

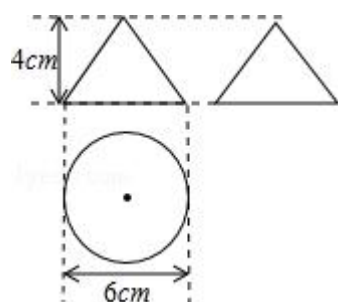
2014 年杭州市中考数学试卷

一、仔细选一选 (本题有 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) $3a \cdot (-2a)^2 =$ ()

- A. $-12a^3$ B. $-6a^2$ C. $12a^3$ D. $6a^3$

2. (3 分) 已知一个圆锥体的三视图如图所示, 则这个圆锥的侧面积为 ()



- A. $12\pi\text{cm}^2$ B. $15\pi\text{cm}^2$ C. $24\pi\text{cm}^2$ D. $30\pi\text{cm}^2$

3. (3 分) 在直角三角形 ABC 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $\angle A=40^\circ$, $BC=3$, 则 $AC=$ ()

- A. $3\sin 40^\circ$ B. $3\sin 50^\circ$ C. $3\tan 40^\circ$ D. $3\tan 50^\circ$

4. (3 分) 已知边长为 a 的正方形的面积为 8, 则下列说法中, 错误的是 ()

- A. a 是无理数 B. a 是方程 $x^2 - 8 = 0$ 的解
C. a 是 8 的算术平方根 D. a 满足不等式组 $\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a - 4 < 0 \end{cases}$

5. (3 分) 下列命题中, 正确的是 ()

- A. 梯形的对角线相等 B. 菱形的对角线不相等
C. 矩形的对角线不能相互垂直 D. 平行四边形的对角线可以互相垂直

6. (3 分) 函数的自变量 x 满足 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, 函数值 y 满足 $\frac{1}{4} \leq y \leq 1$, 则这个函数可以是 ()

- A. $y = \frac{1}{2x}$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = \frac{1}{8x}$ D. $y = \frac{8}{x}$

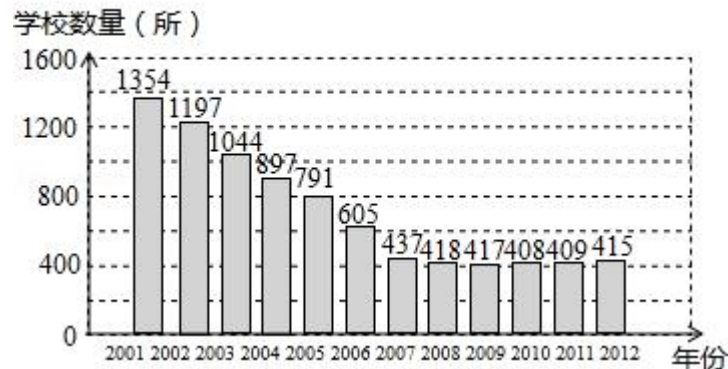
7. (3 分) 若 $(\frac{4}{a^2 - 4} + \frac{1}{2 - a}) \cdot w = 1$, 则 $w =$ ()

- A. $a+2$ ($a \neq -2$) B. $-a+2$ ($a \neq 2$) C. $a-2$ ($a \neq 2$) D. $-a-2$ ($a \neq -2$)

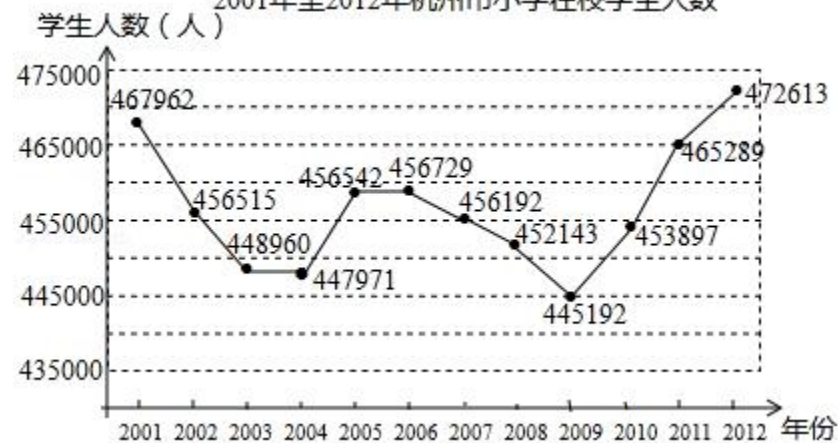
8. (3 分) 已知 2001 年至 2012 年杭州市小学学校数量 (单位: 所) 和在校学生人数 (单位: 人) 的两幅统计图. 由图得出如下四个结论:

- ①学校数量 2007 年~2012 年比 2001~2006 年更稳定；②在校学生人数有两次连续下降，两次连续增长的变化过程；③2009 年的 $\frac{\text{在校学生人数}}{\text{学校数量}}$ 大于 1000；
④2009~2012 年，相邻两年的学校数量增长和在校学生人数增长最快的都是 2011~2012 年。其中，正确的结论是（ ）

2001年至2012年杭州市小学学校数量

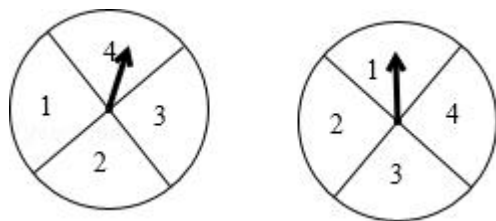


2001年至2012年杭州市小学在校学生人数



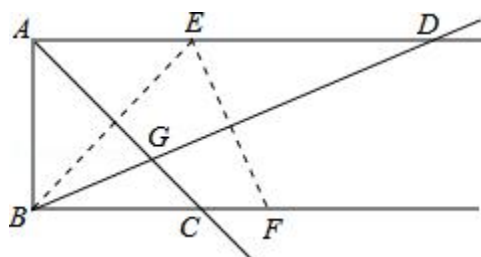
- A. ①②③④ B. ①②③ C. ①② D. ③④

9. (3 分) 让图中两个转盘分别自由转动一次，当转盘停止转动时，两个指针分别落在某两个数所表示的区域，则两个数的和是 2 的倍数或 3 的倍数的概率等于（ ）



- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{13}{16}$

10. (3 分) 已知 $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, 点 E, 点 F 分别在射线 AD, 射线 BC 上. 若点 E 与点 B 关于 AC 对称, 点 E 与点 F 关于 BD 对称, AC 与 BD 相交于点 G, 则（ ）

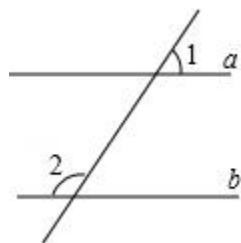


- A. $1 + \tan \angle ADB = \sqrt{2}$ B. $2BC = 5CF$
 C. $\angle AEB + 22^\circ = \angle DEF$ D. $4\cos \angle AGB = \sqrt{6}$

二、认真填一填 (本题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

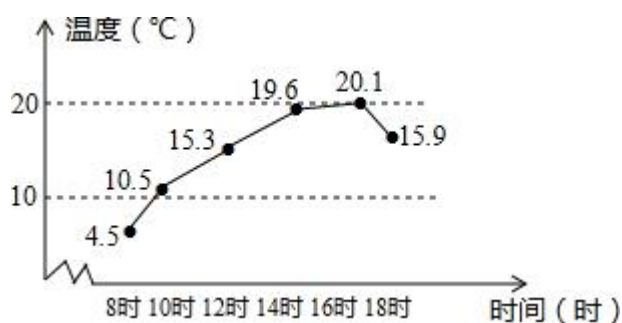
11. (4 分) 2012 年末统计, 杭州市常住人口是 880.2 万人, 用科学记数法表示为_____人.

