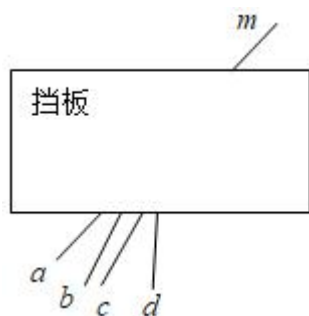


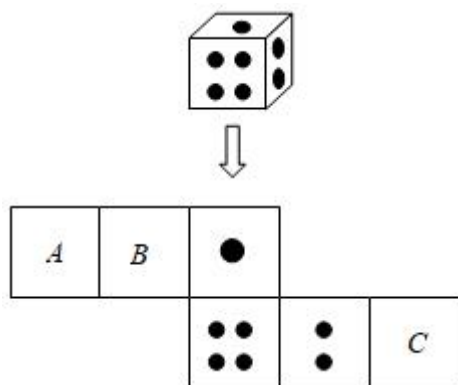
2021 年河北省中考数学试卷

一、选择题（本大题有 16 个小题，共 42 分。1~10 小题各 3 分，11~16 小题各 2 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 如图，已知四条线段 a, b, c, d 中的一条与挡板另一侧的线段 m 在同一直线上，请借助直尺判断该线段是（ ）



- A. a B. b C. c D. d
2. 不一定相等的一组是（ ）
- A. $a+b$ 与 $b+a$ B. $3a$ 与 $a+a+a$
- C. a^3 与 $a \cdot a \cdot a$ D. $3(a+b)$ 与 $3a+b$
3. 已知 $a > b$ ，则一定有 $-4a \square -4b$ ，“ $\square$ ”中应填的符号是（ ）
- A. $>$ B. $<$ C. $\geq$ D. $=$
4. 与 $\sqrt{3^2 - 2^2 - 1^2}$ 结果相同的是（ ）
- A. $3 - 2 + 1$ B. $3 + 2 - 1$ C. $3 + 2 + 1$ D. $3 - 2 - 1$
5. 能与 $-(\frac{3}{4} - \frac{6}{5})$ 相加得 0 的是（ ）
- A. $-\frac{3}{4} - \frac{6}{5}$ B. $\frac{6}{5} + \frac{3}{4}$ C. $-\frac{6}{5} + \frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4} + \frac{6}{5}$
6. 一个骰子相对两面的点数之和为 7，它的展开图如图，下列判断正确的是（ ）



- A. A代  B. B代  C. C代  D. B代 

7. 如图1, $\square ABCD$ 中, $AD > AB$, $\angle ABC$ 为锐角. 要在对角线 BD 上找点 N, M , 使四边形 $ANCM$ 为平行四边形, 现有图2中的甲、乙、丙三种方案, 则正确的方案 ()

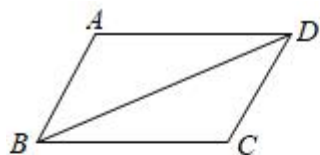
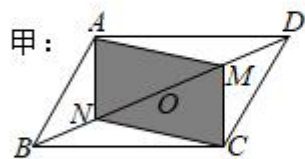
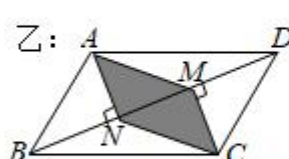


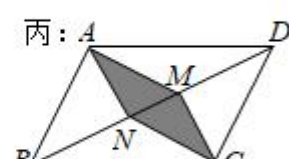
图1



取 BD 中点 O , 作
 $BN = NO, OM = MD$



作 $AN \perp BD$ 于 N ,
 $CM \perp BD$ 于 M



作 AN, CM 分别平分
 $\angle BAD, \angle BCD$

图2

- A. 甲、乙、丙都是
B. 只有甲、乙才是
C. 只有甲、丙才是
D. 只有乙、丙才是
8. 图1是装了液体的高脚杯示意图 (数据如图), 用去一部分液体后如图2所示, 此时液面 $AB = ()$

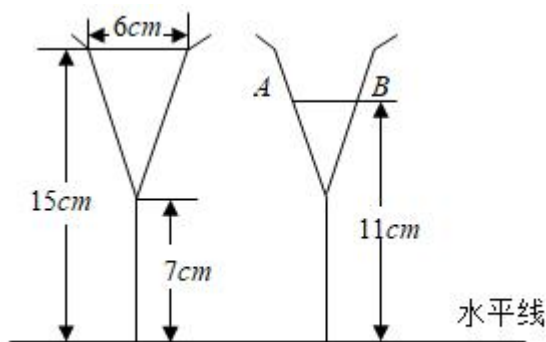
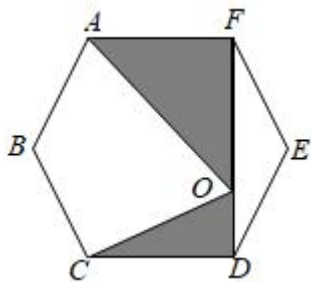


图1

图2

- A. 1cm
B. 2cm
C. 3cm
D. 4cm
9. 若 $\sqrt[3]{3}$ 取 1.442, 计算 $\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} - 98\sqrt[3]{3}$ 的结果是 ()
- A. -100
B. -144.2
C. 144.2
D. -0.01442
10. 如图, 点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 对角线 FD 上一点, $S_{\triangle AFO} = 8$, $S_{\triangle CDO} = 2$, 则 $S_{\text{正六边形 } ABCDEF}$ 的值是 ()



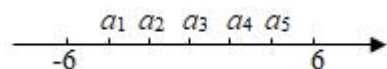
A. 20

B. 30

C. 40

D. 随点 O 位置而变化

11. (2分) 如图, 将数轴上 -6 与 6 两点间的线段六等分, 这五个等分点所对应数依次为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 则下列正确的是 ()



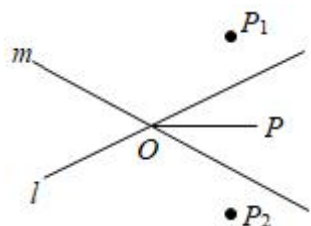
A. $a_3 > 0$

B. $|a_1| = |a_4|$

C. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$

D. $a_2 + a_5 < 0$

12. (2分) 如图, 直线 l, m 相交于点 O . P 为这两直线外一点, 且 $OP = 2.8$. 若点 P 关于直线 l, m 的对称点分别是点 P_1, P_2 , 则 P_1, P_2 之间的距离可能是 ()



A. 0

B. 5

C. 6

D. 7

13. (2分) 定理: 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

已知: 如图, $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角. 求证: $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

证法 1: 如图,

$\because \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ (三角形内角和定理),

又 $\because \angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$ (平角定义),

$\therefore \angle ACD + \angle ACB = \angle A + \angle B + \angle ACB$ (等量代换).

$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B$ (等式性质).

