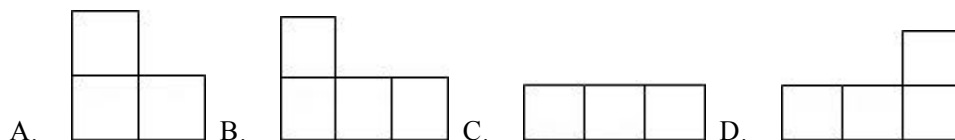
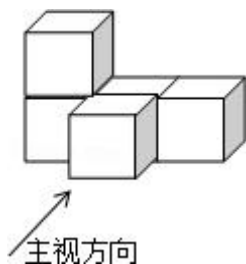


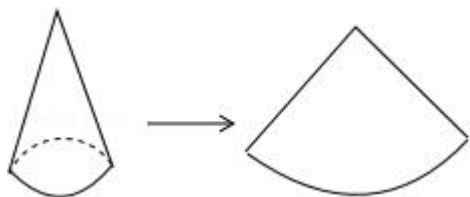
2014 年浙江省绍兴市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. (4 分) (2014•绍兴) 比较 -3 , 1 , -2 的大小, 下列判断正确的是 ()
- A. $-3 < -2 < 1$ B. $-2 < -3 < 1$ C. $1 < -2 < -3$ D. $1 < -3 < -2$
2. (4 分) (2014•绍兴) 计算 $(ab)^2$ 的结果是 ()
- A. $2ab$ B. a^2b C. a^2b^2 D. ab^2
3. (4 分) (2014•绍兴) 太阳的温度很高, 其表面温度大概有 6000°C , 而太阳中心的温度达到了 19200000°C , 用科学记数法可将 19200000 表示为 ()
- A. 1.92×10^6 B. 1.92×10^7 C. 1.92×10^8 D. 1.92×10^9
4. (4 分) (2014•绍兴) 由 5 个相同的立方体搭成的几何体如图, 则它的主视图是 ()

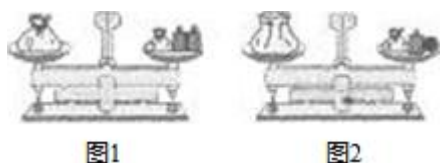


5. (4 分) (2014•绍兴) 一个不透明的袋子中有 2 个白球, 3 个黄球和 1 个红球, 这些球除颜色不同外其他完全相同, 则从袋子中随机摸出一个球是白球的概率为 ()
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
6. (4 分) (2014•绍兴) 不等式 $3x+2 > -1$ 的解集是 ()
- A. $x > -\frac{1}{3}$ B. $x < -\frac{1}{3}$ C. $x > -1$ D. $x < -1$
7. (4 分) (2014•绍兴) 如图, 圆锥的侧面展开图使半径为 3, 圆心角为 90° 的扇形, 则该圆锥的底面周长为 ()



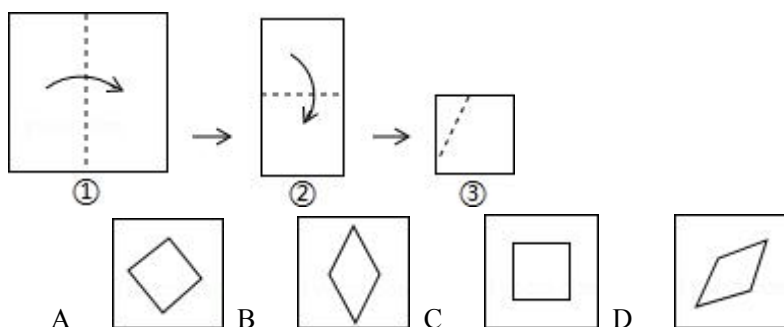
- A. $\frac{3}{4}\pi$ B. $\frac{3}{2}\pi$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

8. (4分) (2014•绍兴) 如图1, 天平呈平衡状态, 其中左侧秤盘中有一袋玻璃球, 右侧秤盘中也有一袋玻璃球, 还有2个各20克的砝码. 现将左侧袋中一颗玻璃球移至右侧秤盘, 并拿走右侧秤盘的1个砝码后, 天平仍呈平衡状态, 如图2, 则被移动的玻璃球的质量为 ()

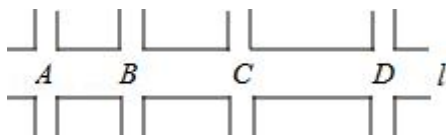


- A. 10 克 B. 15 克 C. 20 克 D. 25 克

9. (4分) (2014•绍兴) 将一张正方形纸片, 按如图步骤①, ②, 沿虚线对着两次, 然后沿③中的虚线剪去一个角, 展开铺平后的图形是 ()



10. (4分) (2014•绍兴) 如图, 汽车在东西向的公路l上行驶, 途中A, B, C, D四个十字路口都有红绿灯. AB之间的距离为800米, BC为1000米, CD为1400米, 且l上各路口的红绿灯设置为: 同时亮红灯或同时亮绿灯, 每次红(绿)灯亮的时间相同, 红灯亮的时间与绿灯亮的时间也相同. 若绿灯刚亮时, 甲汽车从A路口以每小时30千米的速度沿l向东行驶, 同时乙汽车从D路口以相同的速度沿l向西行驶, 这两辆汽车通过四个路口时都没有遇到红灯, 则每次绿灯亮的时间可能设置为 ()

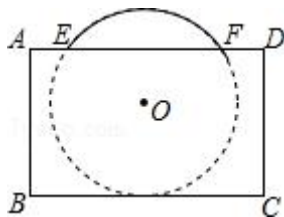


- A. 50 秒 B. 45 秒 C. 40 秒 D. 35 秒

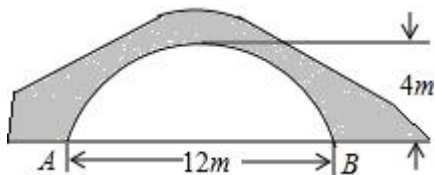
二、填空题 (本大题共6个小题, 每小题5分, 共30分)

11. (5分) (2014•绍兴) 分解因式: $a^2 - a =$ _____.

12. (5分) (2014•绍兴) 把球放在长方体纸盒内, 球的一部分露出盒外, 其主视图如图. $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的边 BC , AD 分别相切和相交 (E , F 是交点), 已知 $EF=CD=8$, 则 $\odot O$ 的半径为_____.

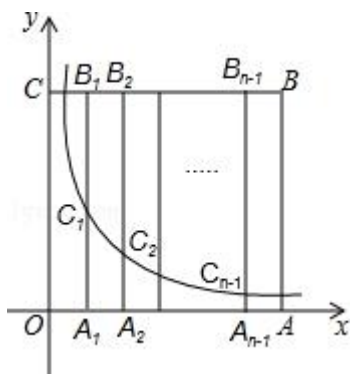


13. (5分) (2014•绍兴) 如图的一座拱桥, 当水面宽 AB 为 $12m$ 时, 桥洞顶部离水面 $4m$, 已知桥洞的拱形是抛物线, 以水平方向为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 若选取点 A 为坐标原点时的抛物线解析式是 $y = -\frac{1}{9}(x-6)^2 + 4$, 则选取点 B 为坐标原点时的抛物线解析式是_____.



14. (5分) (2014•绍兴) 用直尺和圆规作 $\triangle ABC$, 使 $BC=a$, $AC=b$, $\angle B=35^\circ$, 若这样的三角形只能作一个, 则 a , b 间满足的关系式是_____.

15. (5分) (2014•绍兴) 如图, 边长为 n 的正方形 $OABC$ 的边 OA , OC 在坐标轴上, 点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ 为 OA 的 n 等分点, 点 $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ 为 CB 的 n 等分点, 连结 $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_{n-1}B_{n-1}$, 分别交曲线 $y = \frac{n-2}{x}$ ($x > 0$) 于点 $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$. 若 $C_{15}B_{15} = 16C_{15}A_{15}$, 则 n 的值为_____. (n 为正整数)



16. (5分) (2014•绍兴) 把标准纸一次又一次对开, 可以得到均相似的“开纸”. 现在我们在长为 $2\sqrt{2}$ 、宽为 1 的矩形纸片中, 画两个小矩形, 使这两个小矩形的每条边都与原矩形纸的

边平行，或小矩形的边在原矩形的边上，且每个小矩形均与原矩形纸相似，然后将它们剪下，则所剪得的两个小矩形纸片周长之和的最大值是_____.

