

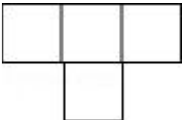
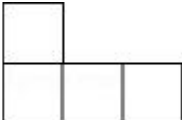
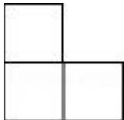
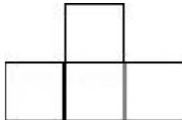
2015 年浙江省宁波市中考数学试卷

参考公式：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

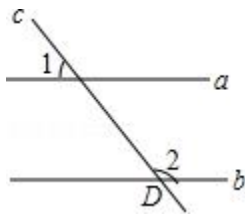
一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

1. (4 分) (2015•宁波) $-\frac{1}{3}$ 的绝对值为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3
2. (4 分) (2015•宁波) 下列计算正确的是 ()
A. $(a^2)^3 = a^5$ B. $2a - a = 2$ C. $(2a)^2 = 4a$ D. $a \cdot a^3 = a^4$
3. (4 分) (2015•宁波) 2015 年中国高端装备制造业销售收入将超 6 万亿元，其中 6 万亿元用科学记数法可表示为 ()
A. 0.6×10^{13} 元 B. 60×10^{11} 元 C. 6×10^{12} 元 D. 6×10^{13} 元
4. (4 分) (2015•宁波) 在端午节到来之前，学校食堂推荐了 A, B, C 三家粽子专卖店，对全校师生爱吃哪家店的粽子作调查，以决定最终向哪家店采购，下面的统计量中最值得关注的是 ()
A. 方差 B. 平均数 C. 中位数 D. 众数
5. (4 分) (2015•宁波) 如图是由五个相同的小立方块搭成的几何体，则它的俯视图是 ()



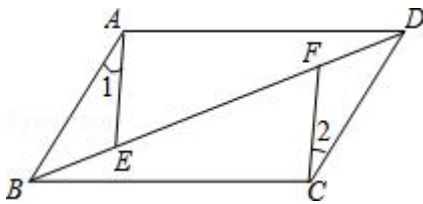
- A.  B.  C.  D. 

6. (4 分) (2015•宁波) 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a , b 相交， $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



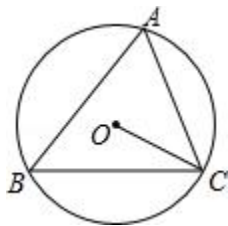
- A. 150° B. 130° C. 100° D. 50°

7. (4分) (2015•宁波) 如图, $\square ABCD$ 中, E, F 是对角线 BD 上的两点, 如果添加一个条件, 使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 则添加的条件不能为 ()



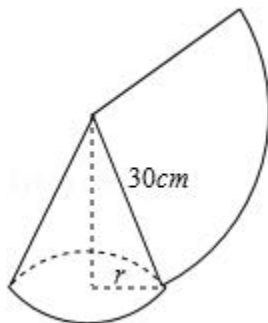
- A. $BE=DF$ B. $BF=DE$ C. $AE=CF$ D. $\angle 1=\angle 2$

8. (4分) (2015•宁波) 如图, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle A=72^\circ$, 则 $\angle BCO$ 的度数为 ()



- A. 15° B. 18° C. 20° D. 28°

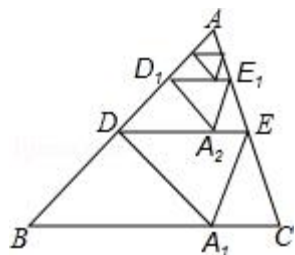
9. (4分) (2015•宁波) 如图, 用一个半径为 30cm , 面积为 $300\pi\text{cm}^2$ 的扇形铁皮, 制作一个无底的圆锥 (不计损耗), 则圆锥的底面半径 r 为 ()



- A. 5cm B. 10cm C. 20cm D. $5\pi\text{cm}$

10. (4分) (2015•宁波) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿着过 AB 中点 D 的直线折叠, 使点 A 落在 BC 边上的 A_2 处, 称为第 1 次操作, 折痕 DE 到 BC 的距离记为 h_1 ; 还原

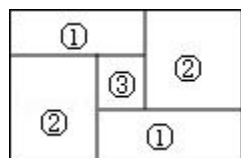
纸片后，再将 $\triangle ADE$ 沿着过 AD 中点 D_1 的直线折叠，使点 A 落在 DE 边上的 A_2 处，称为第2次操作，折痕 D_1E_1 到 BC 的距离记为 h_2 ；按上述方法不断操作下去...，经过第2015次操作后得到的折痕 $D_{2014}E_{2014}$ 到 BC 的距离记为 h_{2015} ，到 BC 的距离记为 h_{2015} 。若 $h_1=1$ ，则 h_{2015} 的值为（ ）



- A. $\frac{1}{2^{2015}}$ B. $\frac{1}{2^{2014}}$ C. $1 - \frac{1}{2^{2015}}$ D. $2 - \frac{1}{2^{2014}}$

11. (4分) (2015•宁波) 二次函数 $y=a(x-4)^2-4$ ($a \neq 0$) 的图象在 $2 < x < 3$ 这一段位于 x 轴的下方，在 $6 < x < 7$ 这一段位于 x 轴的上方，则 a 的值为（ ）
- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

12. (4分) (2015•宁波) 如图，小明家的住房平面图呈长方形，被分割成3个正方形和2个长方形后仍是中心对称图形。若只知道原住房平面图长方形的周长，则分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为（ ）

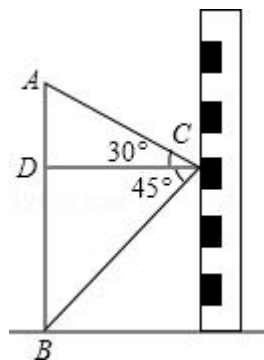


- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

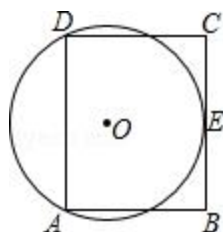
二、填空题 (共6小题, 每小题4分, 满分24分)

13. (4分) (2015•宁波) 实数8的立方根是_____.
14. (4分) (2015•岳阳) 分解因式: $x^2 - 9 =$ _____.
15. (4分) (2015•宁波) 命题“对角线相等的四边形是矩形”是_____命题 (填“真”或“假”).

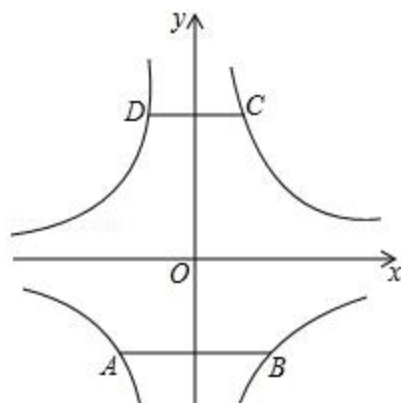
16. (4分) (2015•宁波) 如图, 在数学活动课中, 小敏为了测量校园内旗杆 AB 的高度. 站在教学楼的 C 处测得旗杆底端 B 的俯角为 45° , 测得旗杆顶端 A 的俯角为 30° . 若旗杆与教学楼的距离为 9m, 则旗杆 AB 的高度是_____m (结果保留根号)



17. (4分) (2015•宁波) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=8$, $AD=12$, 过 A, D 两点的 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 E, 则 $\odot O$ 的半径为_____.

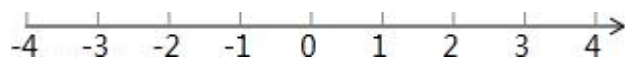


18. (4分) (2015•宁波) 如图, 已知点 A, C 在反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ ($a>0$) 的图象上, 点 B, D 在反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ ($b<0$) 的图象上, $AB \parallel CD \parallel x$ 轴, AB, CD 在 x 轴的两侧, $AB=3$, $CD=2$, AB 与 CD 的距离为 5, 则 $a-b$ 的值是_____.



三、解答题（共 8 小题，满分 78 分）

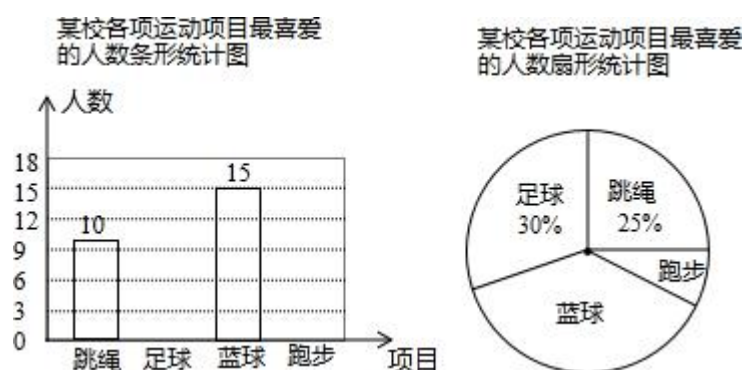
19. (6 分) (2015•宁波) 解一元一次不等式组 $\begin{cases} 1+x > -2 \\ \frac{2x-1}{3} \leq 1 \end{cases}$ ，并把解在数轴上表示出来.



