

2017 年河南省中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

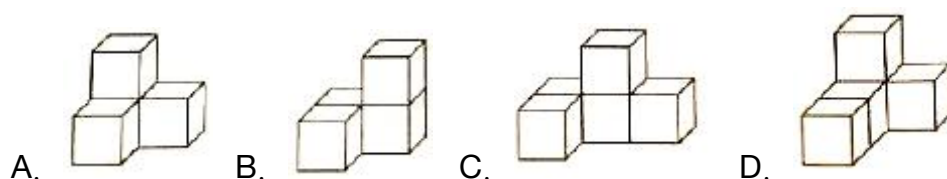
1. (3 分) 下列各数中比 1 大的数是 ()

A. 2 B. 0 C. -1 D. -3

2. (3 分) 2016 年，我国国内生产总值达到 74.4 万亿元，数据“74.4 万亿”用科学记数法表示 ()

A. 74.4×10^{12} B. 7.44×10^{13} C. 74.4×10^{13} D. 7.44×10^{15}

3. (3 分) 某几何体的左视图如图所示，则该几何体不可能是 ()



4. (3 分) 解分式方程 $\frac{1}{x-1} - 2 = \frac{3}{1-x}$ ，去分母得 ()

A. $1 - 2(x-1) = -3$ B. $1 - 2(x-1) = 3$ C. $1 - 2x - 2 = -3$ D. $1 - 2x + 2 = 3$

5. (3 分) 八年级某同学 6 次数学小测验的成绩分别为：80 分，85 分，95 分，95 分，95 分，100 分，则该同学这 6 次成绩的众数和中位数分别是 ()

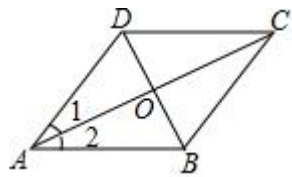
A. 95 分，95 分 B. 95 分，90 分 C. 90 分，95 分 D. 95 分，85 分

6. (3 分) 一元二次方程 $2x^2 - 5x - 2 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根

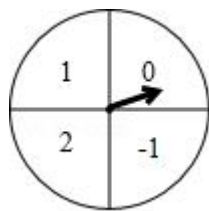
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

7. (3分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 添加下列条件不能判定 $\square ABCD$ 是菱形的只有 ()



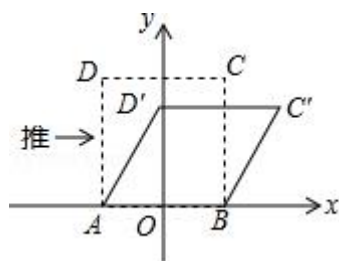
- A. $AC \perp BD$ B. $AB=BC$ C. $AC=BD$ D. $\angle 1=\angle 2$

8. (3分) 如图是一次数学活动可制作的一个转盘, 盘面被等分成四个扇形区域, 并分别标有数字 -1 , 0 , 1 , 2 . 若转动转盘两次, 每次转盘停止后记录指针所指区域的数字 (当指针恰好指在分界线上时, 不记, 重转), 则记录的两个数字都是正数的概率为 ()



- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

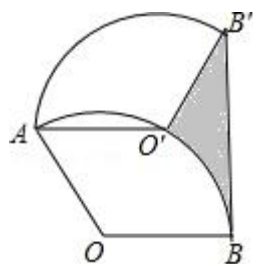
9. (3分) 我们知道: 四边形具有不稳定性. 如图, 在平面直角坐标系中, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上, AB 的中点是坐标原点 O , 固定点 A , B , 把正方形沿箭头方向推, 使点 D 落在 y 轴正半轴上点 D' 处, 则点 C 的对应点 C' 的坐标为 ()



- A. $(\sqrt{3}, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, \sqrt{3})$ D. $(2, \sqrt{3})$

10. (3分) 如图, 将半径为 2, 圆心角为 120° 的扇形 OAB 绕点 A 逆时针旋转

60°, 点 O, B 的对应点分别为 O', B', 连接 BB', 则图中阴影部分的面积是()



- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ C. $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$

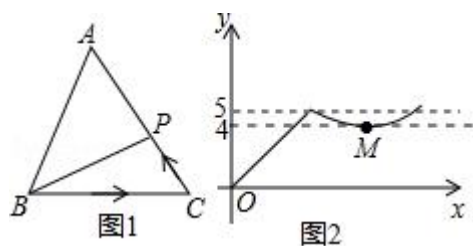
二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3 分) 计算: $2^3 - \sqrt{4} =$ _____.

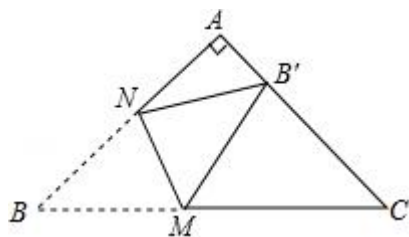
12. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ \frac{x-1}{2} < x \end{cases}$ 的解集是_____.

13. (3 分) 已知点 A (1, m), B (2, n) 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上, 则 m 与 n 的大小关系为_____.

14. (3 分) 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B 出发, 沿 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 匀速运动到点 A, 图 2 是点 P 运动时, 线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中 M 为曲线部分的最低点, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.



15. (3 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, $BC = \sqrt{2} + 1$, 点 M, N 分别是边 BC, AB 上的动点, 沿 MN 所在的直线折叠 $\angle B$, 使点 B 的对应点 B' 始终落在边 AC 上, 若 $\triangle MB'C$ 为直角三角形, 则 BM 的长为_____.



三、解答题（本题共 8 个小题，满分 75 分）

16. (8 分) 先化简，再求值： $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$ ，其中 $x=\sqrt{2}+1$ ， $y=\sqrt{2}-1$ 。

17. (9 分) 为了了解同学们每月零花钱的数额，校园小记者随机调查了本校部分同学，根据调查结果，绘制出了如下两个尚不完整的统计图表。

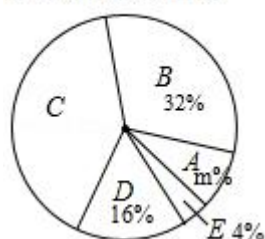
调查结果统计表

组别	分组（单位：元）	人数
A	$0 \leq x < 30$	4
B	$30 \leq x < 60$	16
C	$60 \leq x < 90$	a
D	$90 \leq x < 120$	b
E	$x \geq 120$	2

请根据以上图表，解答下列问题：

- (1) 填空：这次被调查的同学共有_____人， $a+b=_____$ ， $m=_____$ ；
- (2) 求扇形统计图中扇形 C 的圆心角度数；
- (3) 该校共有学生 1000 人，请估计每月零花钱的数额 x 在 $60 \leq x < 120$ 范围的人数。

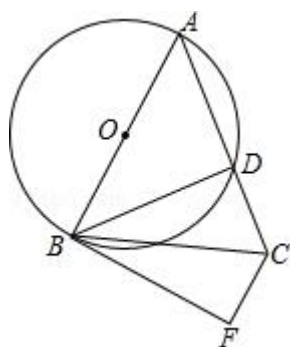
调查结果扇形统计图



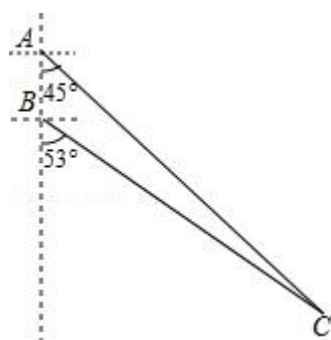
18. (9 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 边于点 D , 过点 C 作 $CF \parallel AB$, 与过点 B 的切线交于点 F , 连接 BD .