三、解答题（本大题共 8 小题，第 17-20 小题每小题 8 分，第 21 小题 10 分，第 22,23 小题每小题 8 分，24 小题 14 分，共 80 分）

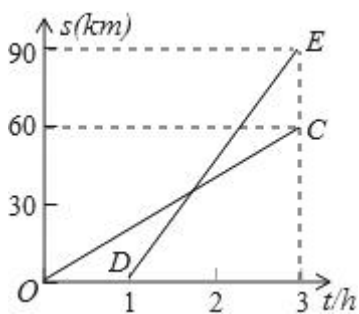
17. (8 分) (2014•绍兴) (1) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} - 4\sin 45^\circ - (1 - \sqrt{2})^0 + \sqrt{8}$.

(2) 先化简，再求值: $a(a - 3b) + (a + b)^2 - a(a - b)$ ，其中 $a = 1$ ， $b = -\frac{1}{2}$.

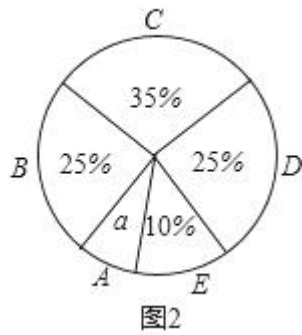
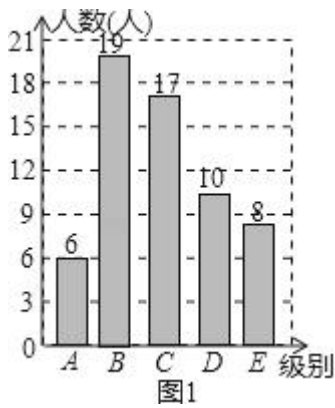
18. (8 分) (2014•绍兴) 已知甲、乙两地相距 90km，A，B 两人沿同一公路从甲地出发到乙地，A 骑摩托车，B 骑电动车，图中 DE，OC 分别表示 A，B 离开甲地的路程 s (km) 与时间 t (h) 的函数关系的图象，根据图象解答下列问题.

(1) A 比 B 后出发几个小时？B 的速度是多少？

(2) 在 B 出发后几小时，两人相遇？



19. (8分) (2014•绍兴) 为了解某校七、八年级学生的睡眠情况，随机抽取了该校七、八年级部分学生进行调查，已知抽取七年级与八年级的学生人数相同，利用抽样所得的数据绘制如下统计图表.



组别	睡眠时间 x
A	$x \leq 7.5$
B	$7.5 \leq x \leq 8.5$
C	$8.5 \leq x \leq 9.5$
D	$9.5 \leq x \leq 10.5$
E	$x \geq 10.5$

根据图表提供的信息，回答下列问题:

- (1) 求统计图中的 a ;
- (2) 抽取的样本中，八年级学生睡眠时间在 C 组的有多少人?
- (3) 已知该校七年级学生有 755 人，八年级学生有 785 人，如果睡眠时间 x (时) 满足: $7.5 \leq x \leq 9.5$ ，称睡眠时间合格，试估计该校七、八年级学生中睡眠时间合格的共有多少人?

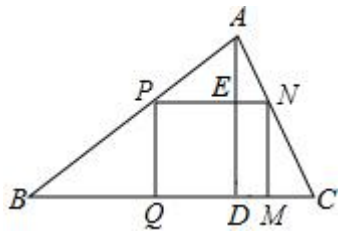
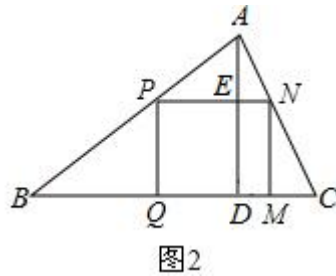
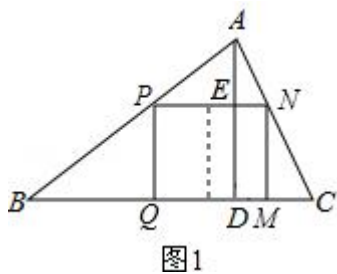
20. (8分) (2014•绍兴) 课本中有一道作业题:

有一块三角形余料 ABC , 它的边 $BC=120\text{mm}$, 高 $AD=80\text{mm}$. 要把它加工成正方形零件, 使正方形的一边在 BC 上, 其余两个顶点分别在 AB , AC 上. 问加工成的正方形零件的边长是多少 mm ?

小颖解得此题的答案为 48mm , 小颖善于反思, 她又提出了如下的问题.

(1) 如果原题中要加工的零件是一个矩形, 且此矩形是由两个并排放置的正方形所组成, 如图 1, 此时, 这个矩形零件的两条边长又分别为多少 mm ? 请你计算.

(2) 如果原题中所要加工的零件只是一个矩形, 如图 2, 这样, 此矩形零件的两条边长就不能确定, 但这个矩形面积有最大值, 求达到这个最大值时矩形零件的两条边长.



21. (10 分) (2014•绍兴) 九 (1) 班同学在上学期的社会实践活动中, 对学校旁边的山坡护墙和旗杆进行了测量.

(1) 如图 1, 第一小组用一根木条 CD 斜靠在护墙上, 使得 DB 与 CB 的长度相等, 如果测量得到 $\angle CDB=38^\circ$, 求护墙与地面的倾斜角 α 的度数.

(2) 如图 2, 第二小组用皮尺量的 EF 为 16 米 (E 为护墙上的端点), EF 的中点离地面 FB 的高度为 1.9 米, 请你求出 E 点离地面 FB 的高度.

(3) 如图 3, 第三小组利用第一、第二小组的结果, 来测量护墙上旗杆的高度, 在点 P 测得旗杆顶端 A 的仰角为 45° , 向前走 4 米到达 Q 点, 测得 A 的仰角为 60° , 求旗杆 AE 的高度 (精确到 0.1 米).

备用数据: $\tan 60^\circ=1.732$, $\tan 30^\circ=0.577$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{2}=1.414$.

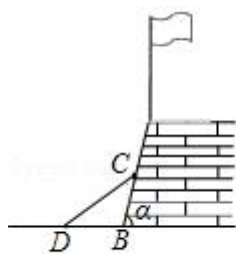


图1

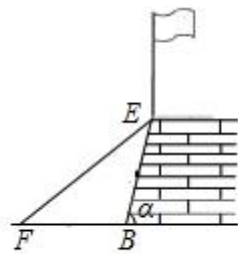


图2

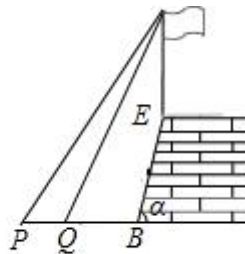


图3

22. (12 分) (2014•绍兴) 如果二次函数的二次项系数为 1, 则此二次函数可表示为 $y=x^2+px+q$, 我们称 $[p, q]$ 为此函数的特征数, 如函数 $y=x^2+2x+3$ 的特征数是 $[2, 3]$.

(1) 若一个函数的特征数为 $[-2, 1]$, 求此函数图象的顶点坐标.

(2) 探究下列问题:

①若一个函数的特征数为 $[4, -1]$, 将此函数的图象先向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位, 求得到的图象对应的函数的特征数.

②若一个函数的特征数为 $[2, 3]$, 问此函数的图象经过怎样的平移, 才能使得到的图象对应的函数的特征数为 $[3, 4]$?

23. (6分) (2014•绍兴) (1) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, $\angle EAF=45^\circ$, 延长 CD 到点 G , 使 $DG=BE$, 连结 EF, AG . 求证: $EF=FG$.

(2) 如图, 等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC=90^\circ, AB=AC$, 点 M, N 在边 BC 上, 且 $\angle MAN=45^\circ$, 若 $BM=1, CN=3$, 求 MN 的长.

