

# 2014 年河南省中考数学试卷

## 一、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. (3 分) (2014•河南) 下列各数中, 最小的数是 ( )

A 0

B  $\frac{1}{3}$

C  $-\frac{1}{3}$

D -3

2. (3 分) (2014•河南) 据统计, 2013 年河南省旅游业总收入达到约 3875.5 亿元. 若将 3875.5 亿用科学记数法表示为  $3.8755 \times 10^n$ , 则 n 等于 ( )

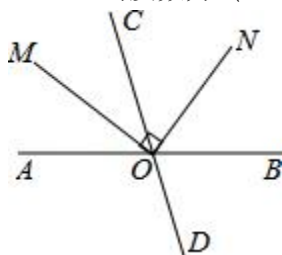
A 10

B 11

C 12

D 13

3. (3 分) (2014•河南) 如图, 直线 AB, CD 相交于点 O, 射线 OM 平分  $\angle AOC$ ,  $ON \perp OM$ , 若  $\angle AOM = 35^\circ$ , 则  $\angle CON$  的度数为 ( )



A  $35^\circ$

B  $45^\circ$

C  $55^\circ$

D  $65^\circ$

4. (3 分) (2014•河南) 下列各式计算正确的是 ( )

A  $a+2a=3a^2$

B  $(-a^3)^2=a^6$

C  $a^3 \cdot a^2=a^6$

D  $(a+b)^2=a^2+b^2$

5. (3 分) (2014•河南) 下列说法中, 正确的是 ( )

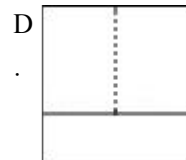
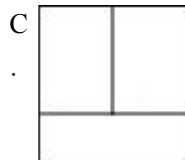
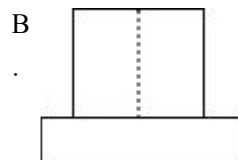
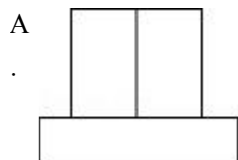
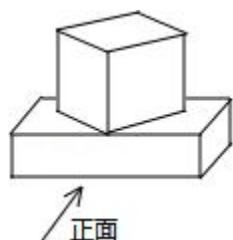
A “打开电视, 正在播放河南新闻节目”是必然事件

B 某种彩票中奖概率为 10%是指买十张一定有一张中奖

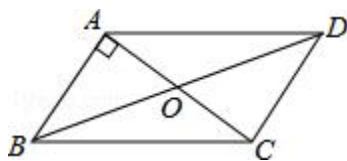
C 神舟飞船反射前需要对零部件进行抽样调查

D 了解某种节能灯的使用寿命适合抽样调查

6. (3 分) (2014•河南) 将两个长方体如图放置, 则所构成的几何体的左视图可能是 ( )



7. (3分) (2014•河南) 如图,  $\square ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ,  $AB \perp AC$ , 若  $AB=4$ ,  $AC=6$ , 则  $BD$  的长是 ( )



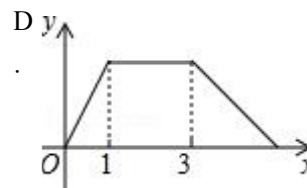
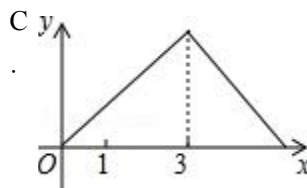
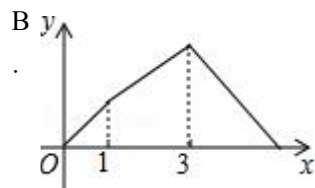
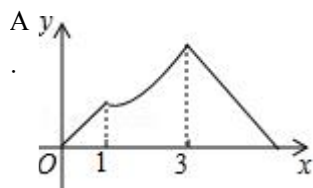
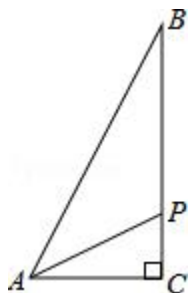
A 8

B 9

C 10

D 11

8. (3分) (2014•河南) 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $AC=1cm$ ,  $BC=2cm$ , 点  $P$  从点  $A$  出发, 以  $1cm/s$  的速度沿折线  $AC \rightarrow CB \rightarrow BA$  运动, 最终回到点  $A$ , 设点  $P$  的运动时间为  $x$  (s), 线段  $AP$  的长度为  $y$  (cm), 则能够反映  $y$  与  $x$  之间函数关系的图象大致是 ( )



## 二、填空题 (每小题 3 分, 共 21 分)

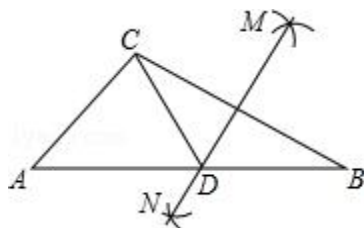
9. (3分) (2014•河南) 计算:  $\sqrt[3]{27} - |-2| =$  \_\_\_\_\_.

10. (3分) (2014•河南) 不等式组  $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 4-2x > 0 \end{cases}$  的所有整数解的和为 \_\_\_\_\_.

11. (3分) (2014•河南) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 按以下步骤作图:

①分别以  $B$ ,  $C$  为圆心, 以大于  $\frac{1}{2}BC$  的长为半径作弧, 两弧相交于  $M$ ,  $N$  两点;

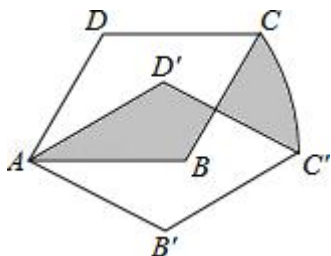
②作直线  $MN$  交  $AB$  于点  $D$ , 连接  $CD$ , 若  $CD=AC$ ,  $\angle B=25^\circ$ , 则  $\angle ACB$  的度数为 \_\_\_\_\_.



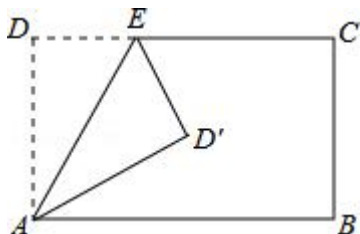
12. (3分) (2014•河南) 已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴交于  $A$ ,  $B$  两点, 若点  $A$  的坐标为  $(-2, 0)$ , 抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 则线段  $AB$  的长为 \_\_\_\_\_.

13. (3分) (2014•河南) 一个不透明的袋子中装有一定颜色不同的2个红球和2个白球, 两个人依次从袋子中随机摸出一个小球不放回, 则第一个人摸到红球且第二个人摸到白球的概率是\_\_\_\_\_.

14. (3分) (2014•河南) 如图, 在菱形ABCD中,  $AB=1$ ,  $\angle DAB=60^\circ$ , 把菱形ABCD绕点A顺时针旋转 $30^\circ$ 得到菱形 $AB'C'D'$ , 其中点C的运动路径为 $\widehat{CC'}$ , 则图中阴影部分的面积为\_\_\_\_\_.



15. (3分) (2014•河南) 如图矩形ABCD中,  $AD=5$ ,  $AB=7$ , 点E为DC上一个动点, 把 $\triangle ADE$ 沿AE折叠, 当点D的对应点 $D'$ 落在 $\angle ABC$ 的角平分线上时, DE的长为\_\_\_\_\_.



### 三、解答题 (本大题共8小题, 满分75分)

16. (8分) (2014•河南) 先化简, 再求值:  $\frac{x^2-1}{x^2-x} + (2+\frac{x^2+1}{x})$ , 其中  $x=\sqrt{2}-1$ .

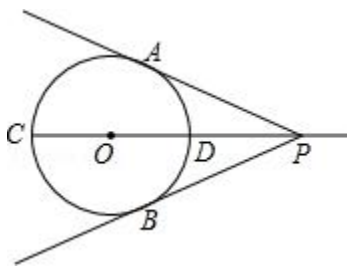
17. (9分) (2014•河南) 如图, CD是 $\odot O$ 的直径, 且 $CD=2\text{cm}$ , 点P为CD的延长线上一点, 过点P作 $\odot O$ 的切线PA, PB, 切点分别为点A, B.

