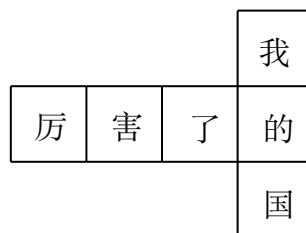


2018 年河南省中考数学试卷

(满分 120 分, 考试时间 100 分钟)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. $-\frac{2}{5}$ 的相反数是 ()
- A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
2. 今年一季度, 河南省对“一带一路”沿线国家进出口总额达 214.7 亿元. 数据“214.7 亿”用科学记数法表示为 ()
- A. 2.147×10^2 B. 0.2147×10^3 C. 2.147×10^{10} D. 0.2147×10^{11}
3. 某正方体的每个面上都有一个汉字, 如图是它的一种展开图, 那么在原正方体中, 与“国”字所在面相对的面上的汉字是 ()
- A. 厉 B. 害 C. 了 D. 我



4. 下列运算正确的是 ()
- A. $(-x^2)^3 = -x^5$ B. $x^2 + x^3 = x^5$
- C. $x^3 \cdot x^4 = x^7$ D. $2x^3 - x^3 = 1$
5. 河南省旅游资源丰富, 2013~2017 年旅游收入不断增长, 同比增速分别为: 15.3%, 12.7%, 15.3%, 14.5%, 17.1%. 关于这组数据, 下列说法正确的是 ()
- A. 中位数是 12.7% B. 众数是 15.3%
- C. 平均数是 15.98% D. 方差是 0
6. 《九章算术》中记载: “今有共买羊, 人出五, 不足四十五; 人出七, 不足三. 问人数、羊价各几何?” 其大意是: 今有人合伙买羊, 若每人出 5 钱, 还差 45 钱; 若每人出 7 钱, 还差 3 钱. 问合伙人数、羊价各是多少? 设合伙人数为 x 人, 羊价为 y 钱, 根据题意, 可列方程组为 ()
- A. $\begin{cases} y = 5x + 45 \\ y = 7x + 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 5x - 45 \\ y = 7x + 3 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} y = 5x + 45 \\ y = 7x - 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 5x - 45 \\ y = 7x - 3 \end{cases}$
7. 下列一元二次方程中, 有两个不相等实数根的是 ()

A. $x^2 + 6x + 9 = 0$

B. $x^2 = x$

C. $x^2 + 3 = 2x$

D. $(x-1)^2 + 1 = 0$

8. 现有 4 张卡片，其中 3 张卡片正面上的图案是“ $\diamond$ ”，1 张卡片正面上的图案是“ $\clubsuit$ ”，它们除此之外完全相同。把这 4 张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取两张，则这两张卡片正面图案相同的概率是（ ）

A. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{2}$

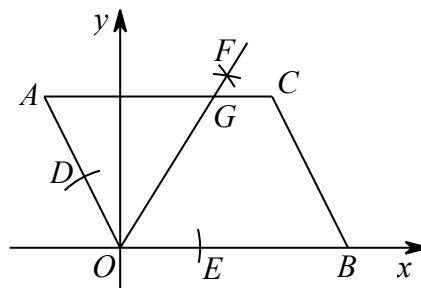
9. 如图，已知 $\square AOB C$ 的顶点 $O(0, 0)$, $A(-1, 2)$, 点 B 在 x 轴正半轴上。按以下步骤作图：①以点 O 为圆心，适当长度为半径作弧，分别交边 OA , OB 于点 D , E ；②分别以点 D , E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 F ；③作射线 OF , 交边 AC 于点 G 。则点 G 的坐标为（ ）

A. $(\sqrt{5}-1, 2)$

B. $(\sqrt{5}, 2)$

C. $(3-\sqrt{5}, 2)$

D. $(\sqrt{5}-2, 2)$



10. 如图 1，点 F 从菱形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿 $A \rightarrow D \rightarrow B$ 以 1 cm/s 的速度匀速运动到点 B 。图 2 是点 F 运动时， $\triangle FBC$ 的面积 $y \text{ (cm}^2\text{)}$ 随时间 $x \text{ (s)}$ 变化的关系图象，则 a 的值为（ ）

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

D. $2\sqrt{5}$

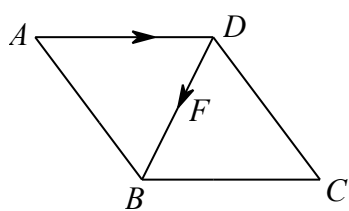


图 1

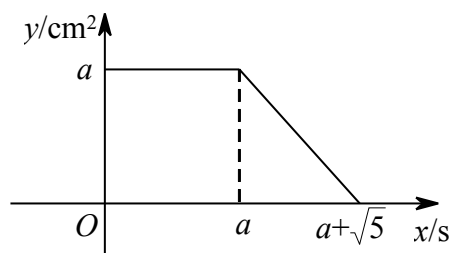
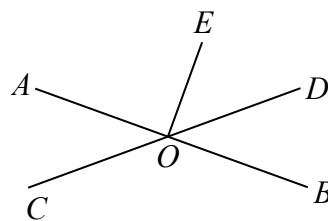


图 2

二、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

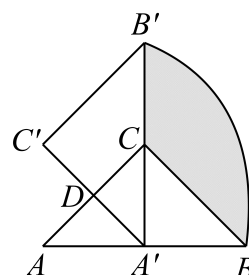
11. 计算: $|-5| - \sqrt{9} =$ _____.

12. 如图，直线 AB , CD 相交于点 O , $EO \perp AB$ 于点 O , $\angle EOD = 50^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为 _____.

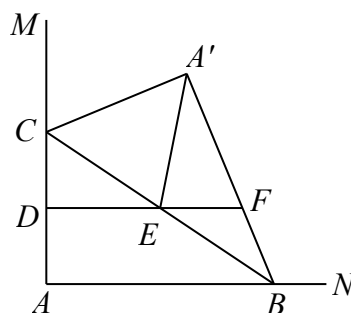
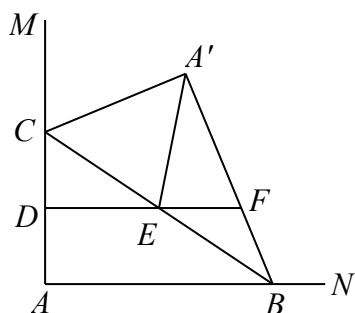


13. 不等式组 $\begin{cases} x+5 > 2 \\ 4-x \geq 3 \end{cases}$ 的最小整数解是_____.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2$, 将 $\triangle ABC$ 绕 AC 的中点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$, 其中点 B 的运动路径为 $\widehat{BB'}$, 则图中阴影部分的面积为_____.



15. 如图, $\angle MAN=90^\circ$, 点 C 在边 AM 上, $AC=4$, 点 B 为边 AN 上一动点, 连接 BC , $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称. D, E 分别为 AC, BC 的中点, 连接 DE 并延长交 $A'B$ 所在直线于点 F , 连接 $A'E$. 当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时, AB 的长为_____.



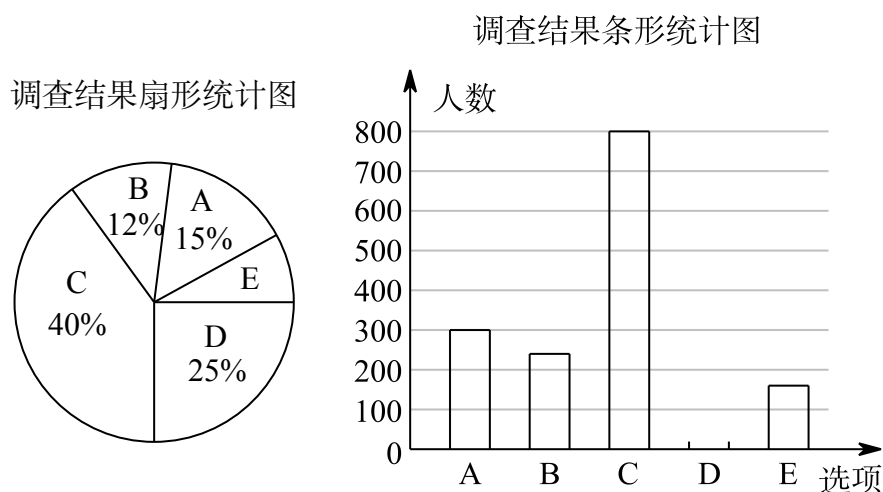
三、解答题 (本大题共 8 个小题, 满分 75 分)

16. (8 分) 共化简, 再求值: $\left(\frac{1}{x+1}-1\right) \div \frac{x}{x^2-1}$, 其中 $x=\sqrt{2}+1$.