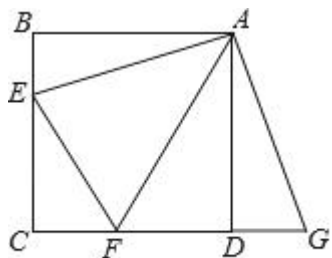


图1

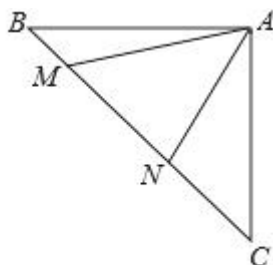


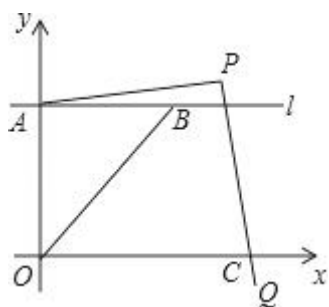
图2

25. (14分) (2014•绍兴) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 平行 x 轴, 交 y 轴于点 A , 第一象限内的点 B 在 l 上, 连结 OB , 动点 P 满足 $\angle APQ=90^\circ$, PQ 交 x 轴于点 C .

(1) 当动点 P 与点 B 重合时, 若点 B 的坐标是 $(2, 1)$, 求 PA 的长.

(2) 当动点 P 在线段 OB 的延长线上时, 若点 A 的纵坐标与点 B 的横坐标相等, 求 $PA: PC$ 的值.

(3) 当动点 P 在直线 OB 上时, 点 D 是直线 OB 与直线 CA 的交点, 点 E 是直线 CP 与 y 轴的交点, 若 $\angle ACE=\angle AEC$, $PD=2OD$, 求 $PA: PC$ 的值.



2014 年浙江省绍兴市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. (4 分) (2014•绍兴) 比较 -3 , 1 , -2 的大小, 下列判断正确的是 ()

- A. $-3 < -2 < 1$ B. $-2 < -3 < 1$ C. $1 < -2 < -3$ D. $1 < -3 < -2$

考点: 有理数大小比较

分析: 本题是对有理数的大小比较, 根据有理数性质即可得出答案.

解答: 解: 有理数 -3 , 1 , -2 的中, 根据有理数的性质,

$$\therefore -3 < -2 < 0 < 1.$$

故选 A.

点评: 本题主要考查了有理数大小的判定, 难度较小.

2. (4 分) (2014•绍兴) 计算 $(ab)^2$ 的结果是 ()

- A. $2ab$ B. a^2b C. a^2b^2 D. ab^2

考点: 幂的乘方与积的乘方

专题: 计算题.

分析: 根据幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘, 进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= a^2b^2$.

故选 C.

点评: 此题考查了幂的乘方及积的乘方, 属于基础题, 注意掌握幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘.

3. (4 分) (2014•绍兴) 太阳的温度很高, 其表面温度大概有 6000°C , 而太阳中心的温度达到了 19200000°C , 用科学记数法可将 19200000 表示为 ()

- A. 1.92×10^6 B. 1.92×10^7 C. 1.92×10^8 D. 1.92×10^9

考点: 科学记数法—表示较大的数

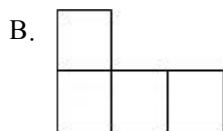
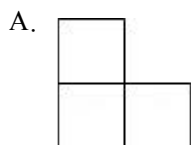
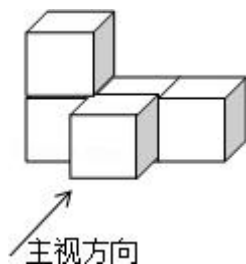
分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 19200000 用科学记数法表示为: 1.92×10^7 .

故选 B.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (4 分) (2014•绍兴) 由 5 个相同的立方体搭成的几何体如图, 则它的主视图是 ()



考点：简单组合体的三视图.

分析：找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中

解答：解：从正面看第一层是三个正方形，第二层是左边一个正方形，
故选：B.

点评：本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

5. (4 分) (2014•绍兴) 一个不透明的袋子中有 2 个白球，3 个黄球和 1 个红球，这些球除颜色不同外其他完全相同，则从袋子中随机摸出一个球是白球的概率为 ()

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

考点：概率公式.

分析：由一个不透明的袋子中有 2 个白球，3 个黄球和 1 个红球，这些球除颜色不同外其他完全相同，直接利用概率公式求解即可求得答案.

解答：解：∵一个不透明的袋子中有 2 个白球，3 个黄球和 1 个红球，这些球除颜色不同外其他完全相同，

$$\therefore \text{从袋子中随机摸出一个球是白球的概率为: } \frac{2}{2+3+1} = \frac{1}{3}.$$

故选 C.

点评：此题考查了概率公式的应用. 注意用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

6. (4 分) (2014•绍兴) 不等式 $3x+2 > -1$ 的解集是 ()

A. $x > -\frac{1}{3}$

B. $x < -\frac{1}{3}$

C. $x > -1$

D. $x < -1$

考点：解一元一次不等式.

分析：先移项，再合并同类项，把 x 的系数化为 1 即可.

解答：解：移项得， $3x > -1 - 2$,

合并同类项得， $3x > -3$,

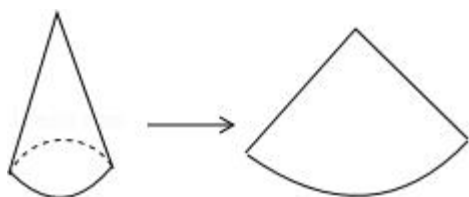
把 x 的系数化为 1 得， $x > -1$.

故选 C.

点评：本题考查的是解一元一次不等式，熟知解一元一次不等式的基本步骤是解答此题的关

键.

7. (4分) (2014•绍兴) 如图, 圆锥的侧面展开图使半径为3, 圆心角为 90° 的扇形, 则该圆锥的底面周长为 ()



A. $\frac{3}{4}\pi$

B. $\frac{3}{2}\pi$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{3}{2}$

考点: 圆锥的计算.

分析: 根据圆锥侧面展开扇形的弧长等于底面圆的周长, 可以求出底面圆的半径, 从而求得圆锥的底面周长.

解答: 解: 设底面圆的半径为 r , 则:

$$2\pi r = \frac{90\pi \times 3}{180} = \frac{3}{2}\pi.$$

$$\therefore r = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{圆锥的底面周长为 } \frac{3}{2}\pi,$$

故选 B.

点评: 本题考查的是弧长的计算, 利用弧长公式求出弧长, 然后根据扇形弧长与圆锥底面半径的关系求出底面圆的半径.

8. (4分) (2014•绍兴) 如图1, 天平呈平衡状态, 其中左侧秤盘中有一袋玻璃球, 右侧秤盘中也有一袋玻璃球, 还有2个各20克的砝码. 现将左侧袋中一颗玻璃球移至右侧秤盘, 并拿走右侧秤盘的1个砝码后, 天平仍呈平衡状态, 如图2, 则被移动的玻璃球的质量为 ()

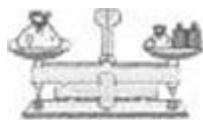


图1

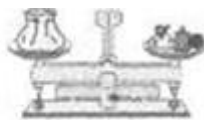


图2

A. 10 克

B. 15 克

C. 20 克

D. 25 克

考点: 一元一次方程的应用.

分析: 根据天平仍然处于平衡状态列出一元一次方程求解即可.

解答: 解: 设左、右侧秤盘中一袋玻璃球的质量分别为 m 克、 n 克,

根据题意得: $m = n + 40$;

设被移动的玻璃球的质量为 x 克,

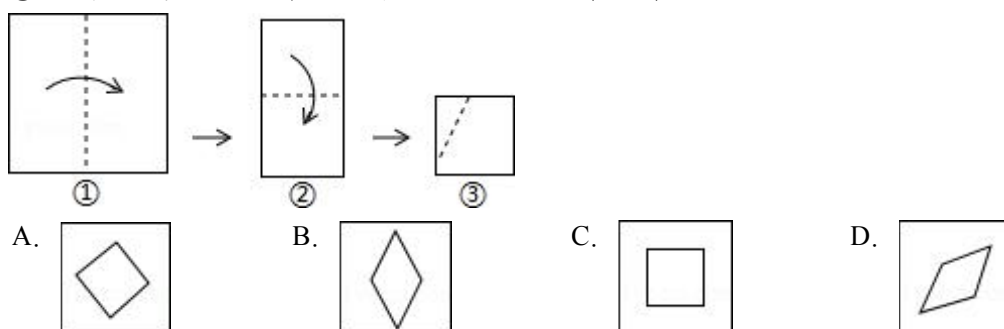
根据题意得: $m - x = n + x + 20$,

$$x = \frac{1}{2}(m - n - 20) = \frac{1}{2}(n + 40 - n - 20) = 10.$$

故选 A.