(1) 连接AC, 若 $\angle APO=30^\circ$ , 试证明 $\triangle ACP$ 是等腰三角形;

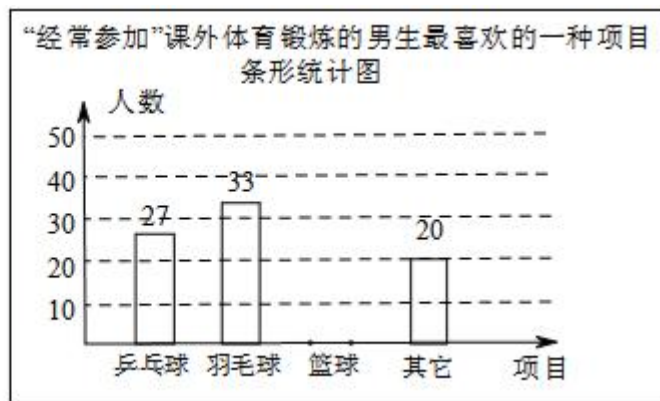
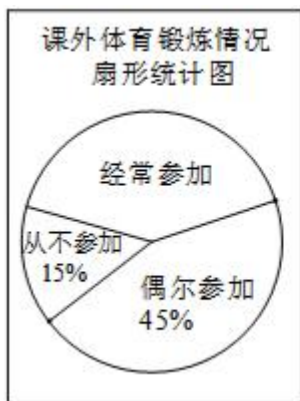
(2) 填空:

①当 $DP=$ \_\_\_\_\_cm时, 四边形AOBD是菱形;

②当 $DP=$ \_\_\_\_\_cm时, 四边形AOBD是正方形.



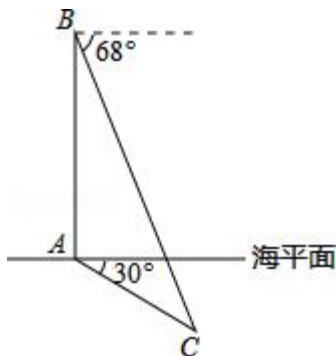
18. (9分) (2014•河南) 某兴趣小组为了了解本校男生参加课外体育锻炼情况, 随机抽取本校300名男生进行了问卷调查, 统计整理并绘制了如下两幅尚不完整的统计图.



请根据以上信息解答下列问题:

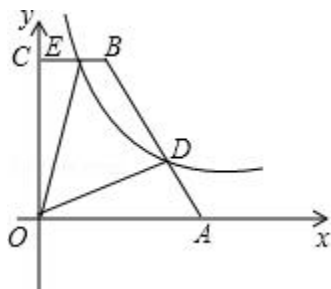
- (1) 课外体育锻炼情况扇形统计图中, “经常参加”所对应的圆心角的度数为\_\_\_\_\_;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 该校共有 1200 名男生, 请估计全校男生中经常参加课外体育锻炼并且最喜欢的项目是篮球的人数;
- (4) 小明认为“全校所有男生中, 课外最喜欢参加的运动项目是乒乓球的人数约为  $1200 \times \frac{27}{300} = 108$ ”, 请你判断这种说法是否正确, 并说明理由.

19. (9 分) (2014•河南) 在中俄“海上联合-2014”反潜演习中, 我军舰 A 测得潜艇 C 的俯角为  $30^\circ$ , 位于军舰 A 正上方 1000 米的反潜直升机 B 测得潜艇 C 的俯角为  $68^\circ$ , 试根据以上数据求出潜艇 C 离开海平面的下潜深度. (结果保留整数, 参考数据:  $\sin 68^\circ \approx 0.9$ ,  $\cos 68^\circ \approx 0.4$ ,  $\tan 68^\circ \approx 2.5$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.7$ )



20. (9 分) (2014•河南) 如图, 在直角梯形 OABC 中,  $BC \parallel AO$ ,  $\angle AOC = 90^\circ$ , 点 A, B 的坐标分别为 (5, 0), (2, 6), 点 D 为 AB 上一点, 且  $BD = 2AD$ , 双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ) 经过点 D, 交 BC 于点 E.

- (1) 求双曲线的解析式;
- (2) 求四边形 ODBE 的面积.



21. (10 分) (2014•河南) 某商店销售 10 台 A 型和 20 台 B 型电脑的利润为 4000 元, 销售 20 台 A 型和 10 台 B 型电脑的利润为 3500 元.

- (1) 求每台 A 型电脑和 B 型电脑的销售利润;

(2) 该商店计划一次购进两种型号的电脑共 100 台, 其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的 2 倍, 设购进 A 型电脑  $x$  台, 这 100 台电脑的销售总利润为  $y$  元.

①求  $y$  关于  $x$  的函数关系式;

②该商店购进 A 型、B 型电脑各多少台, 才能使销售总利润最大?

(3) 实际进货时, 厂家对 A 型电脑出厂价下调  $m$  ( $0 < m < 100$ ) 元, 且限定商店最多购进 A 型电脑 70 台, 若商店保持同种电脑的售价不变, 请你根据以上信息及 (2) 中条件, 设计出使这 100 台电脑销售总利润最大的进货方案.

22. (10 分) (2014·河南) (1) 问题发现

如图 1,  $\triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等边三角形, 点 A, D, E 在同一直线上, 连接 BE.

填空:

①  $\angle AEB$  的度数为\_\_\_\_\_;

② 线段 AD, BE 之间的数量关系为\_\_\_\_\_.

(2) 拓展探究

如图 2,  $\triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ , 点 A, D, E 在同一直线上, CM 为  $\triangle DCE$  中 DE 边上的高, 连接 BE, 请判断  $\angle AEB$  的度数及线段 CM, AE, BE 之间的数量关系, 并说明理由.

(3) 解决问题

如图 3, 在正方形 ABCD 中,  $CD = \sqrt{2}$ , 若点 P 满足  $PD = 1$ , 且  $\angle BPD = 90^\circ$ , 请直接写出点 A 到 BP 的距离.

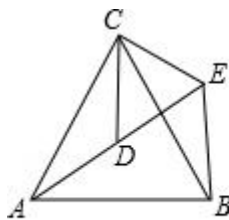


图1

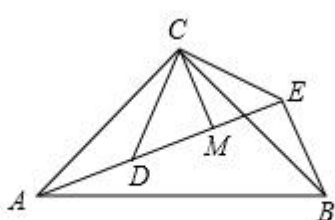


图2

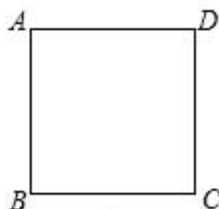


图3

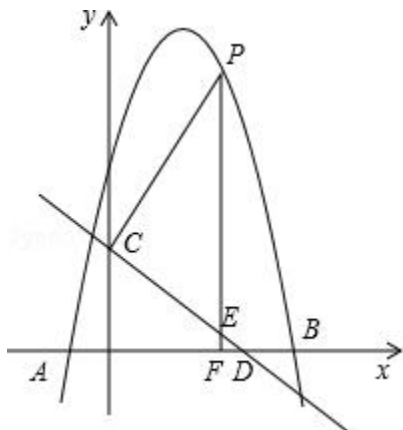
23. (11 分) (2014·河南) 如图, 抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点 A  $(-1, 0)$ , B  $(5, 0)$  两点, 直线  $y = -\frac{3}{4}x + 3$

与  $y$  轴交于点 C, 与  $x$  轴交于点 D. 点 P 是  $x$  轴上方的抛物线上一动点, 过点 P 作  $PF \perp x$  轴于点 F, 交直线 CD 于点 E. 设点 P 的横坐标为  $m$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若  $PE = 5EF$ , 求  $m$  的值;

(3) 若点  $E'$  是点 E 关于直线 PC 的对称点, 是否存在点 P, 使点  $E'$  落在  $y$  轴上? 若存在, 请直接写出相应的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



## 2014 年河南省中考数学试卷

## 参考答案与试题解析

## 一、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. (3 分) (2014•河南) 下列各数中, 最小的数是 ( )

- A 0                                      B  $\frac{1}{3}$                                       C  $-\frac{1}{3}$                                       D -3

考点: 有理数大小比较.

分析: 根据正数大于 0, 0 大于负数, 可得答案.

解答: 解:  $-3 < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3}$ ,

故选: D.

点评: 本题考查了有理数比较大小, 正数大于 0, 0 大于负数是解题关键.

