

2015 年浙江省杭州市中考数学试卷

一、仔细选一选 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) (2015•杭州) 统计显示, 2013 年底杭州市各类高中在校学生人数大约是 11.4 万人, 将 11.4 万用科学记数法表示应为 ()

- A. 11.4×10^2 B. 1.14×10^3 C. 1.14×10^4 D. 1.14×10^5

2. (3 分) (2015•杭州) 下列计算正确的是 ()

- A. $2^3 + 2^6 = 2^9$ B. $2^3 - 2^4 = 2^{-1}$ C. $2^3 \times 2^3 = 2^9$ D. $2^4 \div 2^2 = 2^2$

3. (3 分) (2015•杭州) 下列图形是中心对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

4. (3 分) (2015•杭州) 下列各式的变形中, 正确的是 ()

- A. $(-x-y)(-x+y) = x^2 - y^2$ B. $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x}{x}$
C. $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 + 1$ D. $x \div (x^2 + x) = \frac{1}{x} + 1$

5. (3 分) (2015•杭州) 圆内接四边形 ABCD 中, 已知 $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle C =$ ()

- A. 20° B. 30° C. 70° D. 110°

6. (3 分) (2015•杭州) 若 $k < \sqrt{90} < k+1$ (k 是整数), 则 $k =$ ()

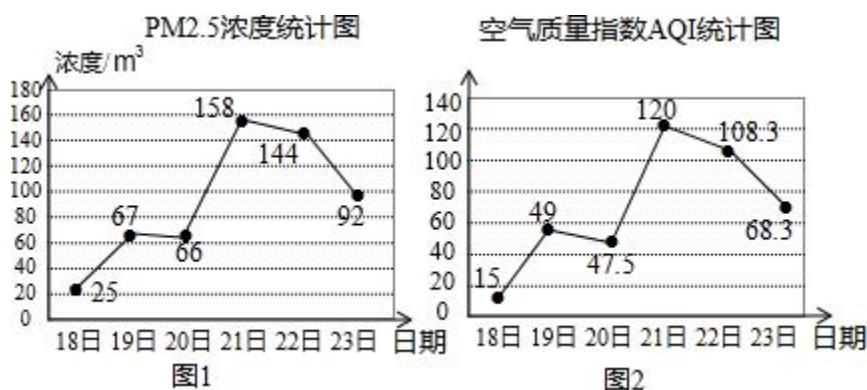
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

7. (3 分) (2015•杭州) 某村原有林地 108 公顷, 旱地 54 公顷, 为保护环境, 需把一部分旱地改造为林地, 使旱地面积占林地面积的 20%. 设把 x 公顷旱地改为林地, 则可列方程 ()

- A. $54 - x = 20\% \times 108$ B. $54 - x = 20\% (108 + x)$
C. $54 + x = 20\% \times 162$ D. $108 - x = 20\% (54 + x)$

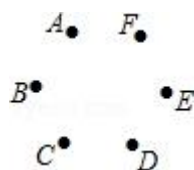
8. (3 分) (2015•杭州) 如图是某地 2 月 18 日到 23 日 PM2.5 浓度和空气质量指数 AQI 的统计图 (当 AQI 不大于 100 时称空气质量为“优良”). 由图可得下列说法: ①18 日的 PM2.5 浓度最低; ②这六天中 PM2.5 浓度的中位数是 $112 \mu\text{g}/\text{m}^3$;

③这六天中有4天空气质量为“优良”；④空气质量指数AQI与PM2.5浓度有关. 其中正确的是 ()



- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

9. (3分) (2015•杭州) 如图, 已知点 A, B, C, D, E, F 是边长为 1 的正六边形的顶点, 连接任意两点均可得到一条线段. 在连接两点所得的所有线段中任取一条线段, 取到长度为 $\sqrt{3}$ 的线段的概率为 ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{9}$

10. (3分) (2015•杭州) 设二次函数 $y_1 = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0, x_1 \neq x_2$) 的图象与一次函数 $y_2 = dx + e$ ($d \neq 0$) 的图象交于点 $(x_1, 0)$, 若函数 $y = y_1 + y_2$ 的图象与 x 轴仅有一个交点, 则 ()

- A. $a(x_1 - x_2) = d$ B. $a(x_2 - x_1) = d$ C. $a(x_1 - x_2)^2 = d$ D. $a(x_1 + x_2)^2 = d$

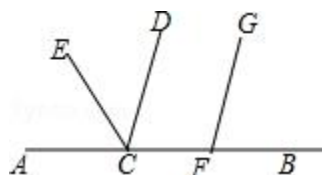
二、认真填一填 (每小题 4 分, 共 24 分)

11. (4分) (2015•杭州) 数据 1, 2, 3, 5, 5 的众数是_____, 平均数是_____.

12. (4分) (2015•杭州) 分解因式: $m^3n - 4mn =$ _____.

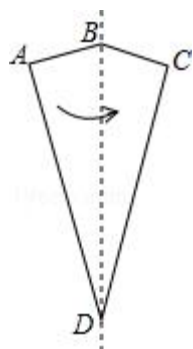
13. (4分) (2015•杭州) 函数 $y=x^2+2x+1$, 当 $y=0$ 时, $x=$ _____ ; 当 $1 < x < 2$ 时, y 随 x 的增大而_____ (填写“增大”或“减小”).

14. (4分) (2015•杭州) 如图, 点 A, C, F, B 在同一直线上, CD 平分 $\angle ECB$, $FG \parallel CD$. 若 $\angle ECA$ 为 α 度, 则 $\angle GFB$ 为_____度 (用关于 α 的代数式表示).



15. (4分) (2015•杭州) 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 设点 $P(1, t)$ 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上, 过点 P 作直线 l 与 x 轴平行, 点 Q 在直线 l 上, 满足 $QP=OP$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 Q , 则 $k=$ _____.

16. (4分) (2015•杭州) 如图, 在四边形纸片 $ABCD$ 中, $AB=BC$, $AD=CD$, $\angle A=\angle C=90^\circ$, $\angle B=150^\circ$. 将纸片先沿直线 BD 对折, 再将对折后的图形沿从一个顶点出发的直线裁剪, 剪开后的图形打开铺平. 若铺平后的图形中有一个是面积为 2 的平行四边形, 则 $CD=$ _____.