点评: 本题考查了一元一次方程的应用，解题的关键是找到等量关系.

9. (4 分) (2014•绍兴) 将一张正方形纸片，按如图步骤①，②，沿虚线对着两次，然后沿③中的虚线剪去一个角，展开铺平后的图形是 ()



考点: 剪纸问题.

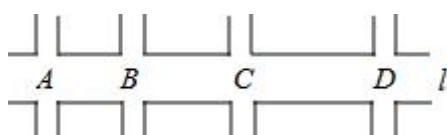
分析: 按照题意要求，动手操作一下，可得到正确的答案.

解答: 解：由题意要求知，展开铺平后的图形是 B.

故选 B.

点评: 此题主要考查了剪纸问题，此类问题应亲自动手折一折，剪一剪看看，可以培养空间想象能力.

10. (4 分) (2014•绍兴) 如图，汽车在东西向的公路 l 上行驶，途中 A，B，C，D 四个十字路口都有红绿灯. AB 之间的距离为 800 米，BC 为 1000 米，CD 为 1400 米，且 l 上各路口的红绿灯设置为：同时亮红灯或同时亮绿灯，每次红（绿）灯亮的时间相同，红灯亮的时间与绿灯亮的时间也相同. 若绿灯刚亮时，甲汽车从 A 路口以每小时 30 千米的速度沿 l 向东行驶，同时乙汽车从 D 路口以相同的速度沿 l 向西行驶，这两辆汽车通过四个路口时都没有遇到红灯，则每次绿灯亮的时间可能设置为 ()



- A. 50 秒 B. 45 秒 C. 40 秒 D. 35 秒

考点: 推理与论证.

分析: 首先求出汽车行驶各段所用的时间，进而根据红绿灯的设置，分析每次绿灯亮的时间，得出符合题意答案.

解答: 解：∵ 甲汽车从 A 路口以每小时 30 千米的速度沿 l 向东行驶，同时乙汽车从 D 路口以相同的速度沿 l 向西行驶，

$$\therefore \text{两车的速度为: } \frac{30000}{3600} = \frac{25}{3} \text{ (m/s),}$$

∵ AB 之间的距离为 800 米，BC 为 1000 米，CD 为 1400 米，

$$\therefore \text{分别通过 AB, BC, CD 所用的时间为: } \frac{800}{\frac{25}{3}} = 96 \text{ (s), } \frac{1000}{\frac{25}{3}} = 120 \text{ (s), } \frac{1400}{\frac{25}{3}} = 168$$

(s),

∴这两辆汽车通过四个路口时都没有遇到红灯，

∴当每次绿灯亮的时间为 50s 时， $\therefore \frac{96}{50} = 1\frac{23}{25}$ ， $\therefore$ 甲车到达 B 路口时遇到红灯，故 A

选项错误；

∴当每次绿灯亮的时间为 45s 时， $\therefore \frac{168}{45} = 3\frac{11}{15}$ ， $\therefore$ 乙车到达 C 路口时遇到红灯，故 B

选项错误；

∴当每次绿灯亮的时间为 40s 时， $\therefore \frac{96+120}{40} = 5\frac{2}{5}$ ， $\therefore$ 甲车到达 C 路口时遇到红灯，故

C 选项错误；

∴当每次绿灯亮的时间为 35s 时， $\therefore \frac{96}{35} = 2\frac{26}{35}$ ， $\frac{96+120}{35} = 6\frac{6}{35}$ ， $\frac{96+120+168}{35} = 10\frac{34}{35}$ ，

$\frac{168}{35} = 4\frac{4}{5}$ ， $\frac{168+120}{35} = 8\frac{8}{35}$ ，

∴这两辆汽车通过四个路口时都没有遇到红灯，故 D 选项正确；

则每次绿灯亮的时间可能设置为：35 秒。

故选：D。

点评：此题主要考查了推理与论证，根据题意得出汽车行驶每段所用的时间，进而得出由选项分析得出是解题关键。

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

11. (5 分) (2014•绍兴) 分解因式： $a^2 - a = \underline{a(a-1)}$ 。

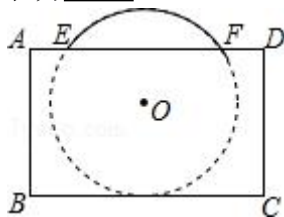
考点：因式分解-提公因式法

分析：这个多项式含有公因式 a，分解因式时应先提取公因式。

解答：解： $a^2 - a = a(a-1)$ 。

点评：本题考查了提公因式法分解因式，比较简单，注意不要漏项。

12. (5 分) (2014•绍兴) 把球放在长方体纸盒内，球的一部分露出盒外，其主视图如图。⊙O 与矩形 ABCD 的边 BC，AD 分别相切和相交 (E，F 是交点)，已知 EF=CD=8，则⊙O 的半径为 5。

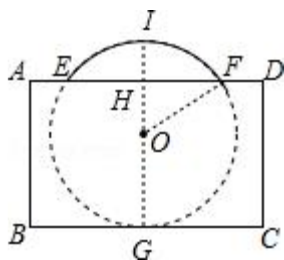


考点：垂径定理的应用；勾股定理；切线的性质

分析：首先由题意，⊙O 与 BC 相切，记切点为 G，作直线 OG，分别交 AD、劣弧 $\widehat{EF}$ 于点 H、I，再连接 OF，易求得 FH 的长，然后设求半径为 r，则 OH=16-r，然后在 Rt△OFH 中， $r^2 - (16-r)^2 = 8^2$ ，解此方程即可求得答案。

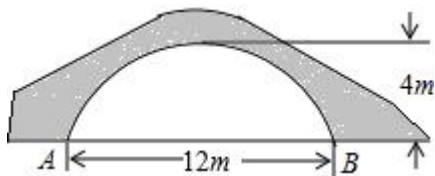
解答：解：由题意，⊙O 与 BC 相切，记切点为 G，作直线 OG，分别交 AD、劣弧 $\widehat{EF}$ 于点 H、

I, 再连接 OF,
 在矩形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, 而 $IG \perp BC$,
 $\therefore IG \perp AD$,
 $\therefore$ 在 $\odot O$ 中, $FH = \frac{1}{2}EF = 4$,
 设求半径为 r , 则 $OH = 8 - r$,
 在 $Rt\triangle OFH$ 中, $r^2 - (8 - r)^2 = 4^2$,
 解得 $r = 5$,
 故答案为: 5.



点评: 此题考查了切线的性质、垂径定理以及勾股定理. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握方程思想与数形结合思想的应用.

13. (5 分) (2014•绍兴) 如图的一座拱桥, 当水面宽 AB 为 12m 时, 桥洞顶部离水面 4m, 已知桥洞的拱形是抛物线, 以水平方向为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 若选取点 A 为坐标原点时的抛物线解析式是 $y = -\frac{1}{9}(x - 6)^2 + 4$, 则选取点 B 为坐标原点时的抛物线解析式是 $y = -\frac{1}{9}(x + 6)^2 + 4$.



考点: 二次函数的应用

分析: 根据题意得出 A 点坐标, 进而利用顶点式求出函数解析式即可.

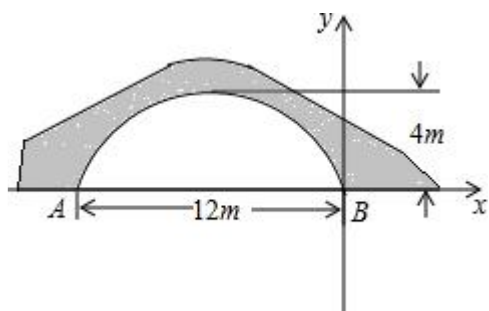
解答: 解: 由题意可得出: $y = a(x + 6)^2 + 4$,

将 $(-12, 0)$ 代入得出, $0 = a(-12 + 6)^2 + 4$,

解得: $a = -\frac{1}{9}$,

$\therefore$ 选取点 B 为坐标原点时的抛物线解析式是: $y = -\frac{1}{9}(x + 6)^2 + 4$.

故答案为: $y = -\frac{1}{9}(x + 6)^2 + 4$.