12. (4 分) 已知直线 $a \parallel b$, 若 $\angle 1 = 40^\circ 50'$, 则 $\angle 2 =$ _____.



13. (4 分) 设实数 x, y 满足方程组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \\ \frac{1}{3}x + y = 2 \end{cases}$, 则 $x + y =$ _____.

14. (4 分) 已知杭州市某天六个整点时的气温绘制成的统计图, 则这六个整点时气温的中位数是_____ $^\circ\text{C}$.

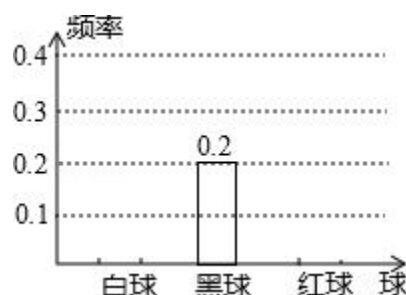


15. (4 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过 A (0, 2), B (4, 3), C 三点, 其中点 C 在直线 $x = 2$ 上, 且点 C 到抛物线的对称轴的距离等于 1, 则抛物线的函数解析式为_____.

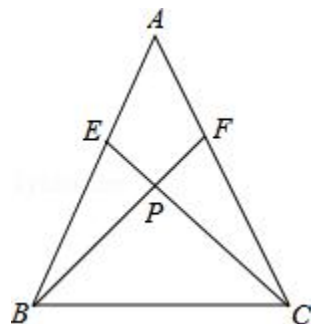
16. (4 分) 点 A, B, C 都在半径为 r 的圆上, 直线 $AD \perp$ 直线 BC, 垂足为 D, 直线 $BE \perp$ 直线 AC, 垂足为 E, 直线 AD 与 BE 相交于点 H. 若 $BH = \sqrt{3}AC$, 则 $\angle ABC$ 所对的弧长等于_____ (长度单位).

三、全面答一答（本题共 7 小题，共 66 分）解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，如果觉得有的题目有点困难，那么把自己能写出的解答写出一部分也可以.

17. (6 分) 一个布袋中装有只有颜色不同的 a ($a > 12$) 个球，分别是 2 个白球，4 个黑球，6 个红球和 b 个黄球，从中任意摸出一个球，把摸出白球，黑球，红球的概率绘制成统计图（未绘制完整）. 请补全该统计图并求出 $\frac{b}{a}$ 的值.



18. (8 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 E , F 分别在 AB , AC 上， $AE=AF$ ， BF 与 CE 相交于点 P . 求证： $PB=PC$ ，并直接写出图中其他相等的线段.

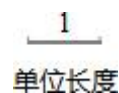


19. (8 分) 设 $y=kx$ ，是否存在实数 k ，使得代数式 $(x^2 - y^2)(4x^2 - y^2) + 3x^2(4x^2 - y^2)$ 能化简为 x^4 ？若能，请求出所有满足条件的 k 的值；若不能，请说明理由.

20. (10 分) 把一条 12 个单位长度的线段分成三条线段, 其中一条线段成为 4 个单位长度, 另两条线段长都是单位长度的整数倍.

(1) 不同分段得到的三条线段能组成多少个不全等的三角形? 用直尺和圆规作这些三角形 (用给定的单位长度, 不写作法, 保留作图痕迹);

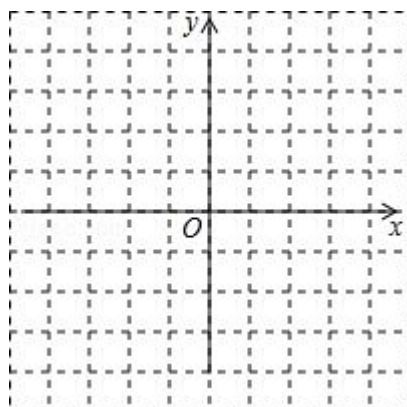
(2) 求出 (1) 中所作三角形外接圆的周长.



21. (10 分) 在直角坐标系中, 设 x 轴为直线 l , 函数 $y = -\sqrt{3}x$, $y = \sqrt{3}x$ 的图象分别是直线 l_1 , l_2 , 圆 P (以点 P 为圆心, 1 为半径) 与直线 l , l_1 , l_2 中的两条相切. 例如 $(\sqrt{3}, 1)$ 是其中一个圆 P 的圆心坐标.

(1) 写出其余满足条件的圆 P 的圆心坐标;

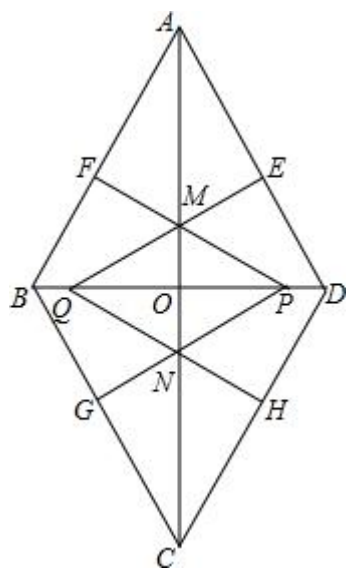
(2) 在图中标出所有圆心, 并用线段依次连接各圆心, 求所得几何图形的周长.



22. (12 分) 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $AC = 4\sqrt{3}$, $BD = 4$, 动点 P 在线段 BD 上从点 B 向点 D 运动, $PF \perp AB$ 于点 F , 四边形 $PFBG$ 关于 BD 对称, 四边形 $QEDH$ 与四边形 $PEBG$ 关于 AC 对称. 设菱形 $ABCD$ 被这两个四边形盖住部分的面积为 S_1 , 未被盖住部分的面积为 S_2 , $BP = x$.

(1) 用含 x 的代数式分别表示 S_1 , S_2 ;

(2) 若 $S_1 = S_2$, 求 x 的值.



23. (12 分) 复习课中, 教师给出关于 x 的函数 $y=2kx^2 - (4kx+1)x - k+1$ (k 是实数).

教师: 请独立思考, 并把探索发现的与该函数有关的结论 (性质) 写到黑板上.

学生思考后, 黑板上出现了一些结论. 教师作为活动一员, 又补充一些结论, 并从中选出以下四条:

- ①存在函数, 其图象经过 $(1, 0)$ 点;
- ②函数图象与坐标轴总有三个不同的交点;
- ③当 $x > 1$ 时, 不是 y 随 x 的增大而增大就是 y 随 x 的增大而减小;
- ④若函数有最大值, 则最大值比为正数, 若函数有最小值, 则最小值比为负数.

教师: 请你分别判断四条结论的真假, 并给出理由. 最后简单写出解决问题时所用的数学方法.

2014 年杭州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、仔细选一选（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) $3a \cdot (-2a)^2 = (\quad)$

- A. $-12a^3$ B. $-6a^2$ C. $12a^3$ D. $6a^3$

考点: 单项式乘单项式; 幂的乘方与积的乘方.

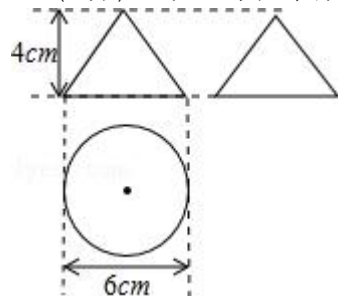
分析: 首先利用积的乘方将括号展开, 进而利用单项式乘以单项式求出即可.