证法 2: 如图,

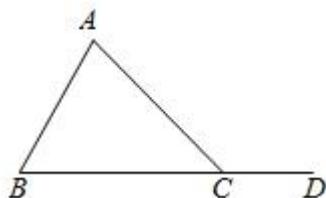
$\because \angle A = 76^\circ, \angle B = 59^\circ,$

且 $\angle ACD = 135^\circ$ (量角器测量所得)

又 $\because 135^\circ = 76^\circ + 59^\circ$ (计算所得)

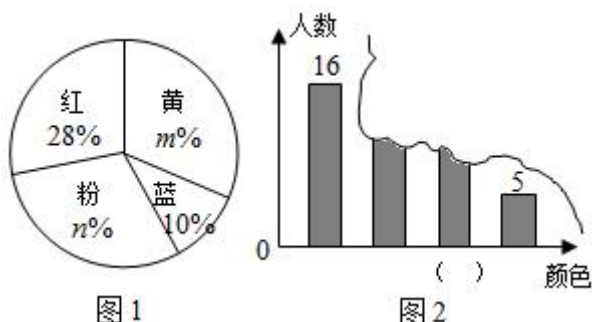
$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B$ (等量代换).

下列说法正确的是 ()



- A. 证法 1 还需证明其他形状的三角形, 该定理的证明才完整
- B. 证法 1 用严谨的推理证明了该定理
- C. 证法 2 用特殊到一般法证明了该定理
- D. 证法 2 只要测量够一百个三角形进行验证, 就能证明该定理

14. (2 分) 小明调查了本班每位同学最喜欢的颜色, 并绘制了不完整的扇形图 1 及条形图 2 (柱的高度从高到低排列). 条形图不小心被撕了一块, 图 2 中“()”应填的颜色是 ()



- A. 蓝
- B. 粉
- C. 黄
- D. 红

15. (2 分) 由 $(\frac{1+c}{2+c} - \frac{1}{2})$ 值的正负可以比较 $A = \frac{1+c}{2+c}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小, 下列正确的是 ()

- A. 当 $c = -2$ 时, $A = \frac{1}{2}$
- B. 当 $c = 0$ 时, $A \neq \frac{1}{2}$
- C. 当 $c < -2$ 时, $A > \frac{1}{2}$
- D. 当 $c < 0$ 时, $A < \frac{1}{2}$

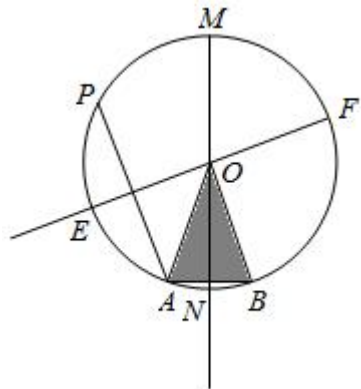
16. (2 分) 如图, 等腰 $\triangle AOB$ 中, 顶角 $\angle AOB = 40^\circ$, 用尺规按①到④的步骤操作:

- ①以 O 为圆心, OA 为半径画圆;
- ②在 $\odot O$ 上任取一点 P (不与点 A, B 重合), 连接 AP ;
- ③作 AB 的垂直平分线与 $\odot O$ 交于 M, N ;
- ④作 AP 的垂直平分线与 $\odot O$ 交于 E, F .

结论 I: 顺次连接 M, E, N, F 四点必能得到矩形;

结论 II: $\odot O$ 上只有唯一的点 P , 使得 $S_{\text{扇形} FOM} = S_{\text{扇形} AOB}$.

对于结论 I 和 II, 下列判断正确的是 ()

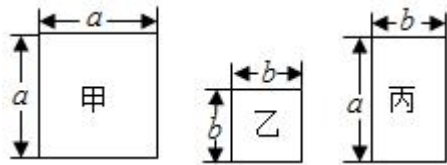


- A. I 和 II 都对 B. I 和 II 都不对 C. I 不对 II 对 D. I 对 II 不对

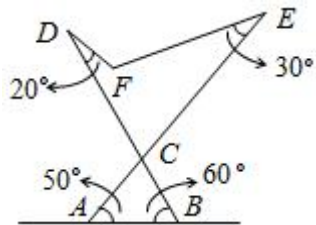
二、填空题 (本大题有 3 个小题, 每小题有 2 个空, 每空 2 分, 共 12 分)

17. (4 分) 现有甲、乙、丙三种不同的矩形纸片 (边长如图).

- (1) 取甲、乙纸片各 1 块, 其面积和为 _____;
- (2) 嘉嘉要用这三种纸片紧密拼接成一个大正方形, 先取甲纸片 1 块, 再取乙纸片 4 块, 还需取丙纸片 _____ 块.



18. (4 分) 如图是可调躺椅示意图 (数据如图), AE 与 BD 的交点为 C , 且 $\angle A$, $\angle B$, $\angle E$ 保持不变. 为了舒适, 需调整 $\angle D$ 的大小, 使 $\angle EFD = 110^\circ$, 则图中 $\angle D$ 应 _____ (填“增加”或“减少”) _____ 度.



19. (4 分) 用绘图软件绘制双曲线 $m: y = \frac{60}{x}$ 与动直线 $l: y = a$, 且交于一点, 图 1 为 $a = 8$ 时的视窗情形.

- (1) 当 $a = 15$ 时, l 与 m 的交点坐标为 _____;
- (2) 视窗的大小不变, 但其可视范围可以变化, 且变化前后原点 O 始终在视窗中心.

例如，为在视窗中看到（1）中的交点，可将图 1 中坐标系的单位长度变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，其可视范围就由 $-15 \leq x \leq 15$ 及 $-10 \leq y \leq 10$ 变成了 $-30 \leq x \leq 30$ 及 $-20 \leq y \leq 20$ （如图 2）。当 $a = -1.2$ 和 $a = -1.5$ 时， l 与 m 的交点分别是点 A 和 B ，为能看到 m 在 A 和 B 之间的一整段图象，需要将图 1 中坐标系的单位长度至少变为原来的 $\frac{1}{k}$ ，则整数 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

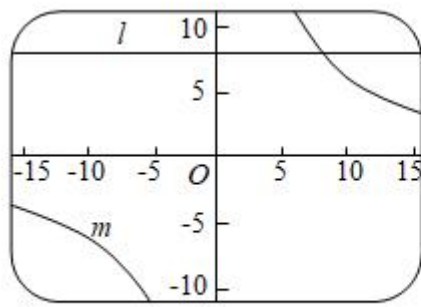


图1

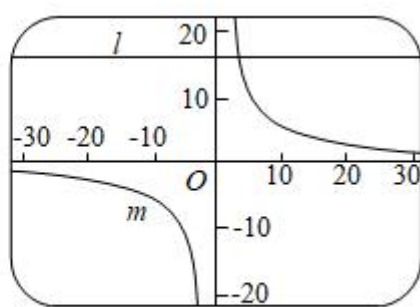


图2

三、解答题（本大题有 7 个小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

20.（8 分）某书店新进了一批图书，甲、乙两种书的进价分别为 4 元/本、10 元/本。现购进 m 本甲种书和 n 本乙种书，共付款 Q 元。

（1）用含 m, n 的代数式表示 Q ；

（2）若共购进 5×10^4 本甲种书及 3×10^3 本乙种书，用科学记数法表示 Q 的值。

21.（9 分）已知训练场球筐中有 A, B 两种品牌的乒乓球共 101 个，设 A 品牌乒乓球有 x 个。

（1）淇淇说：“筐里 B 品牌球是 A 品牌球的两倍。”嘉嘉根据她的说法列出了方程： $101 - x = 2x$ 。请用嘉嘉所列方程分析淇淇的说法是否正确；

（2）据工作人员透露： B 品牌球比 A 品牌球至少多 28 个，试通过列不等式的方法说明 A 品牌球最多有几个。

22.（9 分）某博物馆展厅的俯视示意图如图 1 所示。嘉淇进入展厅后开始自由参观，每走到一个十字道口，她自己可能直行，也可能向左转或向右转，且这三种可能性均相同。