(1) 求证: $BD=BF$;

(2) 若 $AB=10$, $CD=4$, 求 BC 的长.



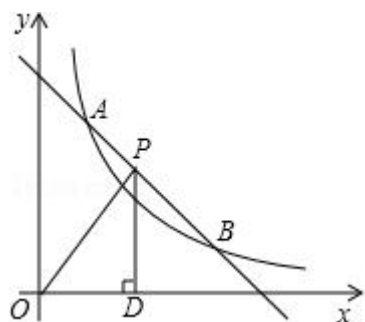
19. (9 分) 如图所示, 我国两艘海监船 A , B 在南海海域巡航, 某一时刻, 两船同时收到指令, 立即前往救援遇险抛锚的渔船 C , 此时, B 船在 A 船的正南方 5 海里处, A 船测得渔船 C 在其南偏东 45° 方向, B 船测得渔船 C 在其南偏东 53° 方向, 已知 A 船的航速为 30 海里/小时, B 船的航速为 25 海里/小时, 问 C 船至少要等待多长时间才能得到救援? (参考数据: $\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 53^\circ \approx \frac{4}{3}$, $\sqrt{2} \approx 1.41$)



20. (9分) 如图, 一次函数 $y = -x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象交于点 A ($m, 3$) 和 B ($3, 1$).

(1) 填空: 一次函数的解析式为_____, 反比例函数的解析式为_____;

(2) 点 P 是线段 AB 上一点, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D, 连接 OP, 若 $\triangle POD$ 的面积为 S, 求 S 的取值范围.



21. (10分) 学校“百变魔方”社团准备购买 A, B 两种魔方, 已知购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元, 购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同.

(1) 求这两种魔方的单价;

(2) 结合社员们的需求, 社团决定购买 A, B 两种魔方共 100 个 (其中 A 种魔方不超过 50 个). 某商店有两种优惠活动, 如图所示. 请根据以上信息, 说明选择哪种优惠活动购买魔方更实惠.



22. (10分) 如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 分别在边

AB, AC 上, $AD=AE$, 连接 DC, 点 M, P, N 分别为 DE, DC, BC 的中点.

(1) 观察猜想

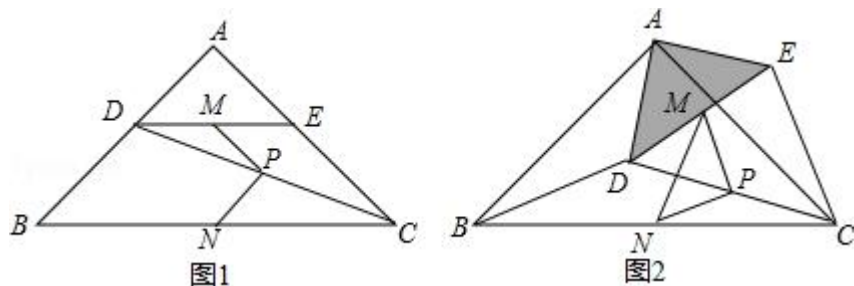
图 1 中, 线段 PM 与 PN 的数量关系是_____, 位置关系是_____;

(2) 探究证明

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针方向旋转到图 2 的位置, 连接 MN, BD, CE, 判断 $\triangle PMN$ 的形状, 并说明理由;

(3) 拓展延伸

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面内自由旋转, 若 $AD=4$, $AB=10$, 请直接写出 $\triangle PMN$ 面积的最大值.



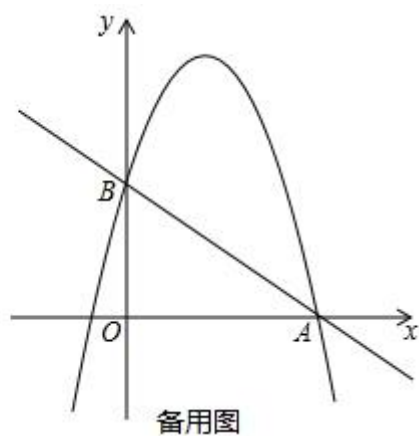
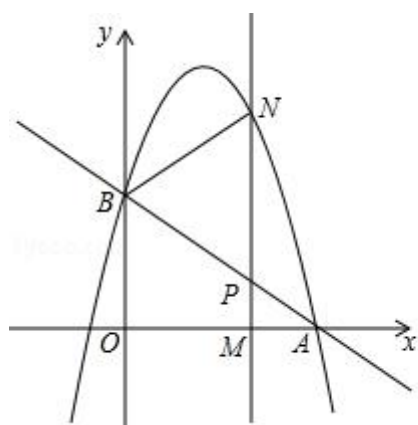
23. (11 分) 如图, 直线 $y = -\frac{2}{3}x + c$ 与 x 轴交于点 A (3, 0), 与 y 轴交于点 B, 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 A, B.

(1) 求点 B 的坐标和抛物线的解析式;

(2) M (m, 0) 为 x 轴上一动点, 过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P, N.

①点 M 在线段 OA 上运动, 若以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似, 求点 M 的坐标;

②点 M 在 x 轴上自由运动, 若三个点 M, P, N 中恰有一点是其它两点所连线段的中点 (三点重合除外), 则称 M, P, N 三点为“共谐点”. 请直接写出使得 M, P, N 三点成为“共谐点”的 m 的值.



备用图

2017 年河南省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2017•河南) 下列各数中比 1 大的数是 ()

A. 2 B. 0 C. -1 D. -3

【考点】18: 有理数大小比较.

【分析】根据正数大于零、零大于负数, 可得答案.

【解答】解: $2 > 0 > -1 > -3$,

故选: A.

【点评】本题考查了有理数大小比较, 利用正数大于零、零大于负数是解题关键.

2. (3 分) (2017•河南) 2016 年, 我国国内生产总值达到 74.4 万亿元, 数据“74.4 万亿”用科学记数法表示 ()

A. 74.4×10^{12} B. 7.44×10^{13} C. 74.4×10^{13} D. 7.44×10^{15}

【考点】11: 科学记数法—表示较大的数.