20. (8 分) (2015•宁波) 一个不透明的布袋里装有 2 个白球，1 个黑球和若干个红球，它们除颜色外其余都相同，从中任意摸出 1 个球，是白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 布袋里红球有多少个？
(2) 先从布袋中摸出 1 个球后不放回，再摸出 1 个球，请用列表法或画树状图等方法求出两次摸到的球都是白球的概率.

21. (8 分) (2015•宁波) 某校积极开展“阳光体育”活动，共开设了跳绳、足球、篮球、跑步四种运动项目，为了解学生最喜爱哪一种项目，随机抽取了部分学生进行调查，并绘制了如下的条形统计图和扇形统计图（部分信息未给出）.



- (1) 求本次被调查的学生人数；
(2) 补全条形统计图；
(3) 该校共有 1200 名学生，请估计全校最喜爱篮球的人数比最喜爱足球的人数多多少？

22. (10 分) (2015•宁波) 宁波火车站北广场将于 2015 年底投入使用, 计划在广场内种植 A, B 两种花木共 6600 棵, 若 A 花木数量是 B 花木数量的 2 倍少 600 棵

(1) A, B 两种花木的数量分别是多少棵?

(2) 如果园林处安排 26 人同时种植这两种花木, 每人每天能种植 A 花木 60 棵或 B 花木 40 棵, 应分别安排多少人种植 A 花木和 B 花木, 才能确保同时完成各自的任务?

23. (10 分) (2015•宁波) 已知抛物线 $y = (x - m)^2 - (x - m)$, 其中 m 是常数.

(1) 求证: 不论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴一定有两个公共点;

(2) 若该抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$.

①求该抛物线的函数解析式;

②把该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点.

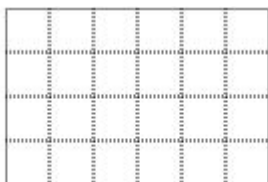
24. (10 分) (2015•宁波) 在边长为 1 的小正方形组成的方格纸中, 若多边形的各顶点都在方格纸的格点 (横竖格子线的交错点) 上, 这样的多边形称为格点多边形. 记格点多边形内的格点数为 a , 边界上的格点数为 b , 则格点多边形的面积可表示为 $S = ma + nb - 1$, 其中 m, n 为常数.

(1) 在下面的方格中各画出一个面积为 6 的格点多边形，依次为三角形、平行四边形（非菱形）、菱形；

(2) 利用 (1) 中的格点多边形确定 m, n 的值.



三角形



平行四边形（非菱形）



菱形

25. (12 分) (2015·宁波) 如图 1, 点 P 为 $\angle MON$ 的平分线上一点, 以 P 为顶点的角的两边分别与射线 OM, ON 交于 A, B 两点, 如果 $\angle APB$ 绕点 P 旋转时始终满足 $OA \cdot OB = OP^2$, 我们就把 $\angle APB$ 叫做 $\angle MON$ 的智慧角.

(1) 如图 2, 已知 $\angle MON = 90^\circ$, 点 P 为 $\angle MON$ 的平分线上一点, 以 P 为顶点的角的两边分别与射线 OM, ON 交于 A, B 两点, 且 $\angle APB = 135^\circ$. 求证: $\angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角.

(2) 如图 1, 已知 $\angle MON = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), $OP = 2$. 若 $\angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角, 连结 AB , 用含 α 的式子分别表示 $\angle APB$ 的度数和 $\triangle AOB$ 的面积.

(3) 如图 3, C 是函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 图象上的一个动点, 过 C 的直线 CD 分别交 x 轴和 y 轴于 A, B 两点, 且满足 $BC = 2CA$, 请求出 $\angle AOB$ 的智慧角 $\angle APB$ 的顶点 P 的坐标.

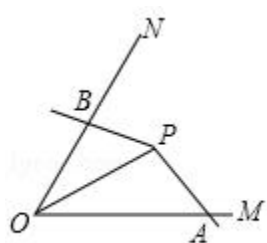


图1

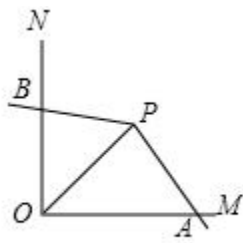


图2

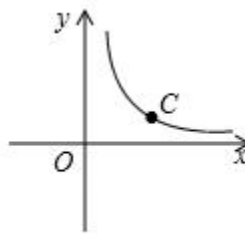


图3

26. (14 分) (2015•宁波) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 M 是第一象限内一点, 过 M 的直线分别交 x 轴, y 轴的正半轴于 A , B 两点, 且 M 是 AB 的中点. 以 OM 为直径的 $\odot P$ 分别交 x 轴, y 轴于 C , D 两点, 交直线 AB 于点 E (位于点 M 右下方), 连结 DE 交 OM 于点 K .

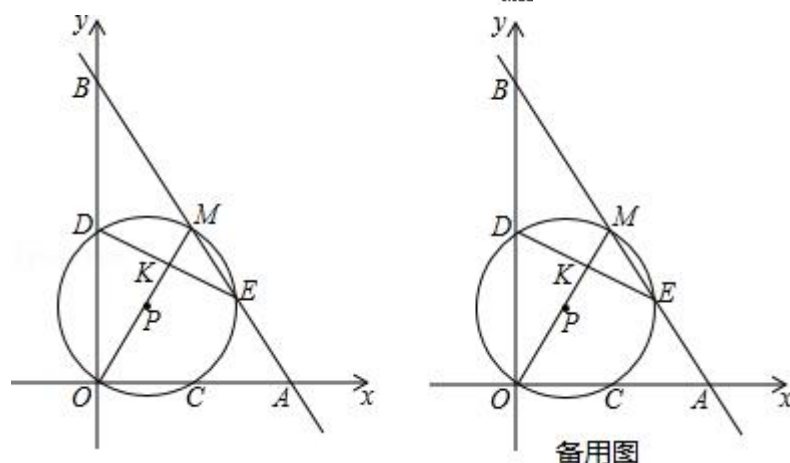
(1) 若点 M 的坐标为 $(3, 4)$,

①求 A , B 两点的坐标;

②求 ME 的长.

(2) 若 $\frac{OK}{MK}=3$, 求 $\angle OBA$ 的度数.

(3) 设 $\tan \angle OBA=x$ ($0 < x < 1$), $\frac{OK}{MK}=y$, 直接写出 y 关于 x 的函数解析式.



2015 年浙江省宁波市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

1. (4 分) (2015•宁波) $-\frac{1}{3}$ 的绝对值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

考点：绝对值.

分析：根据当 a 是负有理数时，a 的绝对值是它的相反数 -a 可得答.

解答：解： $-\frac{1}{3}$ 的绝对值等于 $\frac{1}{3}$,

故选：A.

点评：此题主要考查了绝对值，关键是掌握①当 a 是正有理数时，a 的绝对值是它本身 a；②当 a 是负有理数时，a 的绝对值是它的相反数 -a；③当 a 是零时，a 的绝对值是零.

2. (4 分) (2015•宁波) 下列计算正确的是 ()

- A. $(a^2)^3=a^5$ B. $2a-a=2$ C. $(2a)^2=4a$ D. $a \cdot a^3=a^4$

考点：幂的乘方与积的乘方；合并同类项；同底数幂的乘法.

分析：根据同底数幂的乘法的性质，幂的乘方的性质，积的乘方的性质，合并同类项的法则，对各选项分析判断后利用排除法求解.

解答：解：A、 $(a^2)^3=a^6$ ，故错误；

B、 $2a-a=a$ ，故错误；

C、 $(2a)^2=4a^2$ ，故错误；

D、正确；

故选：D.

点评：本题考查了合并同类项，同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方，理清指

数的变化是解题的关键.

3. (4分) (2015•宁波) 2015 年中国高端装备制造业销售收入将超 6 万亿元, 其中 6 万亿元用科学记数法可表示为 ()
- A. 0.6×10^{13} 元 B. 60×10^{11} 元 C. 6×10^{12} 元 D. 6×10^{13} 元

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 6 万亿用科学记数法表示为: 6×10^{12} .