（1）求嘉淇走到十字道口 A 向北走的概率；

（2）补全图 2 的树状图，并分析嘉淇经过两个十字道口后向哪个方向参观的概率较大。

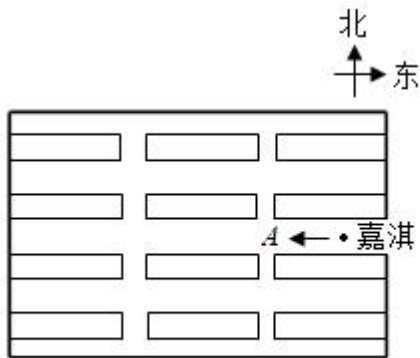


图1

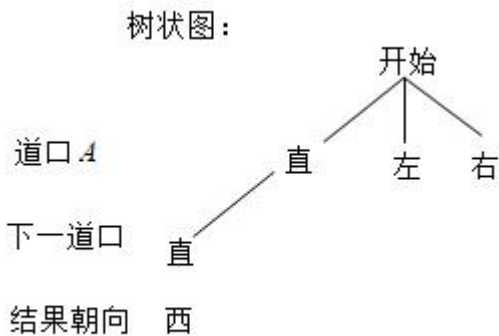
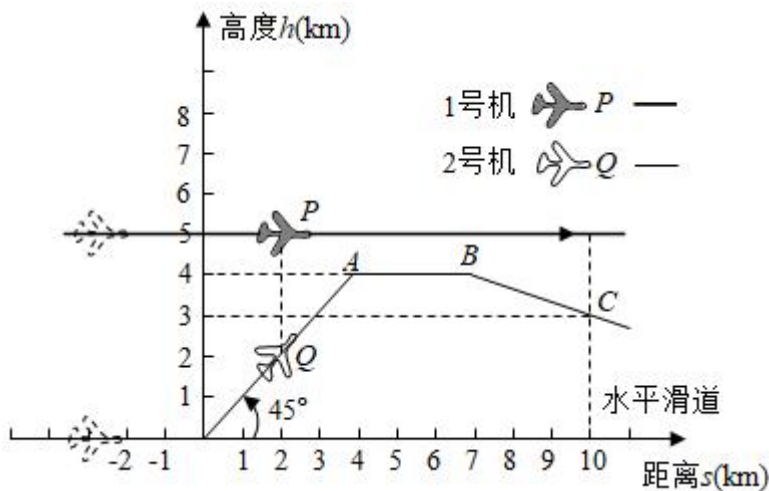


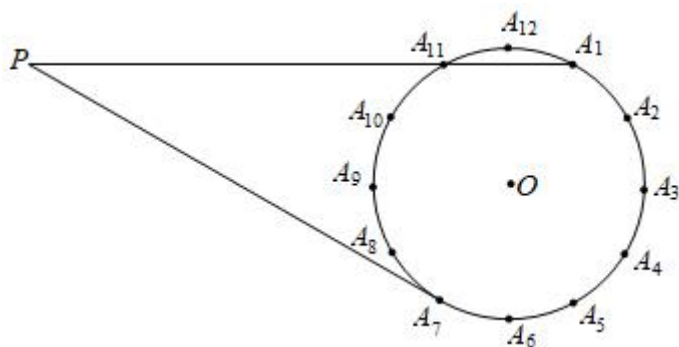
图2

23. (9分) 如图是某机场监控屏显示两飞机的飞行图象，1号指挥机（看成点 P ）始终以 $3\text{km}/\text{min}$ 的速度在离地面 5km 高的上空匀速向右飞行，2号试飞机（看成点 Q ）一直保持在1号机 P 的正下方. 2号机从原点 O 处沿 45° 仰角爬升，到 4km 高的 A 处便立刻转为水平飞行，再过 1min 到达 B 处开始沿直线 BC 降落，要求 1min 后到达 $C(10, 3)$ 处.
- (1) 求 OA 的 h 关于 s 的函数解析式，并直接写出2号机的爬升速度；
 - (2) 求 BC 的 h 关于 s 的函数解析式，并预计2号机着陆点的坐标；
 - (3) 通过计算说明两机距离 PQ 不超过 3km 的时长是多少.

[注：(1)及(2)中不必写 s 的取值范围]



24. (9分) 如图， $\odot O$ 的半径为6，将该圆周12等分后得到表盘模型，其中整钟点为 A_n (n 为1~12的整数)，过点 A_7 作 $\odot O$ 的切线交 A_1A_{11} 延长线于点 P .
- (1) 通过计算比较直径和劣弧 $\widehat{A_7A_{11}}$ 长度哪个更长；
 - (2) 连接 A_7A_{11} ，则 A_7A_{11} 和 PA_1 有什么特殊位置关系？请简要说明理由；
 - (3) 求切线长 PA_7 的值.



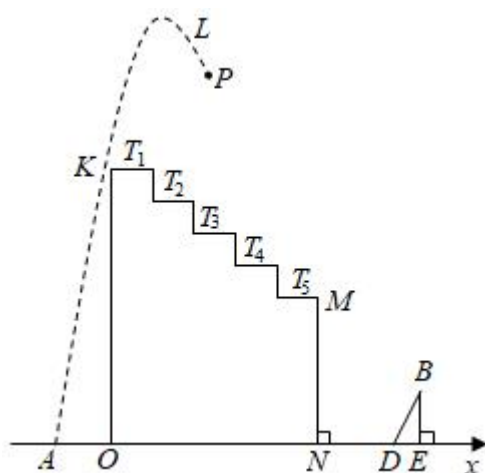
25. (10 分) 如图是某同学正在设计的一动画示意图, x 轴上依次有 A , O , N 三个点, 且 $AO = 2$, 在 ON 上方有五个台阶 $T_1 \sim T_5$ (各拐角均为 90°), 每个台阶的高、宽分别是 1 和 1.5, 台阶 T_1 到 x 轴距离 $OK = 10$. 从点 A 处向右上方沿抛物线 $L: y = -x^2 + 4x + 12$ 发出一个带光的点 P .