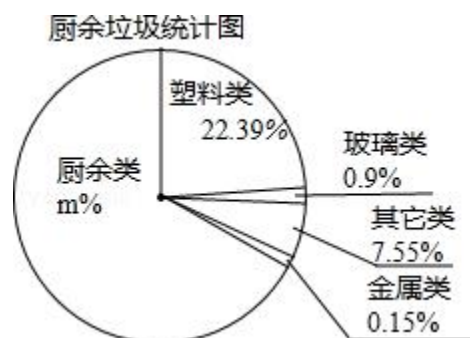


三、全面答一答 (共 66 分)

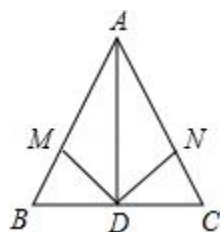
17. (6分) (2015•杭州) 杭州市推行垃圾分类已经多年, 但在剩余垃圾中除了厨余类垃圾还混杂着非厨余类垃圾. 如图是杭州某一天收到的厨余垃圾的统计图.

(1) 试求出 m 的值;

(2) 杭州市某天收到厨余垃圾约 200 吨，请计算其中混杂着的玻璃类垃圾的吨数.

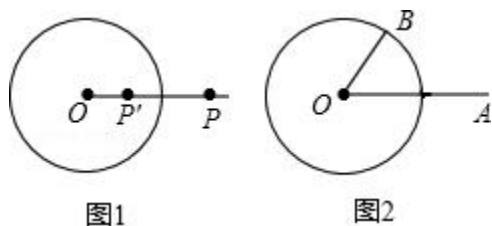


18. (8 分) (2015•杭州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，点 M ， N 分别在 AB ， AC 边上， $AM=2MB$ ， $AN=2NC$ 。求证： $DM=DN$ 。



19. (8 分) (2015•杭州) 如图 1， $\odot O$ 的半径为 r ($r > 0$)，若点 P' 在射线 OP 上，满足 $OP' \cdot OP = r^2$ ，则称点 P' 是点 P 关于 $\odot O$ 的“反演点”。

如图 2， $\odot O$ 的半径为 4，点 B 在 $\odot O$ 上， $\angle BOA = 60^\circ$ ， $OA = 8$ ，若点 A' ， B' 分别是点 A ， B 关于 $\odot O$ 的反演点，求 $A'B'$ 的长。

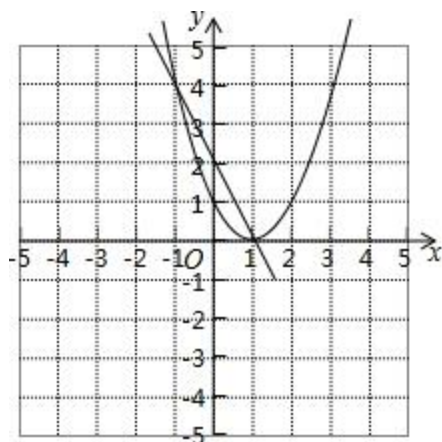


20. (10 分) (2015•杭州) 设函数 $y = (x - 1) [(k - 1)x + (k - 3)]$ (k 是常数)。

(1) 当 k 取 1 和 2 时的函数 y_1 和 y_2 的图象如图所示，请你在同一直角坐标系中画出当 k 取 0 时的函数的图象；

(2) 根据图象，写出你发现的一条结论；

(3) 将函数 y_2 的图象向左平移 4 个单位，再向下平移 2 个单位，得到的函数 y_3 的图象，求函数 y_3 的最小值.



21. (10 分) (2015•杭州) “综合与实践”学习活动准备制作一组三角形，记这些三角形的三边分别为 a , b , c ，并且这些三角形三边的长度为大于 1 且小于 5 的整数个单位长度.

(1) 用记号 (a, b, c) ($a \leq b \leq c$) 表示一个满足条件的三角形，如 $(2, 3, 3)$ 表示边长分别为 2, 3, 3 个单位长度的一个三角形. 请列举出所有满足条件的三角形.

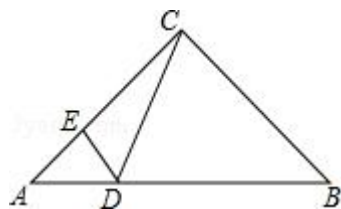
(2) 用直尺和圆规作出三边满足 $a < b < c$ 的三角形 (用给定的单位长度，不写作法，保留作图痕迹).

1
单位长度

22. (12 分) (2015•杭州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中 ($BC > AC$)， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 AB 边上， $DE \perp AC$ 于点 E .

(1) 若 $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$ ， $AE = 2$ ，求 EC 的长；

(2) 设点 F 在线段 EC 上, 点 G 在射线 CB 上, 以 F, C, G 为顶点的三角形与 $\triangle EDC$ 有一个锐角相等, FG 交 CD 于点 P . 问: 线段 CP 可能是 $\triangle CFG$ 的高线还是中线? 或两者都有可能? 请说明理由.



23. (12 分) (2015•杭州) 方成同学看到一则材料: 甲开汽车, 乙骑自行车从 M 地出发沿一条公路匀速前往 N 地. 设乙行驶的时间为 t (h), 甲乙两人之间的距离为 y (km), y 与 t 的函数关系如图 1 所示.

方成思考后发现了如图 1 的部分正确信息: 乙先出发 1h; 甲出发 0.5 小时与乙相遇;

请你帮助方成同学解决以下问题:

- (1) 分别求出线段 BC, CD 所在直线的函数表达式;
- (2) 当 $20 < y < 30$ 时, 求 t 的取值范围;
- (3) 分别求出甲, 乙行驶的路程 $S_{\text{甲}}, S_{\text{乙}}$ 与时间 t 的函数表达式, 并在图 2 所给的直角坐标系中分别画出它们的图象;
- (4) 丙骑摩托车与乙同时出发, 从 N 地沿同一公路匀速前往 M 地, 若丙经过 $\frac{4}{3}h$ 与乙相遇, 问丙出发后多少时间与甲相遇?

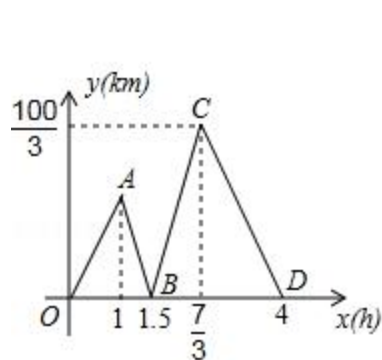


图1

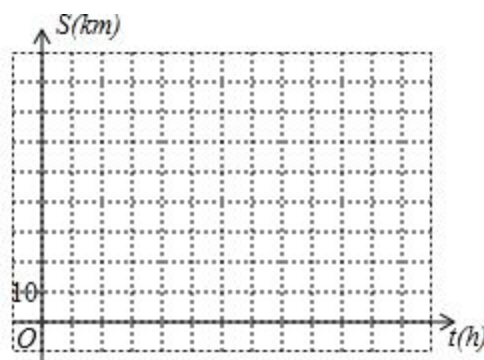


图2

2015 年浙江省杭州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、仔细选一选 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) (2015•杭州) 统计显示, 2013 年底杭州市各类高中在校学生人数大约是 11.4 万人, 将 11.4 万用科学记数法表示应为 ()

- A. 11.4×10^2 B. 1.14×10^3 C. 1.14×10^4 D. 1.14×10^5

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 11.4 万用科学记数法表示为: 1.14×10^5 .