17. (9 分) 每到春夏交替时节，雌性杨树会以满天飞絮的方式来传播下一代，漫天飞舞的杨絮易引发皮肤病，呼吸道疾病等，给人们造成困扰. 为了解市民对治理杨絮方法的赞同情况，某课题小组随机调查了部分市民（问卷调查表如图所示），并根据调查结果绘制了如下尚不完整的统计图.

治理杨絮——您选哪一项？（单选）

- A. 减少杨树新面积，控制杨树每年的栽种量
- B. 调整树种结构，逐渐更换现有杨树
- C. 选育无絮杨品种，并推广种植
- D. 对雌性杨树注射生物干扰素，避免产生飞絮
- E. 其他



根据以上统计图，解答下列问题：

- (1) 本次接受调查的市民共有_____人；
- (2) 扇形统计图中，扇形 E 的圆心角度数是_____；
- (3) 请补全条形统计图；
- (4) 若该市约有 90 万人，请估计赞同“选育无絮杨品种，并推广种植”的人数.

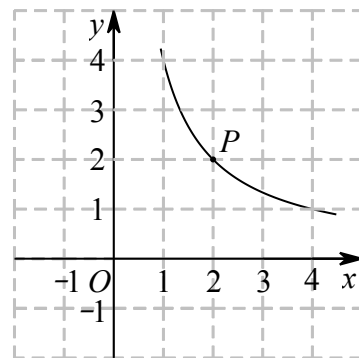
18. (9分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过格点 (网格线的交点) P .

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 在图中用直尺和 2B 铅笔画出两个矩形 (不写画法), 要求每个矩形均需满足下列两个条件:

①四个顶点均在格点上, 且其中两个顶点分别是点 O , 点 P ;

②矩形的面积等于 k 的值.



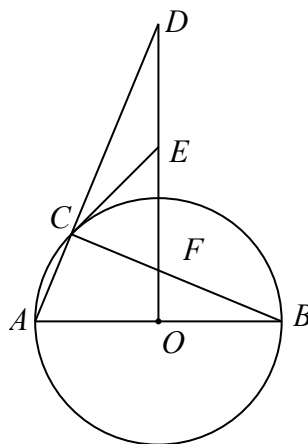
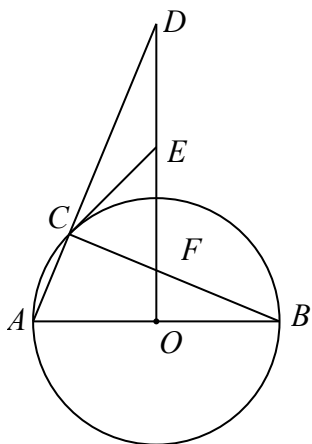
19. (9分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $DO \perp AB$ 于点 O , 连接 DA 交 $\odot O$ 于点 C , 过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 DO 于点 E , 连接 BC 交 DO 于点 F .

(1) 求证: $CE = EF$;

(2) 连接 AF 并延长, 交 $\odot O$ 于点 G . 填空:

①当 $\angle D$ 的度数为 _____ 时, 四边形 $ECFG$ 为菱形;

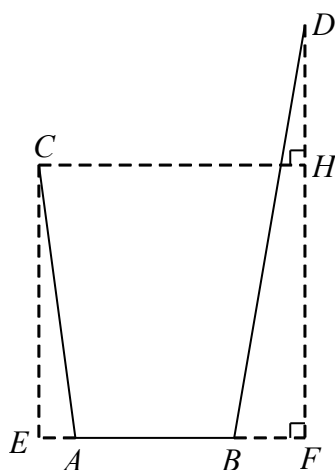
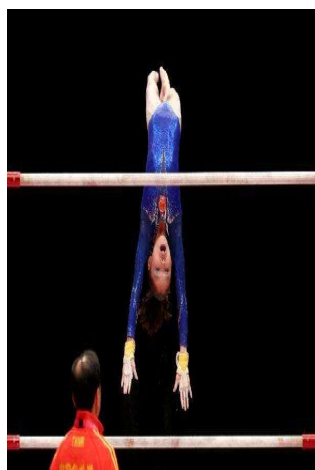
②当 $\angle D$ 的度数为 _____ 时, 四边形 $ECOG$ 为正方形.



20. (9分) “高低杠”是女子体操特有的一个竞技项目，其比赛器材由高、低两根平行杠及若干支架组成，运动员可根据自己的身高和习惯在规定范围内调节高、低两杠间的距离。某兴趣小组根据高低杠器材的一种截面图编制了如下数学问题，请你解答。

如图所示，底座上 A, B 两点间的距离为 90 cm 。低杠上点 C 到直线 AB 的距离 CE 的长为 155 cm ，高杠上点 D 到直线 AB 的距离 DF 的长为 234 cm ，已知低杠的支架 AC 与直线 AB 的夹角 $\angle CAE$ 为 82.4° ，高杠的支架 BD 与直线 AB 的夹角 $\angle DBF$ 为 80.3° 。求高、低杠间的水平距离 CH 的长。

(结果精确到 1 cm 。参考数据: $\sin 82.4^\circ \approx 0.991$, $\cos 82.4^\circ \approx 0.132$, $\tan 82.4^\circ \approx 7.500$, $\sin 80.3^\circ \approx 0.983$, $\cos 80.3^\circ \approx 0.168$, $\tan 80.3^\circ \approx 5.850$)



21. (10 分) 某公司推出一款产品, 经市场调查发现, 该产品的日销售量 y (个) 与销售单价 x (元) 之间满足一次函数关系. 关于销售单价、日销售量、日销售利润的几组对应值如下表:

销售单价 x (元)	85	95	105	115
日销售量 y (个)	175	125	75	m
日销售利润 (元)	875	1 875	1 875	875

注: 日销售利润=日销售量 $\times$ (销售单价-成本单价)

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不要求写出 x 的取值范围) 及 m 的值;

(2) 根据以上信息, 填空:

该产品的成本单价是_____元. 当销售单价 x =_____元时, 日销售利润 w 最大, 最大值是_____元;

(3) 公司计划开展科技创新, 以降低该产品的成本. 预计在今后的销售中, 日销售量与销售单价仍存在 (1) 中的关系. 若想实现销售单价为 90 元时, 日销售利润不低于 3 750 元的销售目标, 该产品的成本单价应不超过多少元?

22. (10 分) (1) 问题发现

如图 1, 在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中, $OA=OB$, $OC=OD$, $\angle AOB=\angle COD=40^\circ$, 连接 AC , BD 交于点 M . 填空:

① $\frac{AC}{BD}$ 的值为_____;

② $\angle AMB$ 的度数为_____.

(2) 类比探究

如图 2, 在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中, $\angle AOB=\angle COD=90^\circ$, $\angle OAB=\angle OCD=30^\circ$,

连接 AC 交 BD 的延长线于点 M . 请判断 $\frac{AC}{BD}$ 的值及 $\angle AMB$ 的度数, 并说明理由.

(3) 拓展延伸

在 (2) 的条件下, 将 $\triangle OCD$ 绕点 O 在平面内旋转, AC , BD 所在直线交于点 M . 若 $OD=1$, $OB=\sqrt{7}$, 请直接写出当点 C 与点 M 重合时 AC 的长.