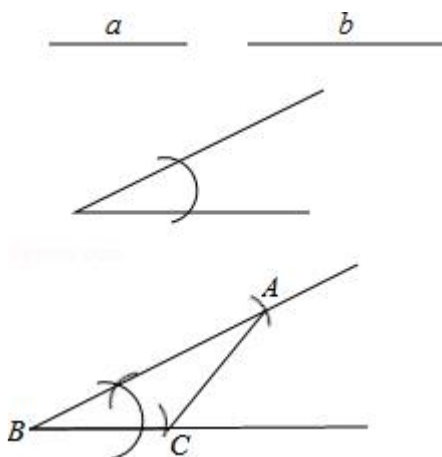
点评：此题主要考查了二次函数的应用，利用顶点式求出函数解析式是解题关键.

14. (5 分) (2014•绍兴) 用直尺和圆规作 $\triangle ABC$ ，使 $BC=a$ ， $AC=b$ ， $\angle B=35^\circ$ ，若这样的三角形只能作一个，则 a ， b 间满足的关系式是 $\sin 35^\circ = \frac{b}{a}$ 或 $b \geq a$.

考点：作图—复杂作图；切线的性质；解直角三角形

分析：首先画 $BC=a$ ，再以 B 为顶点，作 $\angle ABC=35^\circ$ ，然后再以点 C 为圆心 b 为半径交 AB 于点 A ，然后连接 AC 即可，①当 $AC \perp BC$ 时，②当 $b \geq a$ 时三角形只能作一个.

解答：解：如图所示：

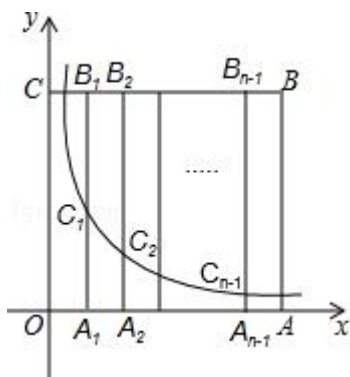


若这样的三角形只能作一个，则 a ， b 间满足的关系式是：①当 $AC \perp BC$ 时，即 $\sin 35^\circ = \frac{b}{a}$ ②当 $b \geq a$ 时.

故答案为： $\sin 35^\circ = \frac{b}{a}$ 或 $b \geq a$.

点评：此题主要考查了复杂作图，关键是掌握作一角等于已知角的方法.

15. (5 分) (2014•绍兴) 如图，边长为 n 的正方形 $OABC$ 的边 OA ， OC 在坐标轴上，点 A_1 ， $A_2 \dots A_{n-1}$ 为 OA 的 n 等分点，点 B_1 ， $B_2 \dots B_{n-1}$ 为 CB 的 n 等分点，连结 A_1B_1 ， A_2B_2 ， $\dots A_{n-1}B_{n-1}$ ，分别交曲线 $y = \frac{n-2}{x}$ ($x > 0$) 于点 C_1 ， C_2 ， $\dots$ ， C_{n-1} . 若 $C_{15}B_{15} = 16C_{15}A_{15}$ ，则 n 的值为 17. (n 为正整数)



考点：反比例函数图象上点的坐标特征.

专题：规律型.

分析：先根据正方形 OABC 的边长为 n ，点 $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ 为 OA 的 n 等分点，点 $B_1, B_2 \dots B_{n-1}$ 为 CB 的 n 等分点可知 $OA_{15}=15$ ， $OB_{15}=15$ ，再根据 $C_{15}B_{15}=16C_{15}A_{15}$ 表示出 C_{15} 的坐标，代入反比例函数的解析式求出 n 的值即可.

解答：解：∵ 正方形 OABC 的边长为 n ，点 $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ 为 OA 的 n 等分点，点 $B_1, B_2 \dots B_{n-1}$ 为 CB 的 n 等分点 ∴ $OA_{15}=15$ ， $OB_{15}=15$ ，
∴ $C_{15}B_{15}=16C_{15}A_{15}$ ，

$$\therefore C_{15} \left(15, \frac{n}{17} \right),$$

$$\because \text{点 } C_{15} \text{ 在曲线 } y = \frac{n-2}{x} \text{ (} x > 0 \text{) 上,}$$

$$\therefore 15 \times \frac{n}{17} = n - 2, \text{ 解得 } n = 17.$$

故答案为：17.

点评：本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上 $k=xy$ 为定值是解答此题的关键.

16. (5 分) (2014•绍兴) 把标准纸一次又一次对开，可以得到均相似的“开纸”. 现在我们在长为 $2\sqrt{2}$ 、宽为 1 的矩形纸片中，画两个小矩形，使这两个小矩形的每条边都与原矩形纸的边平行，或小矩形的边在原矩形的边上，且每个小矩形均与原矩形纸相似，然后将它们剪下，则所剪得的两个小矩形纸片周长之和的最大值是 $4\sqrt{2} + \frac{15}{4}$.

考点：相似多边形的性质

分析：根据相似多边形对应边的比相等的性质分别求出所剪得的两个小矩形纸片的长与宽，进而求解即可.

解答：解：∵ 在长为 $2\sqrt{2}$ 、宽为 1 的矩形纸片中，画两个小矩形，使这两个小矩形的每条边都与原矩形纸的边平行，或小矩形的边在原矩形的边上，且每个小矩形均与原矩形纸相似，

∴ 要使所剪得的两个小矩形纸片周长之和最大，则这两个小矩形纸片长与宽的和最大.

∴ 矩形的长与宽之比为 $2\sqrt{2}:1$,

$$\therefore \text{剪得的两个小矩形中, 一个矩形的长为 } 1, \text{ 宽为 } \frac{1 \times 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \text{另外一个矩形的长为 } 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{4}, \text{ 宽为 } \frac{\frac{7\sqrt{2}}{4} \times 1}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{8},$$

$$\therefore \text{所剪得的两个小矩形纸片周长之和的最大值是 } 2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{7\sqrt{2}}{4} + \frac{7}{8} \right) = 4\sqrt{2} + \frac{15}{4}.$$

$$\text{故答案为 } 4\sqrt{2} + \frac{15}{4}.$$

点评: 本题考查了相似多边形的性质, 分别求出所剪得的两个小矩形纸片的长与宽是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 第 17-20 小题每小题 8 分, 第 21 小题 10 分, 第 22,23 小题每小题 8 分, 24 小题 14 分, 共 80 分)

17. (8 分) (2014•绍兴) (1) 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 4\sin 45^\circ - (1 - \sqrt{2})^0 + \sqrt{8}.$

(2) 先化简, 再求值: $a(a - 3b) + (a + b)^2 - a(a - b),$ 其中 $a = 1, b = -\frac{1}{2}.$

考点: 实数的运算; 整式的混合运算—化简求值; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值

分析: (1) 本题涉及零指数幂、乘方、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果;

(2) 根据去括号的法则, 可去掉括号, 根据合并同类项, 可化简代数式, 根据代数式求值, 可得答案.

解答: 解: (1) 原式 $= 2 - 2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} = 1;$

$$(2) \text{ 原式} = a^2 - 3ab + a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + ab$$

$$= a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

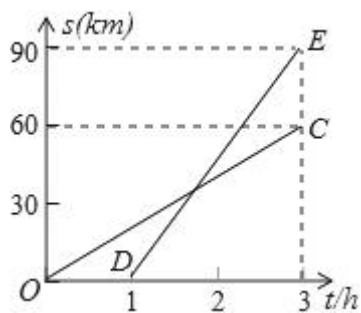
$$= \frac{5}{4}.$$

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

18. (8 分) (2014•绍兴) 已知甲、乙两地相距 90km, A, B 两人沿同一公路从甲地出发到乙地, A 骑摩托车, B 骑电动车, 图中 DE, OC 分别表示 A, B 离开甲地的路程 s (km) 与时间 t (h) 的函数关系的图象, 根据图象解答下列问题.

(1) A 比 B 后出发几个小时? B 的速度是多少?

(2) 在 B 出发后几小时, 两人相遇?



考点：一次函数的应用.

分析： (1) 根据横轴 CO 与 DE 可得出 A 比 B 后出发 1 小时；由点 C 的坐标为 (3, 60) 可求出 B 的速度；

(2) 利用待定系数法求出 OC、DE 的解析式，联立两函数解析式建立方程求解即可.