故选 D.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. (3 分) (2015•杭州) 下列计算正确的是 ()

- A. $2^3 + 2^6 = 2^9$ B. $2^3 - 2^4 = 2^{-1}$ C. $2^3 \times 2^3 = 2^9$ D. $2^4 \div 2^2 = 2^2$

考点: 同底数幂的除法; 合并同类项; 同底数幂的乘法; 负整数指数幂.

分析: 根据同类项、同底数幂的乘法和同底数幂的除法计算即可.

解答: 解: A、 2^3 与 2^6 不能合并, 错误;

B、 2^3 与 2^4 不能合并, 错误;

C、 $2^3 \times 2^3 = 2^6$ ，错误；

D、 $2^4 \div 2^2 = 2^2$ ，正确；

故选 D.

点评：此题考查同类项、同底数幂的乘法和同底数幂的除法，关键是根据法则进行计算.

3. (3 分) (2015•杭州) 下列图形是中心对称图形的是 ()



考点：中心对称图形.

分析：根据中心对称图形的定义和图形的特点即可求解.

解答：解：由中心对称的定义知，绕一个点旋转 180° 后能与原图重合，则只有选项 A 是中心对称图形.

故选：A.

点评：本题考查了中心对称图形的概念：如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心.

4. (3 分) (2015•杭州) 下列各式的变形中，正确的是 ()

A. $(-x-y)(-x+y) = x^2 - y^2$ B. $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x}{x}$
C. $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 + 1$ D. $x \div (x^2 + x) = \frac{1}{x} + 1$

考点：平方差公式；整式的除法；因式分解-十字相乘法等；分式的加减法.

分析：根据平方差公式和分式的加减以及整式的除法计算即可.

解答：解：A、 $(-x-y)(-x+y)=x^2-y^2$ ，正确；

B、 $\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$ ，错误；

C、 $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ ，错误；

D、 $x\div(x^2+x)=\frac{1}{x+1}$ ，错误；

故选 A.

点评：此题考查平方差公式和分式的加减以及整式的除法，关键是根据法则计算.

5. (3 分) (2015•杭州) 圆内接四边形 ABCD 中，已知 $\angle A=70^\circ$ ，则 $\angle C=(\quad)$

A. 20°

B. 30°

C. 70°

D. 110°

考点：圆内接四边形的性质.

专题：计算题.

分析：直接根据圆内接四边形的性质求解.

解答：解： $\because$ 四边形 ABCD 为圆的内接四边形，

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

故选 D.

点评：本题考查了圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补.

6. (3 分) (2015•杭州) 若 $k < \sqrt{90} < k+1$ (k 是整数)，则 $k=(\quad)$

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

考点：估算无理数的大小.

分析：根据 $\sqrt{81}=9$ ， $\sqrt{100}=10$ ，可知 $9 < \sqrt{90} < 10$ ，依此即可得到 k 的值.

解答：解： $\because k < \sqrt{90} < k+1$ (k 是整数)， $9 < \sqrt{90} < 10$ ，

$\therefore k=9$.

故选：D.

点评： 本题考查了估算无理数的大小，解题关键是估算 $\sqrt{90}$ 的取值范围，从而解决问题.

7. (3 分) (2015•杭州) 某村原有林地 108 公顷，旱地 54 公顷，为保护环境，需把一部分旱地改造为林地，使旱地面积占林地面积的 20%. 设把 x 公顷旱地改为林地，则可列方程 ()

A. $54 - x = 20\% \times 108$

B. $54 - x = 20\% (108 + x)$

C. $54 + x = 20\% \times 162$

D. $108 - x = 20\% (54 + x)$

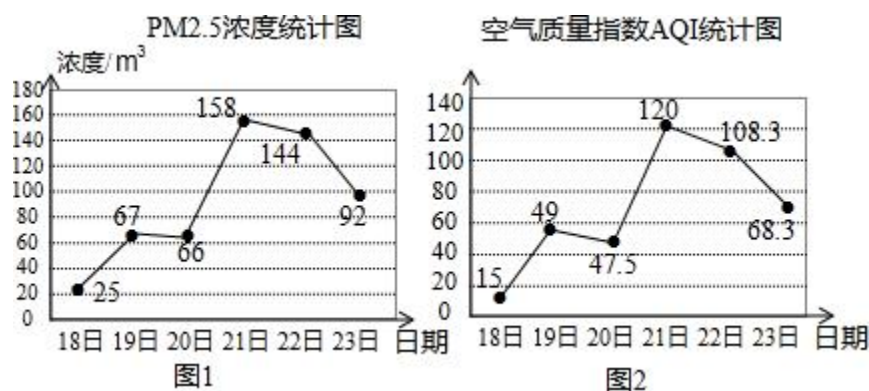
考点： 由实际问题抽象出一元一次方程.

分析： 设把 x 公顷旱地改为林地，根据旱地面积占林地面积的 20% 列出方程即可.

解答： 解：设把 x 公顷旱地改为林地，根据题意可得方程： $54 - x = 20\% (108 + x)$.
故选 B.

点评： 本题考查一元一次方程的应用，关键是设出未知数以以改造后的旱地与林地的关系为等量关系列出方程.

8. (3 分) (2015•杭州) 如图是某地 2 月 18 日到 23 日 PM2.5 浓度和空气质量指数 AQI 的统计图 (当 AQI 不大于 100 时称空气质量为“优良”). 由图可得下列说法：①18 日的 PM2.5 浓度最低；②这六天中 PM2.5 浓度的中位数是 $112\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；③这六天中有 4 天空气质量为“优良”；④空气质量指数 AQI 与 PM2.5 浓度有关. 其中正确的是 ()



- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

考点：折线统计图；中位数.

分析：根据折线统计图提供的信息，逐一分析，即可解答.

解答：解：由图 1 可知，18 日的 PM2.5 浓度为 25ug/m^3 ，浓度最低，故①正确；
这六天中 PM2.5 浓度的中位数是 $\frac{67+92}{2}=79.5\text{ug/m}^3$ ，故②错误；

∵当 AQI 不大于 100 时称空气质量为“优良”，

∴18 日、19 日、20 日、23 日空气质量为优，

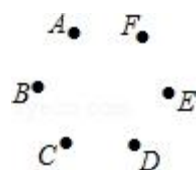
故③正确；

空气质量指数 AQI 与 PM2.5 浓度有关，故④正确；

故选：C.