故选: C.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (4分) (2015•宁波) 在端午节到来之前, 学校食堂推荐了 A, B, C 三家粽子专卖店, 对全校师生爱吃哪家店的粽子作调查, 以决定最终向哪家店采购, 下面的统计量中最值得关注的是 ()
- A. 方差 B. 平均数 C. 中位数 D. 众数

考点: 统计量的选择.

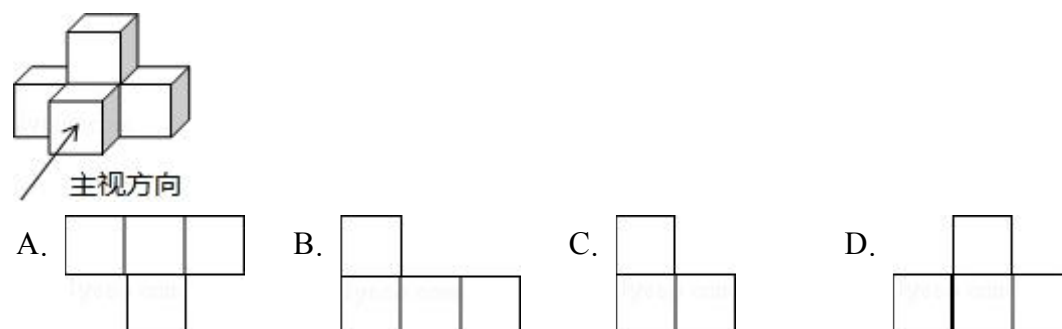
分析: 学校食堂最值得关注的应该是哪种粽子爱吃的人数最多, 即众数.

解答: 解: 由于众数是数据中出现次数最多的数, 故学校食堂最值得关注的应该是统计调查数据的众数.

故选 D.

点评： 此题主要考查统计的有关知识，主要包括平均数、中位数、众数的意义. 反映数据集中程度的统计量有平均数、中位数、众数等，各有局限性，因此要对统计量进行合理的选择和恰当的运用.

5. (4分) (2015•宁波) 如图是由五个相同的小立方块搭成的几何体，则它的俯视图是 ()



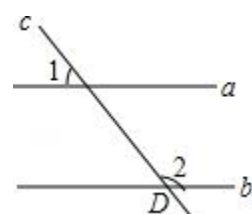
考点： 简单组合体的三视图.

分析： 找到从上面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在俯视图中.

解答： 解：从上面看易得上面一层有 3 个正方形，下面中间有一个正方形.
故选 A.

点评： 本题考查了三视图的知识，俯视图是从物体的上面看得到的视图.

6. (4分) (2015•宁波) 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 分别与 a ， b 相交， $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()

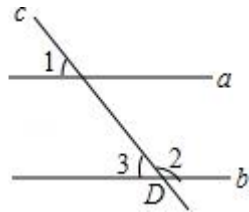


- A. 150° B. 130° C. 100° D. 50°

考点： 平行线的性质.

分析：先根据两直线平行同位角相等，求出 $\angle 3$ 的度数，然后根据邻补角的定义即可求出 $\angle 2$ 的度数.

解答：解：如图所示，



$$\because a \parallel b, \angle 1 = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 50^\circ,$$

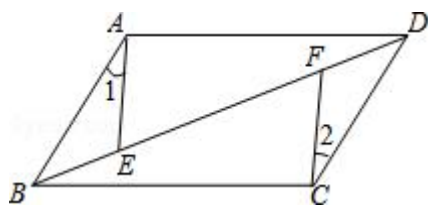
$$\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 130^\circ.$$

故选 B.

点评：此题考查了平行线的性质，解题的关键是：熟记两直线平行同位角相等，两直线平行内错角相等，两直线平行同旁内角互补.

7. (4 分) (2015•宁波) 如图， $\square ABCD$ 中，E, F 是对角线 BD 上的两点，如果添加一个条件，使 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，则添加的条件不能为 ()



- A. $BE = DF$ B. $BF = DE$ C. $AE = CF$ D. $\angle 1 = \angle 2$

考点：全等三角形的判定；平行四边形的性质.

分析：利用平行四边形的性质以及全等三角形的判定分别得出三角形全等，再进行选择即可.

解答：解：A、当 $BE = FD$,

$\because$ 平行四边形 ABCD 中,

$$\therefore AB=CD, \angle ABE=\angle CDF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF, \\ BE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS), 故此选项错误;

C、当 $AE=CF$ 无法得出 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 故此选项符合题意;

B、当 $BF=ED$,

$$\therefore BE=DF,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AB=CD, \angle ABE=\angle CDF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF, \\ BE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS), 故此选项错误;

D、当 $\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AB=CD, \angle ABE=\angle CDF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中

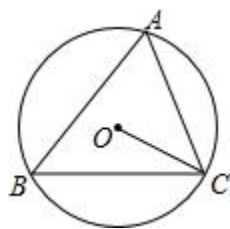
$$\begin{cases} \angle 1=\angle 2 \\ AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (ASA), 故此选项错误;

故选 C.

点评: 本题考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定等知识, 熟练掌握全等三角形的判定方法是解题关键.

8. (4分) (2015•宁波) 如图, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle A=72^\circ$, 则 $\angle BCO$ 的度数为 ()



- A. 15° B. 18° C. 20° D. 28°

考点: 圆周角定理.

专题: 计算题.

分析: 连结 OB , 如图, 先根据圆周角定理得到 $\angle BOC=2\angle A=144^\circ$, 然后根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理计算 $\angle BCO$ 的度数.

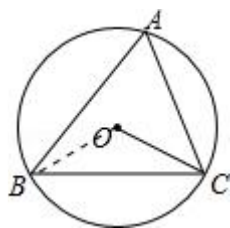
解答: 解: 连结 OB , 如图, $\angle BOC=2\angle A=2\times 72^\circ=144^\circ$,

$$\because OB=OC,$$

$$\therefore \angle CBO=\angle BCO,$$

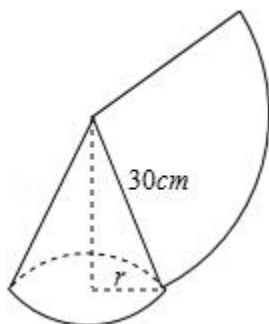
$$\therefore \angle BCO=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-144^\circ)=18^\circ.$$

故选 B.



点评: 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半. 也考查了等腰三角形的性质.

9. (4分) (2015•宁波) 如图, 用一个半径为 30cm , 面积为 $300\pi\text{cm}^2$ 的扇形铁皮, 制作一个无底的圆锥 (不计损耗), 则圆锥的底面半径 r 为 ()



A. 5cm

B. 10cm

C. 20cm

D. 5π cm

考点：圆锥的计算.

分析：由圆锥的几何特征，我们可得用半径为 30cm，面积为 $300\pi\text{cm}^2$ 的扇形铁皮制作一个无盖的圆锥形容器，则圆锥的底面周长等于扇形的弧长，据此求得圆锥的底面圆的半径.

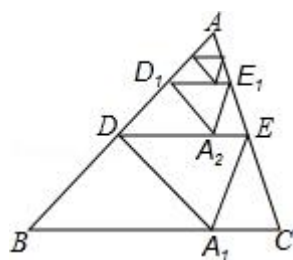
解答：解：设铁皮扇形的半径和弧长分别为 R、l，圆锥形容器底面半径为 r，则由题意得 $R=30$ ，由 $\frac{1}{2}Rl=300\pi$ 得 $l=20\pi$ ；

由 $2\pi r=l$ 得 $r=10\text{cm}$ ；

故选 B.

点评：本题考查的知识点是圆锥的体积，其中根据已知制作一个无盖的圆锥形容器的扇形铁皮的相关几何量，计算出圆锥的底面半径和高，是解答本题的关键.

10. (4 分) (2015•宁波) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿着过 AB 中点 D 的直线折叠，使点 A 落在 BC 边上的 A_2 处，称为第 1 次操作，折痕 DE 到 BC 的距离记为 h_1 ；还原纸片后，再将 $\triangle ADE$ 沿着过 AD 中点 D_1 的直线折叠，使点 A 落在 DE 边上的 A_2 处，称为第 2 次操作，折痕 D_1E_1 到 BC 的距离记为 h_2 ；按上述方法不断操作下去...，经过第 2015 次操作后得到的折痕 $D_{2014}E_{2014}$ 到 BC 的距离记为 h_{2015} ，到 BC 的距离记为 h_{2015} . 若 $h_1=1$ ，则 h_{2015} 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2^{2015}}$ B. $\frac{1}{2^{2014}}$ C. $1 - \frac{1}{2^{2015}}$ D. $2 - \frac{1}{2^{2014}}$

考点：相似三角形的判定与性质；三角形中位线定理；翻折变换（折叠问题）.