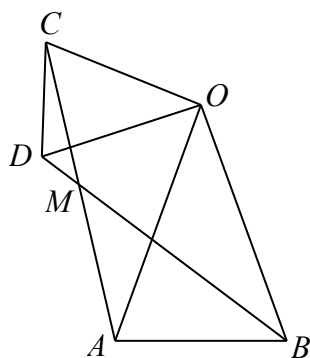


图 1

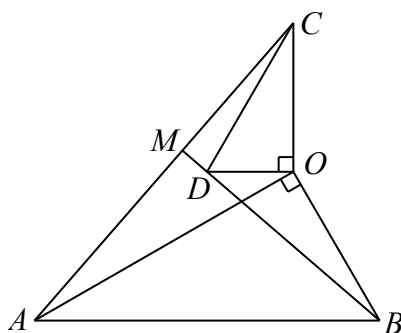
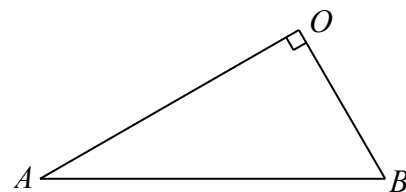


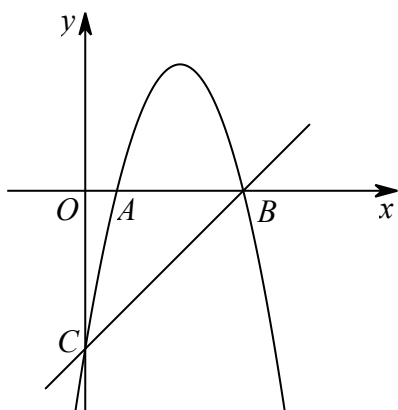
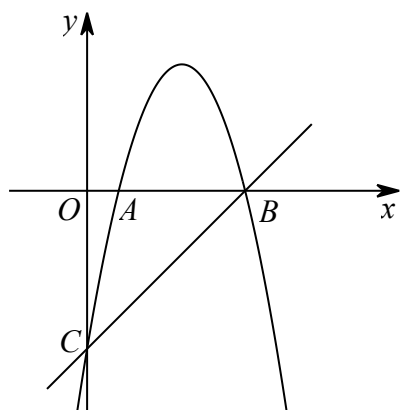
图 2



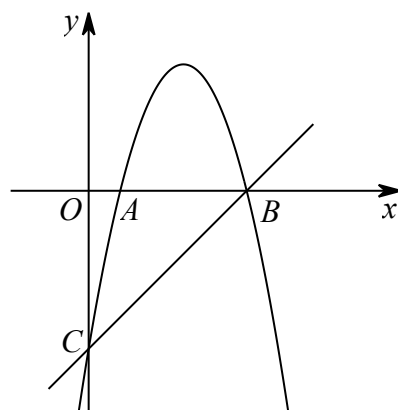
备用图

23. (11 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+6x+c$ 交 x 轴于 A , B 两点, 交 y 轴于点 C . 直线 $y=x-5$ 经过点 B , C .

- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 过点 A 的直线交直线 BC 于点 M .
- ① 当 $AM \perp BC$ 时, 过抛物线上一动点 P (不与点 B, C 重合), 作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q , 若以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 P 的横坐标;
- ② 连接 AC , 当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍时, 请直接写出点 M 的坐标.



备用图



备用图

2018 年河南省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (每题只有一个正确选项, 本题共 10 小题, 每题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) $-\frac{2}{5}$ 的相反数是 ()

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

【分析】直接利用相反数的定义分析得出答案.

【解答】解: $-\frac{2}{5}$ 的相反数是: $\frac{2}{5}$.

故选: B.

【点评】此题主要考查了相反数, 正确把握相反数的定义是解题关键.

2. (3分) 今年一季度, 河南省对“一带一路”沿线国家进出口总额达 214.7 亿元, 数据“214.7 亿”用科学记数法表示为 ()

A. 2.147×10^2 B. 0.2147×10^3 C. 2.147×10^{10} D. 0.2147×10^{11}

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 214.7 亿, 用科学记数法表示为 2.147×10^{10} ,
故选: C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3分) 某正方体的每个面上都有一个汉字, 如图是它的一种展开图, 那么在原正方体中, 与“国”字所在面相对的面上的汉字是 ()



A. 厉 B. 害 C. 了 D. 我

【分析】正方体的表面展开图, 相对的面之间一定相隔一个正方形, 根据这一特点作答.

【解答】解: 正方体的表面展开图, 相对的面之间一定相隔一个正方形,
“的”与“害”是相对面,
“了”与“厉”是相对面,
“我”与“国”是相对面.

故选：D.

【点评】 本题主要考查了正方体相对两个面上的文字，注意正方体的空间图形，从相对面入手，分析及解答问题.

4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $(-x^2)^3 = -x^5$ B. $x^2 + x^3 = x^5$ C. $x^3 \cdot x^4 = x^7$ D. $2x^3 - x^3 = 1$

【分析】 分别根据幂的乘方、同类项概念、同底数幂相乘及合并同类项法则逐一计算即可判断.

【解答】 解：A、 $(-x^2)^3 = -x^6$ ，此选项错误；

B、 x^2 、 x^3 不是同类项，不能合并，此选项错误；

C、 $x^3 \cdot x^4 = x^7$ ，此选项正确；

D、 $2x^3 - x^3 = x^3$ ，此选项错误；

故选：C.

【点评】 本题主要考查整式的运算，解题的关键是掌握幂的乘方、同类项概念、同底数幂相乘及合并同类项法则.

5. (3 分) 河南省旅游资源丰富，2013~2017 年旅游收入不断增长，同比增速分别为：15.3%，12.7%，15.3%，14.5%，17.1%. 关于这组数据，下列说法正确的是 ()

A. 中位数是 12.7% B. 众数是 15.3%

C. 平均数是 15.98% D. 方差是 0

【分析】 直接利用方差的意义以及平均数的求法和中位数、众数的定义分别分析得出答案.

【解答】 解：A、按大小顺序排序为：12.7%，14.5%，15.3%，15.3%，17.1%，

故中位数是：15.3%，故此选项错误；

B、众数是 15.3%，正确；

C、 $\frac{1}{5}$ (15.3%+12.7%+15.3%+14.5%+17.1%)

=14.98%，故选项 C 错误；

D、 $\therefore$ 5 个数据不完全相同，

$\therefore$ 方差不可能为零，故此选项错误.

故选：B.

【点评】此题主要考查了方差的意义以及平均数的求法和中位数、众数的定义，正确把握相关定义是解题关键.

6. (3 分)《九章算术》中记载：“今有共买羊，人出五，不足四十五；人出七，不足三问人数、羊价各几何？”其大意是：今有人合伙买羊，若每人出 5 钱，还差 45 钱；若每人出 7 钱，还差 3 钱，问合伙人数、羊价各是多少？设合伙人数为 x 人，羊价为 y 钱，根据题意，可列方程组为 ()

A. $\begin{cases} y=5x+45 \\ y=7x+3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y=5x-45 \\ y=7x+3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y=5x+45 \\ y=7x-3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y=5x-45 \\ y=7x-3 \end{cases}$

【分析】设合伙人数为 x 人，羊价为 y 钱，根据羊的价格不变列出方程组.

【解答】解：设合伙人数为 x 人，羊价为 y 钱，根据题意，可列方程组为： $\begin{cases} y=5x+45 \\ y=7x+3 \end{cases}$.

故选：A.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，找准等量关系是解题的关键.

7. (3 分)下列一元二次方程中，有两个不相等实数根的是 ()

A. $x^2+6x+9=0$ B. $x^2=x$ C. $x^2+3=2x$ D. $(x-1)^2+1=0$

【分析】根据一元二次方程根的判别式判断即可.

【解答】解: A、 $x^2+6x+9=0$

$$\Delta=6^2-4\times 9=36-36=0,$$

方程有两个相等实数根;

B、 $x^2=x$

$$x^2-x=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 0=1>0$$

两个不相等实数根;

C、 $x^2+3=2x$

$$x^2-2x+3=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=-8<0,$$

方程无实根;

D、 $(x-1)^2+1=0$

$$(x-1)^2=-1,$$

则方程无实根;

故选: B.

【点评】本题考查的是一元二次方程根的判别式, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系: ①当 $\Delta>0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根; ②当 $\Delta=0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根; ③当 $\Delta<0$ 时, 方程无实数根.