点评：本题考查了折线统计图，解决本题的关键是从折线统计图中获取相关信息，注意中位数的确定，要先把数据进行排序.

9. (3 分) (2015•杭州) 如图，已知点 A, B, C, D, E, F 是边长为 1 的正六边形的顶点，连接任意两点均可得到一条线段. 在连接两点所得的所有线段中任取一条线段，取到长度为 $\sqrt{3}$ 的线段的概率为 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{9}$

考点：正多边形和圆；勾股定理；概率公式.

分析：利用正六边形的性质以及勾股定理得出 AE 的长, 进而利用概率公式求出即可.

解答：解：连接 AF, EF, AE, 过点 F 作 $FN \perp AE$ 于点 N,

$\because$ 点 A, B, C, D, E, F 是边长为 1 的正六边形的顶点,

$\therefore AF=EF=1, \angle AFE=120^\circ,$

$\therefore \angle FAE=30^\circ,$

$\therefore AN=\frac{\sqrt{3}}{2},$

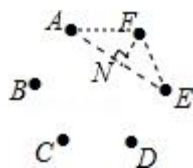
$\therefore AE=\sqrt{3},$ 同理可得: $AC=\sqrt{3},$

故从任意一点, 连接两点所得的所有线段一共有 15 种, 任取一条线段,

取到长度为 $\sqrt{3}$ 的线段有 6 种情况,

则在连接两点所得的所有线段中任取一条线段, 取到长度为 $\sqrt{3}$ 的线段的概率为: $\frac{2}{5}.$

故选: B.



点评：此题主要考查了正多边形和圆, 正确利用正六边形的性质得出 AE 的长是解题关键.

10. (3 分) (2015•杭州) 设二次函数 $y_1=a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0, x_1 \neq x_2$) 的图象与一次函数 $y_2=dx+e$ ($d \neq 0$) 的图象交于点 $(x_1, 0)$, 若函数 $y=y_1+y_2$ 的图象与 x 轴仅有一个交点, 则 ()

A. $a(x_1-x_2)=d$ B. $a(x_2-x_1)=d$ C. $a(x_1-x_2)^2=d$ D. $a(x_1+x_2)^2=d$

考点：抛物线与 x 轴的交点.

分析：首先根据一次函数 $y_2=dx+e$ ($d \neq 0$) 的图象经过点 $(x_1, 0)$ ，可得 $y_2=d(x - x_1)$ ， $y=y_1+y_2=(x - x_1)[a(x - x_2) + d]$ ；然后根据函数 $y=y_1+y_2$ 的图象与 x 轴仅有一个交点，可得函数 $y=y_1+y_2$ 是二次函数，且它的顶点在 x 轴上，即 $y=y_1+y_2=a(x - x_1)^2$ ，推得 $a(x - x_2) + d = a(x - x_1)$ ，令 $x=x_2$ ，即可判断出 $a(x_2 - x_1) = d$.

解答：解：∵一次函数 $y_2=dx+e$ ($d \neq 0$) 的图象经过点 $(x_1, 0)$ ，

$$\therefore dx_1 + e = 0,$$

$$\therefore y_2 = d(x - x_1),$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = a(x - x_1)(x - x_2) + d(x - x_1)$$

$$= (x - x_1)[a(x - x_2) + d]$$

∵函数 $y=y_1+y_2$ 的图象与 x 轴仅有一个交点，

∴函数 $y=y_1+y_2$ 是二次函数，且它的顶点在 x 轴上，

$$\text{即 } y = y_1 + y_2 = a(x - x_1)^2,$$

$$\therefore a(x - x_2) + d = a(x - x_1),$$

令 $x=x_2$ ，可得

$$a(x_2 - x_2) + d = a(x_2 - x_1),$$

$$\therefore a(x_2 - x_1) = d.$$

故选：B.

点评：此题主要考查了抛物线与 x 轴的交点问题，以及曲线上点的坐标与方程的关系，要熟练掌握，解答此题的关键是判断出：函数 $y=y_1+y_2$ 是二次函数，且 $y=y_1+y_2=a(x - x_1)^2$.

二、认真填一填（每小题 4 分，共 24 分）

11. (4 分) (2015•杭州) 数据 1, 2, 3, 5, 5 的众数是 5, 平均数是 $\frac{16}{5}$.

考点: 众数; 算术平均数.

分析: 根据众数、平均数的概念求解.

解答: 解: 数据 1, 2, 3, 5, 5 的众数是 5;

$$\text{平均数是 } \frac{1}{5} (1+2+3+5+5) = \frac{16}{5}.$$

故答案为: 5; $\frac{16}{5}$.

点评: 本题考查了众数和平均数的概念, 掌握各知识点的概念是解答本题的关键.

12. (4 分) (2015•杭州) 分解因式: $m^3n - 4mn =$ $mn(m-2)(m+2)$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

分析: 先提取公因式 mn , 再利用平方差公式分解因式得出即可.

解答: 解: $m^3n - 4mn$

$$= mn(m^2 - 4)$$

$$= mn(m-2)(m+2).$$

故答案为: $mn(m-2)(m+2)$.

点评: 此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式, 正确运用平方差公式是解题关键.

13. (4 分) (2015•杭州) 函数 $y=x^2+2x+1$, 当 $y=0$ 时, $x=$ -1 ; 当 $1 < x < 2$ 时, y 随 x 的增大而 增大 (填写“增大”或“减小”).

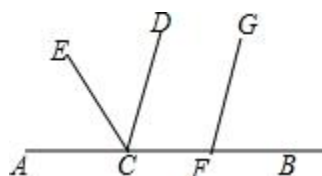
考点: 二次函数的性质.

分析: 将 $y=0$ 代入 $y=x^2+2x+1$, 求得 x 的值即可, 根据函数开口向上, 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而增大.

解答: 解: 把 $y=0$ 代入 $y=x^2+2x+1$,
得 $x^2+2x+1=0$,
解得 $x=-1$,
当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而增大,
 $\therefore$ 当 $1 < x < 2$ 时, y 随 x 的增大而增大;
故答案为 -1 , 增大.

点评: 本题考查了二次函数的性质, 重点掌握对称轴两侧的增减性问题, 解此题的关键是利用数形结合的思想.

14. (4 分) (2015•杭州) 如图, 点 A, C, F, B 在同一直线上, CD 平分 $\angle ECB$, $FG \parallel CD$. 若 $\angle ECA$ 为 α 度, 则 $\angle GFB$ 为 $90 - \frac{\alpha}{2}$ 度 (用关于 α 的代数式表示).



考点: 平行线的性质.