专题：规律型.

分析：根据中点的性质及折叠的性质可得 $DA=DA'=DB$ ，从而可得

$\angle ADA'=2\angle B$ ，结合折叠的性质， $\angle ADA'=2\angle ADE$ ，可得 $\angle ADE=\angle B$ ，

继而判断 $DE \parallel BC$ ，得出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，证得 $AA_1 \perp BC$ ，得到

$AA_1=2$ ，求出 $h_1=2-1=1$ ，同理 $h_2=2-\frac{1}{2}$ ， $h_3=2-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=2-\frac{1}{2^2}$ ，于是经过

第 n 次操作后得到的折痕 $D_{n-1}E_{n-1}$ 到 BC 的距离 $h_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$ ，求得结果

$$h_{2015}=2-\frac{1}{2^{2014}}.$$

解答：解：连接 AA_1 ，

由折叠的性质可得： $AA_1 \perp DE$ ， $DA=DA_1$ ，

又 $\because D$ 是 AB 中点，

$$\therefore DA=DB,$$

$$\therefore DB=DA_1,$$

$$\therefore \angle BA_1D=\angle B,$$

$$\therefore \angle ADA_1=2\angle B,$$

又 $\because \angle ADA_1=2\angle ADE$ ，

$$\therefore \angle ADE=\angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore AA_1 \perp BC,$$

$$\therefore AA_1=2,$$

$$\therefore h_1=2-1=1,$$

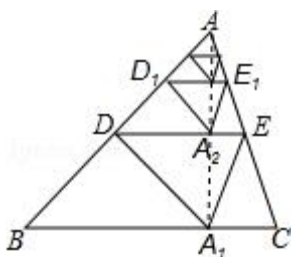
$$\text{同理, } h_2=2-\frac{1}{2}, \quad h_3=2-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=2-\frac{1}{2^2},$$

...

$$\therefore \text{经过第 } n \text{ 次操作后得到的折痕 } D_{n-1}E_{n-1} \text{ 到 } BC \text{ 的距离 } h_n=2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\therefore h_{2015}=2-\frac{1}{2^{2014}},$$

故选 D.



点评: 本题考查了相似三角形的判定和性质, 三角形中位线的性质, 平行线等分线段定理, 找出规律是解题的关键.

11. (4 分) (2015•宁波) 二次函数 $y=a(x-4)^2-4$ ($a \neq 0$) 的图象在 $2 < x < 3$ 这一段位于 x 轴的下方, 在 $6 < x < 7$ 这一段位于 x 轴的上方, 则 a 的值为 ()

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

考点: 抛物线与 x 轴的交点.

分析: 根据抛物线顶点式得到对称轴为直线 $x=4$, 利用抛物线对称性得到抛物线在 $1 < x < 2$ 这一段位于 x 轴的上方, 而抛物线在 $2 < x < 3$ 这一段位于 x 轴的下方, 于是可得抛物线过点 $(2, 0)$, 然后把 $(2, 0)$ 代入 $y=a(x-4)^2-4$ ($a \neq 0$) 可求出 a 的值.

解答: 解: $\because$ 抛物线 $y=a(x-4)^2-4$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x=4$,

而抛物线在 $6 < x < 7$ 这一段位于 x 轴的上方,

$\therefore$ 抛物线在 $1 < x < 2$ 这一段位于 x 轴的上方,

$\therefore$ 抛物线在 $2 < x < 3$ 这一段位于 x 轴的下方,

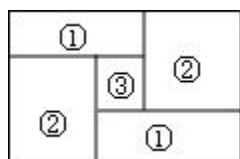
$\therefore$ 抛物线过点 $(2, 0)$,

把 $(2, 0)$ 代入 $y=a(x-4)^2-4$ ($a \neq 0$) 得 $4a-4=0$, 解得 $a=1$.

故选 A.

点评: 本题考查了抛物线与 x 轴的交点: 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标, 令 $y=0$, 即 $ax^2+bx+c=0$, 解关于 x 的一元二次方程即可求得交点横坐标. $\Delta=b^2-4ac$ 决定抛物线与 x 轴的交点个数: $\Delta=b^2-4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta=b^2-4ac=0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta=b^2-4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

12. (4 分) (2015•宁波) 如图, 小明家的住房平面图呈长方形, 被分割成 3 个正方形和 2 个长方形后仍是中心对称图形. 若只知道原住房平面图长方形的周长, 则分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为 ()



A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ①②③

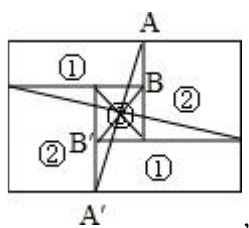
考点: 中心对称.

专题: 应用题.

分析: 首先根据长方形被分割成 3 个正方形和 2 个长方形后仍是中心对称图形, 可得 A 的对应点是 A', B 的对应点是 B', 判断出 $AB=A'B'$; 然后根据 ① 的长和 ② 的边长的和等于原长方形的长, ① 的宽和 ② 的边长的和等于

原长方形的宽，可得①②的周长和等于原长方形的周长，据此判断即可.

解答： 解：如图，



$\therefore$ 长方形被分割成 3 个正方形和 2 个长方形后仍是中心对称图形，

$\therefore$ A 的对应点是 A' ，B 的对应点是 B' ，

$\therefore AB=A'B'$ ，

$\therefore$ ①的长和②的边长的和等于原长方形的长，①的宽和②的边长的和等于原长方形的宽，

$\therefore$ ①②的周长和等于原长方形的周长，

$\therefore$ 分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为①②，

其余的图形的周长不用测量无法判断.

故选：A.

点评： 此题主要考查了中心对称的性质和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确中心对称的性质：①关于中心对称的两个图形能够完全重合；②关于中心对称的两个图形，对应点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分.

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

13. (4 分) (2015•宁波) 实数 8 的立方根是 2.

考点： 立方根.

专题： 常规题型.

分析： 根据立方根的定义解答.

解答：解： $\because 2^3=8$,

$\therefore 8$ 的立方根是 2.

故答案为： 2.

点评： 本题考查了立方根的定义，找出 2 的立方是 8 是解题的关键.

14. (4 分) (2015•岳阳) 分解因式： $x^2 - 9 = \underline{(x+3)(x-3)}$.

考 因式分解-运用公式法.

点：

分 本题中两个平方项的符号相反，直接运用平方差公式分解因式.

析：

解 解： $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

答： 故答案为： $(x+3)(x-3)$.

点 主要考查平方差公式分解因式，熟记能用平方差公式分解因式的多项式的

评： 特征，即“两项、异号、平方形式”是避免错用平方差公式的有效方法.

15. (4 分) (2015•宁波) 命题“对角线相等的四边形是矩形”是__假__命题 (填“真”或“假”).

考点： 命题与定理.

分析： 举出反例即可得到该命题是假命题.

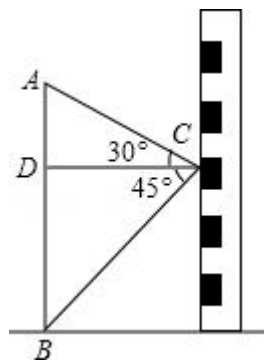
解答： 解： $\because$ 等腰梯形的对角线也相等，

$\therefore$ “对角线相等的四边形是矩形”是假命题，

故答案为： 假；

点评： 本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是知道如何判断一个命题的真假，是假命题时找到反例即可.

16. (4 分) (2015•宁波) 如图, 在数学活动课中, 小敏为了测量校园内旗杆 AB 的高度. 站在教学楼的 C 处测得旗杆底端 B 的俯角为 45° , 测得旗杆顶端 A 的俯角为 30° . 若旗杆与教学楼的距离为 9m, 则旗杆 AB 的高度是 $3\sqrt{3}+9$ m (结果保留根号)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 根据在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD}$, 求出 AD 的值, 再根据在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD}$, 求出 BD 的值, 最后根据 $AB = AD + BD$, 即可求出答案.