8. (3分) 现有4张卡片, 其中3张卡片正面上的图案是“”, 1张卡片正面

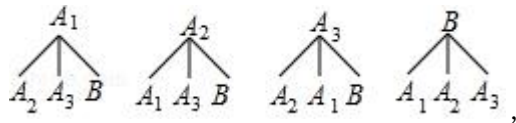
上的图案是“”，它们除此之外完全相同。把这 4 张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取两张，则这两张卡片正面图案相同的概率是（ ）

- A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

【分析】直接利用树状图法列举出所有可能进而求出概率。

【解答】解：令 3 张  用 A_1, A_2, A_3 表示， 用 B 表示，

可得：



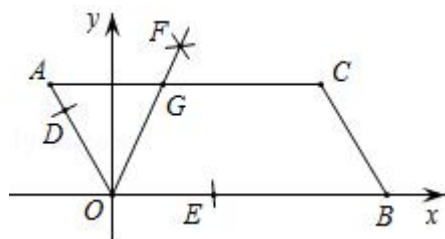
一共有 12 种可能，两张卡片正面图案相同的有 6 种，

故从中随机抽取两张，则这两张卡片正面图案相同的概率是： $\frac{1}{2}$ 。

故选：D。

【点评】此题主要考查了树状图法求概率，正确列举出所有可能是解题关键。

9. (3 分) 如图，已知 $\square A O B C$ 的顶点 $O(0, 0)$ ， $A(-1, 2)$ ，点 B 在 x 轴正半轴上按以下步骤作图：①以点 O 为圆心，适当长度为半径作弧，分别交边 OA ， OB 于点 D ， E ；②分别以点 D ， E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 F ；③作射线 OF ，交边 AC 于点 G ，则点 G 的坐标为（ ）



- A. $(\sqrt{5}-1, 2)$ B. $(\sqrt{5}, 2)$ C. $(3-\sqrt{5}, 2)$ D. $(\sqrt{5}-2, 2)$

【分析】依据勾股定理即可得到 $Rt\triangle AOH$ 中， $AO=\sqrt{5}$ ，依据 $\angle AGO=\angle AOG$ ，即可得到 $AG=AO=\sqrt{5}$ ，进而得出 $HG=\sqrt{5}-1$ ，可得 $G(\sqrt{5}-1, 2)$ 。

【解答】解：∵▱AOBC的顶点O (0, 0), A (-1, 2),

$$\therefore AH=1, HO=2,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AOH \text{ 中, } AO=\sqrt{5},$$

由题可得, OF 平分 $\angle AOB$,

$$\therefore \angle AOG=\angle EOG,$$

$$\text{又} \because AG \parallel OE,$$

$$\therefore \angle AGO=\angle EOG,$$

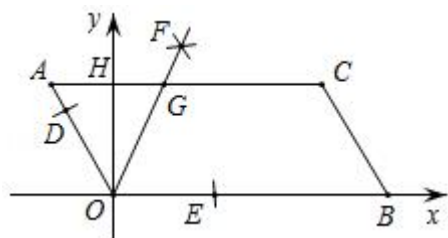
$$\therefore \angle AGO=\angle AOG,$$

$$\therefore AG=AO=\sqrt{5},$$

$$\therefore HG=\sqrt{5}-1,$$

$$\therefore G(\sqrt{5}-1, 2),$$

故选: A.



【点评】本题主要考查了角平分线的作法, 勾股定理以及平行四边形的性质的运用, 解题时注意: 求图形中一些点的坐标时, 过已知点向坐标轴作垂线, 然后求出相关的线段长, 是解决这类问题的基本方法和规律.

10. (3分) 如图1, 点F从菱形ABCD的顶点A出发, 沿A→D→B以1cm/s的速度匀速运动到点B, 图2是点F运动时, $\triangle FBC$ 的面积y (cm²) 随时间x (s) 变化的关系图象, 则a的值为 ()

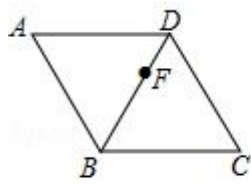


图1

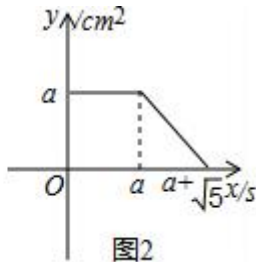


图2

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. $2\sqrt{5}$

【分析】通过分析图象，点 F 从点 A 到 D 用 as ，此时， $\triangle FBC$ 的面积为 a ，依此可求菱形的高 DE ，再由图象可知， $BD=\sqrt{5}$ ，应用两次勾股定理分别求 BE 和 a 。

【解答】解：过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E

由图象可知，点 F 由点 A 到点 D 用时为 as ， $\triangle FBC$ 的面积为 acm^2 。

$$\therefore AD=a$$

$$\therefore \frac{1}{2}DE \cdot AD=a$$

$$\therefore DE=2$$

当点 F 从 D 到 B 时，用 $\sqrt{5}s$

$$\therefore BD=\sqrt{5}$$

Rt $\triangle DBE$ 中，

$$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$$

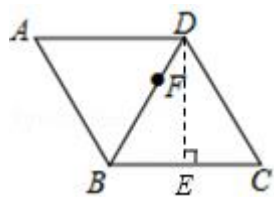
$\therefore ABCD$ 是菱形

$$\therefore EC=a-1, DC=a$$

Rt $\triangle DEC$ 中，

$$a^2=2^2+(a-1)^2$$

$$\text{解得 } a=\frac{3}{2}$$



故选：C.

【点评】 本题综合考查了菱形性质和一次函数图象性质，解答过程中要注意函数图象变化与动点位置之间的关系.

二、细心填一填（本大题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，请把答案填在答题卷相应题号的横线上）

11. (3 分) 计算： $| - 5 | - \sqrt{9} = \underline{2}$.

【分析】 直接利用二次根式以及绝对值的性质分别化简得出答案.

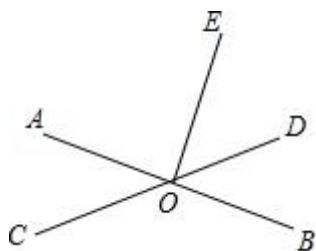
【解答】 解：原式 $= 5 - 3$

$= 2$.

故答案为：2.

【点评】 此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

12. (3 分) 如图，直线 AB，CD 相交于点 O， $EO \perp AB$ 于点 O， $\angle EOD = 50^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为 140° .



【分析】 直接利用垂直的定义结合互余以及互补的定义分析得出答案.

【解答】 解： $\because$ 直线 AB，CD 相交于点 O， $EO \perp AB$ 于点 O，

$\therefore \angle EOB = 90^\circ$,

$\because \angle EOD = 50^\circ$,

$\therefore \angle BOD=40^\circ$,

则 $\angle BOC$ 的度数为: $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

故答案为: 140° .

【点评】 此题主要考查了垂直的定义、互余以及互补的定义, 正确把握相关定义是解题关键.

13. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} x+5 > 2 \\ 4-x \geq 3 \end{cases}$ 的最小整数解是 -2.

【分析】 先求出每个不等式的解集, 再求出不等式组的解集, 即可得出答案.

【解答】 解: $\begin{cases} x+5 > 2 \text{ ①} \\ 4-x \geq 3 \text{ ②} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得: $x > -3$,

解不等式②得: $x \leq 1$,

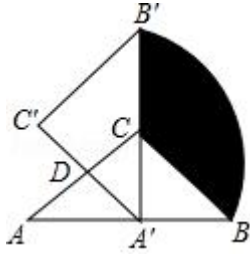
$\therefore$ 不等式组的解集为 $-3 < x \leq 1$,

$\therefore$ 不等式组的最小整数解是 -2 ,

故答案为: -2 .

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组和不等式组的整数解, 能根据不等式的解集得出不等式组的解集是解此题的关键.

14. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2$, 将 $\triangle ABC$ 绕 AC 的中点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$, 其中点 B 的运动路径为 $\widehat{BB'}$, 则图中阴影部分的面积为 $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$.



【分析】先利用勾股定理求出 $DB' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $A'B' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 再根据 $S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形} BDB'} - S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DB'C}$, 计算即可.

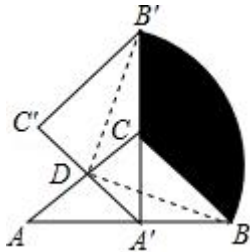
【解答】解: $\triangle ABC$ 绕 AC 的中点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$, 此时点 A' 在斜边 AB 上, $CA' \perp AB$,

$$DB' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$A'B' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

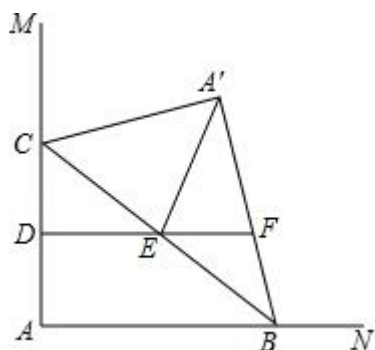
$$\therefore S_{\text{阴}} = \frac{90\pi \times 5}{360} - 1 \times 2 \div 2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}.$$

故答案为 $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$.



【点评】本题考查旋转变换、弧长公式等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

15. (3 分) 如图, $\angle MAN = 90^\circ$, 点 C 在边 AM 上, $AC = 4$, 点 B 为边 AN 上一动点, 连接 BC , $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称, 点 D, E 分别为 AC, BC 的中点, 连接 DE 并延长交 $A'B$ 所在直线于点 F , 连接 $A'E$. 当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时, AB 的长为 $4\sqrt{3}$ 或 4 .



