

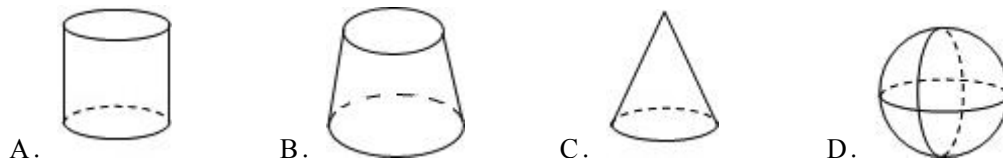
2015 年浙江省台州市中考数学试卷

一、选择题（本题有 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，请选出各题中符合题意的正确选项，不选、多选、错选，均不得分）

1.（4 分）单项式 $2a$ 的系数是（ ）

- A. 2 B. $2a$ C. 1 D. a

2.（4 分）下列四个几何体中，左视图为圆的是（ ）



3.（4 分）在下列调查中，适宜采用全面调查的是（ ）

- A. 了解我省中学生的视力情况
B. 了解九（1）班学生校服的尺码情况
C. 检测一批电灯泡的使用寿命
D. 调查台州《600 全民新闻》栏目的收视率

4.（4 分）若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(2, -1)$ ，则该反比例函数的图象在（ ）

- A. 第一、二象限 B. 第一、三象限
C. 第二、三象限 D. 第二、四象限

5.（4 分）若一组数据 3, x , 4, 5, 6 的众数为 6，则这组数据的中位数为（ ）

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

6.（4 分）把多项式 $2x^2 - 8$ 分解因式，结果正确的是（ ）

- A. $2(x^2 - 8)$ B. $2(x - 2)^2$
C. $2(x+2)(x-2)$ D. $2x(x - \frac{4}{x})$

7.（4 分）设二次函数 $y = (x - 3)^2 - 4$ 图象的对称轴为直线 l ，若点 M 在直线 l 上，则点 M 的坐标可能是（ ）

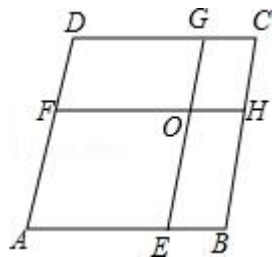
- A. $(1, 0)$ B. $(3, 0)$ C. $(-3, 0)$ D. $(0, -4)$

8.（4 分）如果将长为 6cm ，宽为 5cm 的长方形纸片折叠一次，那么这条折痕的长不可能是（ ）

- A. 8cm B. $5\sqrt{2}\text{cm}$ C. 5.5cm D. 1cm

9.（4 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ，点 E, F 分别在 AB, AD 上，且 $AE = AF$ ，过点

E 作 $EG \parallel AD$ 交 CD 于点 G , 过点 F 作 $FH \parallel AB$ 交 BC 于点 H , EG 与 FH 交于点 O . 当四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 的周长之差为 12 时, AE 的值为 ()



- A. 6.5 B. 6 C. 5.5 D. 5

10. (4 分) 某班有 20 位同学参加围棋、象棋比赛, 甲说: “只参加一项的人数大于 14 人.” 乙说: “两项都参加的人数小于 5.” 对于甲、乙两人的说法, 有下列四个命题, 其中真命题的是 ()

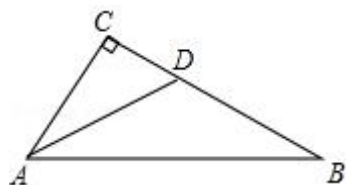
- A. 若甲对, 则乙对 B. 若乙对, 则甲对
C. 若乙错, 则甲错 D. 若甲错, 则乙对

二、填空题 (本题有 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. (5 分) 不等式 $2x - 4 \geq 0$ 的解集是_____.

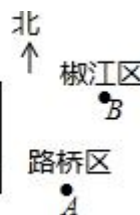
12. (5 分) 有四张质地、大小、反面完全相同的不透明卡片, 正面分别写着数字 1, 2, 3, 4, 现把它们的正面向下, 随机摆放在桌面上, 从中任意抽出一张, 则抽出的数字是奇数的概率是_____.

13. (5 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DC = 3$, 则点 D 到 AB 的距离是_____.



14. (5 分) 如图, 这是台州市地图的一部分, 分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立直角坐标系, 规定一个单位长度表示 1km , 甲、乙两人对着地图如下描述路桥区 A 处的位置.

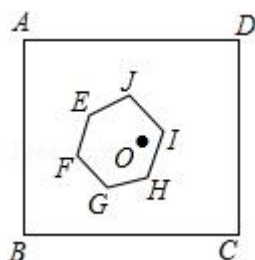
甲: 路桥区 A 处的坐标是 $(2, 0)$;
乙: 路桥区 A 处在椒江区 B 处南偏西 30° 方向, 相距 16km .



则椒江区 B 处的坐标是_____.