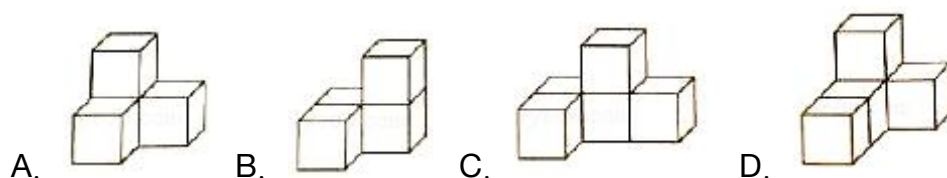
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 74.4 万亿用科学记数法表示为: 7.44×10^{13} .

故选: B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2017•河南) 某几何体的左视图如图所示, 则该几何体不可能是 ()



【考点】U3: 由三视图判断几何体.

【分析】左视图是从左边看到的, 据此求解.

【解答】解: 从左视图可以发现: 该几何体共有两列, 正方体的个数分别为 2, 1,

D 不符合,

故选 D.

【点评】考查了由三视图判断几何体的知识, 解题的关键是了解该几何体的构成, 难度不大.

4. (3 分) (2017•河南) 解分式方程 $\frac{1}{x-1} - 2 = \frac{3}{1-x}$, 去分母得 ()

A. $1 - 2(x - 1) = -3$ B. $1 - 2(x - 1) = 3$ C. $1 - 2x - 2 = -3$ D. $1 - 2x + 2 = 3$

【考点】B3: 解分式方程.

【专题】11 : 计算题; 522: 分式方程及应用.

【分析】分式方程变形后, 两边乘以最简公分母 $x - 1$ 得到结果, 即可作出判断.

【解答】解: 分式方程整理得: $\frac{1}{x-1} - 2 = -\frac{3}{x-1}$,

去分母得: $1 - 2(x - 1) = -3$,

故选 A

【点评】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

5. (3 分) (2017•河南) 八年级某同学 6 次数学小测验的成绩分别为: 80 分, 85 分, 95 分, 95 分, 95 分, 100 分, 则该同学这 6 次成绩的众数和中位数分别是 ()

A. 95 分, 95 分 B. 95 分, 90 分 C. 90 分, 95 分 D. 95 分, 85 分

【考点】W5: 众数; W4: 中位数.

【分析】将题目中的数据按照从小到大排列, 从而可以得到这组数据的众数和中位数, 本题得以解决.

【解答】解: 位于中间位置的两数分别是 95 分和 95 分,
故中位数为 95 分,

数据 95 出现了 3 次, 最多,

故这组数据的众数是 95 分,

故选 A.

【点评】本题考查众数和中位数, 解题的关键是明确众数和中位数的定义, 会找一组数据的众数和中位数.

6. (3 分) (2017•河南) 一元二次方程 $2x^2 - 5x - 2 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】先计算判别式的值, 然后根据判别式的意义判断方程根的情况.

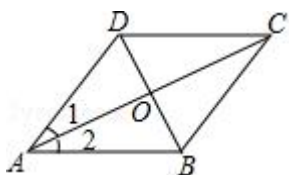
【解答】解: $\because \Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 41 > 0$,

∴方程有两个不相等的实数根.

故选 B.

【点评】 本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

7. (3 分) (2017•河南) 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，添加下列条件不能判定 $\square ABCD$ 是菱形的只有 ()



A. $AC \perp BD$ B. $AB=BC$ C. $AC=BD$ D. $\angle 1 = \angle 2$

【考点】 L9：菱形的判定；L5：平行四边形的性质.

【分析】 根据平行四边形的性质，菱形的判定方法即可一一判断.

【解答】 解：A、正确，对角线相等是平行四边形的菱形.

B、正确，邻边相等的平行四边形是菱形.

C、错误，对角线相等的平行四边形是矩形，不一定是菱形.

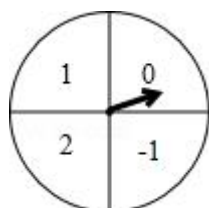
D、正确，可以证明平行四边形 ABCD 的邻边相等，即可判定是菱形.

故选 C.

【点评】 本题考查平行四边形的性质、菱形的判定等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的判定方法.

8. (3 分) (2017•河南) 如图是一次数学活动可制作的一个转盘，盘面被等分成四个扇形区域，并分别标有数字 -1，0，1，2. 若转动转盘两次，每次转盘停

止后记录指针所指区域的数字（当指针恰好指在分界线上时，不记，重转），则记录的两个数字都是正数的概率为（ ）

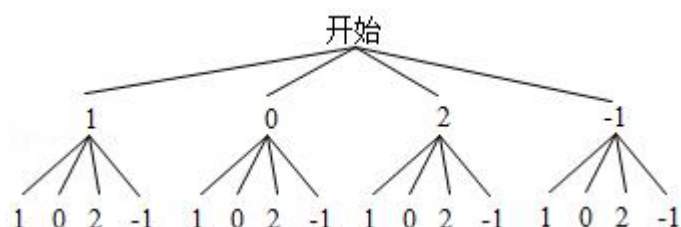


- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】 X6: 列表法与树状图法.

【分析】 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两个数字都是正数的情况数，再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解：画树状图得：



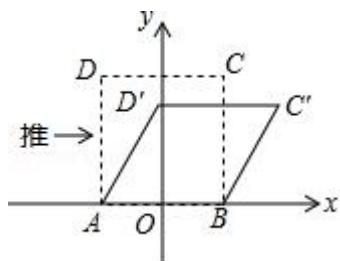
$\therefore$ 共有 16 种等可能的结果，两个数字都是正数的有 4 种情况，

$\therefore$ 两个数字都是正数的概率是： $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

故选：C.

【点评】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件，解题时注意：概率=所求情况数与总情况数之比.

9. (3 分) (2017•河南) 我们知道：四边形具有不稳定性. 如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正方形 ABCD 的边 AB 在 x 轴上，AB 的中点是坐标原点 O，固定点 A，B，把正方形沿箭头方向推，使点 D 落在 y 轴正半轴上点 D' 处，则点 C 的对应点 C' 的坐标为（ ）



- A. $(\sqrt{3}, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, \sqrt{3})$ D. $(2, \sqrt{3})$

【考点】 LE: 正方形的性质; D5: 坐标与图形性质; L1: 多边形.

【分析】 由已知条件得到 $AD'=AD=2$, $AO=\frac{1}{2}AB=1$, 根据勾股定理得到 $OD'=\sqrt{AD'^2-OA^2}=\sqrt{3}$, 于是得到结论.

【解答】 解: $\because AD'=AD=2$,

$$AO=\frac{1}{2}AB=1,$$

$$\therefore OD'=\sqrt{AD'^2-OA^2}=\sqrt{3},$$

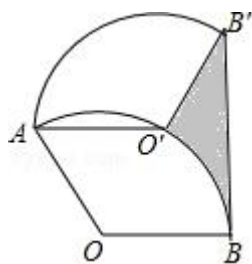
$$\therefore C'D'=2, C'D' \parallel AB,$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3}),$$

故选 D.