【分析】当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时，存在两种情况：

①当 $\angle A'EF=90^\circ$ 时，如图 1，根据对称的性质和平行线可得： $A'C=A'E=4$ ，根据直角三角形斜边中线的性质得： $BC=2A'B=8$ ，最后利用勾股定理可得 AB 的长；

②当 $\angle A'FE=90^\circ$ 时，如图 2，证明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，可得 $AB=AC=4$ 。

【解答】解：当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时，存在两种情况：

①当 $\angle A'EF=90^\circ$ 时，如图 1，

$\therefore \triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称，

$\therefore A'C=AC=4$ ， $\angle ACB=\angle A'CB$ ，

$\therefore$ 点 D ， E 分别为 AC ， BC 的中点，

$\therefore D$ 、 E 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle CDE=\angle MAN=90^\circ$ ，

$\therefore \angle CDE=\angle A'EF$ ，

$\therefore AC \parallel A'E$ ，

$\therefore \angle ACB=\angle A'EC$ ，

$\therefore \angle A'CB=\angle A'EC$ ，

$\therefore A'C=A'E=4$ ，

$\text{Rt}\triangle A'CB$ 中， $\therefore E$ 是斜边 BC 的中点，

$$\therefore BC=2A'B=8,$$

由勾股定理得: $AB^2=BC^2-AC^2$,

$$\therefore AB=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3};$$

②当 $\angle A'FE=90^\circ$ 时, 如图 2,

$$\therefore \angle ADF=\angle A=\angle DFB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF=90^\circ,$$

$\therefore \triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称,

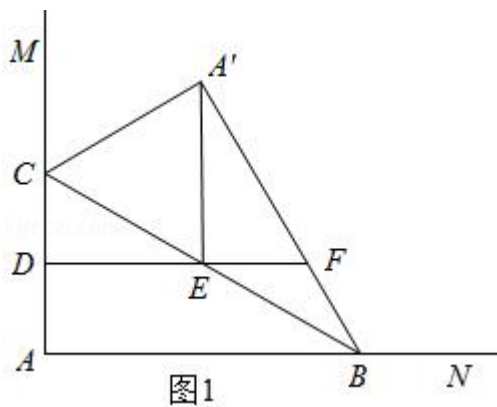
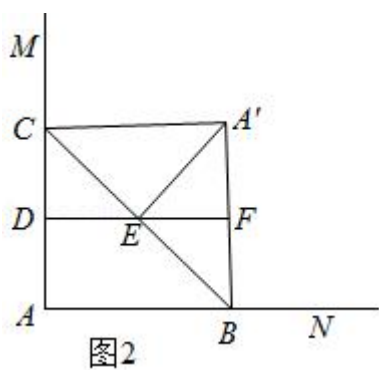
$$\therefore \angle ABC=\angle CBA'=45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB=AC=4;$$

综上所述, AB 的长为 $4\sqrt{3}$ 或 4;

故答案为: $4\sqrt{3}$ 或 4;



【点评】 本题考查了三角形的中位线定理、勾股定理、轴对称的性质、等腰直角

三角形的判定、直角三角形斜边中线的性质，并利用分类讨论的思想解决问题.

三、计算题（本大题共 8 题，共 75 分，请认真读题）

16. (8 分) 先化简，再求值： $(\frac{1}{x+1} - 1) \div \frac{x}{x^2-1}$ ，其中 $x=\sqrt{2}+1$.

【分析】根据分式的运算法则即可求出答案，

【解答】解：当 $x=\sqrt{2}+1$ 时，

$$\text{原式} = \frac{-x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$= 1 - x$$

$$= -\sqrt{2}$$

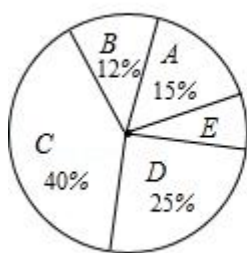
【点评】本题考查分式的运算，解题的关键是熟练运用分式的运算法则，本题属于基础题型.

17. (9 分) 每到春夏交替时节，雌性杨树会以满天飞絮的方式来传播下一代，漫天飞舞的杨絮易引发皮肤病、呼吸道疾病等，给人们造成困扰，为了解市民对治理杨絮方法的赞同情况，某课题小组随机调查了部分市民（问卷调查表如表所示），并根据调查结果绘制了如下尚不完整的统计图.

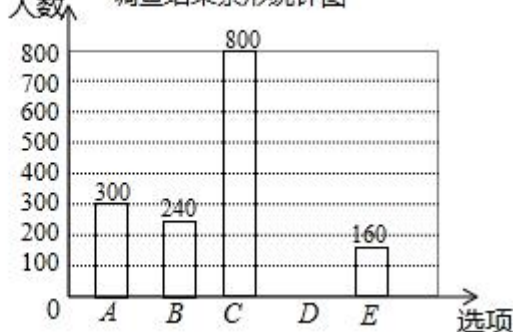
治理杨絮——您选哪一项？（单选）

- A. 减少杨树新增面积，控制杨树每年的栽种量
- B. 调整树种结构，逐渐更换现有杨树
- C. 选育无絮杨品种，并推广种植
- D. 对雌性杨树注射生物干扰素，避免产生飞絮
- E. 其他

调查结果扇形统计图



调查结果条形统计图



根据以上统计图，解答下列问题：

- (1) 本次接受调查的市民共有 2000 人；
- (2) 扇形统计图中，扇形 E 的圆心角度数是 28.8° ；
- (3) 请补全条形统计图；
- (4) 若该市约有 90 万人，请估计赞同“选育无絮杨品种，并推广种植”的人数。

【分析】 (1) 将 A 选项人数除以总人数即可得；

(2) 用 360° 乘以 E 选项人数所占比例可得；

(3) 用总人数乘以 D 选项人数所占百分比求得其人数，据此补全图形即可得；

(4) 用总人数乘以样本中 C 选项人数所占百分比可得。

【解答】 解：(1) 本次接受调查的市民人数为 $300 \div 15\% = 2000$ 人，

故答案为：2000；

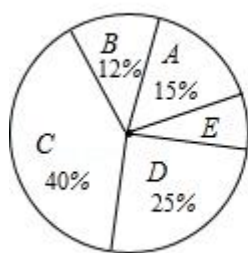
(2) 扇形统计图中，扇形 E 的圆心角度数是 $360^\circ \times \frac{160}{2000} = 28.8^\circ$ ，

故答案为： 28.8° ；

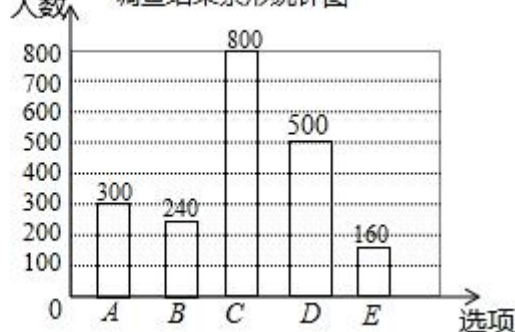
(3) D 选项的人数为 $2000 \times 25\% = 500$ ，

补全条形图如下：

调查结果扇形统计图



调查结果条形统计图



(4) 估计赞同“选育无絮杨品种，并推广种植”的人数为 $70 \times 40\% = 28$ (万人)。

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用。读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

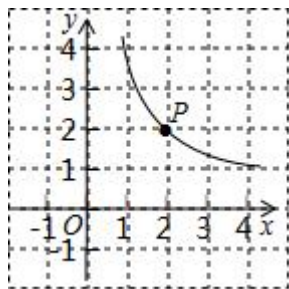
18. (9分) 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过格点 (网格线的交点) P。

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 在图中用直尺和 2B 铅笔画出两个矩形 (不写画法)，要求每个矩形均需满足下列两个条件：

①四个顶点均在格点上，且其中两个顶点分别是点 O，点 P；

②矩形的面积等于 k 的值。



【分析】 (1) 将 P 点坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ ，利用待定系数法即可求出反比例函数的解析式；

(2) 根据矩形满足的两个条件画出符合要求的两个矩形即可。

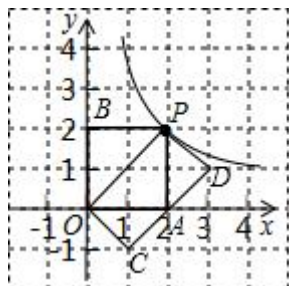
【解答】 解：(1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过格点 P (2, 2)，

$$\therefore k=2 \times 2=4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y=\frac{4}{x};$$

(2) 如图所示:

矩形 OAPB、矩形 OCDP 即为所求作的图形.