2. (3 分) (2014•河南) 据统计, 2013 年河南省旅游业总收入达到约 3875.5 亿元. 若将 3875.5 亿用科学记数法表示为  $3.8755 \times 10^n$ , 则 n 等于 ( )

- A 10                                      B 11                                      C 12                                      D 13

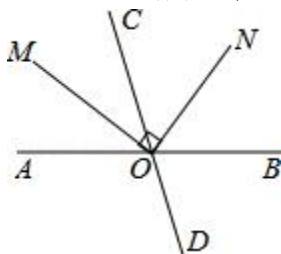
考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ , n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 1$  时, n 是正数; 当原数的绝对值  $< 1$  时, n 是负数.

解答: 解: 3875.5 亿 = 3875 5000 0000 =  $3.8755 \times 10^{11}$ ,

故选: B.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ , n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2014•河南) 如图, 直线 AB, CD 相交于点 O, 射线 OM 平分  $\angle AOC$ ,  $ON \perp OM$ , 若  $\angle AOM = 35^\circ$ , 则  $\angle CON$  的度数为 ( )

- A  $35^\circ$                                       B  $45^\circ$                                       C  $55^\circ$                                       D  $65^\circ$

考点: 垂线; 对顶角、邻补角.

分析: 由射线 OM 平分  $\angle AOC$ ,  $\angle AOM = 35^\circ$ , 得出  $\angle MOC = 35^\circ$ , 由  $ON \perp OM$ , 得出  $\angle CON = \angle MON - \angle MOC$  得出答案.

解答: 解:  $\because$  射线 OM 平分  $\angle AOC$ ,  $\angle AOM = 35^\circ$ ,

$\therefore \angle MOC=35^\circ$ ,  
 $\because ON \perp OM$ ,  
 $\therefore \angle MON=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle CON=\angle MON - \angle MOC=90^\circ - 35^\circ=55^\circ$ .  
故选: C.

点评: 本题主要考查了垂线和角平分线, 解决本题的关键是找准角的关系.

4. (3 分) (2014•河南) 下列各式计算正确的是 ( )

A  $a+2a=3a^2$                       B  $(-a^3)^2=a^6$                       C  $a^3 \cdot a^2=a^6$                       D  $(a+b)^2=a^2+b^2$

考点: 完全平方公式; 合并同类项; 同底数幂的乘法; 幂的乘方与积的乘方.

分析: 根据合并同类项法则, 积的乘方, 同底数幂的乘法, 平方差公式分别求出每个式子的值, 再判断即可.

解答: 解: A、 $a+2a=3a$ , 故本选项错误;

B、 $(-a^3)^2=a^6$ , 故本选项正确;

C、 $a^3 \cdot a^2=a^5$ , 故本选项错误;

D、 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ , 故本选项错误, 故选 B.

点评: 本题考查了合并同类项法则, 积的乘方, 同底数幂的乘法, 平方差公式的应用, 主要考查学生的计算能力.

5. (3 分) (2014•河南) 下列说法中, 正确的是 ( )

A “打开电视, 正在播放河南新闻节目”是必然事件

B 某种彩票中奖概率为 10%是指买十张一定有一张中奖

C 神舟飞船反射前需要对零部件进行抽样调查

D 了解某种节能灯的使用寿命适合抽样调查

考点: 随机事件; 全面调查与抽样调查; 概率的意义.

分析: 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件. 不易采集到数据的调查要采用抽样调查的方式, 据此判断即可.

解答: 解: A. “打开电视, 正在播放河南新闻节目”是随机事件, 本项错误;

B. 某种彩票中奖概率为 10%是指买十张可能中奖, 也可能不中奖, 本项错误;

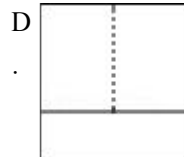
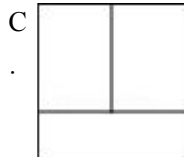
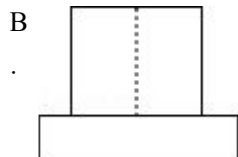
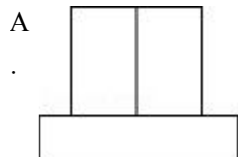
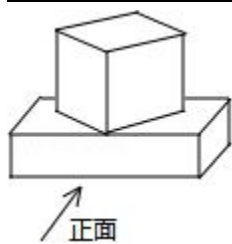
C. 神舟飞船反射前需要对零部件进行全面调查, 本项错误;

D. 解某种节能灯的使用寿命, 具有破坏性适合抽样调查.

故选: D.

点评: 本题考查了调查的方式和事件的分类. 不易采集到数据的调查要采用抽样调查的方式; 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件.

6. (3 分) (2014•河南) 将两个长方体如图放置, 则所构成的几何体的左视图可能是 ( )



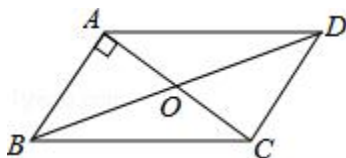
**考点：**简单组合体的三视图.

**分析：**根据从左边看得到的图形是左视图，可得答案.

**解答：**解：从左边看，下面是一个矩形，上面是一个等宽的矩形，该矩形的中间有一条棱，  
故选：C.

**点评：**本题考查了简单组合体的三视图，注意能看到的棱用实线画出.

7. (3 分) (2014•河南) 如图， $\square ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ， $AB \perp AC$ ，若  $AB=4$ ， $AC=6$ ，则  $BD$  的长是 ( )



A 8

B 9

C 10

D 11

**考点：**平行四边形的性质；勾股定理.

**分析：**利用平行四边形的性质和勾股定理易求  $BO$  的长，进而可求出  $BD$  的长.

**解答：**解： $\because \square ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ，

$$\therefore BO=DO, AO=CO,$$

$$\because AB \perp AC, AB=4, AC=6,$$

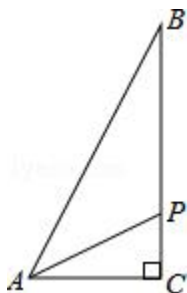
$$\therefore BO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

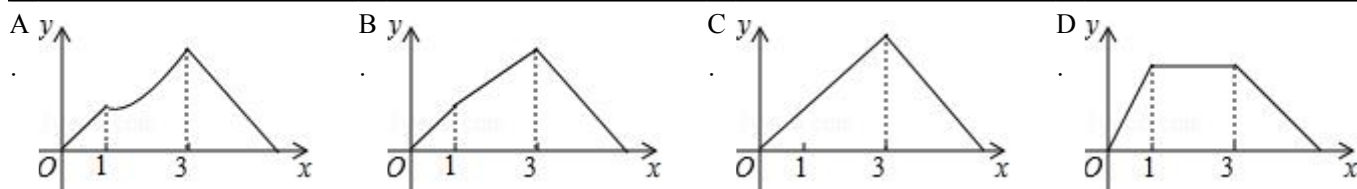
$$\therefore BD = 2BO = 10,$$

故选 C.

**点评：**本题考查了平行四边形的性质以及勾股定理的运用，是中考常见题型，比较简单.

8. (3 分) (2014•河南) 如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=1cm$ ， $BC=2cm$ ，点  $P$  从点  $A$  出发，以  $1cm/s$  的速度沿折线  $AC \rightarrow CB \rightarrow BA$  运动，最终回到点  $A$ ，设点  $P$  的运动时间为  $x$  (s)，线段  $AP$  的长度为  $y$  (cm)，则能够反映  $y$  与  $x$  之间函数关系的图象大致是 ( )





**考点：** 动点问题的函数图象.

**分析：** 这是分段函数：①点 P 在 AC 边上时， $y=x$ ，它的图象是一次函数图象的一部分；

②点 P 在边 BC 上时，利用勾股定理求得 y 与 x 的函数关系式，根据关系式选择图象；

③点 P 在边 AB 上时，利用线段间的和差关系求得 y 与 x 的函数关系式，由关系式选择图象.

**解答：** 解：①当点 P 在 AC 边上，即  $0 \leq x \leq 1$  时， $y=x$ ，它的图象是一次函数图象的一部分. 故 C 错误；

②点 P 在边 BC 上，即  $1 < x \leq 3$  时，根据勾股定理得  $AP = \sqrt{AC^2 + PC^2}$ ，即  $y = \sqrt{1 + (x-1)^2}$ ，则其函数图象是 y 随 x 的增大而增大，且不是线段. 故 B、D 错误；

③点 P 在边 AB 上，即  $3 < x \leq 3 + \sqrt{5}$  时， $y = \sqrt{5} + 3 - x = -x + 3 + \sqrt{5}$ ，其函数图象是直线的一部分.