分析: 根据 $FG \parallel CD$ 得出 $\angle GFB = \angle DCF$, 再由互补和角平分线得出 $\angle DCF = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, 解答即可.

解答: 解: $\because$ 点 A, C, F, B 在同一直线上, $\angle ECA$ 为 α ,
 $\therefore \angle ECB = 180^\circ - \alpha$,
 $\because$ CD 平分 $\angle ECB$,
 $\therefore \angle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$,
 $\because FG \parallel CD$,
 $\therefore \angle GFB = \angle DCB = 90 - \frac{\alpha}{2}$.

点评: 此题考查平行线的性质, 关键是根据平行线得出 $\angle GFB = \angle DCF$ 和利用角平分线解答.

15. (4分) (2015•杭州) 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 设点 P (1, t) 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上, 过点 P 作直线 l 与 x 轴平行, 点 Q 在直线 l 上, 满足 $QP=OP$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 Q, 则 $k=\underline{2+2\sqrt{5}\text{或}2-2\sqrt{5}}$.

考点: 反比例函数图象上点的坐标特征; 勾股定理.

专题: 分类讨论.

分析: 把 P 点代入 $y=\frac{2}{x}$ 求得 P 的坐标, 进而求得 OP 的长, 即可求得 Q 的坐标, 从而求得 k 的值.

解答: 解: $\because$ 点 P (1, t) 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,

$$\therefore t=\frac{2}{1}=2,$$

$$\therefore P(1, 2),$$

$$\therefore OP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$\because$ 过点 P 作直线 l 与 x 轴平行, 点 Q 在直线 l 上, 满足 $QP=OP$.

$$\therefore Q(1+\sqrt{5}, 2) \text{ 或 } (1-\sqrt{5}, 2)$$

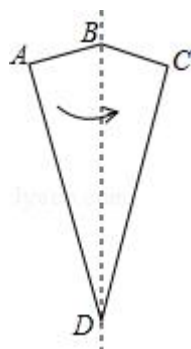
$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 Q,

$$\therefore 2=\frac{k}{1+\sqrt{5}} \text{ 或 } 2=\frac{k}{1-\sqrt{5}}, \text{ 解得 } k=2+2\sqrt{5} \text{ 或 } 2-2\sqrt{5}$$

故答案为 $2+2\sqrt{5}$ 或 $2-2\sqrt{5}$.

点评: 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 勾股定理的应用, 求得 Q 点的坐标是解题的关键.

16. (4分) (2015•杭州) 如图, 在四边形纸片 ABCD 中, $AB=BC$, $AD=CD$, $\angle A=\angle C=90^\circ$, $\angle B=150^\circ$. 将纸片先沿直线 BD 对折, 再将对折后的图形沿从一个顶点出发的直线裁剪, 剪开后的图形打开铺平. 若铺平后的图形中有一个是面积为 2 的平行四边形, 则 $CD=\underline{2+\sqrt{3}\text{或}4+2\sqrt{3}}$.



考点：剪纸问题.

分析：根据题意结合裁剪的方法得出符合题意的图形有两个，分别利用菱形的判定与性质以及勾股定理得出 CD 的长.

解答：解：如图 1 所示：延长 AE 交 CD 于点 N，过点 B 作 $BT \perp EC$ 于点 T，
当四边形 ABCE 为平行四边形，

$$\because AB=BC,$$

$\therefore$ 四边形 ABCE 是菱形，

$$\because \angle A = \angle C = 90^\circ, \angle B = 150^\circ, BC \parallel AN,$$

$$\therefore \angle ADC = 30^\circ, \angle BAN = \angle BCE = 30^\circ,$$

则 $\angle NAD = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AND = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 ABCE 面积为 2，

$$\therefore \text{设 } BT=x, \text{ 则 } BC=EC=2x,$$

$$\text{故 } 2x \times x = 2,$$

解得： $x=1$ (负数舍去)，

$$\text{则 } AE=EC=2, EN=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$$

$$\text{故 } AN=2+\sqrt{3},$$

$$\text{则 } AD=DC=4+2\sqrt{3};$$

如图 2，当四边形 BEDF 是平行四边形，

$\therefore BE=BF$,
 $\therefore$ 平行四边形 $BEDF$ 是菱形,
 $\therefore \angle A=\angle C=90^\circ$, $\angle B=150^\circ$,
 $\therefore \angle ADB=\angle BDC=15^\circ$,
 $\therefore BE=DE$,
 $\therefore \angle AEB=30^\circ$,
 $\therefore$ 设 $AB=y$, 则 $BE=2y$, $AE=\sqrt{3}y$,
 $\therefore$ 四边形 $BEDF$ 面积为 2,
 $\therefore AB \times DE=2y^2=1$,
 解得: $y=1$, 故 $AE=\sqrt{3}$, $DE=2$,
 则 $AD=2+\sqrt{3}$,
 综上所述: CD 的值为: $2+\sqrt{3}$ 或 $4+2\sqrt{3}$.
 故答案为: $2+\sqrt{3}$ 或 $4+2\sqrt{3}$.

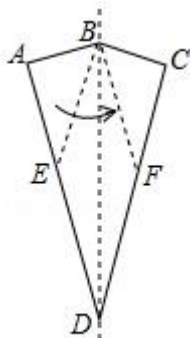


图2

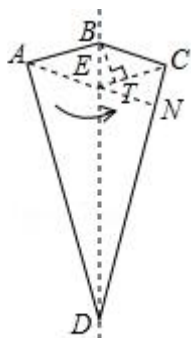


图1

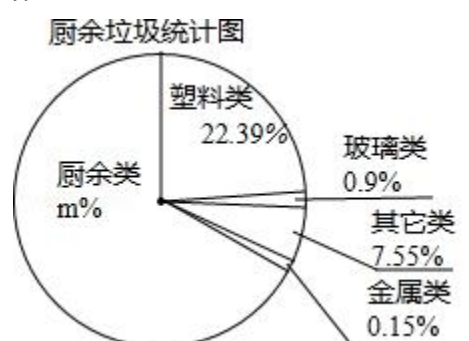
点评：此题主要考查了剪纸问题以及勾股定理和平行四边形的性质等知识，根据题意画出正确图形是解题关键.

三、全面答一答 (共 66 分)

17. (6 分) (2015•杭州) 杭州市推行垃圾分类已经多年，但在剩余垃圾中除了厨余类垃圾还混杂着非厨余类垃圾. 如图是杭州某一天收到的厨余垃圾的统计图.

(1) 试求出 m 的值;

(2) 杭州市某天收到厨余垃圾约 200 吨，请计算其中混杂着的玻璃类垃圾的吨数.



考点：扇形统计图；用样本估计总体.