【点评】 本题考查了正方形的性质, 坐标与图形的性质, 勾股定理, 正确的识别图形是解题的关键.

10. (3 分) (2017•河南) 如图, 将半径为 2, 圆心角为 120° 的扇形 OAB 绕点 A 逆时针旋转 60° , 点 O, B 的对应点分别为 O' , B' , 连接 BB' , 则图中阴影部分的面积是 ()



A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ C. $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$ D. $4\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

【考点】MO：扇形面积的计算；R2：旋转的性质.

【分析】连接 OO' ， BO' ，根据旋转的想知道的 $\angle OAO'=60^\circ$ ，推出 $\triangle OAO'$ 是等边三角形，得到 $\angle AOO'=60^\circ$ ，推出 $\triangle OO'B$ 是等边三角形，得到 $\angle AO'B=120^\circ$ ，得到 $\angle O'B'B=\angle O'BB'=30^\circ$ ，根据图形的面积公式即可得到结论.

【解答】解：连接 OO' ， BO' ，

$\because$ 将半径为 2，圆心角为 120° 的扇形 OAB 绕点 A 逆时针旋转 60° ，

$$\therefore \angle OAO'=60^\circ,$$

$\therefore \triangle OAO'$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle AOO'=60^\circ,$$

$$\because \angle AOB=120^\circ,$$

$$\therefore \angle O'OB=60^\circ,$$

$\therefore \triangle OO'B$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle AO'B=120^\circ,$$

$$\because \angle AO'B'=120^\circ,$$

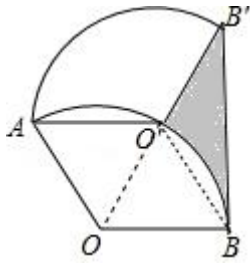
$$\therefore \angle B'O'B=120^\circ,$$

$$\therefore \angle O'B'B=\angle O'BB'=30^\circ,$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积} = S_{\triangle B'O'B} - (S_{\text{扇形 } O'OB} - S_{\triangle OO'B}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3} - \left(\frac{60 \cdot \pi \times 2^2}{360} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

故选 C.



【点评】 本题考查了扇形面积的计算，等边三角形的判定和性质，旋转的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

11. (3 分) (2017•河南) 计算: $2^3 - \sqrt{4} = \underline{6}$.

【考点】 22: 算术平方根; 1E: 有理数的乘方.

【分析】 明确 $\sqrt{4}$ 表示 4 的算术平方根, 值为 2.

【解答】 解: $2^3 - \sqrt{4} = 8 - 2 = 6$,

故答案为: 6.

【点评】 本题主要考查了算术平方根和有理数的乘方的定义, 是一个基础题目, 比较简单.

12. (3 分) (2017•河南) 不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ \frac{x-1}{2} < x \end{cases}$ 的解集是 $\underline{-1 < x \leq 2}$.

【考点】 CB: 解一元一次不等式组.

【分析】 先求出不等式的解集, 再求出不等式组的公共部分,

【解答】 解: $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \textcircled{1} \\ \frac{x-1}{2} < x \textcircled{2} \end{cases}$

解不等式①得: $x \leq 2$,

解不等式②得: $x > -1$,

$\therefore$ 不等式组的解集是 $-1 < x \leq 2$,

故答案为 $-1 < x \leq 2$.

【点评】题考查了解一元一次不等式，解一元一次不等式组的应用，解此题的关键是求出不等式组的解集.

13. (3 分) (2017•河南) 已知点 A (1, m), B (2, n) 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上, 则 m 与 n 的大小关系为 $m < n$.

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】由反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 可知函数的图象在第二、第四象限内, 可以知道在每个象限内, y 随 x 的增大而增大, 根据这个判定则可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 中 $k = -2 < 0$,

$\therefore$ 此函数的图象在二、四象限内, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore 0 < 1 < 2$,

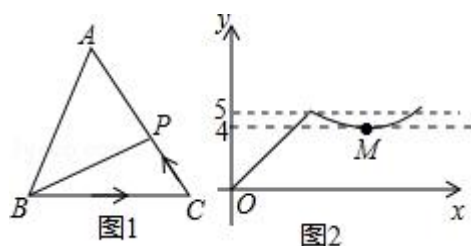
$\therefore$ A、B 两点均在第四象限,

$\therefore m < n$.

故答案为 $m < n$.

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 先根据题意判断出反比例函数图象所在的象限是解答此题的关键.

14. (3 分) (2017•河南) 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B 出发, 沿 $B \rightarrow C \rightarrow A$ 匀速运动到点 A, 图 2 是点 P 运动时, 线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中 M 为曲线部分的最低点, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 12.



【考点】E7：动点问题的函数图象.

【分析】根据图象可知点 P 在 BC 上运动时，此时 BP 不断增大，而从 C 向 A 运动时，BP 先变小后变大，从而可求出 BC 与 AC 的长度.

【解答】解：根据图象可知点 P 在 BC 上运动时，此时 BP 不断增大，

由图象可知：点 P 从 B 先 A 运动时，BP 的最大值为 5，

即 $BC=5$ ，

由于 M 是曲线部分的最低点，

$\therefore$ 此时 BP 最小，

即 $BP \perp AC$ ， $BP=4$ ，

$\therefore$ 由勾股定理可知： $PC=3$ ，

由于图象的曲线部分是轴对称图形，

$\therefore PA=3$ ，

$\therefore AC=6$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为： $\frac{1}{2} \times 4 \times 6=12$

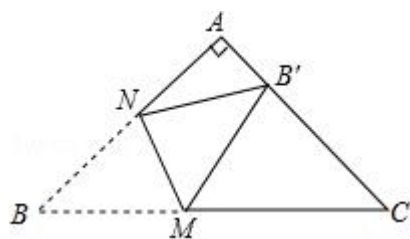
故答案为：12

【点评】本题考查动点问题的函数图象，解题的关键是注意结合图象求出 BC 与 AC 的长度，本题属于中等题型.

15. (3 分) (2017•河南) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $AB=AC$ ， $BC=\sqrt{2}+1$ ，

点 M，N 分别是边 BC，AB 上的动点，沿 MN 所在的直线折叠 $\angle B$ ，使点 B 的

对应点 B' 始终落在边 AC 上, 若 $\triangle MB'C$ 为直角三角形, 则 BM 的长为 $\frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}}$ 或 1.



【考点】 PB: 翻折变换 (折叠问题); KW: 等腰直角三角形.

【分析】 ①如图 1, 当 $\angle B'MC=90^\circ$, B' 与 A 重合, M 是 BC 的中点, 于是得到结论; ②如图 2, 当 $\angle MB'C=90^\circ$, 推出 $\triangle CMB'$ 是等腰直角三角形, 得到 $CM=\sqrt{2}MB'$, 列方程即可得到结论.