综上所述，A 选项符合题意.

故选：A.

**点评：** 本题考查了动点问题的函数图象. 此题涉及到了函数  $y = \sqrt{1 + (x-1)^2}$  的图象问题，在初中阶段没有学到该函数图象，所以只要采取排除法进行解题.

## 二、填空题 (每小题 3 分，共 21 分)

9. (3 分) (2014•河南) 计算： $\sqrt[3]{27} - |-2| = \underline{1}$ .

**考点：** 实数的运算.

**分析：** 首先计算开方和绝对值，然后再计算有理数的减法即可.

**解答：** 解：原式  $= 3 - 2 = 1$ ,

故答案为：1.

**点评：** 此题主要考查了实数的运算，关键是掌握立方根和绝对值得性质运算.

10. (3 分) (2014•河南) 不等式组  $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 4-2x > 0 \end{cases}$  的所有整数解的和为  $\underline{-2}$ .

**考点：** 一元一次不等式组的整数解.

**分析：** 先分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集，在其公共解集内找出符合条件的 x 的所有整数解相加即可求解.

**解答：** 解：  $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \text{ ①} \\ 4-2x > 0 \text{ ②} \end{cases}$ ,

由①得：  $x \geq -2$ ,

由②得：  $x < 2$ ,

$\therefore -2 \leq x < 2$ ,

$\therefore$  不等式组的整数解为：  $-2, -1, 0, 1$ .

所有整数解的和为  $-2 - 1 + 0 + 1 = -2$ .

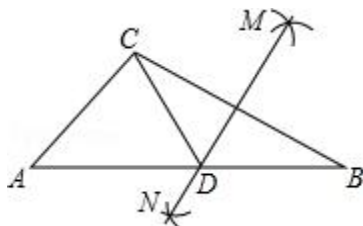
故答案为：  $-2$ .

**点评：** 本题考查的是解一元一次不等式组及求一元一次不等式组的整数解，求不等式的公共解，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，同大较小中间找，大大小小解不了.

11. (3分) (2014•河南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 按以下步骤作图:

①分别以  $B, C$  为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BC$  的长为半径作弧, 两弧相交于  $M, N$  两点;

②作直线  $MN$  交  $AB$  于点  $D$ , 连接  $CD$ , 若  $CD=AC$ ,  $\angle B=25^\circ$ , 则  $\angle ACB$  的度数为  $105^\circ$ .



**考点:** 作图—基本作图; 线段垂直平分线的性质.

**分析:** 首先根据题目中的作图方法确定  $MN$  是线段  $BC$  的垂直平分线, 然后利用垂直平分线的性质解题即可.

**解答:** 解: 由题中作图方法知道  $MN$  为线段  $BC$  的垂直平分线,

$$\therefore CD=BD,$$

$$\therefore \angle B=25^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB=\angle B=25^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC=50^\circ,$$

$$\therefore CD=AC,$$

$$\therefore \angle A=\angle ADC=50^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD=80^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=80^\circ+25^\circ=105^\circ,$$

故答案为:  $105^\circ$ .

**点评:** 本题考查了基本作图中的垂直平分线的作法及线段的垂直平分线的性质, 解题的关键是了解垂直平分线的做法.

12. (3分) (2014•河南) 已知抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴交于  $A, B$  两点, 若点  $A$  的坐标为  $(-2, 0)$ , 抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 则线段  $AB$  的长为 8.

**考点:** 抛物线与  $x$  轴的交点.

**分析:** 由抛物线  $y=ax^2+bx+c$  的对称轴为直线  $x=2$ , 交  $x$  轴于  $A, B$  两点, 其中  $A$  点的坐标为  $(-2, 0)$ , 根据二次函数的对称性, 求得  $B$  点的坐标, 再求出  $AB$  的长度.

**解答:** 解:  $\because$  对称轴为直线  $x=2$  的抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴相交于  $A, B$  两点,

$$\therefore A, B \text{ 两点关于直线 } x=2 \text{ 对称},$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-2, 0),$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (6, 0),$$

$$AB=6-(-2)=8.$$

故答案为: 8.

**点评:** 此题考查了抛物线与  $x$  轴的交点. 此题难度不大, 解题的关键是求出  $B$  点的坐标.

13. (3分) (2014•河南) 一个不透明的袋子中装有色不同的 2 个红球和 2 个白球, 两个人依次从袋子中随机摸出一个小球不放回, 则第一个人摸到红球且第二个人摸到白球的概率是  $\frac{1}{3}$ .

**考点:** 列表法与树状图法.

**专题:** 计算题.

**分析:** 列表得出所有等可能的情况数, 找出第一个人摸到红球且第二个人摸到白球的情况数, 即可求出所求的概率.

解答：解：列表得：

|   | 红      | 红      | 白      | 白      |
|---|--------|--------|--------|--------|
| 红 | — — —  | (红, 红) | (白, 红) | (白, 红) |
| 红 | (红, 红) | — — —  | (白, 红) | (白, 红) |
| 白 | (红, 白) | (红, 白) | — — —  | (白, 白) |
| 白 | (红, 白) | (红, 白) | (白, 白) | — — —  |

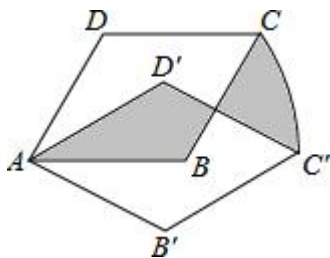
所有等可能的情况有 12 种，其中第一个人摸到红球且第二个人摸到白球的情况有 4 种，

$$\text{则 } P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

故答案为：  $\frac{1}{3}$ .

点评：此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

14. (3 分) (2014•河南) 如图，在菱形 ABCD 中，AB=1， $\angle DAB=60^\circ$ ，把菱形 ABCD 绕点 A 顺时针旋转  $30^\circ$  得到菱形 AB'C'D'，其中点 C 的运动路径为  $\widehat{CC'}$ ，则图中阴影部分的面积为  $-\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}$ 。



考点：菱形的性质；扇形面积的计算；旋转的性质。

分析：连接 BD'，过 D' 作 D'H ⊥ AB，则阴影部分的面积可分为 3 部分，再根据菱形的性质，三角形的面积公式以及扇形的面积公式计算即可。

解答：解：连接 BD'，过 D' 作 D'H ⊥ AB，

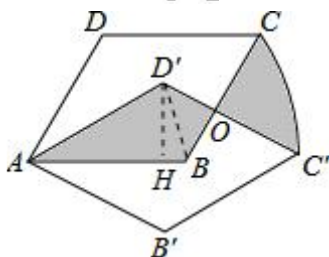
∵ 在菱形 ABCD 中，AB=1， $\angle DAB=60^\circ$ ，把菱形 ABCD 绕点 A 顺时针旋转  $30^\circ$  得到菱形 AB'C'D'，

$$\therefore D'H = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD'} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

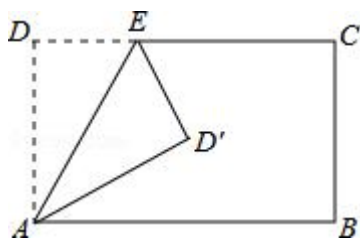
$$\therefore \text{图中阴影部分的面积为 } \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为： } \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}.$$



点评：本题考查了旋转的性质，菱形的性质，扇形的面积公式，熟练掌握旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状与大小是解题的关键。

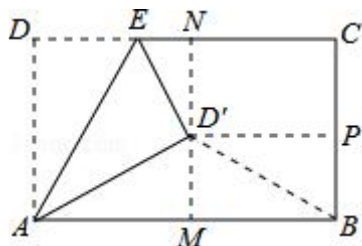
15. (3 分) (2014•河南) 如图矩形 ABCD 中，AD=5，AB=7，点 E 为 DC 上一个动点，把  $\triangle ADE$  沿 AE 折叠，当点 D 的对应点 D' 落在  $\angle ABC$  的角平分线上时，DE 的长为  $-\frac{5}{2}$  或  $\frac{5}{3}$ 。



**考点：**翻折变换（折叠问题）.

**分析：**连接  $BD'$ ，过  $D'$  作  $MN \perp AB$ ，交  $AB$  于点  $M$ ， $CD$  于点  $N$ ，作  $D'P \perp BC$  交  $BC$  于点  $P$ ，先利用勾股定理求出  $MD'$ ，再分两种情况利用勾股定理求出  $DE$ 。