解答: 解: $3a \cdot (-2a)^2 = 3a \times 4a^2 = 12a^3$.

故选: C.

点评: 此题主要考查了单项式乘以单项式以及积的乘方运算等知识, 熟练掌握单项式乘以单项式运算是解题关键.

2. (3 分) 已知一个圆锥体的三视图如图所示, 则这个圆锥的侧面积为 ()



- A. $12\pi\text{cm}^2$ B. $15\pi\text{cm}^2$ C. $24\pi\text{cm}^2$ D. $30\pi\text{cm}^2$

考点: 圆锥的计算

专题: 计算题.

分析: 俯视图为圆的只有圆锥, 圆柱, 球, 根据主视图和左视图都是三角形可得到此几何体为圆锥, 那么侧面积=底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$.

解答: 解: $\because$ 底面半径为 3, 高为 4,

$\therefore$ 圆锥母线长为 5,

$\therefore$ 侧面积 $= 2\pi rR \div 2 = 15\pi\text{cm}^2$.

故选 B.

点评: 由该三视图中的数据确定圆锥的底面直径和高是解本题的关键; 本题体现了数形结合的数学思想, 注意圆锥的高, 母线长, 底面半径组成直角三角形.

3. (3 分) 在直角三角形 ABC 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $\angle A=40^\circ$, $BC=3$, 则 $AC= (\quad)$

- A. $3\sin 40^\circ$ B. $3\sin 50^\circ$ C. $3\tan 40^\circ$ D. $3\tan 50^\circ$

考点: 解直角三角形

分析: 利用直角三角形两锐角互余求得 $\angle B$ 的度数, 然后根据正切函数的定义即可求解.

解答: 解: $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$,

$$\text{又} \because \tan B = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore AC = BC \cdot \tan B = 3 \tan 50^\circ.$$

故选 D.

点评: 本题考查了解直角三角形中三角函数的应用, 要熟练掌握好边角之间的关系.

4. (3 分) 已知边长为 a 的正方形的面积为 8, 则下列说法中, 错误的是 ()

A. a 是无理数

B. a 是方程 $x^2 - 8 = 0$ 的解

C. a 是 8 的算术平方根

D. a 满足不等式组 $\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a - 4 < 0 \end{cases}$

考点: 算术平方根; 无理数; 解一元二次方程-直接开平方法; 解一元一次不等式组.

分析: 首先根据正方形的面积公式求得 a 的值, 然后根据算术平方根以及方程的解的定义即可作出判断.

解答: 解: $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 则 a 是无理数, a 是方程 $x^2 - 8 = 0$ 的解, 是 8 的算术平方根都正确;

解不等式组 $\begin{cases} a - 3 > 0 \\ a - 4 < 0 \end{cases}$, 得: $3 < a < 4$, 而 $2\sqrt{2} < 3$, 故错误.

故选 D.

点评: 此题主要考查了算术平方根的定义, 方程的解的定义, 以及无理数估计大小的方法.

5. (3 分) 下列命题中, 正确的是 ()

A. 梯形的对角线相等

B. 菱形的对角线不相等

C. 矩形的对角线不能相互垂直

D. 平行四边形的对角线可以互相垂直

考点: 命题与定理.

专题: 常规题型.

分析: 根据等腰梯形的判定与性质对 A 进行判断; 根据菱形的性质对 B 进行判断; 根据矩形的性质对 C 进行判断; 根据平行四边形的性质对 D 进行判断.

解答: 解: A、等腰梯形的对角线相等, 所以 A 选项错误;

B、菱形的对角线不一定相等, 若相等, 则菱形变为正方形, 所以 B 选项错误;

C、矩形的对角线不一定相互垂直, 若互相垂直, 则矩形变为正方形, 所以 C 选项错误;

D、平行四边形的对角线可以互相垂直, 此时平行四边形变为菱形, 所以 D 选项正确. 故选 D.

点评: 本题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果...那么...”形式; 有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

6. (3 分) 函数的自变量 x 满足 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, 函数值 y 满足 $\frac{1}{4} \leq y \leq 1$, 则这个函数可以是 ()

A. $y = \frac{1}{2x}$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = \frac{1}{8x}$

D. $y = \frac{8}{x}$

考点: 反比例函数的性质.

分析: 把 $x = \frac{1}{2}$ 代入四个选项中的解析式可得 y 的值, 再把 $x = 2$ 代入解析式可得 y 的值, 然后可得答案.

解答: 解: A、把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $y = \frac{1}{2x}$ 可得 $y = 1$, 把 $x = 2$ 代入 $y = \frac{1}{2x}$ 可得 $y = \frac{1}{4}$, 故此选项正确;

B、把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $y = \frac{2}{x}$ 可得 $y = 4$, 把 $x = 2$ 代入 $y = \frac{2}{x}$ 可得 $y = 1$, 故此选项错误;

C、把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $y = \frac{1}{8x}$ 可得 $y = \frac{1}{4}$, 把 $x = 2$ 代入 $y = \frac{1}{8x}$ 可得 $y = \frac{1}{16}$, 故此选项错误;

D、把 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 可得 $y = 16$, 把 $x = 2$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 可得 $y = 4$, 故此选项错误;

故选: A.

点评: 此题主要考查了反比例函数图象的性质, 关键是正确理解题意, 根据自变量的值求出对应的函数值.

7. (3分) 若 $(\frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{2-a}) \cdot w = 1$, 则 $w = (\quad)$

A. $a+2$ ($a \neq -2$)

B. $-a+2$ ($a \neq 2$)

C. $a-2$ ($a \neq 2$)

D. $-a-2$ ($a \neq -2$)

考点: 分式的混合运算

专题: 计算题.

分析: 原式变形后, 计算即可确定出 W .

解答: 解: 根据题意得:

$$W = \frac{1}{\frac{4}{(a+2)(a-2)} - \frac{a+2}{(a+2)(a-2)}} = \frac{1}{\frac{a-2}{(a+2)(a-2)}} = - (a+2) = -a-2.$$

故选: D.

点评: 此题考查了分式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8. (3分) 已知 2001 年至 2012 年杭州市小学学校数量 (单位: 所) 和在校学生人数 (单位: 人) 的两幅统计图. 由图得出如下四个结论:

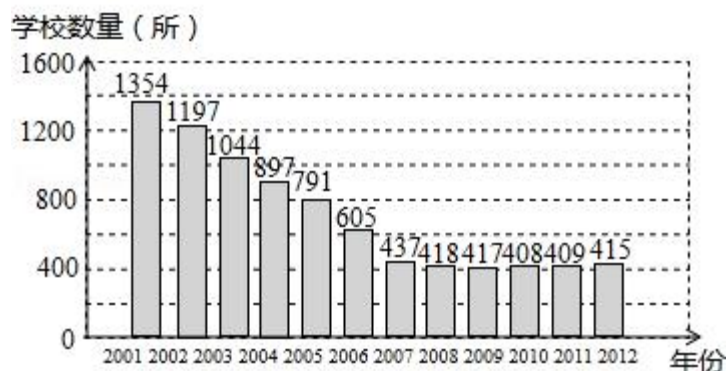
①学校数量 2007 年 ~ 2012 年比 2001 ~ 2006 年更稳定;

②在校学生人数有两次连续下降, 两次连续增长的变化过程;

③2009 年的 $\frac{\text{在校学生人数}}{\text{学校数量}}$ 大于 1000;

④2009 ~ 2012 年, 相邻两年的学校数量增长和在校学生人数增长最快的都是 2011 ~ 2012 年. 其中, 正确的结论是 ()

2001年至2012年杭州市小学学校数量



A. ①②③④

B. ①②③

C. ①②

D. ③④

考点: 折线统计图; 条形统计图.