解答： 解：(1) 由图可知，A 比 B 后出发 1 小时；

B 的速度： $60 \div 3 = 20$ (km/h)；

(2) 由图可知点 D (1, 0), C (3, 60), E (3, 90),
设 OC 的解析式为 $y=kx$,

则 $3k=60$,

解得 $k=20$,

所以, $y=20x$,

设 DE 的解析式为 $y=mx+n$,

$$\text{则} \begin{cases} m+n=0 \\ 3m+n=90 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=45 \\ n=-45 \end{cases},$$

所以, $y=45x-45$,

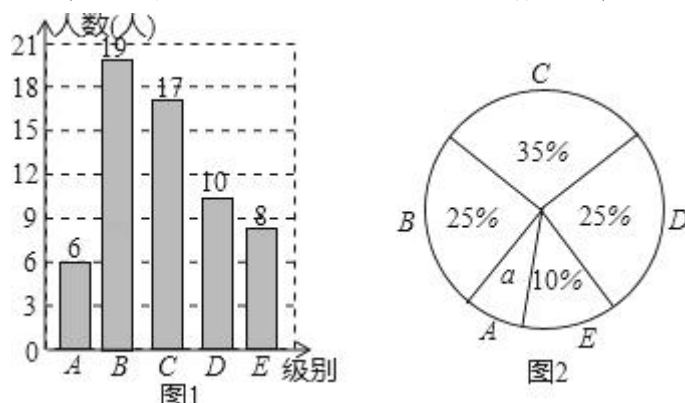
$$\text{由题意得} \begin{cases} y=20x \\ y=45x-45 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=36 \end{cases},$$

所以, B 出发 $\frac{9}{5}$ 小时后两人相遇.

点评： 本题考查利用一次函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，准确识图并获取信息是解题的关键.

19. (8分) (2014•绍兴) 为了解某校七、八年级学生的睡眠情况, 随机抽取了该校七、八年级部分学生进行调查, 已知抽取七年级与八年级的学生人数相同, 利用抽样所得的数据绘制



如下统计图表.

组别	睡眠时间 x
A	$x \leq 7.5$
B	$7.5 \leq x \leq 8.5$
C	$8.5 \leq x \leq 9.5$
D	$9.5 \leq x \leq 10.5$
E	$x \geq 10.5$

根据图表提供的信息, 回答下列问题:

- (1) 求统计图中的 a ;
- (2) 抽取的样本中, 八年级学生睡眠时间在 C 组的有多少人?
- (3) 已知该校七年级学生有 755 人, 八年级学生有 785 人, 如果睡眠时间 x (时) 满足: $7.5 \leq x \leq 9.5$, 称睡眠时间合格, 试估计该校七、八年级学生中睡眠时间合格的共有多少人?

考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 频数 (率) 分布表; 扇形统计图.

专题: 计算题.

分析: (1) 根据扇形统计图, 确定出 a 的值即可;
 (2) 根据图 1 求出抽取的人数, 乘以 C 占的百分比即可得到结果;
 (3) 分别找出七八年级睡眠合格的人数, 求出之和即可.

解答: 解: (1) 根据题意得: $a = 1 - (35\% + 25\% + 25\% + 10\%) = 5\%$;

(2) 根据题意得: $(6 + 19 + 17 + 10 + 8) \times 35\% = 21$ (人),
 则抽取的样本中, 八年级学生睡眠时间在 C 组的有 21 人;

(3) 根据题意得: $755 \times \frac{19 + 17}{60} + 785 \times (25\% + 35\%) = 453 + 471 = 924$ (人),

则该校七、八年级学生中睡眠时间合格的共有 924 人.

点评: 此题考查了条形统计图, 用样本估计总体, 频数 (率) 分布表, 以及扇形统计图, 弄清题中的数据是解本题的关键.

20. (8分) (2014•绍兴) 课本中有一道作业题:

有一块三角形余料 ABC, 它的边 $BC = 120\text{mm}$, 高 $AD = 80\text{mm}$. 要把它加工成正方形零件, 使正方形的一边在 BC 上, 其余两个顶点分别在 AB, AC 上. 问加工成的正方形零件的边长是多少 mm?

小颖解得此题的答案为 48mm, 小颖善于反思, 她又提出了如下的问题.

(1) 如果原题中要加工的零件是一个矩形, 且此矩形是由两个并排放置的正方形所组成, 如图 1, 此时, 这个矩形零件的两条边长又分别为多少 mm? 请你计算.

(2) 如果原题中所要加工的零件只是一个矩形, 如图 2, 这样, 此矩形零件的两条边长就不能确定, 但这个矩形面积有最大值, 求达到这个最大值时矩形零件的两条边长.

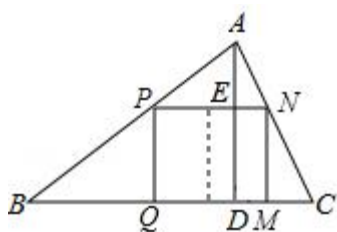


图1

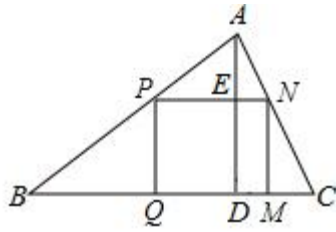
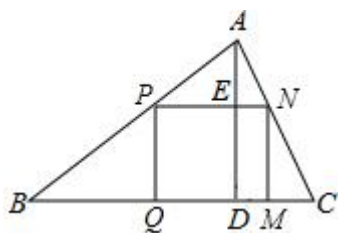


图2



考点: 相似三角形的应用; 二次函数的最值.

分析: (1) 设 $PN=2y\text{mm}$, 则 $PQ=y\text{mm}$, 然后根据相似三角形对应高的比等于相似比列出比例式求出即可;

(2) 设 $PN=x$, 用 PQ 表示出 AE 的长度, 然后根据相似三角形对应高的比等于相似比列出比例式并用 x 表示出 PN , 然后根据矩形的面积公式列式计算, 再根据二次函数的最值问题解答.

解答: 解: (1) 设矩形的边长 $PN=2y\text{mm}$, 则 $PQ=y\text{mm}$, 由条件可得 $\triangle APN \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{2y}{120} = \frac{80-y}{80},$$

$$\text{解得 } y = \frac{240}{7},$$

$$\therefore PN = \frac{240}{7} \times 2 = \frac{480}{7} \text{ (mm)},$$

答: 这个矩形零件的两条边长分别为 $\frac{240}{7}\text{mm}$, $\frac{480}{7}\text{mm}$;

(2) 设 $PN=x\text{mm}$, 由条件可得 $\triangle APN \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{PN}{BC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{x}{120} = \frac{80-PQ}{80},$$

$$\text{解得 } PQ = 80 - \frac{2}{3}x.$$

$$\therefore S = PN \cdot PQ = x \left(80 - \frac{2}{3}x \right) = -\frac{2}{3}x^2 + 80x = -\frac{2}{3}(x - 60)^2 + 2400,$$

$\therefore S$ 的最大值为 2400mm^2 , 此时 $PN=60\text{mm}$, $PQ=80 - \frac{2}{3} \times 60 = 40$ (mm).

点评: 本题考查了相似三角形的应用, 二次函数的最值问题, 根据相似三角形对应高的比等于对应边的比列式表示出正方形的边长与三角形的边与这边上的高的关系是解题的关键, 此题规律性较强, 是道好题.

21. (10 分) (2014•绍兴) 九 (1) 班同学在上学期的社会实践活动中, 对学校旁边的山坡护墙和旗杆进行了测量.

(1) 如图 1, 第一小组用一根木条 CD 斜靠在护墙上, 使得 DB 与 CB 的长度相等, 如果测量得到 $\angle CDB=38^\circ$, 求护墙与地面的倾斜角 α 的度数.

(2) 如图 2, 第二小组用皮尺量的 EF 为 16 米 (E 为护墙上的端点), EF 的中点离地面 FB 的高度为 1.9 米, 请你求出 E 点离地面 FB 的高度.

(3) 如图 3, 第三小组利用第一、第二小组的结果, 来测量护墙上旗杆的高度, 在点 P 测得旗杆顶端 A 的仰角为 45° , 向前走 4 米到达 Q 点, 测得 A 的仰角为 60° , 求旗杆 AE 的高度 (精确到 0.1 米).

备用数据: $\tan 60^\circ=1.732$, $\tan 30^\circ=0.577$, $\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{2}=1.414$.