15. (5分) 关于 x 的方程 $mx^2 + x - m + 1 = 0$, 有以下三个结论: ①当 $m = 0$ 时, 方程只有一个实数解; ②当 $m \neq 0$ 时, 方程有两个不等的实数解; ③无论 m 取何值, 方程都有一个负数解, 其中正确的是_____ (填序号).

16. (5分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 中心为点 O , 有一边长大小不定的正六边形 $EFGHIJ$ 绕点 O 可任意旋转, 在旋转过程中, 这个正六边形始终在正方形 $ABCD$ 内 (包括正方形的边), 当这个正六边形的边长最大时, AE 的最小值为_____.



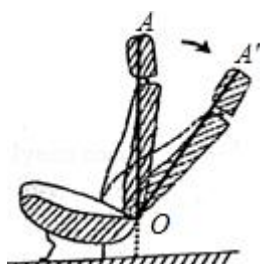
三、解答题 (本题有 8 小题, 第 17-20 题每题 8 分, 第 21 题 10 分, 第 22,23 题每题 12 分, 第 24 题 14, 共 80 分)

17. (8分) 计算: $6 \div (-3) + |-1| - 2015^0$.

18. (8分) 先简化, 再求值: $\frac{1}{a+1} - \frac{a}{(a+1)^2}$, 其中 $a = \sqrt{2} - 1$.

19. (8分) 如图, 这是一把可调节座椅的侧面示意图, 已知头枕上的点 A 到调节器点 O 处的距离为 80cm , AO 与地面垂直, 现调整靠背, 把 OA 绕点 O 旋转 35° 到 OA' 处, 求调整后点 A' 比调整前点 A 的高度降低了多少厘米 (结果取整数)?

(参考数据: $\sin 35^\circ \approx 0.57$, $\cos 35^\circ \approx 0.82$, $\tan 35^\circ \approx 0.70$)



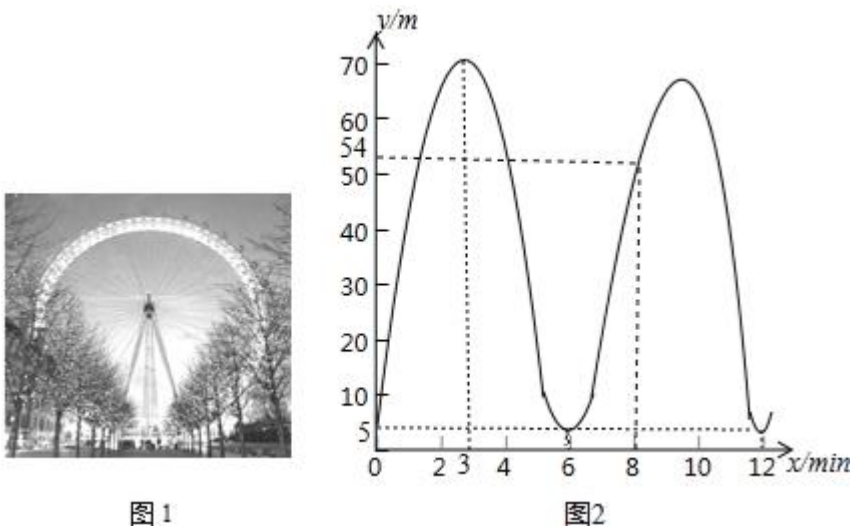
20. (8分) 图 1 中的摩天轮可抽象成一个圆, 圆上一点离地面的高度 y (m) 与旋转时间 x (min) 之间的关系如图 2 所示.

(1) 根据图 2 填表:

x (min)	0	3	6	8	12	...
y (m)	_____	_____	_____	_____	_____	...

(2) 变量 y 是 x 的函数吗? 为什么?

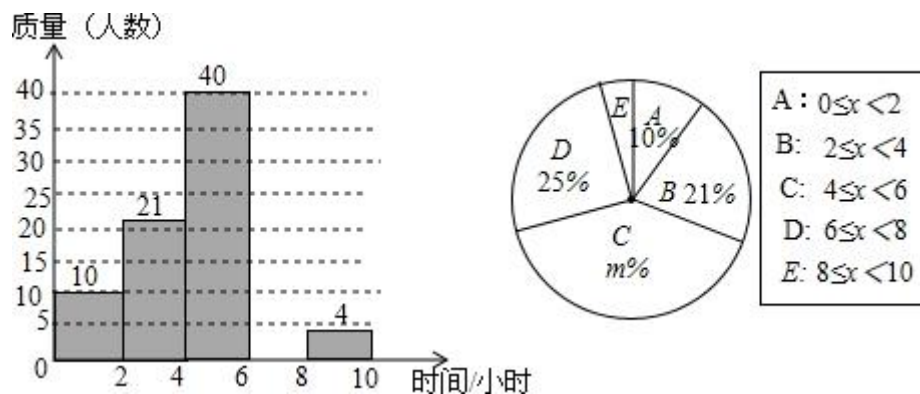
(3) 根据图中的信息, 请写出摩天轮的直径.