【点评】 本题考查了作图 - 应用与设计作图，反比例函数图象上点的坐标特征，待定系数法求反比例函数解析式，矩形的判定与性质，正确求出反比例函数的解析式是解题的关键.

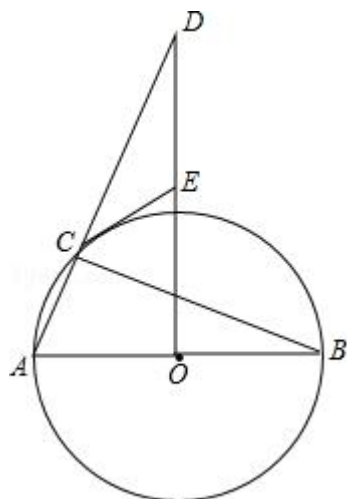
19. (9 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $DO \perp AB$ 于点 O, 连接 DA 交 $\odot O$ 于点 C, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 DO 于点 E, 连接 BC 交 DO 于点 F.

(1) 求证: $CE=EF$;

(2) 连接 AF 并延长, 交 $\odot O$ 于点 G. 填空:

①当 $\angle D$ 的度数为 30° 时, 四边形 ECFG 为菱形;

②当 $\angle D$ 的度数为 22.5° 时, 四边形 ECOG 为正方形.



【分析】 (1) 连接 OC ，如图，利用切线的性质得 $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ ，再利用等腰三角形和互余证明 $\angle 1 = \angle 2$ ，然后根据等腰三角形的判定定理得到结论；

(2) ①当 $\angle D = 30^\circ$ 时， $\angle DAO = 60^\circ$ ，证明 $\triangle CEF$ 和 $\triangle FEG$ 都为等边三角形，从而得到 $EF = FG = GE = CE = CF$ ，则可判断四边形 $ECFG$ 为菱形；

②当 $\angle D = 22.5^\circ$ 时， $\angle DAO = 67.5^\circ$ ，利用三角形内角和计算出 $\angle COE = 45^\circ$ ，利用对称得 $\angle EOG = 45^\circ$ ，则 $\angle COG = 90^\circ$ ，接着证明 $\triangle OEC \cong \triangle OEG$ 得到 $\angle OEG = \angle OCE = 90^\circ$ ，从而证明四边形 $ECOG$ 为矩形，然后进一步证明四边形 $ECOG$ 为正方形。

【解答】 (1) 证明：连接 OC ，如图，

$\because CE$ 为切线，

$\therefore OC \perp CE$ ，

$\therefore \angle OCE = 90^\circ$ ，即 $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ ，

$\because DO \perp AB$ ，

$\therefore \angle 3 + \angle B = 90^\circ$ ，

而 $\angle 2 = \angle 3$ ，

$\therefore \angle 2 + \angle B = 90^\circ$ ，

而 $OB=OC$,

$$\therefore \angle 4 = \angle B,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore CE=FE;$$

(2) 解: ①当 $\angle D=30^\circ$ 时, $\angle DAO=60^\circ$,

而 AB 为直径,

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle B=30^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 60^\circ,$$

而 $CE=FE$,

$\therefore \triangle CEF$ 为等边三角形,

$$\therefore CE=CF=EF,$$

同理可得 $\angle GFE=60^\circ$,

利用对称得 $FG=FC$,

$$\therefore FG=EF,$$

$\therefore \triangle FEG$ 为等边三角形,

$$\therefore EG=FG,$$

$$\therefore EF=FG=GE=CE,$$

$\therefore$ 四边形 $ECFG$ 为菱形;

②当 $\angle D=22.5^\circ$ 时, $\angle DAO=67.5^\circ$,

而 $OA=OC$,

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - 67.5^\circ - 67.5^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COE = 45^\circ,$$

利用对称得 $\angle EOG = 45^\circ$,

$$\therefore \angle COG = 90^\circ,$$

易得 $\triangle OEC \cong \triangle OEG$,

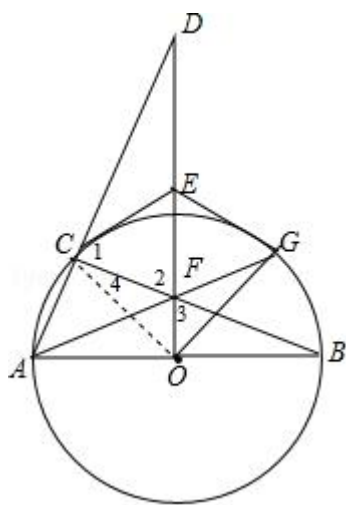
$$\therefore \angle OEG = \angle OCE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 ECOG 为矩形,

而 $OC = OG$,

$\therefore$ 四边形 ECOG 为正方形.

故答案为 30° , 22.5° .

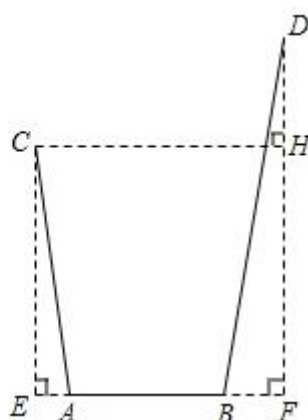


【点评】 本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系．也考查了菱形和正方形的判定．

20. (9 分) “高低杠”是女子体操特有的一个竞技项目，其比赛器材由高、低两根平行杠及若干支架组成，运动员可根据自己的身高和习惯在规定范围内调节高、

低两杠间的距离. 某兴趣小组根据高低杠器材的一种截面图编制了如下数学问题, 请你解答.

如图所示, 底座上 A, B 两点间的距离为 90cm. 低杠上点 C 到直线 AB 的距离 CE 的长为 155cm, 高杠上点 D 到直线 AB 的距离 DF 的长为 234cm, 已知低杠的支架 AC 与直线 AB 的夹角 $\angle CAE$ 为 82.4° , 高杠的支架 BD 与直线 AB 的夹角 $\angle DBF$ 为 80.3° . 求高、低杠间的水平距离 CH 的长. (结果精确到 1cm, 参考数据 $\sin 82.4^\circ \approx 0.991$, $\cos 82.4^\circ \approx 0.132$, $\tan 82.4^\circ \approx 7.500$, $\sin 80.3^\circ \approx 0.983$, $\cos 80.3^\circ \approx 0.168$, $\tan 80.3^\circ \approx 5.850$)



【分析】 利用锐角三角函数, 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中, 分别求出 AE、BF 的长. 计算出 EF. 通过矩形 CEFH 得到 CH 的长.

【解答】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$$\begin{aligned}\therefore \tan \angle CAE &= \frac{CE}{AE}, \\ \therefore AE &= \frac{CE}{\tan \angle CAE} = \frac{155}{\tan 82.4^\circ} \approx \frac{155}{7.5} \approx 21 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中,

$$\begin{aligned}\therefore \tan \angle DBF &= \frac{DF}{BF}, \\ \therefore BF &= \frac{DF}{\tan \angle DBF} = \frac{234}{\tan 80.3^\circ} \approx \frac{234}{5.85} = 40 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

$$\therefore EF = EA + AB + BF \approx 21 + 90 + 40 = 151 \text{ (cm)}$$

$\therefore CE \perp EF, CH \perp DF, DF \perp EF$

$\therefore$ 四边形 CEFH 是矩形,

$\therefore CH = EF = 151\text{cm}$

答: 高、低杠间的水平距离 CH 的长为 151cm.

【点评】 本题考查了锐角三角函数解直角三角形. 题目难度不大, 注意精确度.

21. (10 分) 某公司推出一款产品, 经市场调查发现, 该产品的日销售量 y (个) 与销售单价 x (元) 之间满足一次函数关系. 关于销售单价, 日销售量, 日销售利润的几组对应值如表:

销售单价 x (元)	85	95	105	115
日销售量 y (个)	175	125	75	m
日销售利润 w (元)	875	1875	1875	875

(注: 日销售利润 = 日销售量 $\times$ (销售单价 - 成本单价))

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不要求写出 x 的取值范围) 及 m 的值;

(2) 根据以上信息, 填空:

该产品的成本单价是 80 元, 当销售单价 $x =$ 100 元时, 日销售利润 w 最大, 最大值是 2000 元;

(3) 公司计划开展科技创新, 以降低该产品的成本, 预计在今后的销售中, 日销售量与销售单价仍存在 (1) 中的关系. 若想实现销售单价为 90 元时, 日销售利润不低于 3750 元的销售目标, 该产品的成本单价应不超过多少元?