**解答：**解：如图，连接  $BD'$ ，过  $D'$  作  $MN \perp AB$ ，交  $AB$  于点  $M$ ， $CD$  于点  $N$ ，作  $D'P \perp BC$  交  $BC$  于点  $P$ ，



$\because$  点  $D$  的对应点  $D'$  落在  $\angle ABC$  的角平分线上，

$\therefore MD' = PD'$ ，

设  $MD' = x$ ，则  $PD' = BM = x$ ，

$\therefore AM = AB - BM = 7 - x$ ，

又折叠图形可得  $AD = AD' = 5$ ，

$\therefore x^2 + (7 - x)^2 = 25$ ，解得  $x = 3$  或  $4$ ，

即  $MD' = 3$  或  $4$ 。

在  $RT\triangle END'$  中，设  $ED' = a$ ，

①当  $MD' = 3$  时， $D'E = 5 - 3 = 2$ ， $EN = 7 - CN - DE = 7 - 3 - a = 4 - a$ ，

$\therefore a^2 = 2^2 + (4 - a)^2$ ，

解得  $a = \frac{5}{2}$ ，即  $DE = \frac{5}{2}$ ，

②当  $MD' = 4$  时， $D'E = 5 - 4 = 1$ ， $EN = 7 - CN - DE = 7 - 4 - a = 3 - a$ ，

$\therefore a^2 = 1^2 + (3 - a)^2$ ，

解得  $a = \frac{5}{3}$ ，即  $DE = \frac{5}{3}$ 。

故答案为： $\frac{5}{2}$  或  $\frac{5}{3}$ 。

**点评：** 本题主要考查了折叠问题，解题的关键是明确掌握折叠以后有哪些线段是对应相等的。

### 三、解答题（本大题共 8 小题，满分 75 分）

16. (8 分) (2014•河南) 先化简，再求值： $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} + (2 + \frac{x^2 + 1}{x})$ ，其中  $x = \sqrt{2} - 1$ 。

**考点：** 分式的化简求值。

**专题：** 计算题。

**分析：** 先把括号内通分，再把除法运算化为乘法运算，然后把分子分母因式分解，约分后得到原式  $= \frac{1}{x+1}$ ，再把  $x$  的值代入计算。

解答:

$$\text{解: 原式} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \div \frac{2x+x^2+1}{x}$$

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{(x+1)^2}{x}$$

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1},$$

$$\text{当 } x = \sqrt{2} - 1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**点评:** 本题考查了分式的化简求值: 先把分式的分子或分母因式分解, 再进行通分或约分, 得到最简分式或整式, 然后把满足条件的字母的值代入计算得到对应的分式的值.

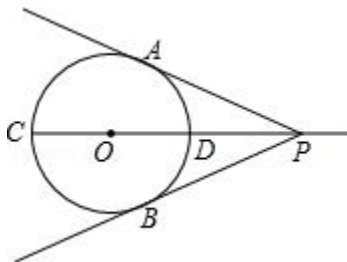
17. (9分) (2014·河南) 如图,  $CD$  是  $\odot O$  的直径, 且  $CD=2\text{cm}$ , 点  $P$  为  $CD$  的延长线上一点, 过点  $P$  作  $\odot O$  的切线  $PA$ ,  $PB$ , 切点分别为点  $A$ ,  $B$ .

(1) 连接  $AC$ , 若  $\angle APO=30^\circ$ , 试证明  $\triangle ACP$  是等腰三角形;

(2) 填空:

①当  $DP=1\text{cm}$  时, 四边形  $AOBD$  是菱形;

②当  $DP=\sqrt{2}-1\text{cm}$  时, 四边形  $AOBD$  是正方形.



**考点:** 切线的性质; 等腰三角形的判定; 菱形的判定; 正方形的判定.

**分析:** (1) 利用切线的性质可得  $OC \perp PC$ . 利用同弧所对的圆周角等于圆心角的一半, 求得  $\angle ACP=30^\circ$ , 从而求得.

(2) ①要使四边形  $AOBD$  是菱形, 则  $OA=AD=OD$ , 所以  $\angle AOP=60^\circ$ , 所以  $OP=2OA$ ,  $DP=OD$ .

②要使四边形  $AOBD$  是正方形, 则必须  $\angle AOP=45^\circ$ ,  $OA=PA=1$ , 则  $OP=\sqrt{2}$ , 所以  $DP=OP-1$ .

**解答:** 解: (1) 连接  $OA$ ,  $AC$

$\because PA$  是  $\odot O$  的切线,

$\therefore OA \perp PA$ ,

在  $\text{RT}\triangle AOP$  中,  $\angle AOP=90^\circ - \angle APO=90^\circ - 30^\circ=60^\circ$ ,

$\therefore \angle ACP=30^\circ$ ,

$\because \angle APO=30^\circ$

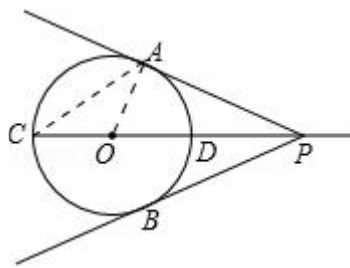
$\therefore \angle ACP=\angle APO$ ,

$\therefore AC=AP$ ,

$\therefore \triangle ACP$  是等腰三角形.

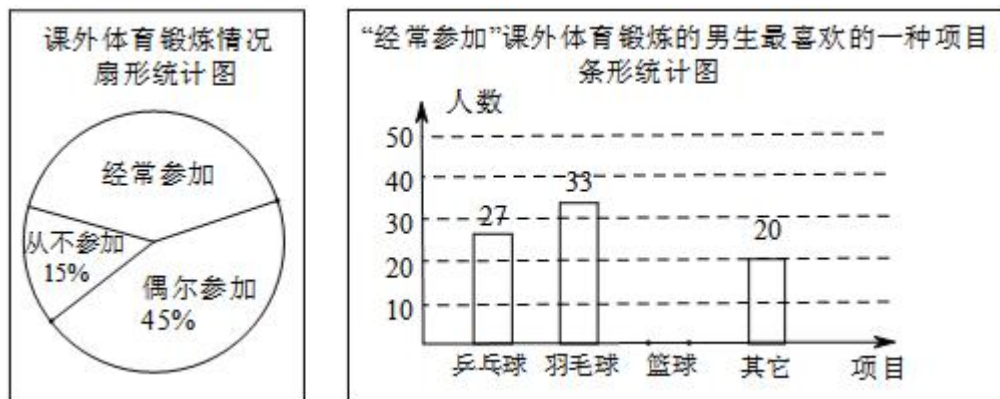
(2) ①1,

② $\sqrt{2}-1$ .



**点评：** 本题考查了切线的性质，圆周角的性质，熟练掌握圆的切线的性质和直角三角形的边角关系是解题的关键.

18. (9分) (2014•河南) 某兴趣小组为了了解本校男生参加课外体育锻炼情况，随机抽取本校 300 名男生进行了问卷调查，统计整理并绘制了如下两幅尚不完整的统计图.



请根据以上信息解答下列问题:

- (1) 课外体育锻炼情况扇形统计图中, “经常参加”所对应的圆心角的度数为 144°;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 该校共有 1200 名男生, 请估计全校男生中经常参加课外体育锻炼并且最喜欢的项目是篮球的人数;
- (4) 小明认为“全校所有男生中, 课外最喜欢参加的运动项目是乒乓球的人数约为  $1200 \times \frac{27}{300} = 108$ ”, 请你判断这种

说法是否正确, 并说明理由.

**考点：** 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

**专题：** 图表型.

- 分析：**
- (1) 用“经常参加”所占的百分比乘以  $360^\circ$  计算即可得解;
  - (2) 先求出“经常参加”的人数, 然后求出喜欢篮球的人数, 再补全统计图即可;
  - (3) 用总人数乘以喜欢篮球的学生所占的百分比计算即可得解;
  - (4) 根据喜欢乒乓球的人都是“经常参加”的学生, “偶尔参加”的学生中也会有喜欢乒乓球的考虑解答.