21. (10分) 某校想了解学生每周的课外阅读时间情况, 随机调查了部分学生, 对学生每周的课外阅读时间 x (单位: 小时) 进行分组整理, 并绘制了如图所示的不完整的频数分布直方图和扇形统计图.

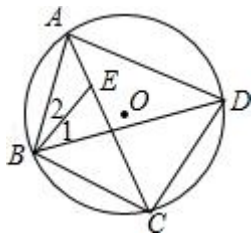
根据图中提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 补全频数分布直方图;
- (2) 求扇形统计图中 m 的值和 “E” 组对应的圆心角度数;
- (3) 请估计该校 3000 名学生中每周的课外阅读时间不小于 6 小时的人数.



22. (12分) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 点 E 在对角线 AC 上, $EC = BC = DC$.

- (1) 若 $\angle CBD = 39^\circ$, 求 $\angle BAD$ 的度数;
- (2) 求证: $\angle 1 = \angle 2$.



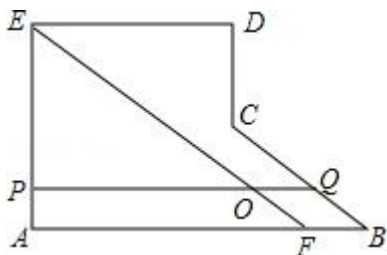
23. (12分) 如图, 在多边形 $ABCDE$ 中, $\angle A = \angle AED = \angle D = 90^\circ$, $AB = 5$, $AE = 2$, $ED = 3$, 过点 E 作 $EF \parallel CB$ 交 AB 于点 F , $FB = 1$, 过 AE 上的点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交线段 EF 于点 O , 交折线 BCD 于点 Q , 设 $AP = x$, $PO \cdot OQ = y$.

(1) ①延长 BC 交 ED 于点 M , 则 $MD = \underline{\hspace{2cm}}$, $DC = \underline{\hspace{2cm}}$;

②求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 当 $a \leq x \leq \frac{1}{2}$ ($a > 0$) 时, $9a \leq y \leq 6b$, 求 a, b 的值;

(3) 当 $1 \leq y \leq 3$ 时, 请直接写出 x 的取值范围.



24. (14分) 定义: 如图 1, 点 M, N 把线段 AB 分割成 AM, MN 和 BN , 若以 AM, MN, BN 为边的三角形是一个直角三角形, 则称点 M, N 是线段 AB 的勾股分割点.

(1) 已知点 M, N 是线段 AB 的勾股分割点, 若 $AM = 2$, $MN = 3$, 求 BN 的长;

(2) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, FG 是中位线, 点 D, E 是线段 BC 的勾股分割点, 且 $EC > DE \geq BD$, 连接 AD, AE 分别交 FG 于点 M, N , 求证: 点 M, N 是线段 FG 的勾股分割点;

(3) 已知点 C 是线段 AB 上的一点, 其位置如图 3 所示, 请在 BC 上画一点 D , 使点 C, D 是线段 AB 的勾股分割点 (要求尺规作图, 保留作图痕迹, 画一种情形即可);

(4) 如图 4, 已知点 M, N 是线段 AB 的勾股分割点, $MN > AM \geq BN$, $\triangle AMC$, $\triangle MND$ 和 $\triangle NBE$ 均为等边三角形, AE 分别交 CM, DM, DN 于点 F, G, H , 若 H 是 DN 的中点, 试探究 $S_{\triangle AMF}$, $S_{\triangle BEN}$ 和 $S_{\text{四边形} MNHG}$ 的数量关系, 并说明理由.

2015 年浙江省台州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题有 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，请选出各题中符合题意的正确选项，不选、多选、错选，均不得分）

1. 【分析】根据单项式系数的定义来选择，单项式中数字因数叫做单项式的系数．

【解答】解：根据单项式系数的定义，单项式的系数为 2．

故选：A．

【点评】本题考查单项式的系数，注意单项式中数字因数叫做单项式的系数．

2. 【分析】四个几何体的左视图：圆柱是矩形，圆锥是等腰三角形，球是圆，圆台是等腰梯形，由此可确定答案．

【解答】解：因为圆柱是矩形，圆锥是等腰三角形，球是圆，圆台是等腰梯形，

故选：D．

【点评】主要考查立体图形的左视图，关键是几何体的左视图．

3. 【分析】由普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似．

【解答】解：A、了解我省中学生的视力情况，调查范围广，适合抽样调查，故 A 不符合题意；

B、了解九（1）班学生校服的尺码情况，适合普查，故 B 符合题意；

C、检测一批电灯泡的使用寿命，调查具有破坏性，适合抽样调查；

D、调查台州《600 全民新闻》栏目的收视率调查范围广，适合抽样调查，故 D 不符合题意；

故选：B．

【点评】本题考查了抽样调查和全面调查的区别，选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查．

4. 【分析】根据反比例函数图象在第一、三象限或在第二、四象限，根据（2，-1）所在象限即可作出判断．

【解答】解：点（2，-1）在第四象限，则该反比例函数的图象的两个分支在第二、四

象限.