解答: 解: 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$\because \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD},$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AD}{9},$$

$$\therefore \frac{AD}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{3}\text{m},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

$$\because \angle BCD = 45^\circ,$$

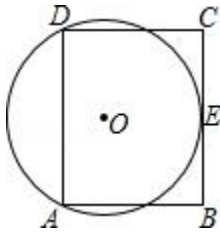
$$\therefore BD = CD = 9\text{m},$$

$$\therefore AB = AD + BD = 3\sqrt{3} + 9 \text{ (m)}.$$

故答案为: $3\sqrt{3}+9$.

点评：此题考查了解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题, 本题要求学生借助俯角构造直角三角形, 并结合图形利用三角函数解直角三角形.

17. (4 分) (2015•宁波) 如图, 在矩形 ABCD 中, $AB=8$, $AD=12$, 过 A, D 两点的 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 E, 则 $\odot O$ 的半径为 6.25.



考点：切线的性质；勾股定理；矩形的性质；垂径定理.

分析：首先连接 OE, 并反向延长交 AD 于点 F, 连接 OA, 由在矩形 ABCD 中, 过 A, D 两点的 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 E, 易得四边形 CDFE 是矩形, 由垂径定理可求得 AF 的长, 然后设 $\odot O$ 的半径为 x , 则 $OE=EF-OE=8-x$, 利用勾股定理即可得: $(8-x)^2+36=x^2$, 继而求得答案.

解答：解: 连接 OE, 并反向延长交 AD 于点 F, 连接 OA,

$\because BC$ 是切线,

$\therefore OE \perp BC$,

$\therefore \angle OEC=90^\circ$,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore \angle C=\angle D=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 CDFE 是矩形,

$\therefore EF=CD=AB=8$, $OF \perp AD$,

$\therefore AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 12=6$,

设 $\odot O$ 的半径为 x , 则 $OE=EF-OE=8-x$,

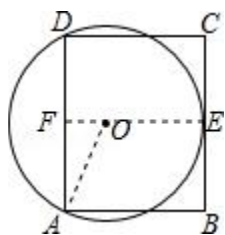
在 $\text{Rt}\triangle OAF$ 中, $OF^2 + AF^2 = OA^2$,

则 $(8-x)^2 + 36 = x^2$,

解得: $x = 6.25$,

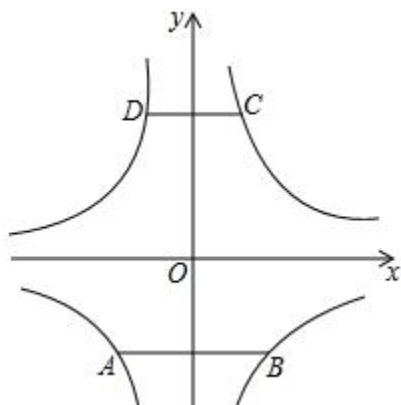
$\therefore \odot O$ 的半径为: 6.25.

故答案为: 6.25.



点评: 此题考查了切线的性质、垂径定理、矩形的性质以及勾股定理. 注意准确作出辅助线是解此题的关键.

18. (4分) (2015•宁波) 如图, 已知点 A, C 在反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 的图象上, 点 B, D 在反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ ($b < 0$) 的图象上, $AB \parallel CD \parallel x$ 轴, AB, CD 在 x 轴的两侧, $AB = 3$, $CD = 2$, AB 与 CD 的距离为 5, 则 $a - b$ 的值是 $-\frac{13}{2}$.



考点: 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析: 设 $A(t, \frac{a}{t})$, 则 $C(-t, -\frac{a}{t})$, $B(\frac{bt}{a}, \frac{a}{t})$, $D(-\frac{bt}{a}, -\frac{a}{t})$, 结合相关线段的长度来求 $a - b$ 的值.

解答: 解: 设 $A(t, \frac{a}{t})$, 则 $C(-t, -\frac{a}{t})$, $B(\frac{bt}{a}, \frac{a}{t})$, $D(-\frac{bt}{a}, -\frac{a}{t})$,

$$\text{依题意得} \begin{cases} \frac{bt}{a} - t = 3 \\ -\frac{a}{t} + \frac{bt}{a} = 2, \\ -\frac{a}{t} - \frac{a}{t} = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{25}{4} \\ b = -\frac{1}{5}, \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

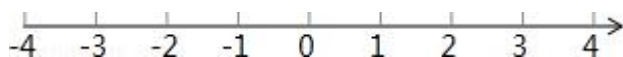
$$\text{所以 } a - b = \frac{25}{4} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{2}.$$

$$\text{故答案是: } \frac{13}{2}.$$

点评: 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征. 此题借助于方程组来求得相关系数的.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 78 分)

19. (6 分) (2015•宁波) 解一元一次不等式组 $\begin{cases} 1+x > -2 \\ \frac{2x-1}{3} \leq 1 \end{cases}$, 并把解在数轴上表示出来.



考点: 解一元一次不等式组; 在数轴上表示不等式的解集.

分析: 别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集, 并在数轴上表示出来即可.

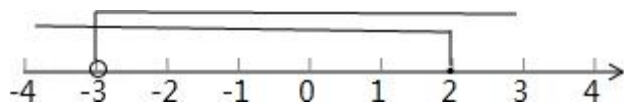
解答: 解: $\begin{cases} 1+x > -2 \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{3} \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①得, $x > -3$,

由②得, $x \leq 2$,

故此不等式组的解集为: $-3 < x \leq 2$.

在数轴上表示为:



点评： 本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

20. (8 分) (2015•宁波) 一个不透明的布袋里装有 2 个白球，1 个黑球和若干个红球，它们除颜色外其余都相同，从中任意摸出 1 个球，是白球的概率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 布袋里红球有多少个？

(2) 先从布袋中摸出 1 个球后不放回，再摸出 1 个球，请用列表法或画树状图等方法求出两次摸到的球都是白球的概率.

考点： 列表法与树状图法；概率公式.

分析： (1) 设红球的个数为 x ，根据白球的概率可得关于 x 的方程，解方程即可；

(2) 画出树形图，即可求出两次摸到的球都是白球的概率.

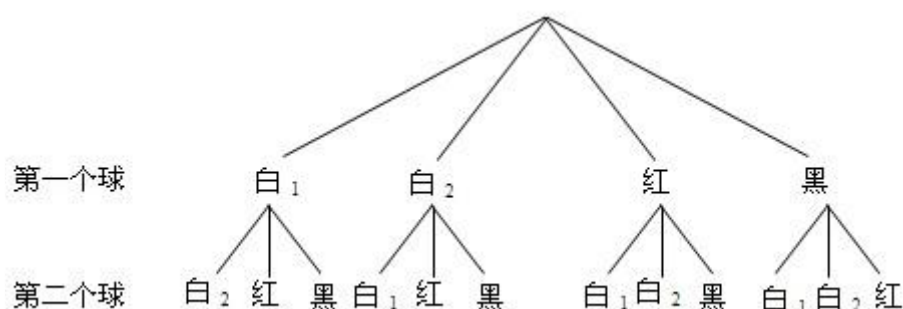
解答： 解：(1) 设红球的个数为 x ，由题意可得：

$$\frac{2}{2+1+x} = \frac{1}{2},$$

解得： $x=1$,

即红球的个数为 1 个；

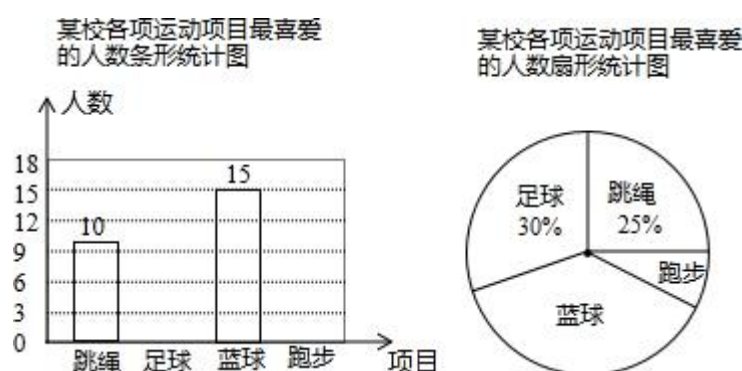
(2) 画树状图如下：



$$\therefore P(\text{摸得两白}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

点评：此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

21. (8分) (2015•宁波) 某校积极开展“阳光体育”活动，共开设了跳绳、足球、篮球、跑步四种运动项目，为了解学生最喜爱哪一种项目，随机抽取了部分学生进行调查，并绘制了如下的条形统计图和扇形统计图（部分信息未给出）.