分析： (1) 根据整体单位减去其它类垃圾所占的百分比，可得厨余类所占的百分比;

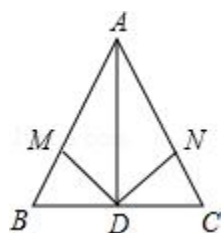
(2) 根据总垃圾乘以玻璃类垃圾所占的百分比，可得答案.

解答： 解：(1) $m\% = 1 - 22.39\% - 0.9\% - 7.55\% - 0.15\% = 69.01\%$,
 $m = 69.01$;

(2) 其中混杂着的玻璃类垃圾的吨数约等于 $200 \times 0.9\% = 1.8$ (吨).

点评： 本题考查了扇形统计图，读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

18. (8 分) (2015•杭州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，点 M ， N 分别在 AB ， AC 边上， $AM = 2MB$ ， $AN = 2NC$. 求证： $DM = DN$.



考点：全等三角形的判定与性质.

专题：证明题.

分析：首先根据等腰三角形的性质得到 AD 是顶角的平分线，再利用全等三角形进行证明即可.

解答：证明：∵ $AM=2MB$, $AN=2NC$, $AB=AC$,

$$\therefore AM=AN,$$

$$\because AB=AC, AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle MAD = \angle NAD,$$

在 $\triangle AMD$ 与 $\triangle AND$ 中,

$$\begin{cases} AM=AN \\ \angle MAD=\angle NAD, \\ AD=AD \end{cases}$$

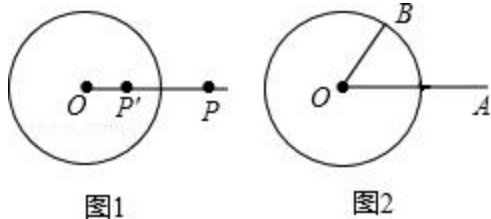
$$\therefore \triangle AMD \cong \triangle AND \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DM=DN.$$

点评：本题考查了全等三角形的判定和性质，关键是根据等腰三角形的性质进行证明.

19. (8 分) (2015•杭州) 如图 1, $\odot O$ 的半径为 r ($r > 0$), 若点 P' 在射线 OP 上, 满足 $OP' \cdot OP = r^2$, 则称点 P' 是点 P 关于 $\odot O$ 的“反演点”.

如图 2, $\odot O$ 的半径为 4, 点 B 在 $\odot O$ 上, $\angle BOA = 60^\circ$, $OA = 8$, 若点 A' , B' 分别是点 A , B 关于 $\odot O$ 的反演点, 求 $A'B'$ 的长.



考点：点与圆的位置关系；勾股定理.

专题：新定义.

分析： 设 OA 交 $\odot O$ 于 C , 连结 $B'C$, 如图 2, 根据新定义计算出 $OA'=2$, $OB'=4$, 则点 A' 为 OC 的中点, 点 B 和 B' 重合, 再证明 $\triangle OBC$ 为等边三角形, 则 $B'A' \perp OC$, 然后在 $Rt\triangle OA'B'$ 中, 利用正弦的定义可求 $A'B'$ 的长.

解答： 解: 设 OA 交 $\odot O$ 于 C , 连结 $B'C$, 如图 2,

$$\because OA' \cdot OA = 4^2,$$

$$\text{而 } r=4, \quad OA=8,$$

$$\therefore OA'=2,$$

$$\because OB' \cdot OB = 4^2,$$

$$\therefore OB'=4, \quad \text{即点 } B \text{ 和 } B' \text{ 重合},$$

$$\because \angle BOA = 60^\circ, \quad OB = OC,$$

$$\therefore \triangle OBC \text{ 为等边三角形},$$

$$\text{而点 } A' \text{ 为 } OC \text{ 的中点},$$

$$\therefore B'A' \perp OC,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OA'B' \text{ 中, } \sin \angle A'OB' = \frac{A'B'}{OB'},$$

$$\therefore A'B' = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

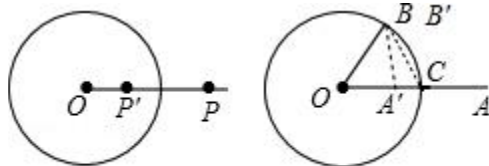


图1

图2

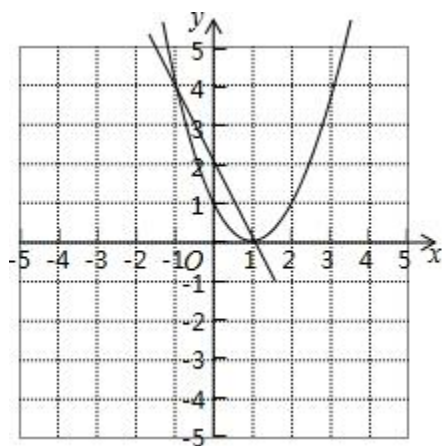
点评： 本题考查了点与圆的位置关系：点的位置可以确定该点到圆心距离与半径的关系，反过来已知点到圆心距离与半径的关系可以确定该点与圆的位置关系．也考查了阅读理解能力．

20. (10 分) (2015•杭州) 设函数 $y = (x - 1) [(k - 1)x + (k - 3)]$ (k 是常数)．

(1) 当 k 取 1 和 2 时的函数 y_1 和 y_2 的图象如图所示，请你在同一直角坐标系中画出当 k 取 0 时的函数的图象；

(2) 根据图象，写出你发现的一条结论；

(3) 将函数 y_2 的图象向左平移 4 个单位，再向下平移 2 个单位，得到的函数 y_3 的图象，求函数 y_3 的最小值．



考点： 二次函数图象与几何变换；二次函数的图象；二次函数的最值．

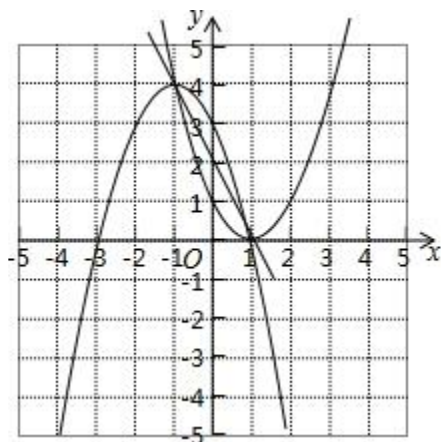
分析： (1) 把 $k=0$ 代入函数解析式即可得到所求的函数解析式，根据函数解析式作出图象；

(2) 根据函数图象回答问题；

(3) 由“左减右加，上加下减”的规律写出函数解析式，根据函数图象的

增减性来求函数 y_2 的最小值.