【解答】 解: ①如图 1,

当 $\angle B'MC=90^\circ$, B' 与 A 重合, M 是 BC 的中点,

$$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{1}{2}};$$

②如图 2, 当 $\angle MB'C=90^\circ$,

$$\because \angle A=90^\circ, AB=AC,$$

$$\therefore \angle C=45^\circ,$$

$\therefore \triangle CMB'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CM=\sqrt{2}MB',$$

$\because$ 沿 MN 所在的直线折叠 $\angle B$, 使点 B 的对应点 B' ,

$$\therefore BM=B'M,$$

$$\therefore CM=\sqrt{2}BM,$$

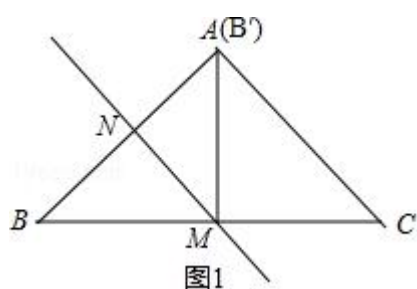
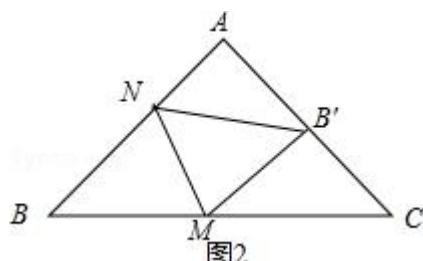
$$\because BC=\sqrt{2}+1,$$

$$\therefore CM+BM=\sqrt{2}BM+BM=\sqrt{2}+1,$$

∴ BM=1,

综上所述, 若 $\triangle MB'C$ 为直角三角形, 则 BM 的长为 $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ 或 1,

故答案为: $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ 或 1.



【点评】 本题考查了翻折变换 – 折叠问题, 等腰直角三角形的性质, 正确的作出图形是解题的关键.

三、解答题 (本题共 8 个小题, 满分 75 分)

16. (8 分) (2017•河南) 先化简, 再求值: $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$, 其中 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$.

【考点】 4J: 整式的混合运算—化简求值.

【专题】 11 : 计算题.

【分析】 首先化简 $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$, 然后把 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ 代入化简后的算式, 求出算式的值是多少即可.

【解答】 解: $(2x+y)^2 + (x-y)(x+y) - 5x(x-y)$
 $= 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - y^2 - 5x^2 + 5xy$
 $= 9xy$

当 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ 时,

$$\text{原式}=9(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

$$=9 \times (2-1)$$

$$=9 \times 1$$

$$=9$$

【点评】此题主要考查了整式的混合运算－化简求值问题，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：先按运算顺序把整式化简，再把对应字母的值代入求整式的值.

17. (9分) (2017•河南) 为了了解同学们每月零花钱的数额，校园小记者随机调查了本校部分同学，根据调查结果，绘制出了如下两个尚不完整的统计图表.

调查结果统计表

组别	分组 (单位: 元)	人数
A	$0 \leq x < 30$	4
B	$30 \leq x < 60$	16
C	$60 \leq x < 90$	a
D	$90 \leq x < 120$	b
E	$x \geq 120$	2

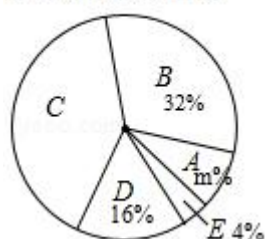
请根据以上图表，解答下列问题:

(1) 填空: 这次被调查的同学共有 50 人, $a+b=$ 28, $m=$ 8;

(2) 求扇形统计图中扇形 C 的圆心角度数;

(3) 该校共有学生 1000 人, 请估计每月零花钱的数额 x 在 $60 \leq x < 120$ 范围的人数.

调查结果扇形统计图



【考点】 VB: 扇形统计图; V5: 用样本估计总体; V7: 频数 (率) 分布表.

【分析】 (1) 根据 B 组的频数是 16, 对应的百分比是 32%, 据此求得调查的总人数, 利用百分比的意义求得 b, 然后求得 a 的值, m 的值;

(2) 利用 360° 乘以对应的比例即可求解;

(3) 利用总人数 1000 乘以对应的比例即可求解.

【解答】 解: (1) 调查的总人数是 $16 \div 32\% = 50$ (人),

则 $b = 50 \times 16\% = 8$, $a = 50 - 4 - 16 - 8 - 2 = 20$,

A 组所占的百分比是 $\frac{4}{50} = 8\%$, 则 $m = 8$.

$a + b = 8 + 20 = 28$.

故答案是: 50, 28, 8;

(2) 扇形统计图中扇形 C 的圆心角度数是 $360^\circ \times \frac{20}{50} = 144^\circ$;

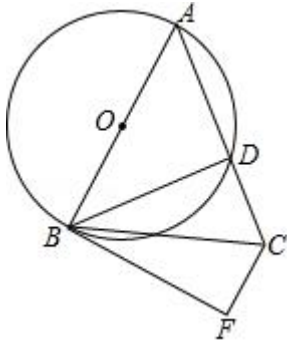
(3) 每月零花钱的数额 x 在 $60 \leq x < 120$ 范围的人数是 $1000 \times \frac{28}{50} = 560$ (人).

【点评】 本题考查了扇形统计图, 观察统计表、扇形统计图获得有效信息是解题关键, 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

18. (9 分) (2017·河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 边于点 D, 过点 C 作 $CF \parallel AB$, 与过点 B 的切线交于点 F, 连接 BD.

(1) 求证: $BD = BF$;

(2) 若 $AB = 10$, $CD = 4$, 求 BC 的长.



【考点】MC：切线的性质；KH：等腰三角形的性质.

【分析】(1) 根据圆周角定理求出 $BD \perp AC$ ， $\angle BDC = 90^\circ$ ，根据切线的性质得出 $AB \perp BF$ ，求出 $\angle ACB = \angle FCB$ ，根据角平分线性质的得出即可；

(2) 求出 $AC = 10$ ， $AD = 6$ ，根据勾股定理求出 BD ，再根据勾股定理求出 BC 即可.

