therefore GH=AH$,

$\because DG \parallel BC$,

$\therefore \angle GDF = \angle CEF$, $\angle DGF = \angle ECF$,

在 $\triangle GDF$ 和 $\triangle CEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDF = \angle CEF \\ GD = CE \\ \angle DGF = \angle ECF \end{cases},$$

$\therefore \triangle GDF \cong \triangle CEF$ (ASA),

$\therefore GF = CF$,

$\therefore GH + GF = AH + CF$,

即 $HF = AH + CF$;

(2) 解: 过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 如图 2 所示:

则 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle ADH = 30^\circ$,

$\therefore \angle HGD = \angle HDG = 60^\circ$,

$\therefore AH = GH = GD$, $AD = \sqrt{3}GD$,

根据题意得: $AD = \sqrt{3}CE$,

$\therefore GD = CE$,

$\because DG \parallel BC$,

$\therefore \angle GDF = \angle CEF$, $\angle DGF = \angle ECF$,

在 $\triangle GDF$ 和 $\triangle CEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDF = \angle CEF \\ GD = CE \\ \angle DGF = \angle ECF \end{cases},$$

$\therefore \triangle GDF \cong \triangle CEF$ (ASA),

$\therefore GF = CF$,

$\therefore GH + GF = AH + CF$,

即 $HF = AH + CF$,

$\therefore \frac{AC}{HF} = 2$;

(3) 解: $\frac{AC}{HF} = \frac{m+1}{m}$, 理由如下:

过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 于点 G, 如图 3 所示:

则 $\angle ADG = \angle B$, $\angle AGD = \angle ACB$,

$\because AB = AC$, $\angle BAC = 36^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle B = \angle ADG = \angle AGD = 72^\circ$,

$\therefore \angle ADH = \angle BAC = 36^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore AH=DH, \quad \angle DHG=72^\circ=\angle AGD, \\
&\therefore DG=DH=AH, \quad \triangle ADG \sim \triangle ABC, \quad \triangle ADG \sim \triangle DGH, \\
&\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{BC}{AB} = m, \quad \frac{GF}{CF} = \frac{DG}{CE} = \frac{DG}{AD} = m, \\
&\therefore \triangle DGH \sim \triangle ABC, \\
&\therefore \frac{GH}{DG} = \frac{BC}{AB} = m, \\
&\therefore \frac{GH}{AH} = m, \\
&\therefore DG \parallel BC, \\
&\therefore \triangle DFG \sim \triangle EFC, \\
&\therefore \frac{GF}{FC} = \frac{DG}{CE} = m, \\
&\therefore \frac{GH+GF}{AH+FC} = m, \\
&\text{即 } \frac{HF}{AH+FC} = m, \\
&\therefore \frac{AH+FC}{HF} = \frac{1}{m}, \\
&\therefore \frac{AC}{HF} = \frac{AH+FC+HF}{HF} = \frac{1}{m} + 1 = \frac{m+1}{m}.
\end{aligned}$$

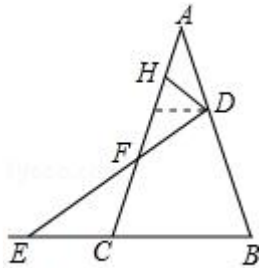


图3

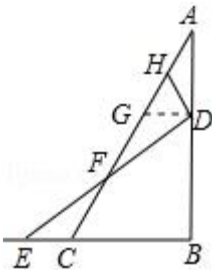
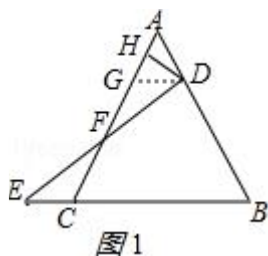


图2



点评: 本题是相似形综合题目,考查了等边三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质等知识;本题难度较大,综合性强,特别是(2)(3)中,需要通过作辅助线证明三角形全等或三角形相似才能得出结论.

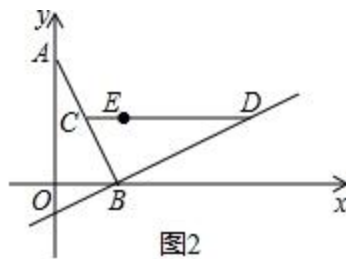
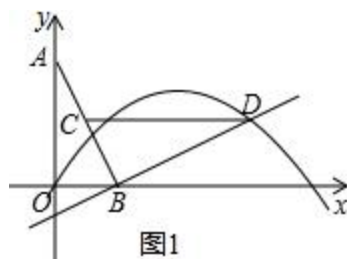
24. (12分) (2015•湖州) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 线段 AB 的两个端点 $A(0, 2)$, $B(1, 0)$ 分别在 y 轴和 x 轴的正半轴上, 点 C 为线段 AB 的中点, 现将线段 BA 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 BD , 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 D .

(1) 如图 1, 若该抛物线经过原点 O , 且 $a = -\frac{1}{3}$.