【分析】 (1) 根据题意和表格中的数据可以求得 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 根据题意可以列出相应的方程, 从而可以求得生产成本和 w 的最大值;

(3) 根据题意可以列出相应的不等式, 从而可以取得科技创新后的成本.

【解答】解：（1）设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b$,

$$\begin{cases} 85k+b=175 \\ 95k+b=125 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k=-5 \\ b=600 \end{cases},$$

即 y 关于 x 的函数解析式是 $y=-5x+600$,

当 $x=115$ 时, $y=-5 \times 115+600=25$,

即 m 的值是 25;

（2）设成本为 a 元/个,

当 $x=85$ 时, $875=175 \times (85-a)$, 得 $a=80$,

$$w=(-5x+600)(x-80)=-5x^2+1000x-48000=-5(x-100)^2+2000,$$

$\therefore$ 当 $x=100$ 时, w 取得最大值, 此时 $w=2000$,

故答案为: 80, 100, 2000;

（3）设科技创新后成本为 b 元,

当 $x=90$ 时,

$$(-5 \times 90+600)(90-b) \geq 3750,$$

解得, $b \leq 65$,

答: 该产品的成本单价应不超过 65 元.

【点评】本题考查二次函数的应用、一元二次方程的应用、不等式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用函数和数形结合的思想解答.

22. (10 分) (1) 问题发现

如图 1, 在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中, $OA=OB$, $OC=OD$, $\angle AOB=\angle COD=40^\circ$, 连接 AC , BD 交于点 M . 填空:

① $\frac{AC}{BD}$ 的值为 1;

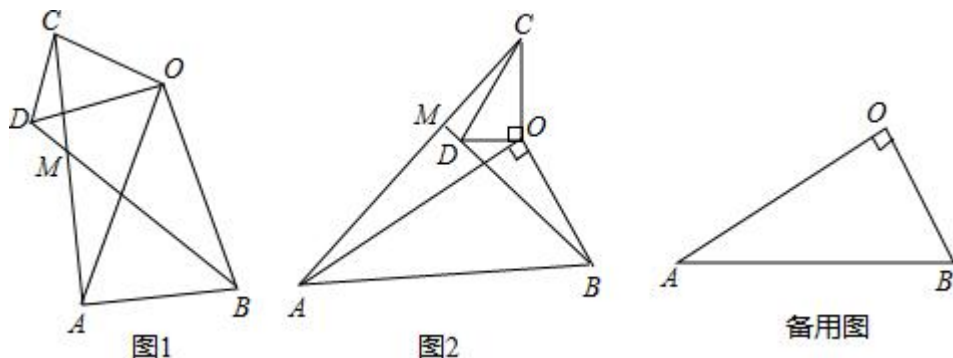
② $\angle AMB$ 的度数为 40° .

(2) 类比探究

如图 2, 在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, $\angle OAB = \angle OCD = 30^\circ$, 连接 AC 交 BD 的延长线于点 M . 请判断 $\frac{AC}{BD}$ 的值及 $\angle AMB$ 的度数, 并说明理由;

(3) 拓展延伸

在 (2) 的条件下, 将 $\triangle OCD$ 绕点 O 在平面内旋转, AC , BD 所在直线交于点 M , 若 $OD=1$, $OB=\sqrt{7}$, 请直接写出当点 C 与点 M 重合时 AC 的长.



【分析】(1) ①证明 $\triangle COA \cong \triangle DOB$ (SAS), 得 $AC=BD$, 比值为 1;

②由 $\triangle COA \cong \triangle DOB$, 得 $\angle CAO = \angle DBO$, 根据三角形的内角和定理得: $\angle AMB = 180^\circ - (\angle DBO + \angle OAB + \angle ABD) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$;

(2) 根据两边的比相等且夹角相等可得 $\triangle AOC \sim \triangle BOD$, 则 $\frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD} = \sqrt{3}$, 由全等三角形的性质得 $\angle AMB$ 的度数;

(3) 正确画图形, 当点 C 与点 M 重合时, 有两种情况: 如图 3 和 4, 同理可得: $\triangle AOC \sim \triangle BOD$, 则 $\angle AMB = 90^\circ$, $\frac{AC}{BD} = \sqrt{3}$, 可得 AC 的长.

【解答】解: (1) 问题发现

①如图 1, $\because \angle AOB = \angle COD = 40^\circ$,

$\therefore \angle COA = \angle DOB$,

$\because OC = OD, OA = OB$,

$$\therefore \triangle COA \cong \triangle DOB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AC=BD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD}=1,$$

$$\textcircled{2} \because \triangle COA \cong \triangle DOB,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle DBO,$$

$$\because \angle AOB = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 140^\circ,$$

$$\begin{aligned} \text{在} \triangle AMB \text{ 中, } \angle AMB &= 180^\circ - (\angle CAO + \angle OAB + \angle ABD) = 180^\circ - (\angle DBO + \\ &\angle OAB + \angle ABD) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ, \end{aligned}$$

故答案为：①1；②40°；

(2) 类比探究

如图 2, $\frac{AC}{BD} = \sqrt{3}$, $\angle AMB = 90^\circ$, 理由是:

Rt $\triangle COD$ 中, $\angle DCO = 30^\circ$, $\angle DOC = 90^\circ$,

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{同理得: } \frac{OB}{OA} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA},$$

$$\because \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{OC}{OD} = \sqrt{3}, \quad \angle CAO = \angle DBO,$$

$$\begin{aligned} \text{在} \triangle AMB \text{ 中, } \angle AMB &= 180^\circ - (\angle MAB + \angle ABM) = 180^\circ - (\angle OAB + \angle ABM + \\ &\angle DBO) = 90^\circ; \end{aligned}$$

(3) 拓展延伸

①点 C 与点 M 重合时, 如图 3, 同理得: $\triangle AOC \sim \triangle BOD$,

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ, \frac{AC}{BD} = \sqrt{3},$$

设 $BD = x$, 则 $AC = \sqrt{3}x$,

Rt $\triangle COD$ 中, $\angle OCD = 30^\circ$, $OD = 1$,

$$\therefore CD = 2, BC = x - 2,$$

Rt $\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = 30^\circ$, $OB = \sqrt{7}$,

$$\therefore AB = 2OB = 2\sqrt{7},$$

在 Rt $\triangle AMB$ 中, 由勾股定理得: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$(\sqrt{3}x)^2 + (x-2)^2 = (2\sqrt{7})^2,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x-3)(x+2) = 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2,$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{3};$$

②点 C 与点 M 重合时, 如图 4, 同理得: $\angle AMB = 90^\circ$, $\frac{AC}{BD} = \sqrt{3}$,

设 $BD = x$, 则 $AC = \sqrt{3}x$,

在 Rt $\triangle AMB$ 中, 由勾股定理得: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$(\sqrt{3}x)^2 + (x+2)^2 = (2\sqrt{7})^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x+3)(x-2) = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 2,$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{3};$$

综上所述，AC 的长为 $3\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.

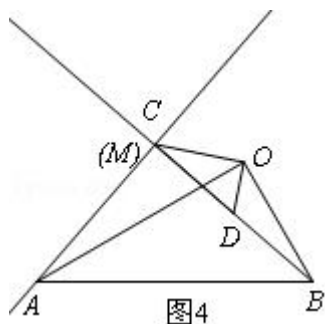


图4

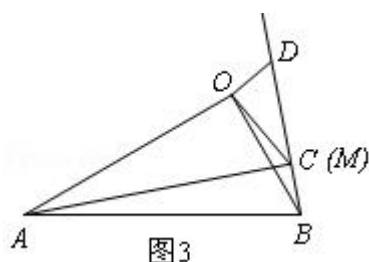


图3

【点评】 本题是三角形的综合题，主要考查了三角形全等和相似的性质和判定，几何变换问题，解题的关键是能得出： $\triangle AOC \sim \triangle BOD$ ，根据相似三角形的性质，并运用类比的思想解决问题，本题是一道比较好的题目.