(1) 求点 A 的横坐标, 且在图中补画出 y 轴, 并直接指出点 P 会落在哪个台阶上;

(2) 当点 P 落到台阶上后立即弹起, 又形成了另一条与 L 形状相同的抛物线 C , 且最大高度为 11, 求 C 的解析式, 并说明其对称轴是否与台阶 T_5 有交点;

(3) 在 x 轴上从左到右有两点 D , E , 且 $DE = 1$, 从点 E 向上作 $EB \perp x$ 轴, 且 $BE = 2$. 在 $\triangle BDE$ 沿 x 轴左右平移时, 必须保证 (2) 中沿抛物线 C 下落的点 P 能落在边 BD (包括端点) 上, 则点 B 横坐标的最大值比最小值大多少?

[注: (2) 中不必写 x 的取值范围]



26. (12 分) 在一平面内, 线段 $AB = 20$, 线段 $BC = CD = DA = 10$, 将这四条线段顺次首尾相接. 把 AB 固定, 让 AD 绕点 A 从 AB 开始逆时针旋转角 α ($\alpha > 0^\circ$) 到某一位置时, BC , CD 将会跟随出现到相应的位置.

论证: 如图 1, 当 $AD \parallel BC$ 时, 设 AB 与 CD 交于点 O , 求证: $AO = 10$;

发现: 当旋转角 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\angle ADC$ 的度数可能是多少?

尝试：取线段 CD 的中点 M ，当点 M 与点 B 距离最大时，求点 M 到 AB 的距离；

拓展：①如图 2，设点 D 与 B 的距离为 d ，若 $\angle BCD$ 的平分线所在直线交 AB 于点 P ，直接写出 BP 的长（用含 d 的式子表示）；

②当点 C 在 AB 下方，且 AD 与 CD 垂直时，直接写出 a 的余弦值．

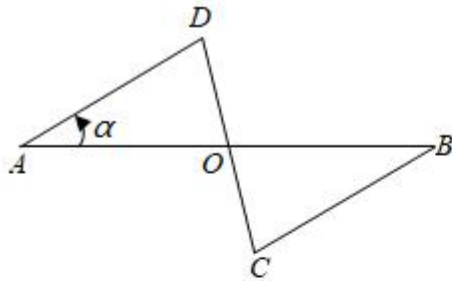


图1

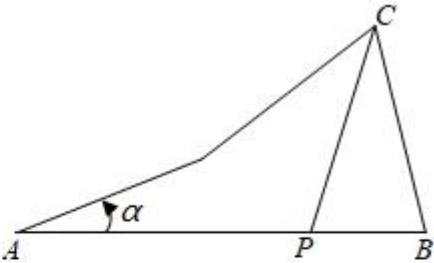
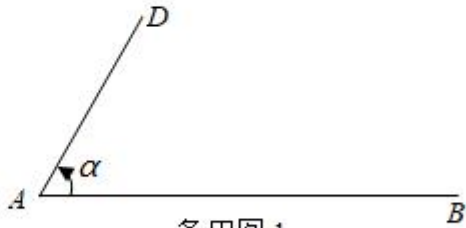


图2



备用图 1



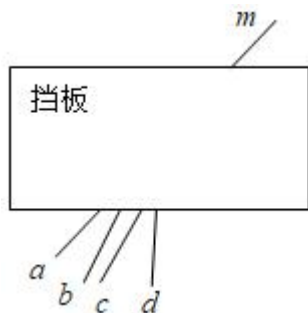
备用图 2

2021 年河北省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题有 16 个小题，共 42 分。1~10 小题各 3 分，11~16 小题各 2 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

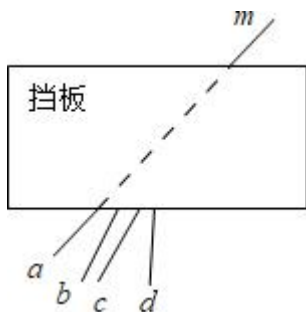
1. 如图，已知四条线段 a , b , c , d 中的一条与挡板另一侧的线段 m 在同一直线上，请借助直尺判断该线段是（ ）



- A. a B. b C. c D. d

【分析】利用直尺画出遮挡的部分即可得出结论.

【解答】解：利用直尺画出图形如下：



可以看出线段 a 与 m 在一条直线上.

故答案为： a .

故选： A .

2. 不一定相等的一组是（ ）

- A. $a+b$ 与 $b+a$ B. $3a$ 与 $a+a+a$
C. a^3 与 $a \cdot a \cdot a$ D. $3(a+b)$ 与 $3a+b$

【分析】 A ：根据加法交换律进行计算即可得出答案；

B ：根据整式的加法法则 - 合并同类项进行计算即可得出答案；

C ：根据同底数幂乘法法则进行计算即可得出答案；

D: 根据单项式乘以多项式法则进行计算即可得出答案.

【解答】解: A: 因为 $a+b=b+a$, 所以 A 选项一定相等;

B: 因为 $a+a+a=3a$, 所以 B 选项一定相等;

C: 因为 $a \cdot a \cdot a = a^3$, 所以 C 选项一定相等;

D: 因为 $3(a+b) = 3a+3b$, 所以 $3(a+b)$ 与 $3a+b$ 不一定相等.

故选: D.

3. 已知 $a > b$, 则一定有 $-4a \square -4b$, “ $\square$ ” 中应填的符号是 ()

A. $>$

B. $<$

C. $\geq$

D. $=$

【分析】根据不等式的性质: 不等式两边同时乘以负数, 不等号的方向改变, 即可选出答案.

【解答】解: 根据不等式的性质, 不等式两边同时乘以负数, 不等号的方向改变.

$$\because a > b,$$

$$\therefore -4a < -4b.$$

故选: B.

4. 与 $\sqrt{3^2-2^2-1^2}$ 结果相同的是 ()

A. $3-2+1$

B. $3+2-1$

C. $3+2+1$

D. $3-2-1$

【分析】化简 $\sqrt{3^2-2^2-1^2} = \sqrt{9-4-1} = \sqrt{4} = 2$, 再逐个选项判断即可.

【解答】解: $\sqrt{3^2-2^2-1^2} = \sqrt{9-4-1} = \sqrt{4} = 2$,

$\because 3-2+1=2$, 故 A 符合题意;

$\because 3+2-1=4$, 故 B 不符合题意;

$\because 3+2+1=6$, 故 C 不符合题意;

$\because 3-2-1=0$, 故 D 不符合题意.

故选: A.