分析: ①根据条形统计图可知, 学校数量 2001~2006 年下降幅度较大, 最多 1354 所, 最少 605 所, 而 2007 年~2012 年学校数量都是在 400 所以上, 440 所以下, 由此判断即可;
 ②由折线统计图可知, 在校学生人数有 2001 年~2003 年、2006 年~2009 年两次连续下降, 2004 年~2006 年、2009 年~2012 年两次连续增长的变化过程, 由此判断即可;
 ③由统计图可知, 2009 年的在校学生 445192 人, 学校数量 417 所, 再进行计算即可判断;
 ④分别计算 2009~2010 年, 2010~2011 年, 2011~2012 年相邻两年的学校数量的增长率和在校学生人数的增长率, 再比较即可.

解答: 解: ①根据条形统计图可知, 学校数量 2001~2006 年下降幅度较大, 最多 1354 所, 最少 605 所, 而 2007 年~2012 年学校数量都是在 400 所以上, 440 所以下, 故结论正确;

②由折线统计图可知, 在校学生人数有 2001 年~2003 年、2006 年~2009 年两次连续下降, 2004 年~2006 年、2009 年~2012 年两次连续增长的变化过程, 故结论正确;

③由统计图可知, 2009 年的在校学生 445192 人, 学校数量 417 所,

所以 2009 年的 $\frac{\text{在校学生人数}}{\text{学校数量}} = \frac{445192}{417} = 1067\frac{253}{417} > 1000$, 故结论正确;

④ $\because$ 2009~2010 年学校数量增长率为 $\frac{408 - 417}{417} \approx -2.16\%$,

2010~2011 年学校数量增长率为 $\frac{409 - 408}{408} \approx 0.245\%$,

2011~2012 年学校数量增长率为 $\frac{415 - 409}{409} \approx 1.47\%$,

$1.47\% > 0.245\% > -2.16\%$,

$\therefore$ 2009~2012 年, 相邻两年的学校数量增长最快的是 2011~2012 年;

$\therefore$ 2009~2010 年在校学生人数增长率为 $\frac{453897 - 445192}{445192} \approx 1.96\%$,

2010~2011 年在校学生人数增长率为 $\frac{465289 - 453897}{453897} \approx 2.510\%$,

2011~2012 年在校学生人数增长率为 $\frac{472613 - 465289}{465289} \approx 1.574\%$,

$2.510\% > 1.96\% > 1.574\%$,

$\therefore$ 2009~2012 年, 相邻两年的在校学生人数增长最快的是 2010~2011 年,

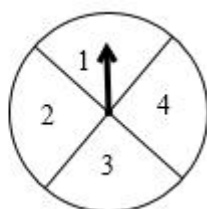
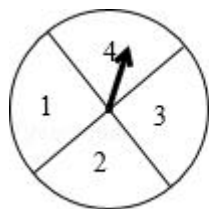
故结论错误.

综上所述, 正确的结论是: ①②③.

故选 B.

点评: 本题考查的是条形统计图和折线统计图的综合运用. 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据, 折线统计图表示的是事物的变化情况.

9. (3 分) 让图中两个转盘分别自由转动一次, 当转盘停止转动时, 两个指针分别落在某两个数所表示的区域, 则两个数的和是 2 的倍数或 3 的倍数的概率等于 ()



A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{13}{16}$

考点: 列表法与树状图法.

专题: 计算题.

分析: 列表得出所有等可能的情况数, 找出两个数的和是 2 的倍数或 3 的倍数情况, 即可求出所求概率.

解答: 解: 列表如下:

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)

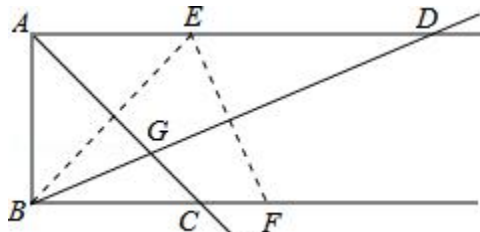
所有等可能的情况有 16 种, 其中两个数的和是 2 的倍数或 3 的倍数情况有 10 种,

$$\text{则 } P = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

故选 C

点评: 此题考查了列表法与树状图法, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

10. (3 分) 已知 $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, 点 E, 点 F 分别在射线 AD, 射线 BC 上. 若点 E 与点 B 关于 AC 对称, 点 E 与点 F 关于 BD 对称, AC 与 BD 相交于点 G, 则 ()



- A. $1 + \tan \angle ADB = \sqrt{2}$ B. $2BC = 5CF$ C. $\angle AEB + 22^\circ = \angle DEF$ D. $4\cos \angle AGB = \sqrt{6}$
F

考点: 轴对称的性质; 解直角三角形.

分析: 连接 CE, 设 EF 与 BD 相交于点 O, 根据轴对称性可得 $AB = AE$, 并设为 1, 利用勾股定理列式求出 BE, 再根据翻折的性质可得 $DE = BF = BE$, 再求出 $BC = 1$, 然后对各选项分析判断利用排除法求解.

解答: 解: 如图, 连接 CE, 设 EF 与 BD 相交于点 O, 由轴对称性得, $AB = AE$, 设为 1,

$$\text{则 } BE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$\because$ 点 E 与点 F 关于 BD 对称,

$$\therefore DE = BF = BE = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = 1 + \sqrt{2},$$

$\because AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $AB = AE$,

$\therefore$ 四边形 ABCE 是正方形,

$$\therefore BC = AB = 1,$$

$$1 + \tan \angle ADB = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}, \text{ 故 A 选项结论正确;}$$

$$CF = BF - BC = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore 2BC = 2 \times 1 = 2,$$

$$5CF = 5(\sqrt{2} - 1),$$

$\therefore 2BC \neq 5CF$, 故 B 选项结论错误;

$$\angle AEB + 22^\circ = 45^\circ + 22^\circ = 67^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}},$$

$$\sin \angle DEF = \frac{OD}{DE} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}},$$

$\therefore \angle DEF \neq 67^\circ$, 故 C 选项结论错误;

$$\text{由勾股定理得, } OE^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore OE = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2},$$

$$\because \angle EBG + \angle AGB = 90^\circ,$$

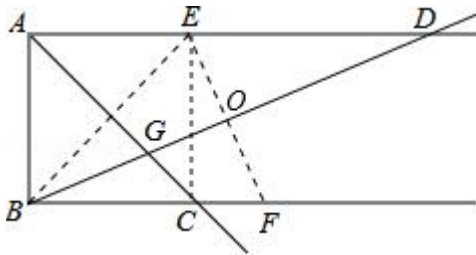
$$\angle EGB + \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGB = \angle BEF,$$

$$\text{又} \because \angle BEF = \angle DEF,$$

$$\therefore 4\cos \angle AGB = \frac{OE}{DE} = \frac{\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}, \text{ 故 D 选项结论错误.}$$

故选 A.



点评: 本题考查了轴对称的性质, 解直角三角形, 等腰直角三角形的判定与性质, 正方形的判定与性质, 熟记性质是解题的关键, 设出边长为 1 可使求解过程更容易理解.

二、认真填一填 (本题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. (4 分) 2012 年末统计, 杭州市常住人口是 880.2 万人, 用科学记数法表示为 8.802×10^6 人.

考点: 科学记数法—表示较大的数.

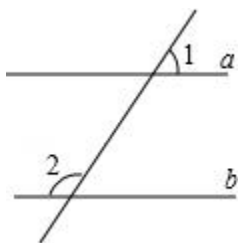
分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: $880.2 \text{ 万} = 8802000 = 8.802 \times 10^6$,

故答案为: 8.802×10^6 .