①求点 D 的坐标及该抛物线的解析式;

②连结 CD , 问: 在抛物线上是否存在点 P , 使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余? 若存在, 请求出所有满足条件的点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由;

(2) 如图 2, 若该抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 $E(1, 1)$, 点 Q 在抛物线上, 且满足 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余. 若符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 请直接写出 a 的取值范围.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) ①过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 先通过三角形全等求得 D 的坐标, 把 D 的坐标和

$a = -\frac{1}{3}$, $c = 0$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 即可求得抛物线的解析式;

②先证得 $CD \parallel x$ 轴, 进而求得要使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余, 则必须 $\angle POB = \angle BAO$,

设 P 的坐标为 $(x, -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x)$, 分两种情况讨论即可求得;

(2) 若符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 则当 $a < 0$ 时, 抛物线交于 y 轴的负半轴, 当 $a > 0$ 时, 最小值得 < -1 , 解不等式即可求得.

解答: 解: (1) ①过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F, 如图 1,

$$\because \angle DBF + \angle ABO = 90^\circ, \quad \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle BAO,$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle BFD = 90^\circ, \quad AB = BD,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle BFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBF = \angle BAO \\ \angle AOB = \angle BFD, \\ AB = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BFD \quad (\text{AAS})$$

$$\therefore DF = BO = 1, \quad BF = AO = 2,$$

$$\therefore D \text{ 的坐标是 } (3, 1),$$

$$\text{根据题意, 得 } a = -\frac{1}{3}, \quad c = 0, \quad \text{且 } a \times 3^2 + b \times 3 + c = 1,$$

$$\therefore b = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{该抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x;$$

② $\because$ 点 A (0, 2), B (1, 0), 点 C 为线段 AB 的中点,

$$\therefore C \left(\frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$\therefore C、D \text{ 两点的纵坐标都为 } 1,$$

$$\therefore CD \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ABO,$$

$$\therefore \angle BAO \text{ 与 } \angle BCD \text{ 互余},$$

要使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余, 则必须 $\angle POB = \angle BAO$,

$$\text{设 } P \text{ 的坐标为 } \left(x, -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \right),$$

(I) 当 P 在 x 轴的上方时, 过 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G, 如图 2,

$$\text{则 } \tan \angle POB = \tan \angle BAO, \quad \text{即 } \frac{PG}{OG} = \frac{BO}{AO},$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x}{x} = \frac{1}{2}, \quad \text{解得 } x_1 = 0 \text{ (舍去)}, \quad x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{5}{4},$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right);$$

(II) 当 P 在 x 轴的上方时, 过 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G, 如图 3

则 $\tan \angle POB = \tan \angle BAO$, 即 $\frac{PG}{OG} = \frac{BO}{AO}$,

$$\therefore \frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x}{x} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } x_1 = 0 \text{ (舍去)}, x_2 = \frac{11}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{11}{4},$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right);$$

综上, 在抛物线上是否存在点 P $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$, 使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余.

(2) 如图 3, $\because D(3, 1), E(1, 1)$,

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 E、D, 代入可得 $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b=-4a \\ c=1+3a \end{cases}$, 所以 $y = ax^2 - 4ax + 1 + 3a$.

分两种情况:

①当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下时, 若满足 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余且符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 则点 Q 在 x 轴的上、下方各有两个.

(i) 当点 Q 在 x 轴的下方时, 直线 OQ 与抛物线有两个交点, 满足条件的 Q 有 2 个;

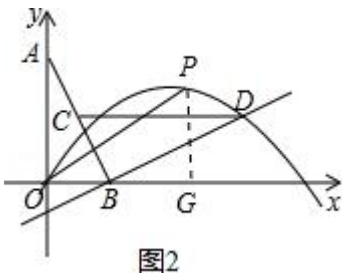
(ii) 当点 Q 在 x 轴的上方时, 要使直线 OQ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 有两个交点, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的交点必须在 x 轴的正半轴上, 与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴, 所以 $3a+1 < 0$, 解得 $a < -\frac{1}{3}$;

②当抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上时, 点 Q 在 x 轴的上、下方各有两个,

(i) 当点 Q 在 x 轴的上方时, 直线 OQ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 有两个交点, 符合条件的点 Q 有两个;

(ii) 当点 Q 在 x 轴的下方时, 要使直线 OQ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 有两个交点, 符合条件的点 Q 才两个.

综上所述, a 的取值范围为 $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > \frac{4+\sqrt{15}}{4}$.



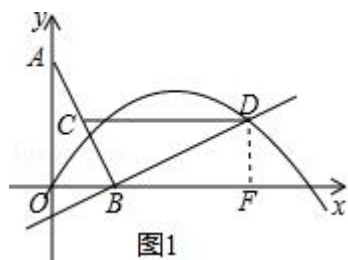


图1

点评: 本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法求二次函数的解析式，正切函数，最小值等，分类讨论的思想是本题的关键.

参与本试卷答题和审题的老师有：sd2011；sks；2300680618；sjzx；张其铎；守拙；fangcao；
sdwdmahongye；王学峰；HJJ；HLing；lantin；zjx111；zcl5287；wdzyzmsy@126.com（排
名不分先后）

菁优网

2015 年 7 月 24 日