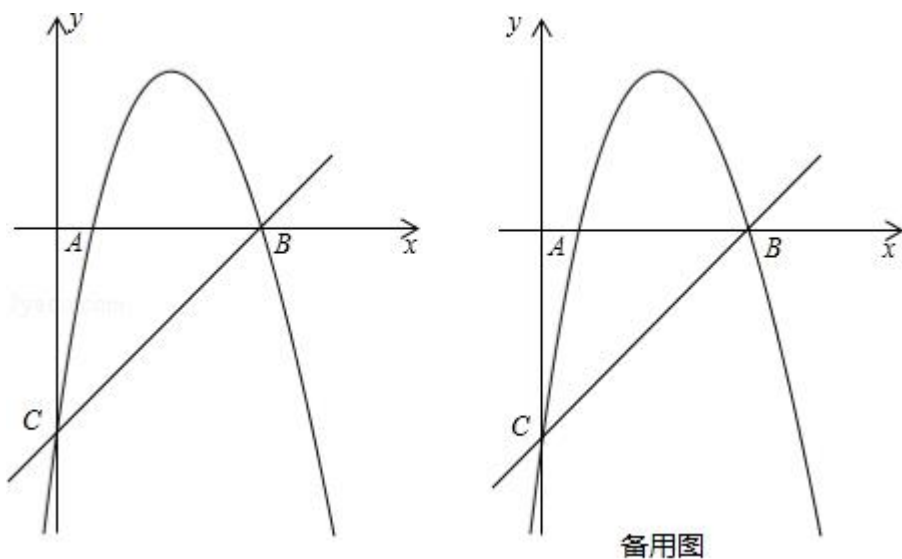
23. (11 分) 如图，抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C. 直线 $y = x - 5$ 经过点 B, C.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 过点 A 的直线交直线 BC 于点 M.

①当 $AM \perp BC$ 时，过抛物线上一动点 P (不与点 B, C 重合)，作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q，若以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 P 的横坐标；

②连接 AC，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍时，请直接写出点 M 的坐标.



【分析】(1) 利用一次函数解析式确定 $C(0, -5)$, $B(5, 0)$, 然后利用待定系数法求抛物线解析式;

(2) ①先解方程 $-x^2+6x-5=0$ 得 $A(1, 0)$, 再判断 $\triangle OCB$ 为等腰直角三角形得到 $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$, 则 $\triangle AMB$ 为等腰直角三角形, 所以 $AM = 2\sqrt{2}$, 接着根据平行四边形的性质得到 $PQ = AM = 2\sqrt{2}$, $PQ \perp BC$, 作 $PD \perp x$ 轴交直线 BC 于 D , 如图 1, 利用 $\angle PDQ = 45^\circ$ 得到 $PD = \sqrt{2}PQ = 4$, 设 $P(m, -m^2+6m-5)$, 则 $D(m, m-5)$, 讨论: 当 P 点在直线 BC 上方时, $PD = -m^2+6m-5 - (m-5) = 4$; 当 P 点在直线 BC 下方时, $PD = m-5 - (-m^2+6m-5)$, 然后分别解方程即可得到 P 点的横坐标;

②作 $AN \perp BC$ 于 N , $NH \perp x$ 轴于 H , 作 AC 的垂直平分线交 BC 于 M_1 , 交 AC 于 E , 如图 2, 利用等腰三角形的性质和三角形外角性质得到 $\angle AM_1B = 2\angle ACB$, 再确定 $N(3, -2)$,

AC 的解析式为 $y=5x-5$, E 点坐标为 $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, 利用两直线垂直的问题可设直线 EM_1 的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x+b$, 把 $E(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ 代入求出 b 得到直线 EM_1

的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5}$, 则解方程组 $\begin{cases} y=x-5 \\ y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5} \end{cases}$ 得 M_1 点的坐标; 作直线 BC

上作点 M_1 关于 N 点的对称点 M_2 , 如图 2, 利用对称性得到 $\angle AM_2C = \angle AM_1B = 2$

$\angle ACB$, 设 $M_2 (x, x - 5)$, 根据中点坐标公式得到 $3 = \frac{\frac{13}{6} + x}{2}$, 然后求出 x 即可得到 M_2 的坐标, 从而得到满足条件的点 M 的坐标.

【解答】 解: (1) 当 $x=0$ 时, $y=x-5=-5$, 则 $C (0, -5)$,

当 $y=0$ 时, $x-5=0$, 解得 $x=5$, 则 $B (5, 0)$,

把 $B (5, 0)$, $C (0, -5)$ 代入 $y=ax^2+6x+c$ 得 $\begin{cases} 25a+30+c=0 \\ c=-5 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 6x - 5$;

(2) ①解方程 $-x^2+6x-5=0$ 得 $x_1=1$, $x_2=5$, 则 $A (1, 0)$,

$\therefore B (5, 0)$, $C (0, -5)$,

$\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$,

$\therefore AM \perp BC$,

$\therefore \triangle AMB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形, $AM \parallel PQ$,

$\therefore PQ = AM = 2\sqrt{2}$, $PQ \perp BC$,

作 $PD \perp x$ 轴交直线 BC 于 D , 如图 1, 则 $\angle PDQ = 45^\circ$,

$\therefore PD = \sqrt{2} PQ = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$,

设 $P (m, -m^2+6m-5)$, 则 $D (m, m-5)$,

当 P 点在直线 BC 上方时,

$PD = -m^2+6m-5 - (m-5) = -m^2+5m = 4$, 解得 $m_1=1$, $m_2=4$,

当 P 点在直线 BC 下方时,

$$PD=m-5-(-m^2+6m-5)=m^2-5m=4, \text{ 解得 } m_1=\frac{5+\sqrt{41}}{2}, m_2=\frac{5-\sqrt{41}}{2},$$

综上所述, P 点的横坐标为 4 或 $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$;

②作 $AN \perp BC$ 于 N, $NH \perp x$ 轴于 H, 作 AC 的垂直平分线交 BC 于 M_1 , 交 AC 于 E, 如图 2,

$$\therefore M_1A=M_1C,$$

$$\therefore \angle ACM_1=\angle CAM_1,$$

$$\therefore \angle AM_1B=2\angle ACB,$$

$\therefore \triangle ANB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AH=BH=NH=2,$$

$$\therefore N(3, -2),$$

易得 AC 的解析式为 $y=5x-5$, E 点坐标为 $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$,

设直线 EM_1 的解析式为 $y=-\frac{1}{5}x+b$,

把 E $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ 代入得 $-\frac{1}{10}+b=-\frac{5}{2}$, 解得 $b=-\frac{12}{5}$,

$$\therefore \text{直线 } EM_1 \text{ 的解析式为 } y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y=x-5 \\ y=-\frac{1}{5}x-\frac{12}{5} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{13}{6} \\ y=-\frac{17}{6} \end{cases}, \text{ 则 } M_1(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6});$$

作直线 BC 上作点 M_1 关于 N 点的对称点 M_2 , 如图 2, 则 $\angle AM_2C=\angle AM_1B=2\angle ACB$,

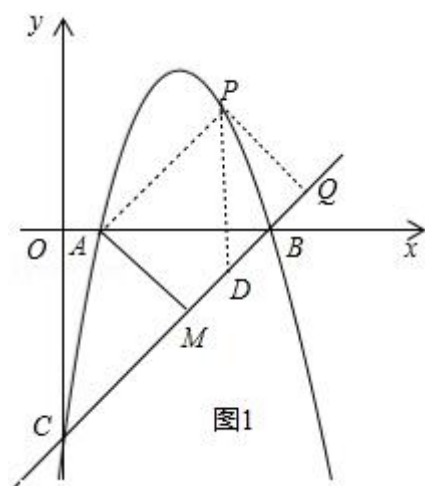
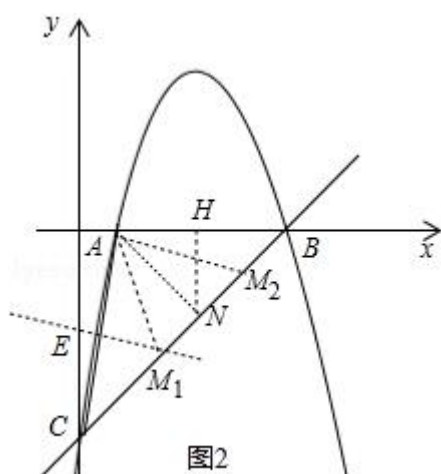
设 $M_2(x, x-5)$,

$$\therefore 3=\frac{\frac{13}{6}+x}{2},$$

$$\therefore x=\frac{23}{6},$$

$$\therefore M_2 \left(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6} \right),$$

综上所述，点 M 的坐标为 $(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6})$ 或 $(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6})$.



【点评】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、等腰直角的判定与性质和平行四边形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；会运用分类讨论的思想解决数学问题.