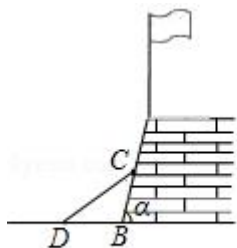


图1

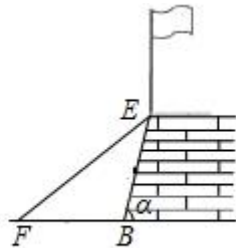


图2

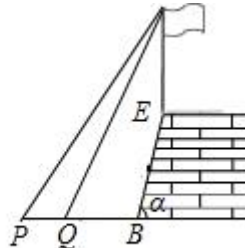


图3

考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题; 解直角三角形的应用-坡度坡角问题

分析: (1) 根据 $\angle \alpha = 2\angle CDB$ 即可得出答案;

(2) 设 EF 的中点为 M , 过 M 作 $MN \perp BF$, 垂足为点 N , 过点 E 作 $EH \perp BF$, 垂足为点 H , 根据 $EH=2MN$ 即可求出 E 点离地面 FB 的高度;

(3) 延长 AE , 交 PB 于点 C , 设 $AE=x$, 则 $AC=x+3.8$, $CQ=x-0.2$, 根据 $\frac{AC}{QC}=\sqrt{3}$,

得出 $x+3.8x-0.2=3$, 求出 x 即可.

解答: 解: (1) $\because BD=BC$,

$$\therefore \angle CDB = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle \alpha = 2\angle CDB = 2 \times 38^\circ = 76^\circ.$$

(2) 设 EF 的中点为 M , 过 M 作 $MN \perp BF$, 垂足为点 N , 过点 E 作 $EH \perp BF$, 垂足为点 H ,

$$\because MN \parallel AH, MN=1.9,$$

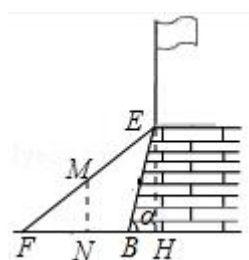
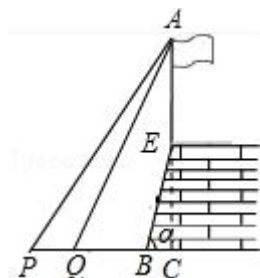
$$\therefore EH=2MN=3.8 \text{ (米)},$$

$\therefore E$ 点离地面 FB 的高度是 3.8 米.

(3) 延长 AE , 交 PB 于点 C ,

设 $AE=x$, 则 $AC=x+3.8$,
 $\because \angle APB=45^\circ$,
 $\therefore PC=AC=x+3.8$,
 $\because PQ=4$,
 $\therefore CQ=x+3.8-4=x-0.2$,
 $\because \tan \angle AQC = \frac{AC}{QC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,
 $\therefore \frac{x+3.8}{x-0.2} = \sqrt{3}$,

$$x = \frac{3.8 + \frac{1}{5}\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \approx 5.7$$
,
 $\therefore AE \approx 5.7$ (米).
 答: 旗杆 AE 的高度是 5.7 米.



点评: 此题考查了解直角三角形的应用, 用到的知识点是仰角的定义, 能作出辅助线借助仰角构造直角三角形是本题的关键.

22. (12 分) (2014·绍兴) 如果二次函数的二次项系数为 1, 则此二次函数可表示为 $y=x^2+px+q$, 我们称 $[p, q]$ 为此函数的特征数, 如函数 $y=x^2+2x+3$ 的特征数是 $[2, 3]$.

(1) 若一个函数的特征数为 $[-2, 1]$, 求此函数图象的顶点坐标.

(2) 探究下列问题:

①若一个函数的特征数为 $[4, -1]$, 将此函数的图象先向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位, 求得到的图象对应的函数的特征数.

②若一个函数的特征数为 $[2, 3]$, 问此函数的图象经过怎样的平移, 才能使得到的图象对应的函数的特征数为 $[3, 4]$?

考点: 二次函数图象与几何变换; 二次函数的性质

专题: 新定义.

分析: (1) 根据题意得出函数解析式, 进而得出顶点坐标即可;

(2) ①首先得出函数解析式, 进而利用函数平移规律得出答案;

②分别求出两函数解析式，进而得出平移规律.

解答: 解: (1) 由题意可得出: $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$,
 $\therefore$ 此函数图象的顶点坐标为: (1, 0);

(2) ①由题意可得出: $y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$,
 $\therefore$ 将此函数的图象先向右平移 1 个单位, 再向上平移 1 个单位后得到: $y=(x+1)^2-4=x^2+2x-3$,
 $\therefore$ 图象对应的函数的特征数为: [2, -3];

② $\because$ 一个函数的特征数为[2, 3],
 $\therefore$ 函数解析式为: $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$,
 $\therefore$ 一个函数的特征数为[3, 4],

$\therefore$ 函数解析式为: $y=x^2+3x+4=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$,

$\therefore$ 原函数的图象向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位, 再向下平移 $\frac{1}{4}$ 个单位得到.

点评: 此题主要考查了二次函数的平移以及配方法求函数解析式, 利用特征数得出函数解析式是解题关键.

23. (6 分) (2014•绍兴) (1) 如图, 正方形 ABCD 中, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, $\angle EAF=45^\circ$, 延长 CD 到点 G, 使 $DG=BE$, 连结 EF, AG. 求证: $EF=FG$.

(2) 如图, 等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点 M, N 在边 BC 上, 且 $\angle MAN=45^\circ$, 若 $BM=1$, $CN=3$, 求 MN 的长.

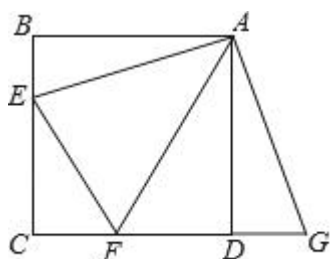


图1

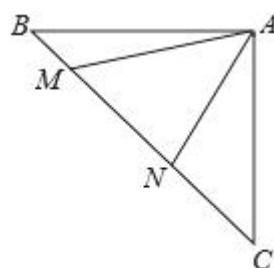


图2

考点: 全等三角形的判定与性质; 正方形的性质.

专题: 证明题.

分析: (1) 证 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$, $\triangle FAE \cong \triangle GAF$, 根据全等三角形的性质求出即可;

(2) 过点 C 作 $CE \perp BC$, 垂足为点 C, 截取 CE, 使 $CE=BM$. 连接 AE、EN. 通过证明 $\triangle ABM \cong \triangle ACE$ (SAS) 推知全等三角形的对应边 $AM=AE$ 、对应角 $\angle BAM=\angle CAE$; 然后由等腰直角三角形的性质和 $\angle MAN=45^\circ$ 得到 $\angle MAN=\angle EAN=45^\circ$, 所以 $\triangle MAN \cong \triangle EAN$ (SAS), 故全等三角形的对应边 $MN=EN$; 最后由勾股定理得到 $EN^2=EC^2+NC^2$ 即 $MN^2=BM^2+NC^2$.

解答: (1) 证明: 在正方形 ABCD 中,

$\therefore \angle ABE=\angle ADG$, $AD=AB$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

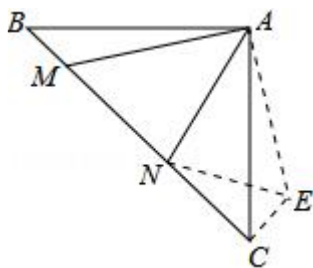
$$\begin{cases} AD=AB \\ \angle ABE=\angle ADG \\ DG=BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$ (SAS),
 $\therefore \angle BAE = \angle DAG$, $AE = AG$,
 $\therefore \angle EAG = 90^\circ$,
 在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle GAF$ 中,

$$\begin{cases} AE=AG \\ \angle EAF=\angle FAG=45^\circ \\ AF=AF \end{cases}$$

 $\therefore \triangle FAE \cong \triangle GAF$ (SAS),
 $\therefore EF = FG$

(2) 解: 如图 2, 过点 C 作 $CE \perp BC$, 垂足为点 C, 截取 CE, 使 $CE = BM$. 连接 AE、EN.