**解答：** 解: (1)  $360^\circ \times (1 - 15\% - 45\%) = 360^\circ \times 40\% = 144^\circ$ ;  
故答案为:  $144^\circ$ ;

(2) “经常参加”的人数为:  $300 \times 40\% = 120$  人,  
喜欢篮球的学生人数为:  $120 - 27 - 33 - 20 = 120 - 80 = 40$  人;  
补全统计图如图所示;

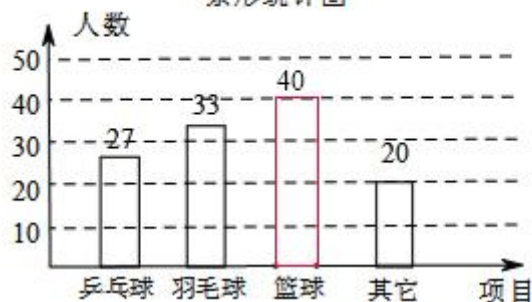
(3) 全校男生中经常参加课外体育锻炼并且最喜欢的项目是篮球的人数约为:  $1200 \times \frac{40}{300} = 160$  人;

(4) 这个说法不正确.

理由如下: 小明得到的 108 人是经常参加课外体育锻炼的男生中最喜欢的项目是乒乓球的人数, 而全校偶尔参加课外体育锻炼的男生中也会有最喜欢乒乓球的,

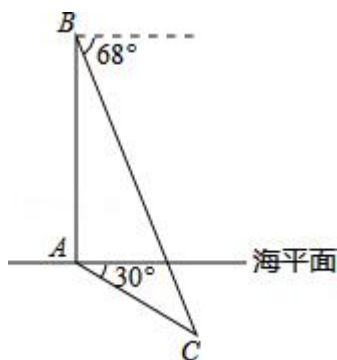
因此应多于 108 人.

“经常参加”课外体育锻炼的男生最喜欢的一种项目  
条形统计图



**点评:** 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

19. (9 分) (2014·河南) 在中俄“海上联合-2014”反潜演习中, 我军舰 A 测得潜艇 C 的俯角为  $30^\circ$ , 位于军舰 A 正上方 1000 米的反潜直升机 B 测得潜艇 C 的俯角为  $68^\circ$ , 试根据以上数据求出潜艇 C 离开海平面的下潜深度. (结果保留整数, 参考数据:  $\sin 68^\circ \approx 0.9$ ,  $\cos 68^\circ \approx 0.4$ ,  $\tan 68^\circ \approx 2.5$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.7$ )



**考点:** 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

**分析:** 过点 C 作  $CD \perp AB$ , 交 BA 的延长线于点 D, 则 AD 即为潜艇 C 的下潜深度, 分别在 Rt 三角形 ACD 中表示出 CD 和在 Rt 三角形 BCD 中表示出 BD, 从而利用二者之间的关系列出方程求解.

**解答:** 解: 过点 C 作  $CD \perp AB$ , 交 BA 的延长线于点 D, 则 AD 即为潜艇 C 的下潜深度,

根据题意得:  $\angle ACD = 30^\circ$ ,  $\angle BCD = 68^\circ$ ,

设  $AD = x$ , 则  $BD = BA + AD = 1000 + x$ ,

在 Rt 三角形 ACD 中,  $CD = \frac{AD}{\tan \angle ACD} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$ ,

在 Rt 三角形 BCD 中,  $BD = CD \cdot \tan 68^\circ$ ,

$\therefore 1000 + x = \sqrt{3}x \cdot \tan 68^\circ$

解得:  $x = \frac{1000}{\sqrt{3} \cdot \tan 68^\circ} = \frac{1000}{1.7 \times 2.5} - 1 \approx 308$  米,

$\therefore$  潜艇 C 离开海平面的下潜深度为 308 米.

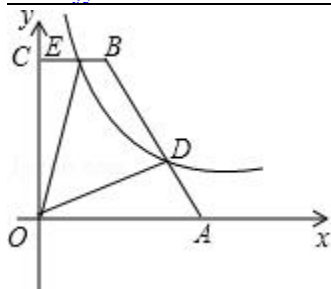
**点评:** 本题考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是从题目中抽象出直角三角形并选择合适的边角关系求解.

20. (9 分) (2014·河南) 如图, 在直角梯形 OABC 中,  $BC \parallel AO$ ,  $\angle AOC = 90^\circ$ , 点 A, B 的坐标分别为 (5, 0),

(2, 6), 点 D 为 AB 上一点, 且  $BD = 2AD$ , 双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ) 经过点 D, 交 BC 于点 E.

(1) 求双曲线的解析式;

(2) 求四边形 ODBE 的面积.



**考点：**反比例函数综合题.

**专题：**综合题.

**分析：** (1) 作  $BM \perp x$  轴于  $M$ ，作  $BN \perp x$  轴于  $N$ ，利用点  $A$ ， $B$  的坐标得到  $BC=OM=5$ ， $BM=OC=6$ ， $AM=3$ ，再证明  $\triangle ADN \sim \triangle ABM$ ，利用相似比可计算出  $DN=2$ ， $AN=1$ ，则  $ON=OA-AN=4$ ，得到  $D$  点坐标为  $(4, 2)$ ，然后把  $D$  点坐标代入  $y=\frac{k}{x}$  中求出  $k$  的值即可得到反比例函数解析式；

(2) 根据反比例函数  $k$  的几何意义和  $S_{\text{四边形 ODBE}} = S_{\text{梯形 OABC}} - S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OAD}$  进行计算.

**解答：** 解：(1) 作  $BM \perp x$  轴于  $M$ ，作  $BN \perp x$  轴于  $N$ ，如图，

$\because$  点  $A$ ， $B$  的坐标分别为  $(5, 0)$ ， $(2, 6)$ ，

$\therefore BC=OM=5$ ， $BM=OC=6$ ， $AM=3$ ，

$\because DN \parallel BM$ ，

$\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM$ ，

$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{AD}{AB}$ ，即  $\frac{DN}{6} = \frac{AN}{3} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore DN=2$ ， $AN=1$ ，

$\therefore ON=OA-AN=4$ ，

$\therefore D$  点坐标为  $(4, 2)$ ，

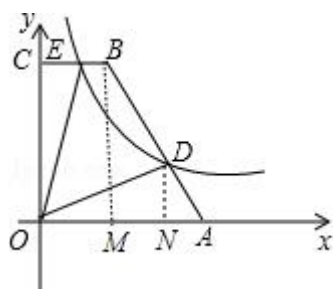
把  $D(4, 2)$  代入  $y=\frac{k}{x}$  得  $k=2 \times 4=8$ ，

$\therefore$  反比例函数解析式为  $y=\frac{8}{x}$ ；

(2)  $S_{\text{四边形 ODBE}} = S_{\text{梯形 OABC}} - S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OAD}$

$$= \frac{1}{2} \times (2+5) \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 8 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2$$

$$= 12.$$



**点评：** 本题考查了反比例函数综合题：熟练掌握反比例函数图象上点的坐标特征、反比例函数  $k$  的几何意义和梯形的性质；理解坐标与图形的性质；会运用相似比计算线段的长度.

21. (10 分) (2014•河南) 某商店销售 10 台 A 型和 20 台 B 型电脑的利润为 4000 元，销售 20 台 A 型和 10 台 B 型电脑的利润为 3500 元.

- (1) 求每台 A 型电脑和 B 型电脑的销售利润；
- (2) 该商店计划一次购进两种型号的电脑共 100 台，其中 B 型电脑的进货量不超过 A 型电脑的 2 倍，设购进 A 型电脑  $x$  台，这 100 台电脑的销售总利润为  $y$  元.
- ①求  $y$  关于  $x$  的函数关系式；
- ②该商店购进 A 型、B 型电脑各多少台，才能使销售总利润最大？
- (3) 实际进货时，厂家对 A 型电脑出厂价下调  $m$  ( $0 < m < 100$ ) 元，且限定商店最多购进 A 型电脑 70 台，若商店保持同种电脑的售价不变，请你根据以上信息及 (2) 中条件，设计出使这 100 台电脑销售总利润最大的进货方案.

**考点：** 一次函数的应用；二元一次方程组的应用；一元一次不等式组的应用.

**分析：** (1) 设每台 A 型电脑销售利润为  $x$  元，每台 B 型电脑的销售利润为  $y$  元；根据题意列出方程组求解，

(2) ①据题意得， $y = -50x + 15000$ ，

②利用不等式求出  $x$  的范围，又因为  $y = -50x + 15000$  是减函数，所以  $x$  取 34， $y$  取最大值，

(3) 据题意得， $y = (100+m)x - 150(100-x)$ ，即  $y = (m-50)x + 15000$ ，分三种情况讨论，①当  $0 < m < 50$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小，② $m=50$  时， $m-50=0$ ， $y=15000$ ，③当  $50 < m < 100$  时， $m-50 > 0$ ， $y$  随  $x$  的增大而增大，分别进行求解.