5. 能与 $-(\frac{3}{4}-\frac{6}{5})$ 相加得 0 的是 ()

A. $-\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$

B. $\frac{6}{5}+\frac{3}{4}$

C. $-\frac{6}{5}+\frac{3}{4}$

D. $-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}$

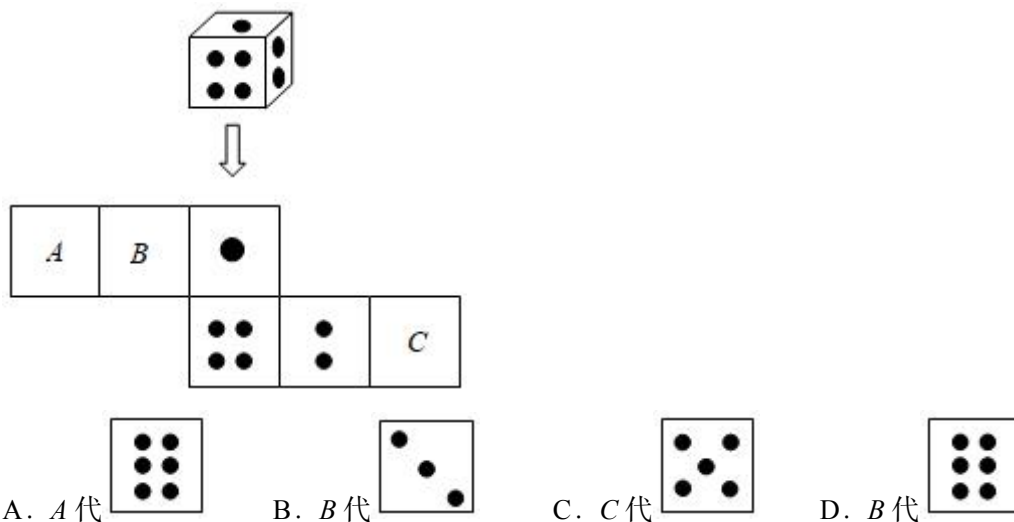
【分析】与 $-(\frac{3}{4}-\frac{6}{5})$ 相加得 0 的是他的相反数, 化简求相反数即可.

【解答】解: $-(\frac{3}{4}-\frac{6}{5}) = -\frac{3}{4}+\frac{6}{5}$, 与其相加得 0 的是 $-\frac{3}{4}+\frac{6}{5}$ 的相反数.

$$-\frac{3}{4} + \frac{6}{5} \text{ 的相反数为 } +\frac{3}{4} - \frac{6}{5},$$

故选：C.

6. 一个骰子相对两面的点数之和为 7，它的展开图如图，下列判断正确的是（ ）



【分析】 正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，根据这一特点对各选项分析判断后利用排除法求解．

【解答】 解：根据正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，
 A 与点数是 1 的对面， B 与点数是 2 的对面， C 与点数是 4 的对面，
 $\because$ 骰子相对两面的点数之和为 7，
 $\therefore A$ 代表的点数是 6， B 代表的点数是 5， C 代表的点数是 4．

故选：A.

7. 如图 1， $\square ABCD$ 中， $AD > AB$ ， $\angle ABC$ 为锐角．要在对角线 BD 上找点 N ， M ，使四边形 $ANCM$ 为平行四边形，现有图 2 中的甲、乙、丙三种方案，则正确的方案（ ）

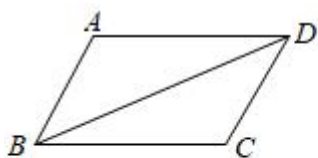
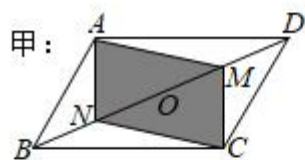
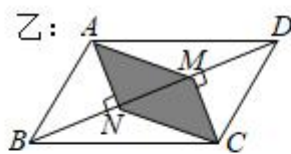


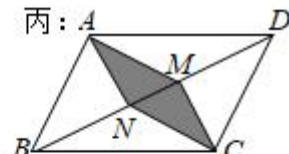
图1



取 BD 中点 O ，作
 $BN=NO, OM=MD$



作 $AN \perp BD$ 于 N ，
 $CM \perp BD$ 于 M



作 AN, CM 分别平分
 $\angle BAD, \angle BCD$

图2

A. 甲、乙、丙都是

B. 只有甲、乙才是

C. 只有甲、丙才是

D. 只有乙、丙才是

【分析】方案甲，连接 AC ，由平行四边形的性质得 $OB = OD$ ， $OA = OC$ ，则 $NO = OM$ ，得四边形 $ANCM$ 为平行四边形，方案甲正确；

方案乙：证 $\triangle ABN \cong \triangle CDM (AAS)$ ，得 $AN = CM$ ，再由 $AN \parallel CM$ ，得四边形 $ANCM$ 为平行四边形，方案乙正确；

方案丙：证 $\triangle ABN \cong \triangle CDM (ASA)$ ，得 $AN = CM$ ， $\angle ANB = \angle CMD$ ，则 $\angle ANM = \angle CMN$ ，证出 $AN \parallel CM$ ，得四边形 $ANCM$ 为平行四边形，方案丙正确。

【解答】解：方案甲中，连接 AC ，如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， O 为 BD 的中点，

$\therefore OB = OD$ ， $OA = OC$ ，

$\because BN = NO$ ， $OM = MD$ ，

$\therefore NO = OM$ ，

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形，方案甲正确；

方案乙中：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABN = \angle CDM$ ，

$\because AN \perp BD$ ， $CM \perp BD$ ，

$\therefore AN \parallel CM$ ， $\angle ANB = \angle CMD$ ，

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle CDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABN = \angle CDM \\ \angle ANB = \angle CMD \\ AB = CD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM (AAS),$

$\therefore AN = CM,$

又 $\because AN \parallel CM,$

$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形, 方案乙正确;

方案丙中: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle BAD = \angle BCD, AB = CD, AB \parallel CD,$

$\therefore \angle ABN = \angle CDM,$

$\because AN$ 平分 $\angle BAD, CM$ 平分 $\angle BCD,$

$\therefore \angle BAN = \angle DCM,$

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle CDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABN = \angle CDM \\ AB = CD \\ \angle BAN = \angle DCM \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABN \cong \triangle CDM (ASA),$

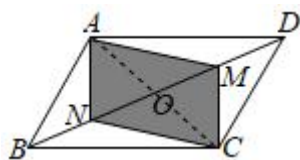
$\therefore AN = CM, \angle ANB = \angle CMD,$

$\therefore \angle ANM = \angle CMN,$

$\therefore AN \parallel CM,$

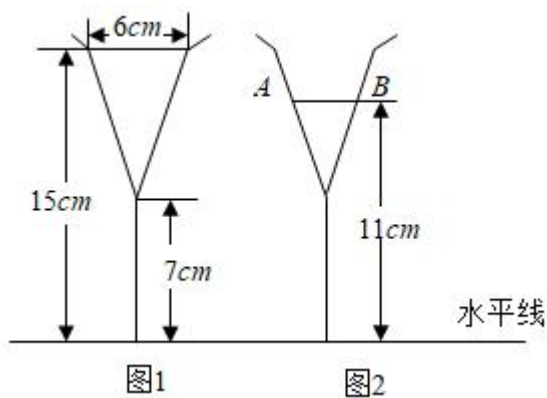
$\therefore$ 四边形 $ANCM$ 为平行四边形, 方案丙正确;

故选: A.