$\because AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$.
 $\because CE \perp BC$, $\therefore \angle ACE = \angle B = 45^\circ$.
 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle B=\angle ACE \\ BM=CE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACE$ (SAS).
 $\therefore AM = AE$, $\angle BAM = \angle CAE$.
 $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\angle MAN = 45^\circ$, $\therefore \angle BAM + \angle CAN = 45^\circ$.
 于是, 由 $\angle BAM = \angle CAE$, 得 $\angle MAN = \angle EAN = 45^\circ$.
 在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle EAN$ 中,

$$\begin{cases} AM=AE \\ \angle MAN=\angle EAN \\ AN=AN \end{cases}$$

 $\therefore \triangle MAN \cong \triangle EAN$ (SAS).
 $\therefore MN = EN$.
 在 $\text{Rt}\triangle ENC$ 中, 由勾股定理, 得 $EN^2 = EC^2 + NC^2$.
 $\therefore MN^2 = BM^2 + NC^2$.
 $\because BM = 1$, $CN = 3$,
 $\therefore MN^2 = 1^2 + 3^2$,
 $\therefore MN = \sqrt{10}$

点评: 本题主要考查正方形的性质, 全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的性质以及

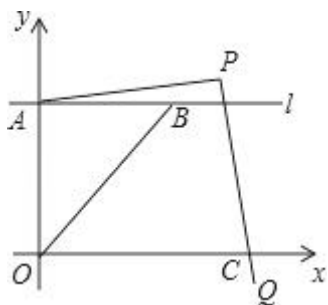
勾股定理的综合应用.

25. (14分) (2014·绍兴) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 平行 x 轴, 交 y 轴于点 A , 第一象限内的点 B 在 l 上, 连结 OB , 动点 P 满足 $\angle APQ=90^\circ$, PQ 交 x 轴于点 C .

(1) 当动点 P 与点 B 重合时, 若点 B 的坐标是 $(2, 1)$, 求 PA 的长.

(2) 当动点 P 在线段 OB 的延长线上时, 若点 A 的纵坐标与点 B 的横坐标相等, 求 $PA: PC$ 的值.

(3) 当动点 P 在直线 OB 上时, 点 D 是直线 OB 与直线 CA 的交点, 点 E 是直线 CP 与 y 轴的交点, 若 $\angle ACE=\angle AEC$, $PD=2OD$, 求 $PA: PC$ 的值.



考点: 相似形综合题; 全等三角形的判定与性质; 角平分线的性质; 等腰三角形的判定与性质; 勾股定理; 矩形的判定与性质; 平行线分线段成比例; 相似三角形的判定与性质.

专题: 压轴题.

分析: (1) 易得点 P 的坐标是 $(2, 1)$, 即可得到 PA 的长.

(2) 易证 $\angle AOB=45^\circ$, 由角平分线的性质可得 $PA=PC$, 然后通过证明 $\triangle ANP \cong \triangle CMP$ 即可求出 $PA: PC$ 的值.

(3) 可分点 P 在线段 OB 的延长线上及其反向延长线上两种情况进行讨论. 易证 $PA: PC=PN: PM$, 设 $OA=x$, 只需用含 x 的代数式表示出 PN 、 PM 的长, 即可求出 $PA: PC$ 的值.

解答: 解: (1) $\because$ 点 P 与点 B 重合, 点 B 的坐标是 $(2, 1)$,

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(2, 1)$.

$\therefore PA$ 的长为 2.

(2) 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为 M , 过点 P 作 $PN \perp y$ 轴, 垂足为 N , 如图 1 所示.

$\because$ 点 A 的纵坐标与点 B 的横坐标相等,

$\therefore OA=AB$.

$\therefore \angle OAB=90^\circ$,

$\therefore \angle AOB=\angle ABO=45^\circ$.

$\therefore \angle AOC=90^\circ$,

$\therefore \angle POC=45^\circ$.

$\because PM \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴,

$\therefore PM=PN$, $\angle ANP=\angle CMP=90^\circ$.

$\therefore \angle NPM=90^\circ$.

$\therefore \angle APC=90^\circ$.

$\therefore \angle APN=90^\circ - \angle APM=\angle CPM$.

在 $\triangle ANP$ 和 $\triangle CMP$ 中,

$\therefore \angle APN=\angle CPM$, $PN=PM$, $\angle ANP=\angle CMP$,

$$\therefore \triangle ANP \cong \triangle CMP.$$

$$\therefore PA = PC.$$

$$\therefore PA: PC \text{ 的值为 } 1: 1.$$

(3) ①若点 P 在线段 OB 的延长线上,
过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为 M, 过点 P 作 $PN \perp y$ 轴, 垂足为 N,
PM 与直线 AC 的交点为 F, 如图 2 所示.

$$\because \angle APN = \angle CPM, \angle ANP = \angle CMP,$$

$$\therefore \triangle ANP \cong \triangle CMP.$$

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{PN}{PM}.$$

$$\because \angle ACE = \angle AEC,$$

$$\therefore AC = AE.$$

$$\because AP \perp PC,$$

$$\therefore EP = CP.$$

$$\because PM \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore AF = CF, OM = CM.$$

$$\therefore FM = \frac{1}{2}OA.$$

$$\text{设 } OA = x,$$

$$\because PF \parallel OA,$$

$$\therefore \triangle PDF \cong \triangle ODA.$$

$$\therefore \frac{PF}{OA} = \frac{PD}{OD}$$

$$\because PD = 2OD,$$

$$\therefore PF = 2OA = 2x, FM = \frac{1}{2}x.$$

$$\therefore PM = \frac{5}{2}x.$$

$$\because \angle APC = 90^\circ, AF = CF,$$

$$\therefore AC = 2PF = 4x.$$

$$\because \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \sqrt{15}x.$$

$$\because \angle PNO = \angle NOM = \angle OMP = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 PMON 是矩形}.$$

$$\therefore PN = OM = \frac{\sqrt{15}}{2}x.$$

$$\therefore PA: PC = PN: PM = \frac{\sqrt{15}}{2}x: \frac{5}{2}x = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

②若点 P 在线段 OB 的反向延长线上,
过点 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为 M, 过点 P 作 $PN \perp y$ 轴, 垂足为 N,
PM 与直线 AC 的交点为 F, 如图 3 所示.

$$\text{同理可得: } PM = \frac{3}{2}x, CA = 2PF = 4x, OC = \sqrt{15}x.$$

$$\therefore PN=OM=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{15}}{2}x.$$

$$\therefore PA:PC=PN:PM=\frac{\sqrt{15}}{2}x:\frac{3}{2}x=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

综上所述: PA:PC 的值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

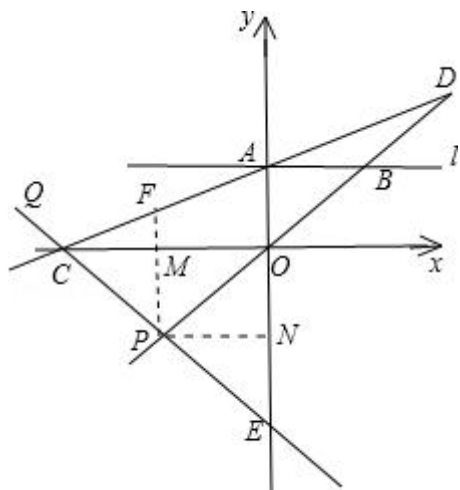


图3

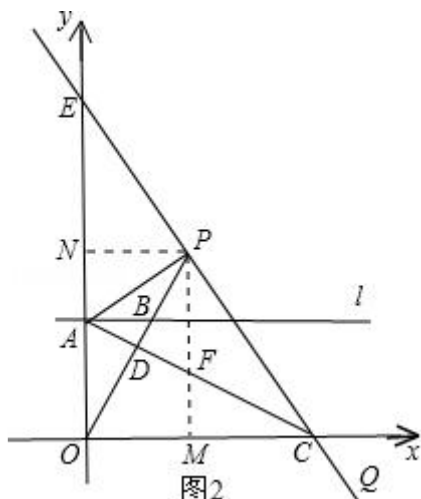


图2

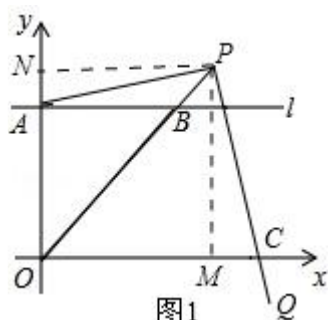


图1

点评: 本题考查了角平分线的性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、矩形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、平行线等分线段定理、勾股定理等知识, 综合性非常强.