**解答：** 解：(1) 设每台 A 型电脑销售利润为  $x$  元，每台 B 型电脑的销售利润为  $y$  元；根据题意得

$$\begin{cases} 10x + 20y = 4000 \\ 20x + 10y = 3500 \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} x = 100 \\ y = 150 \end{cases}$

答：每台 A 型电脑销售利润为 100 元，每台 B 型电脑的销售利润为 150 元.

(2) ①据题意得， $y = 100x + 150(100-x)$ ，即  $y = -50x + 15000$ ，

②据题意得， $100 - x \leq 2x$ ，解得  $x \geq 33\frac{1}{3}$ ，

$\therefore y = -50x + 15000$ ，

$\therefore y$  随  $x$  的增大而减小，

$\therefore x$  为正整数，

$\therefore$  当  $x=34$  时， $y$  取最大值，则  $100 - x=66$ ，

即商店购进 34 台 A 型电脑和 66 台 B 型电脑的销售利润最大.

(3) 据题意得， $y = (100+m)x + 150(100-x)$ ，即  $y = (m-50)x + 15000$ ，

$$33\frac{1}{3} \leq x \leq 70$$

①当  $0 < m < 50$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小，

$\therefore$  当  $x=34$  时， $y$  取最大值，

即商店购进 34 台 A 型电脑和 66 台 B 型电脑的销售利润最大.

② $m=50$  时， $m-50=0$ ， $y=15000$ ，

即商店购进 A 型电脑数量满足  $33\frac{1}{3} \leq x \leq 70$  的整数时，均获得最大利润；

③当  $50 < m < 100$  时， $m-50 > 0$ ， $y$  随  $x$  的增大而增大，

$\therefore$  当  $x=70$  时， $y$  取得最大值.

即商店购进 70 台 A 型电脑和 30 台 B 型电脑的销售利润最大.

**点评：** 本题主要考查了一次函数的应用，二元一次方程组及一元一次不等式的应用，解题的关键是根据一次函数  $x$  值的增大而确定  $y$  值的增减情况.

22. (10 分) (2014•河南) (1) 问题发现

如图 1， $\triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等边三角形，点 A，D，E 在同一直线上，连接 BE.

填空:

①  $\angle AEB$  的度数为  $60^\circ$ ;

② 线段  $AD$ ,  $BE$  之间的数量关系为  $AD=BE$ .

(2) 拓展探究

如图 2,  $\triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等腰直角三角形,  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ , 点  $A, D, E$  在同一直线上,  $CM$  为  $\triangle DCE$  中  $DE$  边上的高, 连接  $BE$ , 请判断  $\angle AEB$  的度数及线段  $CM, AE, BE$  之间的数量关系, 并说明理由.

(3) 解决问题

如图 3, 在正方形  $ABCD$  中,  $CD = \sqrt{2}$ , 若点  $P$  满足  $PD=1$ , 且  $\angle BPD=90^\circ$ , 请直接写出点  $A$  到  $BP$  的距离.

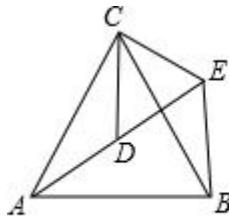


图1

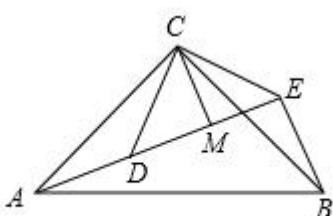


图2

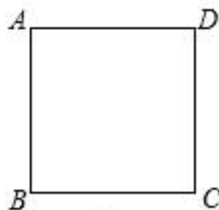


图3

**考点:** 圆的综合题; 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的性质; 等边三角形的性质; 直角三角形斜边上的中线; 正方形的性质; 圆周角定理.

**专题:** 综合题; 探究型.

**分析:** (1) 由条件易证  $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ , 从而得到:  $AD=BE$ ,  $\angle ADC = \angle BEC$ . 由点  $A, D, E$  在同一直线上可求出  $\angle ADC$ , 从而可以求出  $\angle AEB$  的度数.

(2) 仿照 (1) 中的解法可求出  $\angle AEB$  的度数, 证出  $AD=BE$ ; 由  $\triangle DCE$  为等腰直角三角形及  $CM$  为  $\triangle DCE$  中  $DE$  边上的高可得  $CM=DM=ME$ , 从而证到  $AE=2CM+BE$ .

(3) 由  $PD=1$  可得: 点  $P$  在以点  $D$  为圆心, 1 为半径的圆上; 由  $\angle BPD=90^\circ$  可得: 点  $P$  在以  $BD$  为直径的圆上. 显然, 点  $P$  是这两个圆的交点, 由于两圆有两个交点, 接下来需对两个位置分别进行讨论. 然后, 添加适当的辅助线, 借助于 (2) 中的结论即可解决问题.

**解答:** 解: (1) ①如图 1,

$\because \triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等边三角形,  
 $\therefore CA=CB, CD=CE, \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ .  
 $\therefore \angle ACD = \angle BCE$ .

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCE$  中,

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACD=\angle BCE \\ CD=CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ .

$\therefore \angle ADC = \angle BEC$ .

$\because \triangle DCE$  为等边三角形,

$\therefore \angle CDE = \angle CED = 60^\circ$ .

$\because$  点  $A, D, E$  在同一直线上,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ$ .

$\therefore \angle BEC = 120^\circ$ .

$\therefore \angle AEB = \angle BEC - \angle CED = 60^\circ$ .

故答案为:  $60^\circ$ .

②  $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ,

$\therefore AD=BE$ .

故答案为:  $AD=BE$ .

(2)  $\angle AEB = 90^\circ, AE = BE + 2CM$ .

理由：如图 2，

$\because \triangle ACB$  和  $\triangle DCE$  均为等腰直角三角形，  
 $\therefore CA=CB$ ,  $CD=CE$ ,  $\angle ACB=\angle DCE=90^\circ$ .  
 $\therefore \angle ACD=\angle BCE$ .

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCE$  中，

$$\begin{cases} CA=CB \\ \angle ACD=\angle BCE \\ CD=CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ .

$\therefore AD=BE$ ,  $\angle ADC=\angle BEC$ .

$\because \triangle DCE$  为等腰直角三角形，

$\therefore \angle CDE=\angle CED=45^\circ$ .

$\because$  点 A, D, E 在同一直线上，

$\therefore \angle ADC=135^\circ$ .

$\therefore \angle BEC=135^\circ$ .

$\therefore \angle AEB=\angle BEC-\angle CED=90^\circ$ .

$\because CD=CE$ ,  $CM \perp DE$ ,

$\therefore DM=ME$ .

$\because \angle DCE=90^\circ$ ,

$\therefore DM=ME=CM$ .

$\therefore AE=AD+DE=BE+2CM$ .

(3)  $\because PD=1$ ,

$\therefore$  点 P 在以点 D 为圆心，1 为半径的圆上.

$\because \angle BPD=90^\circ$ ,

$\therefore$  点 P 在以 BD 为直径的圆上.

$\therefore$  点 P 是这两圆的交点.

①当点 P 在如图 3①所示位置时，

连接 PD、PB、PA，作  $AH \perp BP$ ，垂足为 H，

过点 A 作  $AE \perp AP$ ，交 BP 于点 E，如图 3①.

$\because$  四边形 ABCD 是正方形，

$\therefore \angle ADB=45^\circ$ ,  $AB=AD=DC=BC=\sqrt{2}$ ,  $\angle BAD=90^\circ$ .

$\therefore BD=2$ .

$\because DP=1$ ,

$\therefore BP=\sqrt{3}$ .

$\because$  A、P、D、B 四点共圆，

$\therefore \angle APB=\angle ADB=45^\circ$ .

$\therefore \triangle PAE$  是等腰直角三角形.

又  $\because \triangle BAD$  是等腰直角三角形，点 B、E、P 共线， $AH \perp BP$ ，

$\therefore$  由 (2) 中的结论可得：  $BP=2AH+PD$ .