故选: D .

【点评】本题考查了反比例函数的性质, 对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), (1) $k > 0$, 反

比例函数图象在第一、三象限; (2) $k < 0$, 反比例函数图象在第二、四象限内.

5. 【分析】根据众数和中位数的概念求解.

【解答】解: $\because$ 这组数据的众数为 6,

$\therefore x = 6$,

则这组数据按照从小到大的顺序排列为: 3, 4, 5, 6, 6,

中位数为: 5.

故选: C .

【点评】本题考查了众数和中位数的知识, 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数; 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

6. 【分析】首先提取公因式 2, 进而利用平方差公式分解因式得出即可.

【解答】解: $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$.

故选: C .

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式, 熟练应用平方差公式分解因式是解题关键.

7. 【分析】根据二次函数的解析式可得出直线 l 的方程为 $x = 3$, 点 M 在直线 l 上则点 M 的横坐标一定为 3, 从而选出答案.

【解答】解: $\because$ 二次函数 $y = (x - 3)^2 - 4$ 图象的对称轴为直线 $x = 3$,

$\therefore$ 直线 l 上所有点的横坐标都是 3,

$\because$ 点 M 在直线 l 上,

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 3,

故选: B .

【点评】本题考查了二次函数的性质, 解答本题的关键是掌握二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的顶点坐标为 (h, k) , 对称轴是 $x = h$.

8. 【分析】根据勾股定理计算出最长折痕即可作出判断.

【解答】解：易知最长折痕为矩形对角线的长，根据勾股定理对角线长为： $\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$

≈ 7.8 ，故折痕长不可能为 8cm 。

故选：A。

【点评】考查了折叠问题，勾股定理，根据勾股定理计算后即可做出选择，难度不大。

9. 【分析】根据菱形的性质得出 $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, 推出平行四边形 $ABHF$ 、 $AEGD$ 、 $GCHO$, 得出 $AF = FO = OE = AE$ 和 $OH = CH = GC = GO$, 根据菱形的判定得出四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 是菱形，再解答即可。

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = BC = AB = CD$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$\because EG \parallel AD$, $FH \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 是平行四边形，

$\therefore AF = OE$, $AE = OF$, $OH = GC$, $CH = OG$,

$\because AE = AF$,

$\therefore OE = OF = AE = AF$,

$\because AE = AF$,

$\therefore BC - BH = CD - DG$, 即 $OH = HC = CG = OG$,

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 是菱形，

$\because$ 四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 的周长之差为 12，

$\therefore 4AE - 4(8 - AE) = 12$,

解得： $AE = 5.5$ ，

故选：C。

【点评】此题考查菱形的性质，关键是根据菱形的判定得出四边形 $AEOF$ 与四边形 $CGOH$ 是菱形。

10. 【分析】分别假设甲说的对和乙说的正确，进而得出答案。

【解答】解：若甲对，即只参加一项的人数大于 14 人，不妨假设只参加一项的人数是 15 人，

则两项都参加的人数为 5 人，故乙错。

若乙对，即两项都参加的人数小于 5 人，则两项都参加的人数至多为 4 人，

此时只参加一项的人数为 16 人，故甲对。

故选：B.

【点评】此题主要考查了推理与论证，关键是分两种情况分别进行分析.

二、填空题（本题有 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. 【分析】先移项，再把 x 的系数化为 1 即可.

【解答】解：移项得， $2x \geq 4$,

x 的系数化为 1 得， $x \geq 2$.

故答案为： $x \geq 2$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式，熟知解一元一次不等式的基本步骤是解答此题的关键.

12. 【分析】由有四张质地、大小、反面完全相同的不透明卡片，正面分别写着数字 1，2，3，4，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】解： $\because$ 有四张质地、大小、反面完全相同的不透明卡片，正面分别写着数字 1，2，3，4，

$\therefore$ 从中任意抽出一张，则抽出的数字是奇数的概率是： $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

13. 【分析】根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $DE = DC$ 即可得解.

【解答】解：作 $DE \perp AB$ 于 E ,

$\because AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线， $\angle C = 90^\circ$ ，

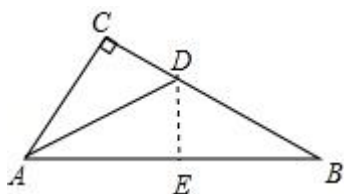
$\therefore DE = DC$,

$\because DC = 3$,

$\therefore DE = 3$,

即点 D 到 AB 的距离 $DE = 3$.