8. 图 1 是装了液体的高脚杯示意图 (数据如图), 用去一部分液体后如图 2 所示, 此时液面

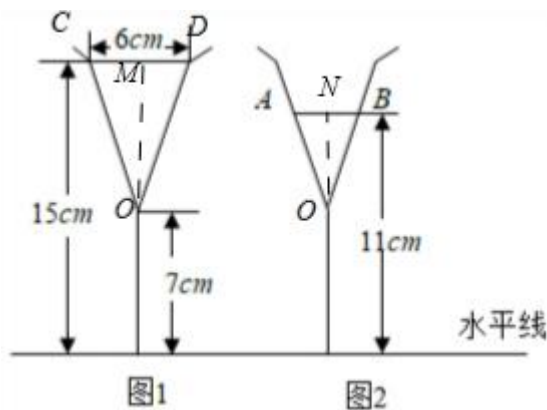
$AB = (\quad)$



- A. 1cm B. 2cm C. 3cm D. 4cm

【分析】高脚杯前后的两个三角形相似，根据相似三角形的判定和性质即可得出结果．

【解答】解：如图：过 O 作 $OM \perp CD$ ，垂足为 M ，过 O 作 $ON \perp AB$ ，垂足为 N ，



$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDO \sim \triangle ABO, \text{ 即相似比为 } \frac{CD}{AB},$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{OM}{ON},$$

$$\because OM = 15 - 7 = 8, \quad ON = 11 - 7 = 4,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{OM}{ON},$$

$$\frac{6}{AB} = \frac{8}{4}, \quad \therefore$$

$$AB = 3,$$

故选：C．

9. 若 $\sqrt[3]{3}$ 取 1.442，计算 $\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} - 98\sqrt[3]{3}$ 的结果是（ ）

- A. -100 B. -144.2 C. 144.2 D. -0.01442

【分析】根据立方根的概念直接代入式子进行计算可得答案．

【解答】解：∵ $\sqrt[3]{3}$ 取 1.442，

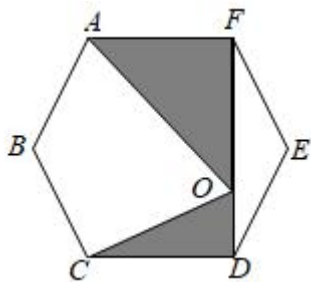
$$\therefore \text{原式} = \sqrt[3]{3} \times (1 - 3 - 98)$$

$$= 1.442 \times (-100)$$

$$= -144.2.$$

故选：B.

10. 如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 对角线 FD 上一点， $S_{\triangle AFO} = 8$ ， $S_{\triangle CDO} = 2$ ，则 $S_{\text{正六边形 } ABCDEF}$ 的值是 ()



A. 20

B. 30

C. 40

D. 随点 O 位置而变化

【分析】正六边形 $ABCDEF$ 的面积 $= S_{\text{矩形 } AFDC} + S_{\triangle EFD} + S_{\triangle ABC}$ ，由正六边形每个边相等，每个角相等可得 $FD = \sqrt{3}AF$ ，过 E 作 FD 垂线，垂足为 M ，利用解直角三角形可得 $\triangle FED$ 的高，即可求出正六边形的面积.

【解答】解：设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 x ，

过 E 作 FD 的垂线，垂足为 M ，连接 AC ，

$$\because \angle FED = 120^\circ, FE = ED,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle FDE,$$

$$\therefore \angle EDF = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle FED)$$

$$= 30^\circ,$$

$$\therefore \text{正六边形 } ABCDEF \text{ 的每个角为 } 120^\circ.$$

$$\therefore \angle CDF = 120^\circ - \angle EDF = 90^\circ.$$

$$\text{同理 } \angle AFD = \angle FAC = \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } AFDC \text{ 为矩形},$$

$$\therefore S_{\triangle AFO} = \frac{1}{2} FO \times AF,$$

$$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} OD \times CD,$$

在正六边形 $ABCDEF$ 中, $AF = CD$,

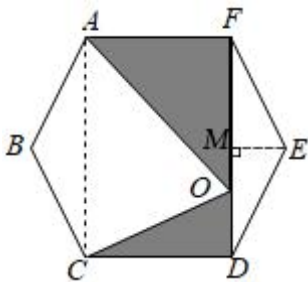
$$\therefore S_{\triangle AFO} + S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} FO \times AF + \frac{1}{2} OD \times CD$$

$$= \frac{1}{2} (FO + OD) \times AF$$

$$= \frac{1}{2} FD \times AF$$

$$= 10,$$

$$\therefore FD \times AF = 20,$$



$$DM = \cos 30^\circ \quad DE = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$DF = 2DM = \sqrt{3}x,$$

$$EM = \sin 30^\circ \quad DE = \frac{x}{2},$$

$$\therefore S_{\text{正六边形 } ABCDEF} = S_{\text{矩形 } AFDC} + S_{\triangle EFD} + S_{\triangle ABC}$$

$$= AF \times FD + 2S_{\triangle EFD}$$

$$= x \cdot \sqrt{3}x + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{2}x$$

$$= \sqrt{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

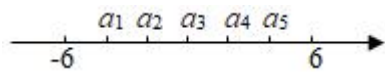
$$= 20 + 10$$

$$= 30,$$

故选: B.

11. (2分) 如图, 将数轴上 -6 与 6 两点间的线段六等分, 这五个等分点所对应数依次为

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , 则下列正确的是 ()



A. $a_3 > 0$

B. $|a_1| = |a_4|$

C. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$

D. $a_2 + a_5 < 0$

【分析】先计算出 -6 与 6 两点间的线段的长度为 12 ，再求出六等分后每个等分的线段的长度为 2 ，从而求出 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 表示的数，然后判断各选项即可。

【解答】解： -6 与 6 两点间的线段的长度 $= 6 - (-6) = 12$ ，

六等分后每个等分的线段的长度 $= 12 \div 6 = 2$ ，

$\therefore a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 表示的数为： $-4, -2, 0, 2, 4$ ，

A 选项， $a_3 = -6 + 2 \times 3 = 0$ ，故该选项错误；

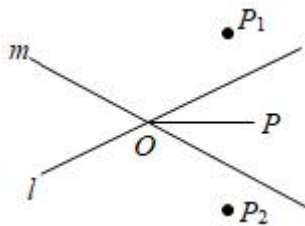
B 选项， $|-4| \neq 2$ ，故该选项错误；

C 选项， $-4 + (-2) + 0 + 2 + 4 = 0$ ，故该选项正确；

D 选项， $-2 + 4 = 2 > 0$ ，故该选项错误；

故选：C。

12. (2 分) 如图，直线 l, m 相交于点 O 。P 为这两直线外一点，且 $OP = 2.8$ 。若点 P 关于直线 l, m 的对称点分别是点 P_1, P_2 ，则 P_1, P_2 之间的距离可能是 ()



A. 0

B. 5

C. 6

D. 7

【分析】由对称得 $OP_1 = OP = 2.8$ ， $OP = OP_2 = 2.8$ ，再根据三角形任意两边之和大于第三边，即可得出结果。

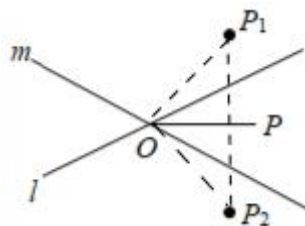
【解答】解：连接 OP_1, OP_2, P_1P_2 ，

$\because$ 点 P 关于直线 l, m 的对称点分别是点 P_1, P_2 ，

$\therefore OP_1 = OP = 2.8, OP = OP_2 = 2.8$ ，

$OP_1 + OP_2 > P_1P_2$ ，

$P_1P_2 < 5.6$ ，



故选：B。

13. (2 分) 定理：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和。

已知：如图， $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角．求证： $\angle ACD = \angle A + \angle B$ ．