解答: 解: (1) 当 $k=0$ 时, $y=-(x-1)(x+3)$, 所画函数图象如图所示:



(2) ①根据图象知, 图象都经过点 $(1, 0)$ 和 $(-1, 4)$.

②图象与 x 轴的交点是 $(1, 0)$.

③ k 取 0 和 2 时的函数图象关于点 $(0, 2)$ 中心对称.

④函数 $y=(x-1)[(k-1)x+(k-3)]$ (k 是常数) 的图象都经过 $(1, 0)$ 和 $(-1, 4)$ 等等.

(3) 平移后的函数 y_2 的表达式为 $y_2=(x+3)^2-2$.

所以当 $x=-3$ 时, 函数 y_2 的最小值是 -2 .

点评: 本题考查了抛物线与 x 轴的交点坐标, 二次函数图象, 二次函数图象与几何变换以及二次函数的最值. 熟练掌握函数图象的性质和学会读图是解题的关键.

21. (10 分) (2015•杭州) “综合与实践”学习活动准备制作一组三角形, 记这些三角形的三边分别为 a, b, c , 并且这些三角形三边的长度为大于 1 且小于 5 的整数个单位长度.

(1) 用记号 (a, b, c) ($a \leq b \leq c$) 表示一个满足条件的三角形, 如 $(2, 3, 3)$ 表示边长分别为 2, 3, 3 个单位长度的一个三角形. 请列举出所有满足条件的三角形.

(2) 用直尺和圆规作出三边满足 $a < b < c$ 的三角形 (用给定的单位长度, 不写作法, 保留作图痕迹).

1
单位长度

考点: 作图—应用与设计作图; 三角形三边关系.

分析: (1) 应用列举法, 根据三角形三边关系列举出所有满足条件的三角形.

(2) 首先判断满足条件的三角形只有一个: $a=2, b=3, c=4$, 再作图:

①作射线 AB , 且取 $AB=4$;

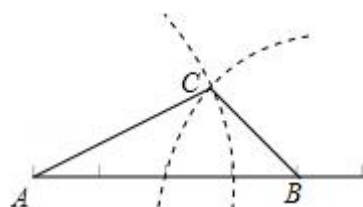
②以点 A 为圆心, 3 为半径画弧; 以点 B 为圆心, 2 为半径画弧, 两弧交于点 C ;

③连接 AC 、 BC . 则 $\triangle ABC$ 即为满足条件的三角形.

解答: 解: (1) 共 9 种: $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 4)$, $(4, 4, 4)$.

(2) 由 (1) 可知, 只有 $(2, 3, 4)$, 即 $a=2, b=3, c=4$ 时满足 $a < b < c$.

如答图的 $\triangle ABC$ 即为满足条件的三角形.

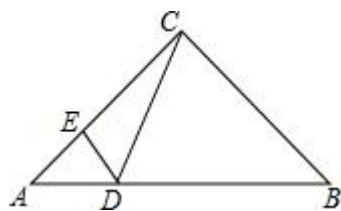


点评: 本题考查了三角形的三边关系, 作图—应用与设计作图. 首先要理解题意, 弄清问题中对所作图形的要求, 结合对应几何图形的性质和基本作图的方法作图.

22. (12 分) (2015•杭州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中 ($BC > AC$), $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 在 AB 边上, $DE \perp AC$ 于点 E.

(1) 若 $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$, $AE=2$, 求 EC 的长;

(2) 设点 F 在线段 EC 上, 点 G 在射线 CB 上, 以 F, C, G 为顶点的三角形与 $\triangle EDC$ 有一个锐角相等, FG 交 CD 于点 P. 问: 线段 CP 可能是 $\triangle CFG$ 的高线还是中线? 或两者都有可能? 请说明理由.



考点: 相似三角形的判定与性质.

专题: 分类讨论.

分析: (1) 易证 $DE \parallel BC$, 由平行线分线段成比例定理列比例式即可求解;

(2) 分三种情况讨论: ①若 $\angle CFG=\angle ECD$, 此时线段 CP 是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的中线; ②若 $\angle CFG=\angle EDC$, 此时线段 CP 为 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线; ③当 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线时, CP 既是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线又是中线.

解答: 解: (1) $\because \angle ACB=90^\circ$, $DE \perp AC$,

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

$$\because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}, \quad AE=2,$$

$$\therefore EC=6;$$

(2) ①如图 1, 若 $\angle CFG=\angle ECD$, 此时线段 CP 是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的中线.

证明： $\because \angle CFG + \angle CGF = 90^\circ$, $\angle ECD + \angle PCG = 90^\circ$,

又 $\because \angle CFG = \angle ECD$,

$\therefore \angle CGF = \angle PCG$,

$\therefore CP = PG$,

$\because \angle CFG = \angle ECD$,

$\therefore CP = FP$,

$\therefore PF = PG = CP$,

$\therefore$ 线段 CP 是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的中线;

②如图 2, 若 $\angle CFG = \angle EDC$, 此时线段 CP 为 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线.

证明: $\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle EDC + \angle ECD = 90^\circ$,

$\because \angle CFG = \angle EDC$,

$\therefore \angle CFG + \angle ECD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CPF = 90^\circ$,

$\therefore$ 线段 CP 为 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线.

③如图 3, 当 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线时, CP 既是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线又是中线.

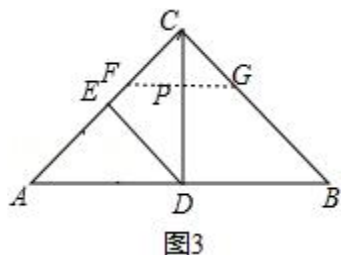
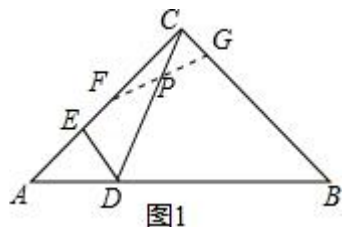
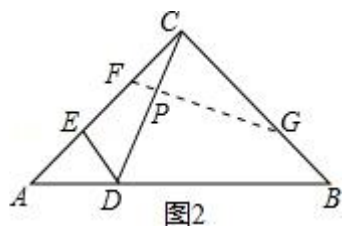


图3



点评： 本题主要考查了平行线分线段成比例定理、等腰三角形的判定、三角形的有关概念，分类讨论，能全面的思考问题是解决问题的关键.

23. (12 分) (2015•杭州) 方成同学看到一则材料：甲开汽车，乙骑自行车从 M 地出发沿一条公路匀速前往 N 地. 设乙行驶的时间为 t (h)，甲乙两人之间的距离为 y (km)， y 与 t 的函数关系如图 1 所示.

方成思考后发现了如图 1 的部分正确信息：乙先出发 1h；甲出发 0.5 小时与乙相遇；....