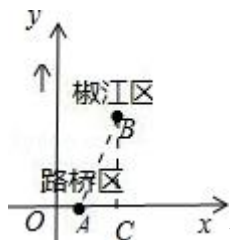
故答案为：3.



【点评】本题主要考查了角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，熟记性质是解

题的关键.

14. 【分析】根据 A 点坐标, 可建立平面直角坐标系, 根据直角三角形的性质, 可得 AC 的长, 根据勾股定理, BC 的长.



【解答】解: 如图: 连接 AB , 作 $BC \perp x$ 轴于 C 点,

由题意, 得 $AB = 16$, $\angle ABC = 30^\circ$,

$$AC = 8, BC = 8\sqrt{3}.$$

$$OC = OA + AC = 10,$$

$$B(10, 8\sqrt{3}).$$

【点评】本题考查了坐标确定位置, 利用 A 点坐标建立平面直角坐标系是解题关键, 利用了直角三角形的性质: 30° 的角所对的直角边是斜边的一半.

15. 【分析】分别讨论 $m = 0$ 和 $m \neq 0$ 时方程 $mx^2 + x - m + 1 = 0$ 根的情况, 进而填空.

【解答】解: 当 $m = 0$ 时, $x = -1$, 方程只有一个解, ①正确;

当 $m \neq 0$ 时, 方程 $mx^2 + x - m + 1 = 0$ 是一元二次方程, $\Delta = 1 - 4m(1 - m) = 1 - 4m + 4m^2 = (2m - 1)^2 \geq 0$, 方程有两个实数解, ②错误;

把 $mx^2 + x - m + 1 = 0$ 分解为 $(x + 1)(mx - m + 1) = 0$,

当 $x = -1$ 时, $m - 1 - m + 1 = 0$, 即 $x = -1$ 是方程 $mx^2 + x - m + 1 = 0$ 的根, ③正确;

故答案为: ①③.

【点评】本题主要考查了根的判别式以及一元一次方程的解的知识, 解答本题的关键是掌握根的判别式的意义以及分类讨论的思想.

16. 【分析】当正六边形 $EFGHIJ$ 的边长最大时, 要使 AE 最小, 六边形对角线 EH 与正方形的边长相等就可解决问题.

【解答】解: 当正六边形 $EFGHIJ$ 的边长最大时, 要使 AE 最小, 六边形对角线 EH 与正方形的边长相等,

$$AE \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{1^2 + 1^2} - 1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

【点评】 本题考查了正多边形的性质与运动的轨迹问题，解决本题的关键是首先找到正六边形的边长最大时正六边形在正方形内的位置，再旋转正六边形使得 AE 最小.

三、解答题（本题有 8 小题，第 17-20 题每题 8 分，第 21 题 10 分，第 22,23 题每题 12 分，第 24 题 14，共 80 分）

17. 【分析】 原式第一项利用除法法则计算，第二项利用绝对值的代数意义化简，最后一项利用零指数幂法则计算即可得到结果.

【解答】 解：原式 $= -2 + 1 - 1$

$= -2$.

【点评】 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. 【分析】 先对题目中的式子化简，再将 a 的值代入即可解答本题.

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解：} & \frac{1}{a+1} - \frac{a}{(a+1)^2} \\ &= \frac{(a+1)-a}{(a+1)^2} \\ &= \frac{a+1-a}{(a+1)^2} \\ &= \frac{1}{(a+1)^2}, \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{2} - 1$ 时，

$$\text{原式} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

【点评】 本题考查二次根式的化简求值，解题的关键是明确二次根式化简求值的方法.

19. 【分析】 作 $A'B \perp AO$ 于 B ，通过解余弦函数求得 OB ，然后根据 $AB = OA - OB$ 求得即可.

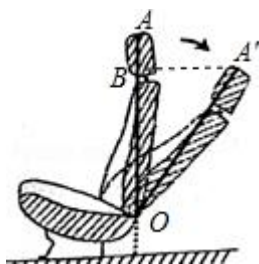
【解答】 解：如图，根据题意 $OA = OA' = 80\text{cm}$ ， $\angle AOA' = 35^\circ$ ，

作 $A'B \perp AO$ 于 B ，

$$\therefore OB = OA' \cdot \cos 35^\circ = 80 \times 0.82 \approx 65.6,$$

$$\therefore AB = OA - OB = 80 - 65.6 = 14.4\text{cm}.$$

答：调整后点 A' 比调整前点 A 的高度降低了 14 厘米.



【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，熟练应用锐角三角函数关系是解题关键．

20. 【分析】（1）直接结合图象写出有关点的纵坐标即可；

（2）利用函数的定义直接判断即可．

（3）最高点的纵坐标减去最低点的纵坐标即可求得摩天轮的半径．

【解答】解：（1）填表如下：

x (min)	0	3	6	8	12	...
y (m)	5	70	5	54	5	...