证法 1：如图，

$$\because \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ \quad (\text{三角形内角和定理}),$$

$$\text{又} \because \angle ACD + \angle ACB = 180^\circ \quad (\text{平角定义}),$$

$$\therefore \angle ACD + \angle ACB = \angle A + \angle B + \angle ACB \quad (\text{等量代换}).$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B \quad (\text{等式性质}).$$

证法 2：如图，

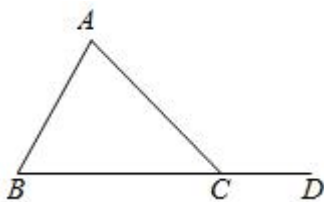
$$\because \angle A = 76^\circ, \quad \angle B = 59^\circ,$$

$$\text{且} \angle ACD = 135^\circ \quad (\text{量角器测量所得})$$

$$\text{又} \because 135^\circ = 76^\circ + 59^\circ \quad (\text{计算所得})$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B \quad (\text{等量代换}).$$

下列说法正确的是（ ）



- A．证法 1 还需证明其他形状的三角形，该定理的证明才完整
- B．证法 1 用严谨的推理证明了该定理
- C．证法 2 用特殊到一般法证明了该定理
- D．证法 2 只要测量够一百个三角形进行验证，就能证明该定理

【分析】 依据定理证明的一般步骤进行分析判断即可得出结论．

【解答】 解： $\because$ 证法 1 按照定理证明的一般步骤，从已知出发经过严谨的推理论证，得出结论的正确，具有一般性，无需再证明其他形状的三角形，

$\therefore A$ 的说法不正确，不符合题意；

$\because$ 证法 1 按照定理证明的一般步骤，从已知出发经过严谨的推理论证，得出结论的正确，

$\therefore B$ 的说法正确，符合题意；

$\because$ 定理的证明必须经过严谨的推理论证，不能用特殊情形来说明，

$\therefore C$ 的说法不正确，不符合题意；

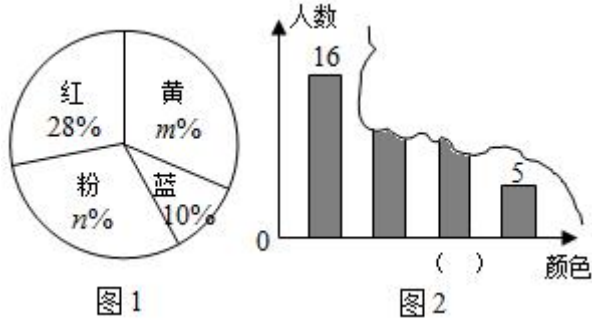
$\because$ 定理的证明必须经过严谨的推理论证，与测量次解答数的多少无关，

$\therefore D$ 的说法不正确，不符合题意；

综上， B 的说法正确．

故选： B ．

14. (2 分) 小明调查了本班每位同学最喜欢的颜色，并绘制了不完整的扇形图 1 及条形图 2 (柱的高度从高到低排列)．条形图不小心被撕了一块，图 2 中“()”应填的颜色是 ()



- A. 蓝 B. 粉 C. 黄 D. 红

【分析】根据柱的高度从高到低排列的和扇形所占的百分比得出蓝色是 5，所占的百分比是 10%，求出调查的总人数，用 16 除以总人数得出所占的百分比，从而排除是红色，再根据红色所占的百分比求出喜欢红色的人数，再用总人数减去其他人数，求出另一组的人数，再根据柱的高度从高到低排列，从而得出答案．

【解答】解：根据题意得：

$$5 \div 10\% = 50 \text{ (人)},$$

$$16 \div 50\% = 32\%,$$

$$\text{则喜欢红色的人数是: } 50 \times 28\% = 14 \text{ (人)},$$

$$50 - 16 - 5 - 14 = 15 \text{ (人)},$$

$\therefore$ 柱的高度从高到低排列，

$\therefore$ 图 2 中“()”应填的颜色是红色．

故选： D ．

15. (2 分) 由 $(\frac{1+c}{2+c} - \frac{1}{2})$ 值的正负可以比较 $A = \frac{1+c}{2+c}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小，下列正确的是 ()

A. 当 $c = -2$ 时， $A = \frac{1}{2}$

B. 当 $c = 0$ 时， $A \neq \frac{1}{2}$

C. 当 $c < -2$ 时， $A > \frac{1}{2}$

D. 当 $c < 0$ 时， $A < \frac{1}{2}$

【分析】将 $c = -2$ 和 0 分别代入 A 中计算求值即可判断出 A ， B 的对错；当 $c < -2$ 和 $c < 0$ 时计算 $\frac{1+c}{2+c} - \frac{1}{2}$ 的正负，即可判断出 C ， D 的对错．

【解答】解：A 选项，当 $c = -2$ 时， $A = \frac{1-2}{2+2} = -\frac{1}{4}$ ，故该选项不符合题意；

B 选项，当 $c = 0$ 时， $A = \frac{1}{2}$ ，故该选项不符合题意；

$$\begin{aligned} \text{C 选项, } & \frac{1+c}{2+c} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2+2c}{2(2+c)} - \frac{2+c}{2(2+c)} \\ &= \frac{c}{2(2+c)}, \end{aligned}$$

$$\because c < -2,$$

$$\therefore 2+c < 0, \quad c < 0,$$

$$\therefore 2(2+c) < 0,$$

$$\therefore \frac{c}{2(2+c)} > 0,$$

$$\therefore A > \frac{1}{2}, \text{ 故该选项符合题意；}$$

D 选项，当 $c < 0$ 时， $\because 2(2+c)$ 的正负无法确定，

$\therefore A$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小就无法确定，故该选项不符合题意；

故选：C.