请你帮助方成同学解决以下问题：

- (1) 分别求出线段 BC，CD 所在直线的函数表达式；
- (2) 当 $20 < y < 30$ 时，求 t 的取值范围；
- (3) 分别求出甲，乙行驶的路程 $S_{\text{甲}}$ ， $S_{\text{乙}}$ 与时间 t 的函数表达式，并在图 2 所给的直角坐标系中分别画出它们的图象；
- (4) 丙骑摩托车与乙同时出发，从 N 地沿同一公路匀速前往 M 地，若丙经过 $\frac{4}{3}$ h 与乙相遇，问丙出发后多少时间与甲相遇？

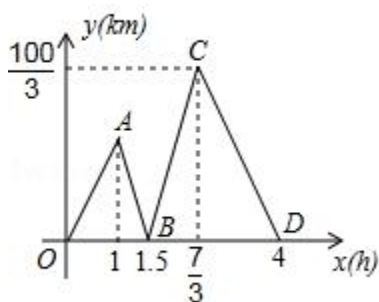


图1

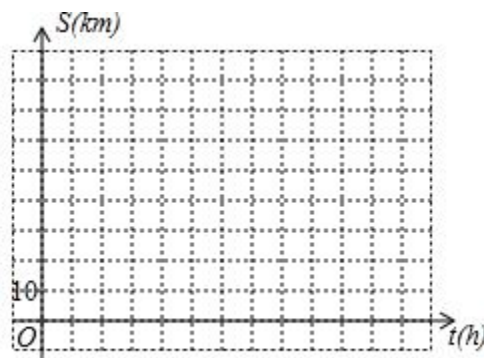


图2

考点：一次函数的应用.

分析： (1) 利用待定系数法求函数解析式，即可解答；

(2) 先求出甲、乙的速度、所以 OA 的函数解析式为： $y=20t$ ($0 \leq t \leq 1$)，所以点 A 的纵坐标为 20，根据当 $20 < y < 30$ 时，得到 $20 < 40t - 60 < 30$ ，或 $20 < -20t + 80 < 30$ ，解不等式组即可；

(3) 得到 $S_{\text{甲}}=60t - 60$ ($1 \leq t \leq \frac{7}{3}$)， $S_{\text{乙}}=20t$ ($0 \leq t \leq 4$)，画出函数图象即可；

(4) 确定丙距 M 地的路程 $S_{\text{丙}}$ 与时间 t 的函数表达式为： $S_{\text{丙}} = -40t + 80$ ($0 \leq t \leq 2$)，根据 $S_{\text{丙}} = -40t + 80$ 与 $S_{\text{甲}} = 60t - 60$ 的图象交点的横坐标为 $\frac{7}{5}$ ，所以丙出发 $\frac{5}{7}h$ 与甲相遇.

解答： 解：(1) 直线 BC 的函数解析式为 $y=kt+b$ ，

把 $(1.5, 0)$ ， $(\frac{7}{3}, \frac{100}{3})$ 代入得：
$$\begin{cases} 1.5k+b=0 \\ \frac{7}{3}k+b=\frac{100}{3} \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k=40 \\ b=-60 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为： $y=40t - 60$ ；

设直线 CD 的函数解析式为 $y_1=k_1t+b_1$ ，

把 $(\frac{7}{3}, \frac{100}{3})$ ， $(4, 0)$ 代入得：
$$\begin{cases} \frac{7}{3}k_1+b_1=\frac{100}{3} \\ 4k_1+b_1=0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -20 \\ b_1 = 80 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CD 的函数解析式为: $y = -20t + 80$.

(2) 设甲的速度为 a km/h, 乙的速度为 b km/h, 根据题意得:

$$\begin{cases} 0.5a = 1.5b \\ a\left(\frac{7}{3} - 1\right) = \frac{7}{3}b + \frac{100}{3} \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 60 \\ b = 20 \end{cases},$$

$\therefore$ 甲的速度为 60 km/h, 乙的速度为 20 km/h,

$\therefore$ OA 的函数解析式为: $y = 20t$ ($0 \leq t \leq 1$), 所以点 A 的纵坐标为 20,

当 $20 < y < 30$ 时,

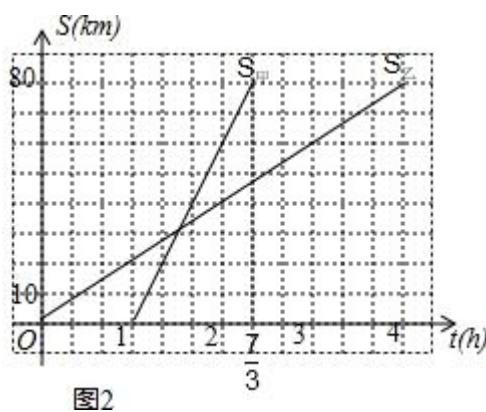
即 $20 < 40t - 60 < 30$, 或 $20 < -20t + 80 < 30$,

解得: $2 < t < \frac{9}{4}$ 或 $\frac{5}{2} < t < 3$.

(3) 根据题意得: $S_{\text{甲}} = 60t - 60$ ($1 \leq t \leq \frac{7}{3}$)

$S_{\text{乙}} = 20t$ ($0 \leq t \leq 4$),

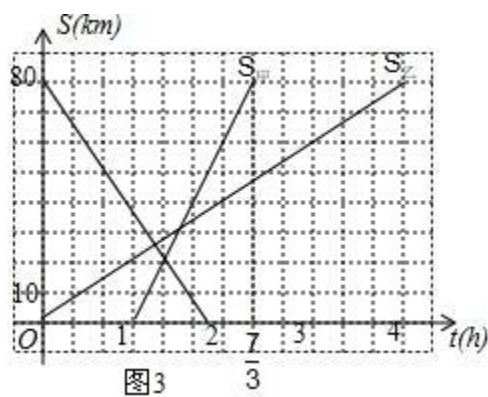
所画图象如图 2 所示:



(4) 当 $t = \frac{4}{3}$ 时, $S_{\text{乙}} = \frac{80}{3}$, 丙距 M 地的路程 $S_{\text{丙}}$ 与时间 t 的函数表达式为:

$S_{\text{丙}} = -40t + 80$ ($0 \leq t \leq 2$),

如图 3,



$S_{\text{丙}} = -40t + 80$ 与 $S_{\text{甲}} = 60t - 60$ 的图象交点的横坐标为 $\frac{7}{5}$,

所以丙出发 $\frac{7}{5}h$ 与甲相遇.

点评: 本题考查了一次函数的应用, 解决本题的关键是根据图象获取相关信息, 利用待定系数法求函数解析式.