【解答】(1) 证明： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp AC, \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\because BF \text{ 切 } \odot O \text{ 于 } B,$$

$$\therefore AB \perp BF,$$

$$\because CF \parallel AB,$$

$$\therefore CF \perp BF, \angle FCB = \angle ABC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle FCB,$$

$$\because BD \perp AC, BF \perp CF,$$

$$\therefore BD = BF;$$

(2) 解: $\because AB=10, AB=AC,$

$\therefore AC=10,$

$\therefore CD=4,$

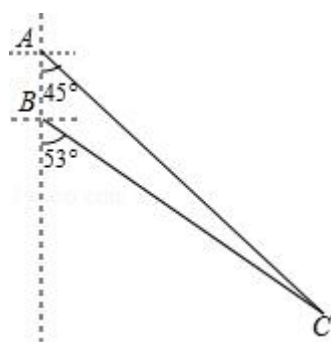
$\therefore AD=10-4=6,$

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, 由勾股定理得: $BD=\sqrt{10^2-6^2}=8,$

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 由勾股定理得: $BC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}.$

【点评】 本题考查了切线的性质, 勾股定理, 角平分线性, 等腰三角形的判定等知识, 能综合运用定理进行推理是解此题的关键.

19. (9 分) (2017•河南) 如图所示, 我国两艘海监船 A, B 在南海海域巡航, 某一时刻, 两船同时收到指令, 立即前往救援遇险抛锚的渔船 C, 此时, B 船在 A 船的正南方向 5 海里处, A 船测得渔船 C 在其南偏东 45° 方向, B 船测得渔船 C 在其南偏东 53° 方向, 已知 A 船的航速为 30 海里/小时, B 船的航速为 25 海里/小时, 问 C 船至少要等待多长时间才能得到救援? (参考数据: $\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 53^\circ \approx \frac{4}{3}$, $\sqrt{2} \approx 1.41$)



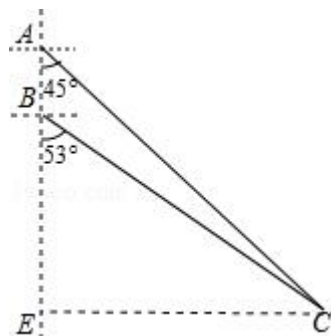
【考点】 TB: 解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【分析】 如图作 $CE \perp AB$ 于 E. 设 $AE=EC=x$, 则 $BE=x-5$, 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中,

根据 $\tan 53^\circ = \frac{EC}{BE}$, 可得 $\frac{4}{3} = \frac{x}{x-5}$, 求出 x , 再求出 BC 、 AC , 分别求出 A、B 两

船到 C 的时间，即可解决问题.

【解答】解：如图作 $CE \perp AB$ 于 E.



在 $Rt\triangle ACE$ 中， $\because \angle A=45^\circ$,

$\therefore AE=EC$ ，设 $AE=EC=x$ ，则 $BE=x-5$,

在 $Rt\triangle BCE$ 中，

$$\therefore \tan 53^\circ = \frac{EC}{BE},$$

$$\therefore \frac{4-x}{x-5} = \tan 53^\circ,$$

解得 $x=20$,

$\therefore AE=EC=20$,

$\therefore AC=20\sqrt{2}=28.2$,

$$BC = \frac{EC}{\sin 53^\circ} = 25,$$

$\therefore$ A 船到 C 的时间 $\approx \frac{28.2}{30} = 0.94$ 小时，B 船到 C 的时间 $= \frac{25}{25} = 1$ 小时，

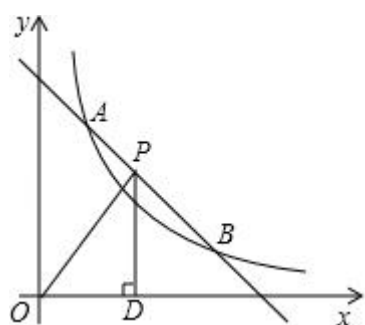
$\therefore$ C 船至少要等待 0.94 小时才能得到救援.

【点评】 本题考查解直角三角形的应用－方向角问题、锐角三角函数、速度、时间、路程之间的关系等知识，解题的关键是学会构建方程解决问题，属于中考常考题型.

20. (9分) (2017•河南) 如图, 一次函数 $y = -x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象交于点 A ($m, 3$) 和 B ($3, 1$).

(1) 填空: 一次函数的解析式为 $y = -x + 4$, 反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$;

(2) 点 P 是线段 AB 上一点, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D, 连接 OP, 若 $\triangle POD$ 的面积为 S, 求 S 的取值范围.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 先将 B ($3, 1$) 代入反比例函数即可求出 k 的值, 然后将 A 代入反比例函数即可求出 m 的, 再根据 B 两点的坐标即可求出一次函数的解析式.

(2) 设 P 的坐标为 (x, y), 由于点 P 在直线 AB 上, 从而可知 $PD = y$, $OD = x$, 由题意可知: $1 \leq x \leq 3$, 从而可求出 S 的范围

【解答】 解: (1) 将 B ($3, 1$) 代入 $y = \frac{k}{x}$,

$$\therefore k = 3,$$

将 A ($m, 3$) 代入 $y = \frac{3}{x}$,

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore A (1, 3),$$

将 A ($1, 3$) 代入 $y = -x + b$,

$$\therefore b=4,$$

$$\therefore y = -x + 4$$

(2) 设 $P(x, y)$,

由 (1) 可知: $1 \leq x \leq 3$,

$$\therefore PD = y = -x + 4, OD = x,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}x(-x + 4),$$

$\therefore$ 由二次函数的图象可知:

$$S \text{ 的取值范围为: } \frac{3}{2} \leq S \leq 2$$

故答案为: (1) $y = -x + 4$; $y = \frac{3}{x}$.

【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的综合问题, 解题的关键是求出一次函数与反比例函数的解析式, 本题属于中等题型.

21. (10 分) (2017·河南) 学校“百变魔方”社团准备购买 A, B 两种魔方, 已知购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元, 购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同.

(1) 求这两种魔方的单价;

(2) 结合社员们的需求, 社团决定购买 A, B 两种魔方共 100 个 (其中 A 种魔方不超过 50 个). 某商店有两种优惠活动, 如图所示. 请根据以上信息, 说明选择哪种优惠活动购买魔方更实惠.



【考点】9A: 二元一次方程组的应用.

【分析】(1) 设 A 种魔方的单价为 x 元/个, B 种魔方的单价为 y 元/个, 根据“购买 2 个 A 种魔方和 6 个 B 种魔方共需 130 元, 购买 3 个 A 种魔方和 4 个 B 种魔方所需款数相同”, 即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组, 解之即可得出结论;

(2) 设购进 A 种魔方 m 个 ($0 \leq m \leq 50$), 总价格为 w 元, 则购进 B 种魔方 $(100 - m)$ 个, 根据两种活动方案即可得出 $w_{\text{活动一}}$ 、 $w_{\text{活动二}}$ 关于 m 的函数关系式, 再分别令 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 、 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 和 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$, 解出 m 的取值范围, 此题得解.

【解答】解: (1) 设 A 种魔方的单价为 x 元/个, B 种魔方的单价为 y 元/个,

根据题意得:
$$\begin{cases} 2x + 6y = 130 \\ 3x = 4y \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases}.$$

答: A 种魔方的单价为 20 元/个, B 种魔方的单价为 15 元/个.