- (1) 求本次被调查的学生人数；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 该校共有 1200 名学生，请估计全校最喜爱篮球的人数比最喜爱足球的人数多多少？

考点：条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

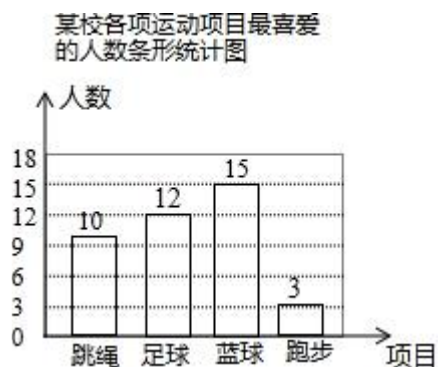
分析： (1) 用喜欢跳绳的人数除以其所占的百分比即可求得被调查的总人数；
(2) 用总人数乘以足球所占的百分比即可求得喜欢足球的人数，用总数减去其他各小组的人数即可求得喜欢跑步的人数，从而补全条形统计图；
(3) 用样本估计总体即可确定最喜爱篮球的人数比最喜爱足球的人数多多少.

解答： 解：(1) 观察条形统计图与扇形统计图知：喜欢跳绳的有 10 人，占 25%，故总人数有 $10 \div 25\% = 40$ 人；

(2) 喜欢足球的有 $40 \times 30\% = 12$ 人,

喜欢跑步的有 $40 - 10 - 15 - 12 = 3$ 人,

故条形统计图补充为:



(3) 全校最喜爱篮球的人数比最喜爱足球的人数多 $1200 \times \frac{15 - 12}{40} = 90$ 人.

点评: 本题考查了扇形统计图、条形统计图及用样本估计总体的知识, 解题的关键是能够读懂两种统计图并从中整理出进一步解题的有关信息, 难度不大.

22. (10 分) (2015•宁波) 宁波火车站北广场将于 2015 年底投入使用, 计划在广场内种植 A, B 两种花木共 6600 棵, 若 A 花木数量是 B 花木数量的 2 倍少 600 棵

(1) A, B 两种花木的数量分别是多少棵?

(2) 如果园林处安排 26 人同时种植这两种花木, 每人每天能种植 A 花木 60 棵或 B 花木 40 棵, 应分别安排多少人种植 A 花木和 B 花木, 才能确保同时完成各自的任务?

考点: 分式方程的应用; 二元一次方程组的应用.

分析: (1) 首先设 B 花木数量为 x 棵, 则 A 花木数量是 $(2x - 600)$ 棵, 由题意得等量关系: 种植 A, B 两种花木共 6600 棵, 根据等量关系列出方程, 再解即可;

(2) 首先设安排 a 人种植 A 花木, 由题意得等量关系: a 人种植 A 花木

所用时间= (26 - a) 人种植 B 花木所用时间, 根据等量关系列出方程, 再解即可.

解答: 解: (1) 设 B 花木数量为 x 棵, 则 A 花木数量是 $(2x - 600)$ 棵, 由题意得:

$$x + 2x - 600 = 6600,$$

$$\text{解得: } x = 2400,$$

$$2x - 600 = 4200,$$

答: B 花木数量为 2400 棵, 则 A 花木数量是 4200 棵;

(2) 设安排 a 人种植 A 花木, 由题意得:

$$\frac{4200}{60a} = \frac{2400}{40(26 - a)},$$

$$\text{解得: } a = 14,$$

经检验: $a = 14$ 是原分式方程的解,

$$26 - a = 26 - 14 = 12,$$

答: 安排 14 人种植 A 花木, 12 人种植 B 花木.

点评: 此题主要考查了分式方程的应用, 关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系, 列出方程. 注意不要忘记检验.

23. (10 分) (2015•宁波) 已知抛物线 $y = (x - m)^2 - (x - m)$, 其中 m 是常数.

(1) 求证: 不论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴一定有两个公共点;

(2) 若该抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$.

①求该抛物线的函数解析式;

②把该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点.

考点: 抛物线与 x 轴的交点; 二次函数图象与几何变换; 待定系数法求二次函数解析式.

专题: 计算题.

分析: (1) 先把抛物线解析式化为一般式, 再计算 Δ 的值, 得到 $\Delta=1>0$, 于是根据 $\Delta=b^2-4ac$ 决定抛物线与 x 轴的交点个数即可判断不论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴一定有两个公共点;

(2) ①根据对称轴方程得到 $=-\frac{-(2m+1)}{2}=\frac{5}{2}$, 然后解出 m 的值即可得到抛物线解析式;

②根据抛物线的平移规律, 设抛物线沿 y 轴向上平移 k 个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点, 则平移后抛物线解析式为 $y=x^2-5x+6+k$, 再利用抛物线与 x 轴的交点问题得到 $\Delta=5^2-4(6+k)=0$, 然后解关于 k 的方程即可.

解答: (1) 证明: $y=(x-m)^2-(x-m)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$,

$$\therefore \Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0,$$

$\therefore$ 不论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴一定有两个公共点;

$$(2) \text{ 解: } ① \because x=-\frac{-(2m+1)}{2}=\frac{5}{2},$$

$$\therefore m=2,$$

$$\therefore \text{ 抛物线解析式为 } y=x^2-5x+6;$$

②设抛物线沿 y 轴向上平移 k 个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点, 则平移后抛物线解析式为 $y=x^2-5x+6+k$,

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2-5x+6+k$ 与 x 轴只有一个公共点,

$$\therefore \Delta=5^2-4(6+k)=0,$$

$$\therefore k=\frac{1}{4},$$

即把该抛物线沿 y 轴向上平移 $\frac{1}{4}$ 个单位长度后, 得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点.

点评: 本题考查了抛物线与 x 轴的交点: 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标, 令 $y=0$, 即 $ax^2+bx+c=0$, 解关于 x 的一元

二次方程即可求得交点横坐标. $\Delta=b^2-4ac$ 决定抛物线与 x 轴的交点个数: $\Delta=b^2-4ac>0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta=b^2-4ac=0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta=b^2-4ac<0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

24. (10 分) (2015•宁波) 在边长为 1 的小正方形组成的方格纸中, 若多边形的各顶点都在方格纸的格点 (横竖格子线的交错点) 上, 这样的多边形称为格点多边形. 记格点多边形内的格点数为 a , 边界上的格点数为 b , 则格点多边形的面积可表示为 $S=ma+nb-1$, 其中 m, n 为常数.

(1) 在下面的方格中各画出一个面积为 6 的格点多边形, 依次为三角形、平行四边形 (非菱形)、菱形;

(2) 利用 (1) 中的格点多边形确定 m, n 的值.

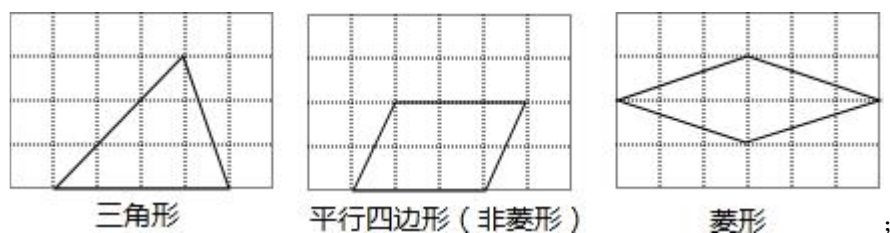


考点: 作图—应用与设计作图.

分析: (1) 利用格点图形的定义结合三角形以及平行四边形面积求法得出即可;

(2) 利用已知图形, 结合 $S=ma+nb-1$ 得出关于 m, n 的关系式, 进而求出即可.

解答: 解: (1) 如图所示:



(2) $\because$ 格点多边形内的格点数为 a , 边界上的格点数为 b , 则格点多边形的面积可表示为 $S=ma+nb-1$, 其中 m, n 为常数,

$\therefore$ 三角形: $S=3m+8n-1=6$, 平行四边形: $S=3m+8n-1=6$, 菱形: $S=5m+4n-1=6$,

$$\text{则} \begin{cases} 3m+8n-1=6 \\ 5m+4n-1=6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=1 \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

点评: 此题主要考查了应用设计与作图以及三角形、平行四边形面积求法和二元一次方程组的解法, 正确得出关于 m, n 的方程组是解题关键.

25. (12 分) (2015•宁波) 如图 1, 点 P 为 $\angle MON$ 的平分线上一点, 以 P 为顶点的角的两边分别与射线 OM, ON 交于 A, B 两点, 如果 $\angle APB$ 绕点 P 旋转时始终满足 $OA \cdot OB = OP^2$, 我们就把 $\angle APB$ 叫做 $\angle MON$ 的智慧角.