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (4 分) 已知直线 $a \parallel b$, 若 $\angle 1 = 40^\circ 50'$, 则 $\angle 2 =$ $139^\circ 10'$.



考点: 平行线的性质; 度分秒的换算.

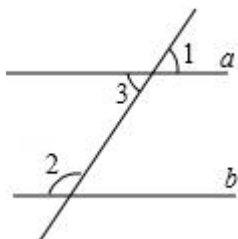
分析: 根据对顶角相等可得 $\angle 3 = \angle 1$, 再根据两直线平行, 同旁内角互补列式计算即可得解.

解答: 解: $\angle 3 = \angle 1 = 40^\circ 50'$,

$\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 40^\circ 50' = 139^\circ 10'.$$

故答案为: $139^\circ 10'$.



点评: 本题考查了平行线的性质, 对顶角相等的性质, 度分秒的换算, 要注意度、分、秒是 60 进制.

13. (4 分) 设实数 x 、 y 满足方程组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \\ \frac{1}{3}x + y = 2 \end{cases}$, 则 $x+y=$ 8.

考点: 解二元一次方程组.

专题: 计算题.

分析: 方程组利用加减消元法求出解得到 x 与 y 的值, 即可确定出 $x+y$ 的值.

解答:

$$\text{解: } \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \text{ ①} \\ \frac{1}{3}x + y = 2 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得: } \frac{2}{3}x = 6, \text{ 即 } x = 9;$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } -2y = 2, \text{ 即 } y = -1,$$

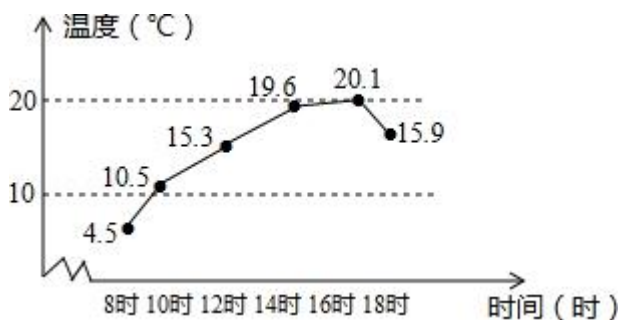
$$\therefore \text{方程组的解为 } \begin{cases} x = 9 \\ y = -1 \end{cases},$$

$$\text{则 } x+y = 9 - 1 = 8.$$

故答案为: 8

点评: 此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

14. (4 分) 已知杭州市某天六个整点时的气温绘制成的统计图, 则这六个整点时气温的中位数是 15.6 $^\circ\text{C}$.



考点: 折线统计图; 中位数.

分析: 根据中位数的定义解答. 将这组数据从小到大重新排列, 求出最中间两个数的平均数即可.

解答: 解: 把这些数从小到大排列为: 4.5, 10.5, 15.3, 15.9, 19.6, 20.1,
最中间的两个数的平均数是 $(15.3+15.9) \div 2 = 15.6$ ($^{\circ}\text{C}$),
则这六个整点时气温的中位数是 15.6°C ;
故答案为: 15.6.

点评: 此题考查了折线统计图和中位数, 掌握中位数的定义是本题的关键, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (或最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数.

15. (4 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过 A (0, 2), B (4, 3), C 三点, 其中点 C 在直线 $x=2$ 上, 且点 C 到抛物线的对称轴的距离等于 1, 则抛物线的函数解析式为 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ 或 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$.

考点: 二次函数图象上点的坐标特征; 待定系数法求二次函数解析式.

分析: 根据点 C 的位置分情况确定出对称轴解析式, 然后设出抛物线解析式, 再把点 A、B 的坐标代入求解即可.

解答: 解: $\because$ 点 C 在直线 $x=2$ 上, 且到抛物线的对称轴的距离等于 1,
 $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$ 或 $x=3$,

当对称轴为直线 $x=1$ 时, 设抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2 + k$,

$$\text{则} \begin{cases} a+k=2 \\ 9a+k=3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ k=\frac{15}{8} \end{cases},$$

$$\text{所以, } y = \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{15}{8} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2,$$

当对称轴为直线 $x=3$ 时, 设抛物线解析式为 $y = a(x-3)^2 + k$,

$$\text{则} \begin{cases} 9a+k=2 \\ a+k=3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{8} \\ k=\frac{25}{8} \end{cases},$$

$$\text{所以, } y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{25}{8} = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2,$$

综上所述, 抛物线的函数解析式为 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ 或 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$.

故答案为: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ 或 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$.

点评: 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求二次函数解析式, 难点在于分情况确定出对称轴解析式并讨论求解.

16. (4分) 点 A, B, C 都在半径为 r 的圆上, 直线 $AD \perp$ 直线 BC, 垂足为 D, 直线 $BE \perp$ 直线 AC, 垂足为 E, 直线 AD 与 BE 相交于点 H. 若 $BH = \sqrt{3}AC$, 则 $\angle ABC$ 所对的弧长等于 $\frac{1}{3}\pi r$ 或 $\frac{5}{3}\pi r$ (长度单位).

考点: 弧长的计算; 圆周角定理; 相似三角形的判定与性质; 特殊角的三角函数值.

专题: 分类讨论.

分析: 作出图形, 根据同角的余角相等求出 $\angle H = \angle C$, 再根据两角对应相等, 两三角形相似求出 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BHD$ 相似, 根据相似三角形对应边成比例列式求出 $\frac{BD}{AD}$, 再利用锐角三角函数求出 $\angle ABC$, 然后根据在同圆或等圆中, 同弧所对的圆心角等于圆周角的 2 倍求出 $\angle ABC$ 所对的弧长所对的圆心角, 然后利用弧长公式列式计算即可得解.

解答: 解: 如图 1, $\because AD \perp BC, BE \perp AC$,

$$\therefore \angle H + \angle DBH = 90^\circ,$$

$$\angle C + \angle DBH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle H = \angle C,$$

$$\text{又} \because \angle BDH = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BHD,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BH}{AC},$$

$$\because BH = \sqrt{3}AC,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC \text{ 所对的弧长所对的圆心角为 } 30^\circ \times 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC \text{ 所对的弧长} = \frac{60 \cdot \pi \cdot r}{180} = \frac{1}{3}\pi r.$$

如图 2, $\angle ABC$ 所对的弧长所对的圆心角为 300° ,

$$\therefore \angle ABC \text{ 所对的弧长} = \frac{300 \cdot \pi \cdot r}{180} = \frac{5}{3}\pi r.$$

故答案为: $\frac{1}{3}\pi r$ 或 $\frac{5}{3}\pi r$.

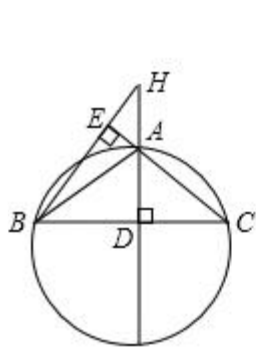


图1

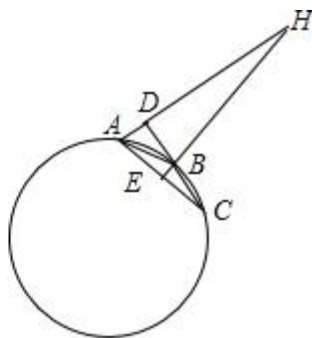
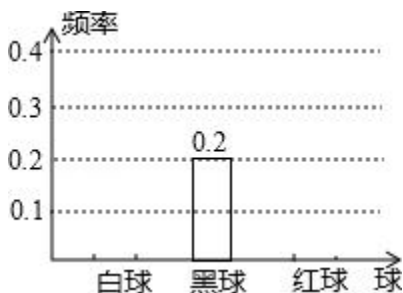


图2

点评: 本题考查了弧长的计算, 圆周角定理, 相似三角形的判定与性质, 特殊角的三角函数值, 判断出相似三角形是解题的关键, 作出图形更形象直观.