(2) 设购进 A 种魔方 m 个 ($0 \leq m \leq 50$), 总价格为 w 元, 则购进 B 种魔方 $(100 - m)$ 个,

根据题意得: $w_{\text{活动一}} = 20m \times 0.8 + 15(100 - m) \times 0.4 = 10m + 600$;

$w_{\text{活动二}} = 20m + 15(100 - m - m) = -10m + 1500$.

当 $w_{\text{活动一}} < w_{\text{活动二}}$ 时, 有 $10m+600 < -10m+1500$,

解得: $m < 45$;

当 $w_{\text{活动一}} = w_{\text{活动二}}$ 时, 有 $10m+600 = -10m+1500$,

解得: $m=45$;

当 $w_{\text{活动一}} > w_{\text{活动二}}$ 时, 有 $10m+600 > -10m+1500$,

解得: $45 < m \leq 50$.

综上所述: 当 $m < 45$ 时, 选择活动一购买魔方更实惠; 当 $m=45$ 时, 选择两种活动费用相同; 当 $m > 45$ 时, 选择活动二购买魔方更实惠.

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用、一次函数的应用、解一元一次不等式以及解一元一次方程, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 列出关于 x 、 y 的二元一次方程组; (2) 根据两种活动方案找出 $w_{\text{活动一}}$ 、 $w_{\text{活动二}}$ 关于 m 的函数关系式.

22. (10 分) (2017·河南) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AB=AC$, 点 D , E 分别在边 AB , AC 上, $AD=AE$, 连接 DC , 点 M , P , N 分别为 DE , DC , BC 的中点.

(1) 观察猜想

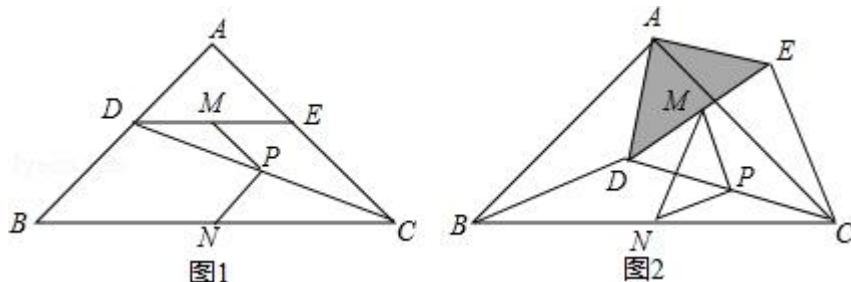
图 1 中, 线段 PM 与 PN 的数量关系是 $PM=PN$, 位置关系是 $PM \perp PN$;

(2) 探究证明

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针方向旋转到图 2 的位置, 连接 MN , BD , CE , 判断 $\triangle PMN$ 的形状, 并说明理由;

(3) 拓展延伸

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面内自由旋转，若 $AD=4$ ， $AB=10$ ，请直接写出 $\triangle PMN$ 面积的最大值.



【考点】RB: 几何变换综合题.

【分析】(1) 利用三角形的中位线得出 $PM=\frac{1}{2}CE$, $PN=\frac{1}{2}BD$, 进而判断出 $BD=CE$, 即可得出结论, 另为利用三角形的中位线得出平行线即可得出结论;

(2) 先判断出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 得出 $BD=CE$, 同 (1) 的方法得出 $PM=\frac{1}{2}BD$, $PN=\frac{1}{2}BD$, 即可得出 $PM=PN$, 同 (1) 的方法即可得出结论;

(3) 先判断出 MN 最大时, $\triangle PMN$ 的面积最大, 进而求出 AN , AM , 即可得出 MN 最大 $=AM+AN$, 最后用面积公式即可得出结论.

【解答】解: (1) $\because$ 点 P , N 是 BC , CD 的中点,

$$\therefore PN \parallel BD, PN = \frac{1}{2}BD,$$

$\because$ 点 P , M 是 CD , DE 的中点,

$$\therefore PM \parallel CE, PM = \frac{1}{2}CE,$$

$\because AB=AC$, $AD=AE$,

$$\therefore BD=CE,$$

$$\therefore PM=PN,$$

$$\because PN \parallel BD,$$

$$\therefore \angle DPN = \angle ADC,$$

$$\because PM \parallel CE,$$

$$\therefore \angle DPM = \angle DCA,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCA + \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore PM \perp PN,$$

故答案为: $PM = PN$, $PM \perp PN$,

(2) 由旋转知, $\angle BAD = \angle CAE$,

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE, BD = CE,$$

同 (1) 的方法, 利用三角形的中位线得, $PN = \frac{1}{2}BD$, $PM = \frac{1}{2}CE$,

$$\therefore PM = PN,$$

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰三角形,

同 (1) 的方法得, $PM \parallel CE$,

$$\therefore \angle DPM = \angle DCE,$$

同 (1) 的方法得, $PN \parallel BD$,

$$\therefore \angle PNC = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DPN = \angle DCB + \angle PNC = \angle DCB + \angle DBC,$$

$$\therefore \angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCE + \angle DCB + \angle DBC$$

$$= \angle BCE + \angle DBC = \angle ACB + \angle ACE + \angle DBC$$

$$= \angle ACB + \angle ABD + \angle DBC = \angle ACB + \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAC=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle ACB+\angle ABC=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle MPN=90^{\circ},$$

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰直角三角形,

(3) 如图 2, 同 (2) 的方法得, $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形,

$\therefore MN$ 最大时, $\triangle PMN$ 的面积最大,

$\therefore DE \parallel BC$ 且 DE 在顶点 A 上面,

$\therefore MN$ 最大 $= AM + AN$,

连接 AM , AN ,

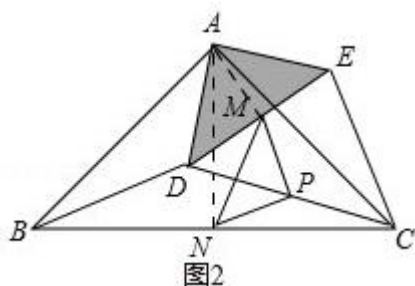
在 $\triangle ADE$ 中, $AD=AE=4$, $\angle DAE=90^{\circ}$,

$$\therefore AM=2\sqrt{2},$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $AN=5\sqrt{2}$,

$$\therefore MN_{\text{最大}}=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=7\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PMN_{\text{最大}}}=\frac{1}{2}PM^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MN^2=\frac{1}{4}\times(7\sqrt{2})^2=\frac{49}{2}.$$



【点评】此题是几何变换综合题, 主要考查了三角形的中位线定理, 等腰直角三角形的判定和性质, 全等三角形的判断和性质, 直角三角形的性质, 解 (1) 的关键是判断出 $PM=\frac{1}{2}CE$, $PN=\frac{1}{2}BD$, 解 (2) 的关键是判断出 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$, 解 (3) 的关键是判断出 MN 最大时, $\triangle PMN$ 的面积最大, 是一道基础题目.