(1) 如图 2, 已知 $\angle MON = 90^\circ$, 点 P 为 $\angle MON$ 的平分线上一点, 以 P 为顶点的角的两边分别与射线 OM, ON 交于 A, B 两点, 且 $\angle APB = 135^\circ$. 求证: $\angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角.

(2) 如图 1, 已知 $\angle MON = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), $OP = 2$. 若 $\angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角, 连结 AB , 用含 α 的式子分别表示 $\angle APB$ 的度数和 $\triangle AOB$ 的面积.

(3) 如图 3, C 是函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 图象上的一个动点, 过 C 的直线 CD 分别交 x 轴和 y 轴于 A, B 两点, 且满足 $BC = 2CA$, 请求出 $\angle AOB$ 的智慧角 $\angle APB$ 的顶点 P 的坐标.

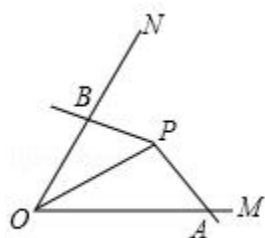


图1

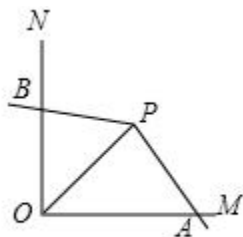


图2

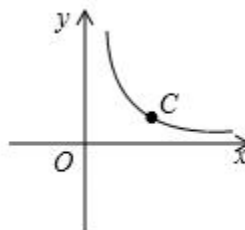


图3

考点：反比例函数综合题.

分析： (1) 由角平分线求出 $\angle AOP = \angle BOP = \frac{1}{2} \angle MON = 45^\circ$ ，再证出 $\angle OAP = \angle OPB$ ，证明 $\triangle AOP \sim \triangle POB$ ，得出对应边成比例 $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB}$ ，得出 $OP^2 = OA \cdot OB$ ，即可得出结论；

(2) 由 $\angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角，得出 $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB}$ ，证出 $\triangle AOP \sim \triangle POB$ ，得出对应角相等 $\angle OAP = \angle OPB$ ，即可得出 $\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ；过点 A 作 $AH \perp OB$ 于 H，由三角形的面积公式得出： $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AH$ ，即可得出 $S_{\triangle AOB} = 2\sin\alpha$ ；

(3) 设点 C (a, b)，则 $ab=3$ ，过点 C 作 $CH \perp OA$ 于 H；分两种情况：

①当点 B 在 y 轴正半轴上时；当点 A 在 x 轴的负半轴上时， $BC=2CA$ 不可能；当得 A 在 x 轴的正半轴上时；先求出 $\frac{CA}{AB} = \frac{1}{3}$ ，由平行线得出 $\triangle ACH \sim \triangle ABO$ ，得出比例式： $\frac{CH}{OB} = \frac{AH}{OA} = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3}$ ，得出 $OB=3b$ ， $OA=\frac{3a}{2}$ ，求出 $OA \cdot OB = \frac{27}{2}$ ，根据 $\angle APB$ 是 $\angle AOB$ 的智慧角，得出 OP，即可得出点 P 的坐标；

②当点 B 在 y 轴的负半轴上时；由题意得出： $AB=CA$ ，由 AAS 证明 $\triangle ACH \cong \triangle ABO$ ，得出 $OB=CH=b$ ， $OA=AH=\frac{1}{2}a$ ，得出 $OA \cdot OB = \frac{3}{2}$ ，求出 OP，即可得出点 P 的坐标。

解答： (1) 证明： $\because \angle MON = 90^\circ$ ，P 为 $\angle MON$ 的平分线上一点，

$$\therefore \angle AOP = \angle BOP = \frac{1}{2} \angle MON = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOP + \angle OAP + \angle APO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OAP + \angle APO = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle APO + \angle OPB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OPB,$$

$$\therefore \triangle AOP \sim \triangle POB,$$

$$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB},$$

$$\therefore OP^2 = OA \cdot OB,$$

$\therefore \angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角;

(2) 解: $\because \angle APB$ 是 $\angle MON$ 的智慧角,

$$\therefore OA \cdot OB = OP^2,$$

$$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB},$$

$\because P$ 为 $\angle MON$ 的平分线上一点,

$$\therefore \angle AOP = \angle BOP = \frac{1}{2} \alpha,$$

$$\therefore \triangle AOP \sim \triangle POB,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OPB,$$

$$\therefore \angle APB = \angle OPB + \angle OPA = \angle OAP + \angle OPA = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha,$$

$$\text{即 } \angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha;$$

过点 A 作 $AH \perp OB$ 于 H , 连接 AB ; 如图 1 所示:

$$\text{则 } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AH = \frac{1}{2} OB \cdot OA \sin \alpha = \frac{1}{2} OP^2 \cdot \sin \alpha,$$

$$\therefore OP = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 2\sin\alpha;$$

(3) 设点 C (a, b), 则 ab=3, 过点 C 作 CH⊥OA 于 H; 分两种情况:

①当点 B 在 y 轴正半轴上时; 当点 A 在 x 轴的负半轴上时, 如图 2 所示:

BC=2CA 不可能;

当得 A 在 x 轴的正半轴上时, 如图 3 所示:

$$\because BC=2CA,$$

$$\therefore \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\because CH \parallel OB,$$

$$\therefore \triangle ACH \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{CH}{OB} = \frac{AH}{OA} = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OB=3b, \quad OA=\frac{3a}{2},$$

$$\therefore OA \cdot OB = \frac{3a}{2} \cdot 3b = \frac{9ab}{2} = \frac{27}{2},$$

$\because \angle APB$ 是 $\angle AOB$ 的智慧角,

$$\therefore OP = \sqrt{OA \cdot OB} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

$\because \angle AOB=90^\circ$, OP 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \text{点 P 的坐标为: } \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right);$$

②当点 B 在 y 轴的负半轴上时, 如图 4 所示:

$$\because BC=2CA,$$

$$\therefore AB=CA,$$

在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle ABO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AHC = \angle AOB \\ \angle BAO = \angle CAH \\ CA = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACH \cong \triangle ABO \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore OB=CH=b, \quad OA=AH=\frac{1}{2}a,$$

$$\therefore OA \cdot OB = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{3}{2},$$

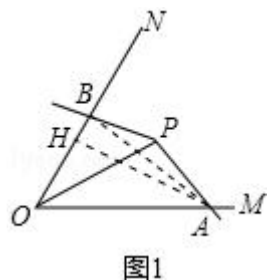
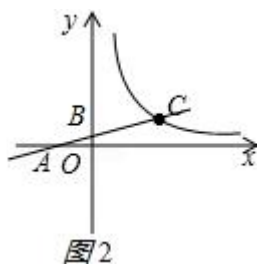
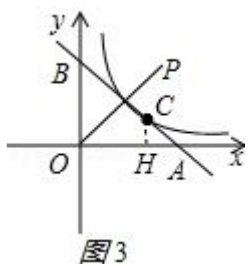
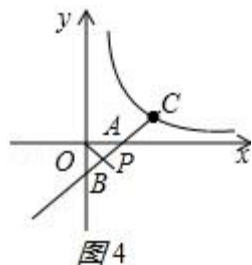
$\therefore \angle APB$ 是 $\angle AOB$ 的智慧角,

$$\therefore OP = \sqrt{OA \cdot OB} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$, OP 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

综上所述: 点 P 的坐标为: $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$, 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.



点评: 本题是反比例函数综合题目, 考查了角平分线的性质、相似三角形的判

定与性质、新定义以及运用、三角形面积的计算、全等三角形的判定与性质等知识；本题难度较大，综合性强，特别是（3）中，需要通过作辅助线进行分类讨论，证明三角形相似和三角形全等才能得出结果.

26. (14 分) (2015•宁波) 如图，在平面直角坐标系中，点 M 是第一象限内一点，过 M 的直线分别交 x 轴， y 轴的正半轴于 A ， B 两点，且 M 是 AB 的中点. 以 OM 为直径的 $\odot P$ 分别交 x 轴， y 轴于 C ， D 两点，交直线 AB 于点 E (位于点 M 右下方)，连结 DE 交 OM 于点 K .