三、全面答一答 (本题共 7 小题, 共 66 分) 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤, 如果觉得有的题目有点困难, 那么把自己能写出的解答写出一部分也可以.

17. (6 分) 一个布袋中装有只有颜色不同的 a ($a > 12$) 个球, 分别是 2 个白球, 4 个黑球, 6 个红球和 b 个黄球, 从中任意摸出一个球, 把摸出白球, 黑球, 红球的概率绘制成统计图 (未绘制完整). 请补全该统计图并求出 $\frac{b}{a}$ 的值.



考点: 条形统计图; 概率公式.

分析: 首先根据黑球数 $\div$ 总数 = 摸出黑球的频率, 再计算出摸出白球, 黑球, 红球的概率可得答案.

解答: 解: 球的总数: $4 \div 0.2 = 20$ (个),

$$2 + 4 + 6 + b = 20,$$

$$\text{解得: } b = 8,$$

$$\text{摸出白球频率: } 2 \div 20 = 0.1,$$

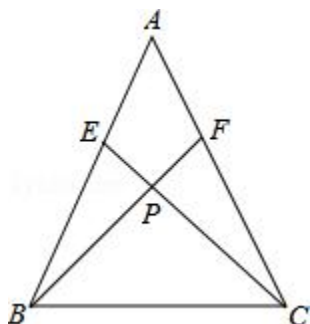
$$\text{摸出红球的概率: } 6 \div 20 = 0.3,$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4.$$



点评: 此题主要考查了概率和条形统计图, 关键是掌握概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

18. (8分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 E, F 分别在 AB, AC 上, $AE=AF$, BF 与 CE 相交于点 P . 求证: $PB=PC$, 并直接写出图中其他相等的线段.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的性质.

分析: 可证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACE$, 则 $BF=CE$, 再证明 $\triangle BEP \cong \triangle CFP$, 则 $PB=PC$, 从而可得出 $PE=PF$, $BE=CF$.

解答: 解: 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAF=\angle CAE, \\ AF=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore \angle ABF = \angle ACE$ (全等三角形的对应角相等),

$\therefore BF = CE$ (全等三角形的对应边相等),

$\because AB=AC, AE=AF,$

$\therefore BE=CF,$

在 $\triangle BEP$ 和 $\triangle CFP$ 中,

$$\begin{cases} \angle BPE=\angle CPF \\ \angle PBE=\angle PCF, \\ BE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BEP \cong \triangle CFP$ (AAS),

$\therefore PB=PC,$

$\because BF=CE,$

$\therefore PE=PF,$

$\therefore$ 图中相等的线段为 $PE=PF, BE=CF$.

点评: 本题考查了全等三角形的判定和性质以及等腰三角形的性质, 是基础题, 难度不大.

19. (8分) 设 $y=kx$, 是否存在实数 k , 使得代数式 $(x^2 - y^2)(4x^2 - y^2) + 3x^2(4x^2 - y^2)$ 能化简为 x^4 ? 若能, 请求出所有满足条件的 k 的值; 若不能, 请说明理由.

考点: 因式分解的应用.

专题: 计算题.

分析: 先利用因式分解得到原式 $= (4x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + 3x^2) = (4x^2 - y^2)^2$, 再把当 $y=kx$ 代入得到原式 $= (4x^2 - k^2x^2)^2 = (4 - k^2)x^4$, 所以当 $4 - k^2 = 1$ 满足条件, 然后解关于 k

的方程即可.

解答: 解: 能.

$$\begin{aligned}& (x^2 - y^2)(4x^2 - y^2) + 3x^2(4x^2 - y^2) \\&= (4x^2 - y^2)(x^2 - y^2 + 3x^2) \\&= (4x^2 - y^2)^2,\end{aligned}$$

当 $y=kx$, 原式 $= (4x^2 - k^2x^2)^2 = (4 - k^2)^2 x^4$,

令 $(4 - k^2)^2 = 1$, 解得 $k = \pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\sqrt{5}$,

即当 $k = \pm\sqrt{3}$ 或 $\pm\sqrt{5}$ 时, 原代数式可化简为 x^4 .

点评: 本题考查了因式分解的运用: 利用因式分解解决求值问题; 利用因式分解解决证明问题; 利用因式分解简化计算问题.

20. (10 分) 把一条 12 个单位长度的线段分成三条线段, 其中一条线段成为 4 个单位长度, 另两条线段长都是单位长度的整数倍.

(1) 不同分段得到的三条线段能组成多少个不全等的三角形? 用直尺和圆规作这些三角形 (用给定的单位长度, 不写作法, 保留作图痕迹);

(2) 求出 (1) 中所作三角形外接圆的周长.

1

单位长度

考点: 作图—应用与设计作图.

分析: (1) 利用三角形三边关系进而得出符合题意的图形即可;

(2) 利用三角形外接圆作法, 首先作出任意两边的垂直平分线, 即可得出圆心位置, 进而得出其外接圆.

解答: 解: (1) 由题意得: 三角形的三边长分别为: 4, 4, 4; 3, 4, 5;
即不同分段得到的三条线段能组成 2 个不全等的三角形, 如图所示:

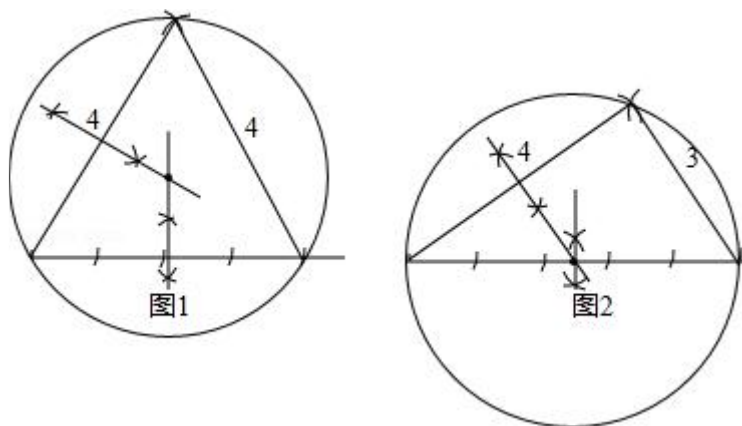
(2) 如图所示:

当三边的单位长度分别为 3, 4, 5, 可知三角形为直角三角形, 此时外接圆的半径为 2.5;

当三边的单位长度分别为 4, 4, 4. 三角形为等边三角形, 此时外接圆的半径为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 当三条线段分别为 3, 4, 5 时其外接圆周长为: $2\pi \times 2.5 = 5\pi$;

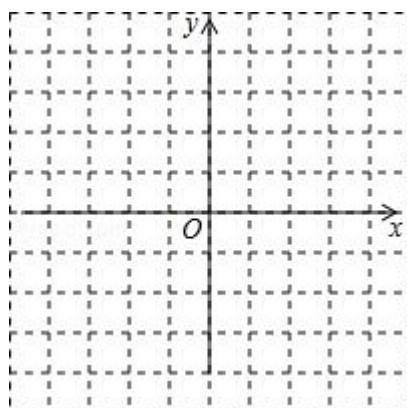
当三条线段分别为 4, 4, 4 时其外接圆周长为: $2\pi \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$.