$\therefore \sqrt{3}=2AH+1$ .

$\therefore AH=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

②当点 P 在如图 3②所示位置时，

连接 PD、PB、PA，作  $AH \perp BP$ ，垂足为 H，

过点 A 作  $AE \perp AP$ ，交 PB 的延长线于点 E，如图 3②.

同理可得：  $BP=2AH-PD$ .

$\therefore \sqrt{3}=2AH-1$ .

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

综上所述：点 A 到 BP 的距离为  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  或  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

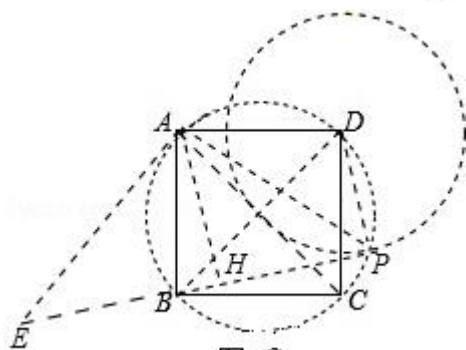


图3②

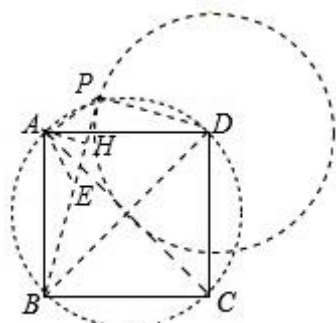


图3①

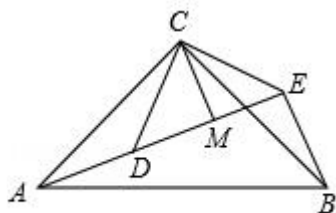


图2

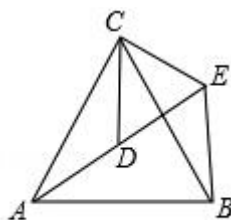


图1

**点评：** 本题考查了等边三角形的性质、正方形的性质、等腰三角形的性质、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、圆周角定理、三角形全等的判定与性质等知识，考查了运用已有的知识和经验解决问题的能力，是体现新课程理念的一道好题。而通过添加适当的辅助线从而能用（2）中的结论解决问题是解决第（3）的关键。

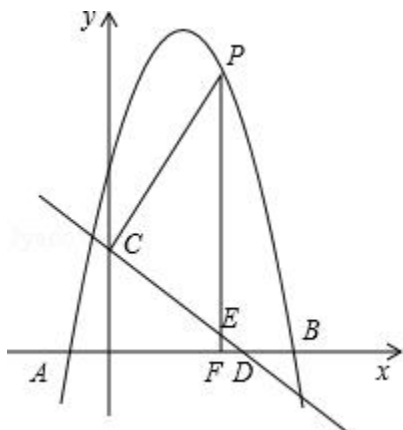
23. (11 分) (2014•河南) 如图，抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点 A (-1, 0)，B (5, 0) 两点，直线  $y = -\frac{3}{4}x + 3$

与  $y$  轴交于点 C，与  $x$  轴交于点 D。点 P 是  $x$  轴上方的抛物线上一动点，过点 P 作  $PF \perp x$  轴于点 F，交直线 CD 于点 E。设点 P 的横坐标为  $m$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若  $PE = 5EF$ ，求  $m$  的值；

(3) 若点  $E'$  是点  $E$  关于直线  $PC$  的对称点, 是否存在点  $P$ , 使点  $E'$  落在  $y$  轴上? 若存在, 请直接写出相应的点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



**考点:** 二次函数综合题.

**分析:** (1) 利用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 用含  $m$  的代数式分别表示出  $PE$ 、 $EF$ , 然后列方程求解;

(3) 解题关键是识别出四边形  $PECE'$  是菱形, 然后根据  $PE=CE$  的条件, 列出方程求解.

**解答:** 解: (1) 将点  $A$ 、 $B$  坐标代入抛物线解析式, 得:

$$\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -25+5b+c=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=4 \\ c=5 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为:  $y = -x^2 + 4x + 5$ .

(2)  $\because$  点  $P$  的横坐标为  $m$ ,

$$\therefore P(m, -m^2 + 4m + 5), E(m, -\frac{3}{4}m + 3), F(m, 0).$$

$$\therefore PE = |y_P - y_E| = |(-m^2 + 4m + 5) - (-\frac{3}{4}m + 3)| = |-m^2 + \frac{19}{4}m + 2|,$$

$$EF = |y_E - y_F| = |(-\frac{3}{4}m + 3) - 0| = |-\frac{3}{4}m + 3|.$$

$$\text{由题意, } PE = 5EF, \text{ 即: } |-m^2 + \frac{19}{4}m + 2| = 5|-\frac{3}{4}m + 3| = |-\frac{15}{4}m + 15|$$

$$\text{①若 } -m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -\frac{15}{4}m + 15, \text{ 整理得: } 2m^2 - 17m + 26 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 2 \text{ 或 } m = \frac{13}{2};$$

$$\text{②若 } -m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -(-\frac{15}{4}m + 15), \text{ 整理得: } m^2 - m - 17 = 0,$$

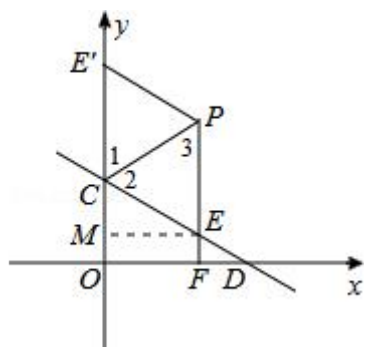
$$\text{解得: } m = \frac{1 + \sqrt{69}}{2} \text{ 或 } m = \frac{1 - \sqrt{69}}{2}.$$

由题意,  $m$  的取值范围为:  $-1 < m < 5$ , 故  $m = \frac{13}{2}$ 、 $m = \frac{1 - \sqrt{69}}{2}$  这两个解均舍去.

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = \frac{1 + \sqrt{69}}{2}.$$

(3) 假设存在.

作出示意图如下:



∵ 点 E、E' 关于直线 PC 对称，

∴  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $CE = CE'$ ,  $PE = PE'$ .

∵ PE 平行于 y 轴, ∴  $\angle 1 = \angle 3$ ,

∴  $\angle 2 = \angle 3$ , ∴  $PE = CE$ ,

∴  $PE = CE = PE' = CE'$ , 即四边形 PECE' 是菱形.

由直线 CD 解析式  $y = -\frac{3}{4}x + 3$ , 可得  $OD = 4$ ,  $OC = 3$ , 由勾股定理得  $CD = 5$ .

过点 E 作  $EM \parallel x$  轴, 交 y 轴于点 M, 易得  $\triangle CEM \sim \triangle CDO$ ,

∴  $\frac{ME}{OD} = \frac{CE}{CD}$ , 即  $\frac{|m|}{4} = \frac{CE}{5}$ , 解得  $CE = \frac{5}{4}|m|$ ,

∴  $PE = CE = \frac{5}{4}|m|$ , 又由 (2) 可知:  $PE = |-m^2 + \frac{19}{4}m + 2|$

∴  $|-m^2 + \frac{19}{4}m + 2| = \frac{5}{4}|m|$ .

① 若  $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = \frac{5}{4}m$ , 整理得:  $2m^2 - 7m - 4 = 0$ , 解得  $m = 4$  或  $m = -\frac{1}{2}$ ;

② 若  $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -\frac{5}{4}m$ , 整理得:  $m^2 - 6m - 2 = 0$ , 解得  $m = 3 + \sqrt{11}$  或  $m = 3 - \sqrt{11}$ .

由题意, m 的取值范围为:  $-1 < m < 5$ , 故  $m = 3 + \sqrt{11}$  这个解舍去.

综上所述, 存在满足条件的点 P, 可求得点 P 坐标为  $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$ ,  $(4, 5)$ ,  $(3 - \sqrt{11}, 2\sqrt{11} - 3)$ .

**点评:** 本题是二次函数压轴题, 综合考查了二次函数与一次函数的图象与性质、点的坐标、待定系数法、菱形、相似三角形等多个知识点, 重点考查了分类讨论思想与方程思想的灵活运用. 需要注意的是, 为了避免漏解, 表示线段长度的代数式均含有绝对值, 解方程时需要分类讨论、分别计算.