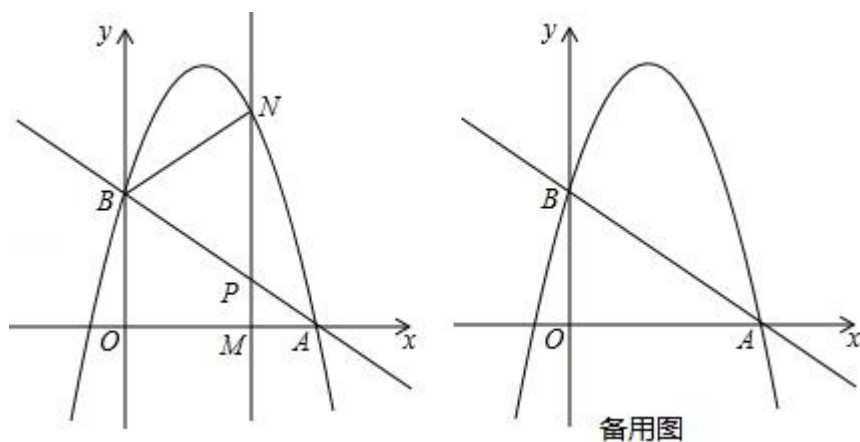
23. (11 分) (2017·河南) 如图, 直线 $y = -\frac{2}{3}x + c$ 与 x 轴交于点 $A(3, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 A, B .

(1) 求点 B 的坐标和抛物线的解析式;

(2) $M(m, 0)$ 为 x 轴上一动点, 过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P, N .

①点 M 在线段 OA 上运动, 若以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似, 求点 M 的坐标;

②点 M 在 x 轴上自由运动, 若三个点 M, P, N 中恰有一点是其它两点所连线段的中点 (三点重合除外), 则称 M, P, N 三点为“共谐点”. 请直接写出使得 M, P, N 三点成为“共谐点”的 m 的值.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 把 A 点坐标代入直线解析式可求得 c , 则可求得 B 点坐标, 由 A, B 的坐标, 利用待定系数法可求得抛物线解析式;

(2) ①由 M 点坐标可表示 P, N 的坐标, 从而可表示出 MA, MP, PN, PB 的长, 分 $\angle NBP = 90^\circ$ 和 $\angle BNP = 90^\circ$ 两种情况, 分别利用相似三角形的性质可得到关于 m 的方程, 可求得 m 的值;

②用 m 可表示出 M 、 P 、 N 的坐标，由题意可知有 P 为线段 MN 的中点、 M 为线段 PN 的中点或 N 为线段 PM 的中点，可分别得到关于 m 的方程，可求得 m 的值.

【解答】解：

$$(1) \because y = -\frac{2}{3}x + c \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } A(3, 0), \text{ 与 } y \text{ 轴交于点 } B,$$

$$\therefore 0 = -2 + c, \text{ 解得 } c = 2,$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\because \text{抛物线 } y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c \text{ 经过点 } A, B,$$

$$\therefore \begin{cases} -12 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = \frac{10}{3} \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2;$$

$$(2) \text{ ①由 (1) 可知直线解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + 2,$$

$\therefore M(m, 0)$ 为 x 轴上一动点，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P 、 N ,

$$\therefore P(m, -\frac{2}{3}m + 2), N(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2),$$

$$\therefore PM = -\frac{2}{3}m + 2, PA = 3 - m, PN = -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2 - (-\frac{2}{3}m + 2) = -\frac{4}{3}m^2 + 4m,$$

$$\therefore \triangle BPN \text{ 和 } \triangle APM \text{ 相似, 且 } \angle BPN = \angle APM,$$

$$\therefore \angle BNP = \angle AMP = 90^\circ \text{ 或 } \angle NBP = \angle AMP = 90^\circ,$$

当 $\angle BNP = 90^\circ$ 时，则有 $BN \perp MN$,

$$\therefore BN = OM = m,$$

$$\therefore \frac{BN}{AM} = \frac{PN}{PM}, \text{ 即 } \frac{m}{3-m} = \frac{-\frac{4}{3}m^2 + 4m}{-\frac{2}{3}m + 2}, \text{ 解得 } m = 0 \text{ (舍去) 或 } m = 2,$$

$$\therefore M(2, 0);$$

当 $\angle NBP=90^\circ$ 时, 则有 $\frac{PN}{PA}=\frac{BP}{MP}$,

$$\therefore A(3, 0), B(0, 2), P(m, -\frac{2}{3}m+2),$$

$$\therefore BP=\sqrt{m^2+(-\frac{2}{3}m+2-2)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}m, AP=\sqrt{(m-3)^2+(-\frac{2}{3}m+2)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}(3-m),$$

$$\therefore \frac{-\frac{4}{3}m^2+4m}{\frac{\sqrt{13}}{3}(3-m)}=\frac{\frac{\sqrt{13}}{3}m}{-\frac{2}{3}m+2}, \text{ 解得 } m=0 \text{ (舍去) 或 } m=\frac{11}{8},$$

$$\therefore M(\frac{11}{8}, 0);$$

综上可知当以 B, P, N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似时, 点 M 的坐标为 (2, 0) 或 $(\frac{11}{8}, 0)$;

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 可知 } M(m, 0), P(m, -\frac{2}{3}m+2), N(m, -\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2),$$

$\therefore M, P, N$ 三点为“共谐点”,

$\therefore$ 有 P 为线段 MN 的中点、M 为线段 PN 的中点或 N 为线段 PM 的中点,

当 P 为线段 MN 的中点时, 则有 $2(-\frac{2}{3}m+2)=-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2$, 解得 $m=3$ (三点重合, 舍去) 或 $m=-\frac{1}{2}$;

当 M 为线段 PN 的中点时, 则有 $-\frac{2}{3}m+2+(-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)=0$, 解得 $m=3$ (舍去) 或 $m=-1$;

当 N 为线段 PM 的中点时, 则有 $-\frac{2}{3}m+2=2(-\frac{4}{3}m^2+\frac{10}{3}m+2)$, 解得 $m=3$ (舍去) 或 $m=-\frac{1}{4}$;

综上可知当 M, P, N 三点成为“共谐点”时 m 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 -1 或 $-\frac{1}{4}$.

【点评】 本题为二次函数的综合应用, 涉及待定系数法、函数图象的交点、相似三角形的判定和性质、勾股定理、线段的中点、方程思想及分类讨论思想等知识. 在 (1) 中注意待定系数法的应用, 在 (2) ①中利用相似三角形的性质得

到关于 m 的方程是解题的关键，注意分两种情况，在 (2) ②中利用“共谐点”的定义得到 m 的方程是解题的关键，注意分情况讨论. 本题考查知识点较多，综合性较强，分情况讨论比较多，难度较大.