点评: 此题主要考查了三角形外接圆的作法和三角形三边关系等知识, 得出符合题意的三角形是解题关键.

21. (10 分) 在直角坐标系中, 设 x 轴为直线 l , 函数 $y = -\sqrt{3}x$, $y = \sqrt{3}x$ 的图象分别是直线 l_1 , l_2 , 圆 P (以点 P 为圆心, 1 为半径) 与直线 l , l_1 , l_2 中的两条相切. 例如 $(\sqrt{3}, 1)$ 是其中一个圆 P 的圆心坐标.

- (1) 写出其余满足条件的圆 P 的圆心坐标;
- (2) 在图中标出所有圆心, 并用线段依次连接各圆心, 求所得几何图形的周长.



考点: 圆的综合题; 切线长定理; 轴对称图形; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题; 作图题.

分析: (1) 对圆 P 与直线 l 和 l_2 都相切、圆 P 与直线 l 和 l_1 都相切、圆 P 与直线 l_1 和 l_2 都相切三种情况分别考虑, 利用切线长定理和特殊角的三角函数值即可求出点 P 的坐标.

(2) 由图可知: 该几何图形既轴对称图形, 又是中心对称图形, 它的所有的边都相等. 只需求出其中的一条边就可以求出它的周长.

解答: 解: (1) ①若圆 P 与直线 l 和 l_2 都相切,
当点 P 在第四象限时,
过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 连接 OP , 如图 1 所示.
设 $y = \sqrt{3}x$ 的图象与 x 轴的夹角为 α .
当 $x=1$ 时, $y=\sqrt{3}$.
 $\therefore \tan \alpha = \sqrt{3}$.
 $\therefore \alpha = 60^\circ$.

∴由切线长定理得: $\angle POH = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$.

∵ $PH=1$,

$$\therefore \tan \angle POH = \frac{PH}{OH} = \frac{1}{OH} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore OH = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

∴点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$.

同理可得:

当点 P 在第二象限时, 点 P 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$;

当点 P 在第三象限时, 点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, -1)$;

②若圆 P 与直线 l 和 l_1 都相切, 如图 2 所示.

同理可得: 当点 P 在第一象限时, 点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$;

当点 P 在第二象限时, 点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$;

当点 P 在第三象限时, 点 P 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1)$;

当点 P 在第四象限时, 点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$.

③若圆 P 与直线 l_1 和 l_2 都相切, 如图 3 所示.

同理可得:

当点 P 在 x 轴的正半轴上时, 点 P 的坐标为 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$;

当点 P 在 x 轴的负半轴上时, 点 P 的坐标为 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$;

当点 P 在 y 轴的正半轴上时, 点 P 的坐标为 $(0, 2)$;

当点 P 在 y 轴的负半轴上时, 点 P 的坐标为 $(0, -2)$.

综上所述: 其余满足条件的圆 P 的圆心坐标有:

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1),$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1), (\sqrt{3}, -1),$$

$$(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0), (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0), (0, 2), (0, -2).$$

(2) 用线段依次连接各圆心, 所得几何图形, 如图 4 所示.

由图可知: 该几何图形既轴对称图形, 又是中心对称图形,

由对称性可得: 该几何图形的所有的边都相等.

$$\therefore \text{该图形的周长} = 12 \times (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}) = 8\sqrt{3}.$$

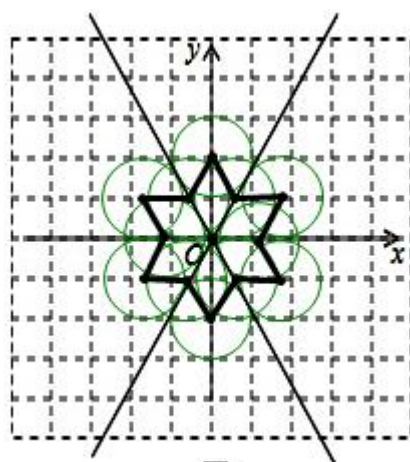


图4

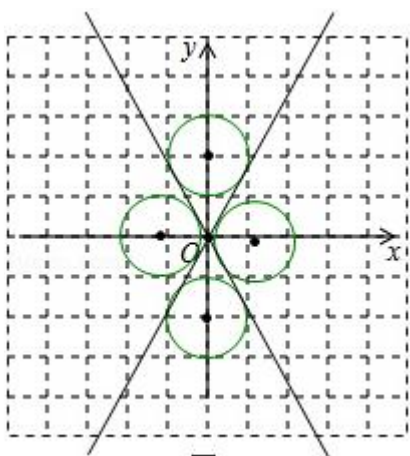


图3

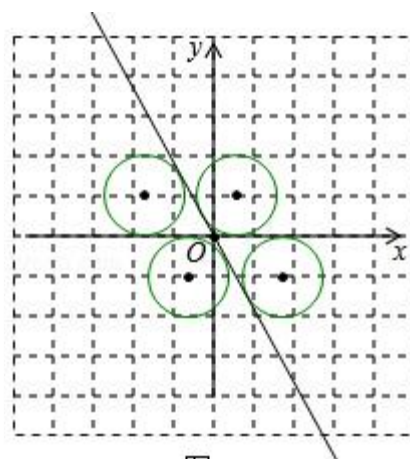


图2

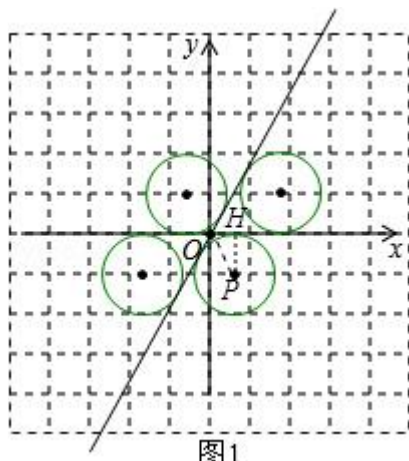


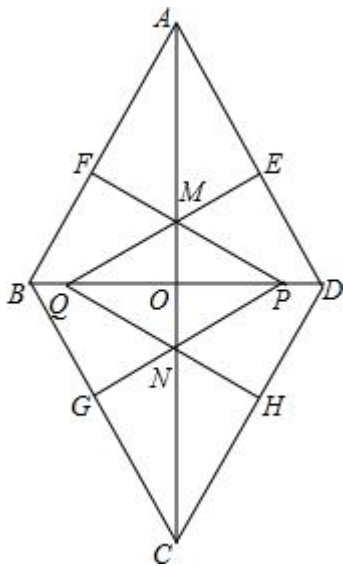
图1

点评: 本题考查了切线长定理、特殊角的三角函数值、对称性等知识，考查了作图的能力，培养了学生的审美意识，是一道好题.

22. (12 分) 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , $AC=4\sqrt{3}$, $BD=4$, 动点 P 在线段 BD 上从点 B 向点 D 运动, $PF \perp AB$ 于点 F , 四边形 $PFBG$ 关于 BD 对称, 四边形 $QEDH$ 与四边形 $PEBG$ 关于 AC 对称. 设菱形 $ABCD$ 被这两个四边形盖住部分的面积为 S_1 , 未被盖住部分的面积为 S_2 , $BP=x$.

(1) 用含 x 的代数式分别表示 S_1 , S_2 ;

(2) 若 $S_1=S_2$, 求 x 的值.



考点: 四边形综合题; 菱形的性质; 轴对称的性质; 轴对称图形; 特殊角的三角函数值.