（2）因为每给一个 x 的值有唯一的一个函数值与之对应，符合函数的定义，

所以 y 是 x 的函数；

（3） $\because$ 最高点为 70 米，最低点为 5 米，

$\therefore$ 摩天轮的直径为 65 米．

【点评】本题考查了函数的图象，解题的关键是从实际问题中抽象出函数模型，难度不大．

21. 【分析】（1）根据第二组频数为 21，所占百分比为 21%，求出数据总数，再用数据总数减去其余各组频数得到第四组频数，进而补全频数分布直方图；

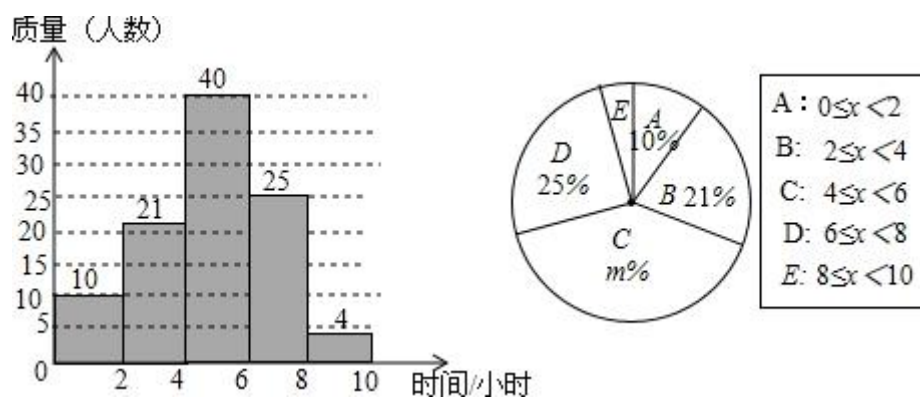
（2）用第三组频数除以数据总数，再乘以 100，得到 m 的值；先求出“E”组所占百分比，再乘以 360° 即可求出对应的圆心角度数；

（3）用 3000 乘以每周课外阅读时间不小于 6 小时的学生所占百分比即可．

【解答】解：（1）数据总数为： $21 \div 21\% = 100$ ，

第四组频数为： $100 - 10 - 21 - 40 - 4 = 25$ ，

频数分布直方图补充如下：



(2) $m = 40 \div 100 \times 100 = 40$;

“E”组对应的圆心角度数为： $360^\circ \times \frac{4}{100} = 14.4^\circ$ ；

(3) $3000 \times (25\% + \frac{4}{100}) = 870$ (人).

即估计该校 3000 名学生中每周的课外阅读时间不小于 6 小时的人数是 870 人.

【点评】此题主要考查了频数分布直方图、扇形统计图的能力和利用统计图获取信息的能力；利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题．也考查了利用样本估计总体．

22. **【分析】**(1) 根据等腰三角形的性质由 $BC = DC$ 得到 $\angle CBD = \angle CDB = 39^\circ$ ，再根据圆周角定理得 $\angle BAC = \angle CDB = 39^\circ$ ， $\angle CAD = \angle CBD = 39^\circ$ ，所以 $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 78^\circ$ ；

(2) 根据等腰三角形的性质由 $EC = BC$ 得 $\angle CEB = \angle CBE$ ，再利用三角形外角性质得 $\angle CEB = \angle 2 + \angle BAE$ ，则 $\angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD$ ，加上 $\angle BAE = \angle CBD$ ，所以 $\angle 1 = \angle 2$ ．

【解答】(1) 解： $\because BC = DC$ ，

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 39^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \angle CDB = 39^\circ, \angle CAD = \angle CBD = 39^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 39^\circ + 39^\circ = 78^\circ;$$

(2) 证明： $\because EC = BC$ ，

$$\therefore \angle CEB = \angle CBE,$$

$$\text{而 } \angle CEB = \angle 2 + \angle BAE, \angle CBE = \angle 1 + \angle CBD,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD,$$

$$\because \angle BAE = \angle BDC = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．也考查了等腰三角形的性质．

23. 【分析】（1）①根据两组对边平行得到四边形 $OFBQ$ ，四边形 $EMBF$ 是平行四边形，求出 $EM = BF = 1$ ，得到 $DM = 2$ ，通过 $\triangle DMC \sim \triangle AEF$ ，列比例式求得 $CD = 1$ ；②根据 $\triangle EPO \sim \triangle EAF$ ，列比例式即可求得 y 关于 x 的函数解析式；

$$(2) \text{ 当 } a \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ (} a > 0 \text{) 时, } 9a \leq y \leq 6b, y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小, 于是得到 } 4 - 2 \times \frac{1}{2} =$$

$$9a, 4 - 2a = 6b, \text{ 解得结果即可.}$$

$$(3) \text{ ①当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } 1 \leq 4 - 2x \leq 3, \text{ 得到 } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \text{ ②当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } y = -4x^2 - 10x$$

$$-4 \text{ 的对称轴为 } x = \frac{5}{4}, y_{\max} = \frac{9}{4}, \text{ 当 } x = 1 \text{ 时, } y = 2 \text{ 满足要求, 当 } y = 1, x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$\text{而 } 5 + \frac{\sqrt{5}}{4} < 2, \text{ 得到 } 1 \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{4}, \text{ 于是得到结论.}$$