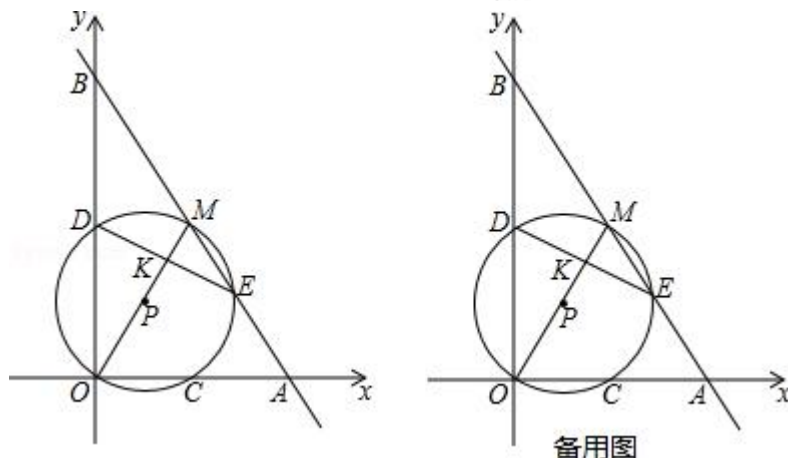
(1) 若点 M 的坐标为 $(3, 4)$,

①求 A ， B 两点的坐标；

②求 ME 的长.

(2) 若 $\frac{OK}{MK}=3$ ，求 $\angle OBA$ 的度数.

(3) 设 $\tan \angle OBA=x$ ($0 < x < 1$)， $\frac{OK}{MK}=y$ ，直接写出 y 关于 x 的函数解析式.



考点：圆的综合题；全等三角形的判定与性质；直角三角形斜边上的中线；勾股定理；三角形中位线定理；矩形的判定与性质；平行线分线段成比例；相似三角形的判定与性质；锐角三角函数的定义；特殊角的三角函数值.

专题：综合题.

分析： (1) ①连接 DM 、 MC ，如图 1，易证四边形 $OCMD$ 是矩形，从而得到

MD // OA, MC // OB, 由点 M 是 AB 的中点即可得到 BD=DO, AC=OC, 然后利用点 M 的坐标就可解决问题;

②根据勾股定理可求出 AB 的长, 从而得到 BM 的长, 要求 ME 的长, 只需需求 BE 的长, 只需证 $\triangle OBM \sim \triangle EBD$, 然后运用相似三角形的性质即可;

(2) 连接 DP、PE, 如图 2, 由 $\frac{OK}{MK}=3$ 可得 $OK=3MK$, 进而得到 $OM=4MK$, $PM=2MK$, $PK=MK$. 易证 $\triangle DPK \cong \triangle EMK$, 则有 $DK=EK$. 由 $PD=PE$ 可得 $PK \perp DE$, 从而可得 $\cos \angle DPK = \frac{PK}{PD} = \frac{1}{2}$, 则有 $\angle DPK = 60^\circ$, 根据圆周角定理可得 $\angle DOM = 30^\circ$. 由 $\angle AOB = 90^\circ$, $AM=BM$ 可得 $OM=BM$, 即可得到 $\angle OBA = \angle DOM = 30^\circ$;

(3) 连接 PD、OE, 如图 3, 设 $MK=t$, 则有 $OK=yt$, $OM=(y+1)t$, $BM=OM=(y+1)t$, $DP=PM=\frac{(y+1)t}{2}$, $PK=\frac{(y-1)t}{2}$. 由 $DP \parallel BM$ 可得 $\triangle DKP \sim \triangle EKM$, 则有 $\frac{DP}{ME} = \frac{PK}{MK}$, 由此可得 $ME = \frac{y+1}{y-1}t$, 从而可求得 $OE = \frac{(y+1)t}{y-1} \cdot \sqrt{y^2 - 2y}$, $BE = \frac{(y+1)yt}{y-1}$, 则有 $x = \tan \angle OBA = \frac{OE}{BE} = \frac{\sqrt{y^2 - 2y}}{y}$, 即 $x^2 = \frac{y^2 - 2y}{y^2} = 1 - \frac{2}{y}$, 整理得 $y = \frac{2}{1 - x^2}$.

解答: 解: (1) ①连接 DM、MC, 如图 1.

$\because OM$ 是 $\odot P$ 的直径,

$\therefore \angle MDO = \angle MCO = 90^\circ$.

$\because \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 OCMD 是矩形,

$\therefore MD \parallel OA$, $MC \parallel OB$,

$\therefore \frac{BD}{DO} = \frac{BM}{AM}$, $\frac{AC}{OC} = \frac{AM}{BM}$.

$\therefore$ 点 M 是 AB 的中点, 即 $BM=AM$,

$\therefore BD=DO, AC=OC$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 (3, 4),

$\therefore OB=2OD=8, OA=2OC=6$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (0, 8), 点 A 的坐标为 (6, 0);

②在 $Rt\triangle AOB$ 中, $OA=6, OB=8$,

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = 10.$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}AB = 5.$$

$\therefore \angle OBM = \angle EBD, \angle BOM = \angle BED$,

$\therefore \triangle OBM \sim \triangle EBD$,

$$\therefore \frac{BM}{BD} = \frac{BO}{BE},$$

$$\therefore \frac{5}{4} = \frac{8}{BE},$$

$$\therefore BE = \frac{32}{5},$$

$$\therefore ME = BE - BM = \frac{32}{5} - 5 = \frac{7}{5};$$

(2) 连接 DP、PE, 如图 2.

$$\therefore \frac{OK}{MK} = 3,$$

$$\therefore OK = 3MK,$$

$$\therefore OM = 4MK, PM = 2MK,$$

$$\therefore PK = MK.$$

$\therefore OD = BD, OP = MP$,

$\therefore DP \parallel BM$,

$$\therefore \angle PDK = \angle MEK, \quad \angle DPK = \angle EMK.$$

在 $\triangle DPK$ 和 $\triangle EMK$ 中,

$$\begin{cases} \angle PDK = \angle MEK \\ \angle DPK = \angle EMK, \\ PK = MK \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DPK \cong \triangle EMK,$$

$$\therefore DK = EK.$$

$$\because PD = PE,$$

$$\therefore PK \perp DE,$$

$$\therefore \cos \angle DPK = \frac{PK}{PD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle DPK = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DOM = 30^\circ.$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \quad AM = BM,$$

$$\therefore OM = BM,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle DOM = 30^\circ;$$

$$(3) \quad y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{2}{1-x^2}.$$

提示: 连接 PD、OE, 如图 3.

$$\text{设 } MK = t, \text{ 则有 } OK = yt, \quad OM = (y+1)t,$$

$$BM = OM = (y+1)t, \quad DP = PM = \frac{(y+1)t}{2},$$

$$PK = \frac{(y+1)t}{2} - t = \frac{(y-1)t}{2}.$$

由 $DP \parallel BM$ 可得 $\triangle DKP \sim \triangle EKM$,

$$\text{则有 } \frac{DP}{ME} = \frac{PK}{MK}, \quad \text{可得 } ME = \frac{y+1}{y-1}t.$$

$\therefore OM$ 是 $\odot P$ 的直径,

$$\therefore OE^2 = OM^2 - ME^2 = [(y+1)t]^2 - \left[\frac{y+1}{y-1}t\right]^2 = \frac{(y+1)^2 t^2}{(y-1)^2} \cdot (y^2 - 2y),$$

$$BE=BM+ME= (y+1) \cdot t + \frac{y+1}{y-1} t = \frac{(y+1)}{y-1} y t,$$

$$\therefore x^2 = \frac{y^2 - 2y}{y^2} = 1 - \frac{2}{y},$$

40

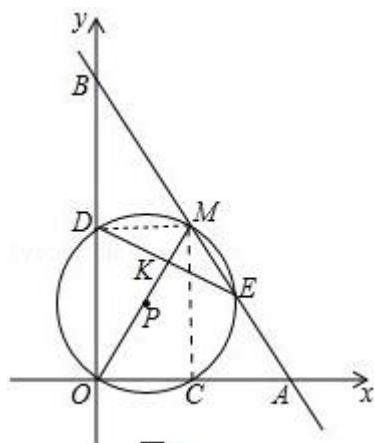


图1

点评: 本题主要考查了圆周角定理、相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、矩形的判定与性质、平行线分线段成比例、三角形中位线定理、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、等腰三角形的性质、勾股定理、三角函数的定义、特殊角的三角函数值等知识，综合性比较强，有一定的难度，通过证明 $\triangle OBM \sim \triangle EBD$ 求出 BE 是解决第 (1) ② 小题的关键，通过证明 $\triangle DPK \cong \triangle EMK$ 得到 $DK = EK$ 是解决第 (2) 小题的关键，设 $MK = t$ ，然后运用相似三角形的性质、勾股定理求出 OE、BE (用 y 、 t 的代数式表示) 是解决第 (3) 小题的关键.