专题: 综合题; 动点型; 分类讨论.

分析: (1) 根据对称性确定 E 、 F 、 G 、 H 都在菱形的边上, 由于点 P 在 BO 上与点 P 在 OD 上求 S_1 和 S_2 的方法不同, 因此需分情况讨论.

(2) 由 $S_1=S_2$ 和 $S_1+S_2=8\sqrt{3}$ 可以求出 $S_1=S_2=4\sqrt{3}$. 然后在两种情况下分别建立关于 x 的方程, 解方程, 结合不同情况下 x 的范围确定 x 的值.

解答: 解: (1) ①当点 P 在 BO 上时, 如图 1 所示.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=4\sqrt{3}$, $BD=4$,

$$\therefore AC \perp BD, BO = \frac{1}{2}BD = 2, AO = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3},$$

$$\text{且 } S_{\text{菱形 } ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC = 8\sqrt{3}.$$

$$\therefore \tan \angle ABO = \frac{AO}{BO} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle BFP$ 中,

$$\because \angle BFP = 90^\circ, \angle FBP = 60^\circ, BP = x,$$

$$\therefore \sin \angle FBP = \frac{FP}{BP} = \frac{FP}{x} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore FP = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$\therefore BF = \frac{x}{2}.$$

$\because$ 四边形 $PFBG$ 关于 BD 对称,

四边形 $QEDH$ 与四边形 $PEBG$ 关于 AC 对称,

$$\therefore S_{\triangle BFP} = S_{\triangle BGP} = S_{\triangle DEQ} = S_{\triangle DHQ}.$$

$$\therefore S_1 = 4S_{\triangle BFP}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{x}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

$$\therefore S_2 = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

②当点 P 在 OD 上时, 如图 2 所示.

$$\because AB = 4, BF = \frac{x}{2},$$

$$\therefore AF = AB - BF = 4 - \frac{x}{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle AFM$ 中,

$$\because \angle AFM = 90^\circ, \angle FAM = 30^\circ, AF = 4 - \frac{x}{2}$$

$$\therefore \tan \angle FAM = \frac{FM}{AF} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore FM = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(4 - \frac{x}{2}\right).$$

$$\therefore S_{\triangle AFM} = \frac{1}{2}AF \cdot FM$$

$$= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \left(4 - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2.$$

$\because$ 四边形 $PFBG$ 关于 BD 对称,

四边形 QEDH 与四边形 PEBG 关于 AC 对称,

$$\therefore S_{\triangle AFM} = S_{\triangle AEM} = S_{\triangle CHN} = S_{\triangle CGN}.$$

$$\therefore S_2 = 4S_{\triangle AFM}$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{6} \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} (x-8)^2.$$

$$\therefore S_1 = 8\sqrt{3} - S_2 = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} (x-8)^2.$$

综上所述:

$$\text{当点 P 在 BO 上时, } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2, S_2 = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2;$$

$$\text{当点 P 在 OD 上时, } S_1 = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} (x-8)^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} (x-8)^2.$$

(2) ①当点 P 在 BO 上时, $0 < x \leq 2$.

$$\therefore S_1 = S_2, S_1 + S_2 = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_1 = 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{解得: } x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}.$$

$$\therefore 2\sqrt{2} > 2, -2\sqrt{2} < 0,$$

$\therefore$ 当点 P 在 BO 上时, $S_1 = S_2$ 的情况不存在.

②当点 P 在 OD 上时, $2 < x \leq 4$.

$$\therefore S_1 = S_2, S_1 + S_2 = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_2 = 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} (x-8)^2 = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{解得: } x_1 = 8 + 2\sqrt{6}, x_2 = 8 - 2\sqrt{6}.$$

$$\therefore 8 + 2\sqrt{6} > 4, 2 < 8 - 2\sqrt{6} < 4,$$

$$\therefore x = 8 - 2\sqrt{6}.$$

综上所述: 若 $S_1 = S_2$, 则 x 的值为 $8 - 2\sqrt{6}$.

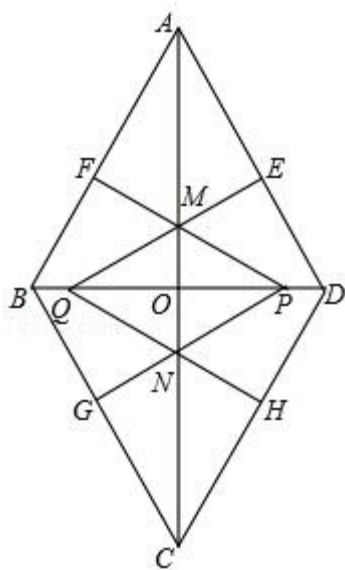


图2

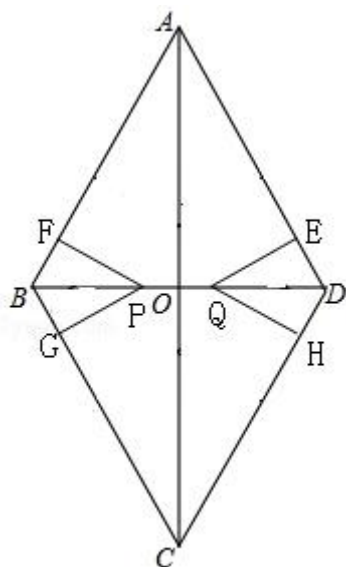


图1

点评: 本题考查了以菱形为背景的轴对称及轴对称图形的相关知识, 考查了菱形的性质、特殊角的三角函数值等知识, 还考查了分类讨论的思想.

23. (12 分) 复习课中, 教师给出关于 x 的函数 $y=2kx^2 - (4kx+1)x - k+1$ (k 是实数).

教师: 请独立思考, 并把探索发现的与该函数有关的结论 (性质) 写到黑板上.

学生思考后, 黑板上出现了一些结论. 教师作为活动一员, 又补充一些结论, 并从中选出以下四条:

- ①存在函数, 其图象经过 $(1, 0)$ 点;
- ②函数图象与坐标轴总共有三个不同的交点;
- ③当 $x > 1$ 时, 不是 y 随 x 的增大而增大就是 y 随 x 的增大而减小;
- ④若函数有最大值, 则最大值比为正数, 若函数有最小值, 则最小值比为负数.

教师: 请你分别判断四条结论的真假, 并给出理由. 最后简单写出解决问题时所用的数学方法.

考点：二次函数综合题.

分析：①将 (1, 0) 点代入函数，解出 k 的值即可作出判断；

②首先考虑，函数为一次函数的情况，从而可判断为假；

③根据二次函数的增减性，即可作出判断；

④当 $k=0$ 时，函数为一次函数，无最大之和最小值，当 $k \neq 0$ 时，函数为抛物线，求出顶点的纵坐标表达式，即可作出判断.

解答：解：①真，将 (1, 0) 代入可得： $2k - (4k+1) - k+1=0$,

解得： $k=0$.

运用方程思想；

②假，反例： $k=0$ 时，只有两个交点. 运用举反例的方法；

③假，如 $k=1$, $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{4}$, 当 $x > 1$ 时，先减后增；运用举反例的方法；

④真，当 $k=0$ 时，函数无最大、最小值；

$$k \neq 0 \text{ 时, } y_{\text{最}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{24k^2+1}{8k},$$

$\therefore$ 当 $k > 0$ 时，有最小值，最小值为负；

当 $k < 0$ 时，有最大值，最大值为正. 运用分类讨论思想.

点评：本题考查了二次函数的综合，立意新颖，结合考察了数学解题过程中经常用到的几种解题方法，同学们注意思考、理解，难度一般.