【解答】解：（1）① $\because EF \parallel CB, PQ \parallel AB,$

$\therefore$ 四边形 $OFBQ$ 是平行四边形，

$$\therefore OQ = BF = 1,$$

$$\because \angle A = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $EMBF$ 是平行四边形，

$$\therefore EM = BF = 1,$$

$$\because DE = 3,$$

$$\therefore DM = 2,$$

$$\because \angle D = \angle A = 90^\circ, \angle DMC = \angle B = \angle EFA,$$

$$\therefore \triangle DMC \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \frac{DM}{AF} = \frac{CD}{AE},$$

$$\because AF = AB - BF = 4,$$

$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{CD}{2},$$

$$\therefore CD = 1;$$

故答案为：2，1；

$$\textcircled{2} \because AP = x, EP = 2 - x,$$

$$\text{在 } RT\triangle AEF \text{ 中, } \tan \angle AEF = \frac{AF}{AE} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\therefore PO = PE \cdot \tan \angle AEF = 2 \times (2 - x) = -2x + 4.$$

当 $0 < x \leq 1$ 时,

$$\because OQ = FB = 1,$$

$$\therefore y = PO \cdot OQ = (-2x + 4) \times 1 = -2x + 4;$$

当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\because PQ = 3, \therefore OQ = 3 - OP,$$

$$\because PO \cdot OQ = y,$$

$$\therefore y = PO(3 - PO) = (-2x + 4)(3 + 2x - 4) = -4x^2 + 10x - 4,$$

$$\therefore y = \begin{cases} -2x + 4 (0 < x \leq 1) \\ -4x^2 + 10x - 4 (1 < x \leq 2) \end{cases};$$

$$(2) \text{ 当 } a \leq x \leq \frac{1}{2} \ (a > 0) \text{ 时, } 9a \leq y \leq 6b,$$

$$\because y = -2x + 4,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$$\therefore 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 9a, \quad 4 - 2a = 6b,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{5}{9};$$

(3) 图象如图所示,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } 1 \leq 4 - 2x \leq 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

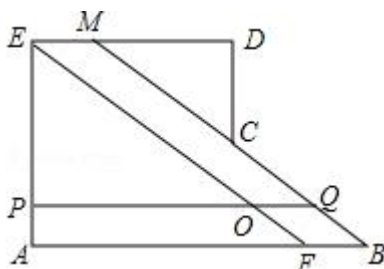
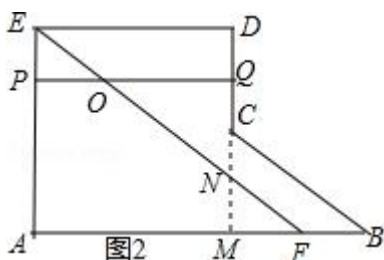
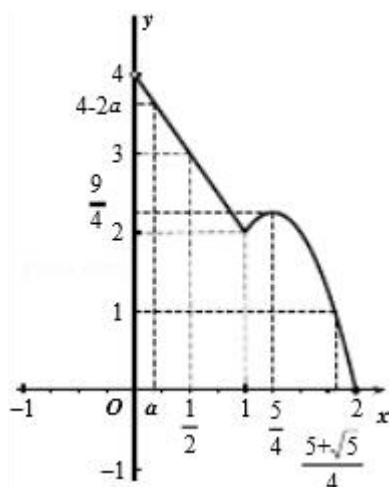
$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时, } y = -4x^2 + 10x - 4 \text{ 的对称轴为 } x = \frac{5}{4}, \quad y_{\max} = \frac{9}{4},$$

$$\text{当 } y = 1, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}, \text{ 而 } \frac{5 + \sqrt{5}}{4} < 2,$$

$$\therefore 1 \leq x \leq \frac{5+\sqrt{5}}{4},$$

综上所述：当 $1 \leq y \leq 3$ 时， x 的取值范围为 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{5}}{4}$.



【点评】 本题考查了平行四边形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解不等式组，求一次函数的解析式，根据三角形相似列比例式求一次函数的解析式是解题的关键。

24. **【分析】** (1) ①当 MN 为最大线段时，由勾股定理求出 BN ；②当 BN 为最大线段时，由勾股定理求出 BN 即可；

(2) 先证出点 M 、 N 分别是 AD 、 AE 的中点，得出 $BD = 2FM$ ， $DE = 2MN$ ， $EC = 2NG$ ，求出 $EC^2 = BD^2 + DE^2$ ，得出 $NG^2 = FM^2 + MN^2$ ，即可得出结论；

(3) 在 AB 上截取 $CE = CA$ ；作 AE 点垂直平分线，截取 $CF = CA$ ；作 BF 的垂直平分线，交 AB 于 D 即可；

(4) 先证明 $\triangle DGH \cong \triangle NEH$ ，得出 $DG = EN = b$ ， $MG = c - b$ ，再证明 $\triangle AGM \sim \triangle AEN$ ，得出比例式，得出 $c^2 = 2ab - ac + bc$ ，证出 $c^2 = a^2 + b^2$ ，得出 $a = b$ ，证出 $\triangle DGH \cong \triangle CAF$ ，

得出 $S_{\triangle DGH} = S_{\triangle CAF}$, 证出 $S_{\triangle DMN} = S_{\triangle ACM} + S_{\triangle ENB}$, 即可得出结论.

【解答】(1) 解: ①当 MN 为最大线段时,

$\because$ 点 M 、 N 是线段 AB 的勾股分割点,

$$\therefore BN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5};$$

②当 BN 为最大线段时,

$\because$ 点 M 、 N 是线段 AB 的勾股分割点,

$$\therefore BN = \sqrt{MN^2 + AM^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},$$

综上所述: $BN = \sqrt{5}$ 或 $\sqrt{13}$;

(2) 证明: $\because FG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore FG \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AM}{MD} = \frac{AN}{NE} = \frac{AG}{GC} = 1,$$

$\therefore$ 点 M 、 N 分别是 AD 、 AE 的中点,

$$\therefore BD = 2FM, DE = 2MN, EC = 2NG,$$

$\because$ 点 D 、 E 是线段 BC 的勾股分割点, 且 $EC > DE \geq BD$,

$$\therefore EC^2 = BD^2 + DE^2,$$

$$\therefore (2NG)^2 = (2FM)^2 + (2MN)^2,$$

$$\therefore NG^2 = FM^2 + MN^2,$$

$\therefore$ 点 M 、 N 是线段 FG 的勾股分割点;

(3) 解: 作法: ①在 AB 上截取 $CE = CA$;

②作 AE 的垂直平分线, 并截取 $CF = CA$;

③连接 BF , 并作 BF 的垂直平分线, 交 AB 于 D ;

点 D 即为所求; 如图所示:

(4) 解: $S_{\text{四边形} MNHG} = S_{\triangle AMF} + S_{\triangle BEN}$, 理由如下:

设 $AM = a$, $BN = b$, $MN = c$,

$\because H$ 是 DN 的中点,

$$\therefore DH = HN = \frac{1}{2}c,$$

$\because \triangle MND$ 、 $\triangle BNE$ 均为等边三角形,

$$\therefore \angle D = \angle DNE = 60^\circ,$$

在 $\triangle DGH$ 和 $\triangle NEH$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle DNE \\ DH = HN \\ \angle DHG = \angle NHE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DGH \cong \triangle NEH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DG = EN = b,$$

$$\therefore MG = c - b,$$

$$\therefore GM \parallel EN,$$

$$\therefore \triangle AGM \sim \triangle AEN,$$

$$\therefore \frac{c-b}{b} = \frac{a}{a+c},$$

$$\therefore c^2 = 2ab - ac + bc,$$

$\therefore$ 点 M 、 N 是线段 AB 的勾股分割点,

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore (a - b)^2 = (b - a)c,$$

$$\text{又} \because b - a \neq c,$$

$$\therefore a = b,$$

在 $\triangle DGH$ 和 $\triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle C \\ DG = CA \\ \angle DGH = \angle CAF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DGH \cong \triangle CAF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore S_{\triangle DGH} = S_{\triangle CAF},$$

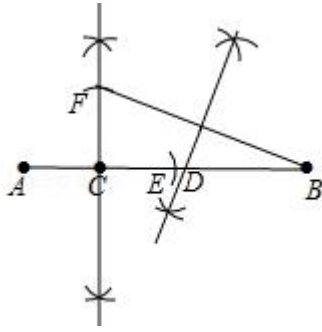
$$\therefore c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2,$$

$$\therefore S_{\triangle DMN} = S_{\triangle ACM} + S_{\triangle ENB},$$

$$\therefore S_{\triangle DMN} = S_{\triangle DGH} + S_{\text{四边形} MNHG}, \quad S_{\triangle ACM} = S_{\triangle CAF} + S_{\triangle AMF},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} MNHG} = S_{\triangle AMF} + S_{\triangle BEN}.$$



【点评】本题是相似形综合题目，考查了新定义“勾股分割点”、勾股定理、三角形中位线定理、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等边三角形的性质、三角形和四边形面积的计算等知识；本题难度较大，综合性强，特别是（4）中，需要两次证明三角形全等和三角形相似才能得出结论．