16. (2 分) 如图，等腰 $\triangle AOB$ 中，顶角 $\angle AOB = 40^\circ$ ，用尺规按①到④的步骤操作：

①以 O 为圆心， OA 为半径画圆；

②在 $\odot O$ 上任取一点 P (不与点 A, B 重合)，连接 AP ；

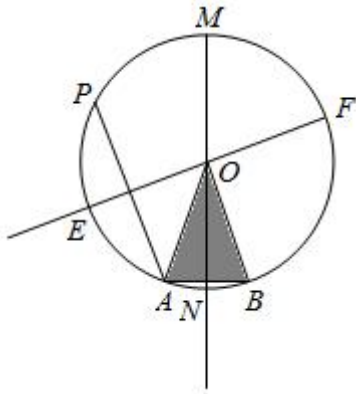
③作 AB 的垂直平分线与 $\odot O$ 交于 M, N ；

④作 AP 的垂直平分线与 $\odot O$ 交于 E, F 。

结论 I：顺次连接 M, E, N, F 四点必能得到矩形；

结论 II： $\odot O$ 上只有唯一的点 P ，使得 $S_{\text{扇形 } FOM} = S_{\text{扇形 } AOB}$ 。

对于结论 I 和 II，下列判断正确的是 ()



- A. I 和 II 都对 B. I 和 II 都不对 C. I 不对 II 对 D. I 对 II 不对

【分析】如图，连接 EM ， EN ， MF ， NF 。根据矩形的判定证明四边形 $MENF$ 是矩形，再说明 $\angle MOF \neq \angle AOB$ ，可知（II）错误。

【解答】解：如图，连接 EM ， EN ， MF ， NF 。

$$\because OM = ON, OE = OF,$$

$\therefore$ 四边形 $MENF$ 是平行四边形，

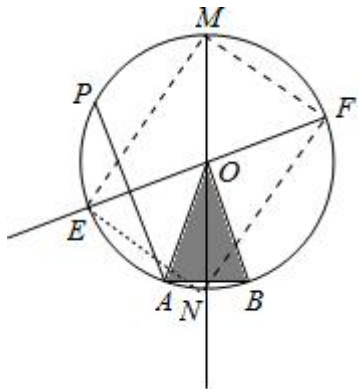
$$\because EF = MN,$$

$\therefore$ 四边形 $MENF$ 是矩形，故（I）正确，

观察图象可知 $\angle MOF \neq \angle AOB$ ，

$$\therefore S_{\text{扇形} FOM} \neq S_{\text{扇形} AOB}, \text{ 故（II）错误，}$$

故选：D。

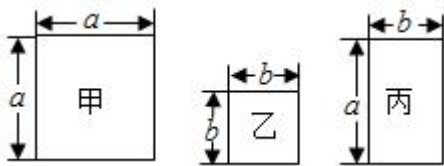


二、填空题（本大题有 3 个小题，每小题有 2 个空，每空 2 分，共 12 分）

17.（4 分）现有甲、乙、丙三种不同的矩形纸片（边长如图）。

（1）取甲、乙纸片各 1 块，其面积和为 $a^2 + b^2$ ；

（2）嘉嘉要用这三种纸片紧密拼接成一个大正方形，先取甲纸片 1 块，再取乙纸片 4 块，还需取丙纸片 4 块。



【分析】(1) 由图可知：一块甲种纸片面积为 a^2 ，一块乙种纸片的面积为 b^2 ，一块丙种纸片面积为 ab ，即可求解；

(2) 利用完全平方公式可求解．

【解答】解：(1) 由图可知：一块甲种纸片面积为 a^2 ，一块乙种纸片的面积为 b^2 ，一块丙种纸片面积为 ab ，

$\therefore$ 取甲、乙纸片各 1 块，其面积和为 $a^2 + b^2$ ，

故答案为： $a^2 + b^2$ ；

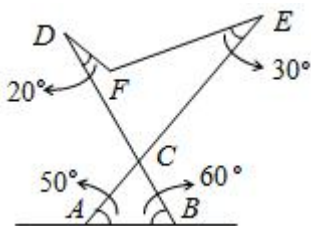
(2) 设取丙种纸片 x 块才能用它们拼成一个新的正方形，

$\therefore a^2 + 4b^2 + xab$ 是一个完全平方式，

$\therefore x$ 为 4，

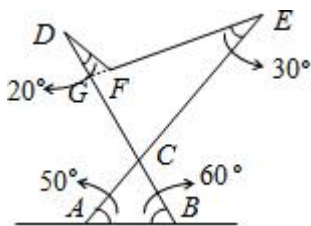
故答案为： 4．

18. (4 分) 如图是可调躺椅示意图 (数据如图), AE 与 BD 的交点为 C , 且 $\angle A$, $\angle B$, $\angle E$ 保持不变. 为了舒适, 需调整 $\angle D$ 的大小, 使 $\angle EFD = 110^\circ$, 则图中 $\angle D$ 应 减小 (填“增加”或“减少”) 10 度.



【分析】延长 EF , 交 CD 于点 G , 依据三角形的内角和定理可求 $\angle ACB$, 根据对顶角相等可得 $\angle DCE$, 再由三角形内角和定理的推论得到 $\angle DGF$ 的度数; 利用 $\angle EFD = 110^\circ$, 和三角形的外角的性质可得 $\angle D$ 的度数, 从而得出结论.

【解答】解: 延长 EF , 交 CD 于点 G , 如图:



$$\because \angle ACB = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle ACB = 70^\circ.$$

$$\because \angle DGF = \angle DCE + \angle E,$$

$$\therefore \angle DGF = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ.$$

$$\because \angle EFD = 110^\circ, \angle EFD = \angle DGF + \angle D,$$

$$\therefore \angle D = 10^\circ.$$

而图中 $\angle D = 20^\circ$,

$\therefore \angle D$ 应减小 10° .

故答案为: 减小, 10.

19. (4分) 用绘图软件绘制双曲线 $m: y = \frac{60}{x}$ 与动直线 $l: y = a$, 且交于一点, 图 1 为 $a = 8$ 时的视窗情形.

(1) 当 $a = 15$ 时, l 与 m 的交点坐标为 (4, 15);

(2) 视窗的大小不变, 但其可视范围可以变化, 且变化前后原点 O 始终在视窗中心.

例如, 为在视窗中看到 (1) 中的交点, 可将图 1 中坐标系的单位长度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 其

可视范围就由 $-15 \leq x \leq 15$ 及 $-10 \leq y \leq 10$ 变成了 $-30 \leq x \leq 30$ 及 $-20 \leq y \leq 20$ (如图

2). 当 $a = -1.2$ 和 $a = -1.5$ 时, l 与 m 的交点分别是点 A 和 B , 为能看到 m 在 A 和 B 之间的一整段图象, 需要将图 1 中坐标系的单位长度至少变为原来的 $\frac{1}{k}$, 则整数 $k =$ 4.

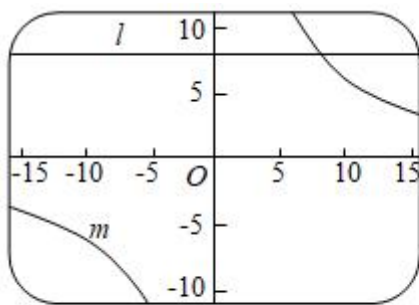


图1

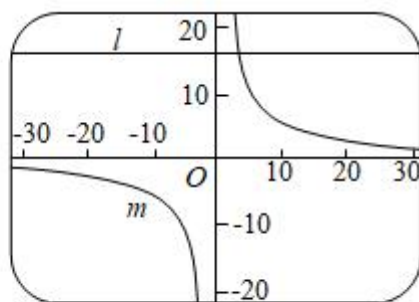


图2

【分析】 (1) $a = 15$ 时, $y = 15$, 解 $\begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = 15 \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 15 \end{cases}$, 即 l 与 m 的交点坐标为 (4,

15);

(2) 由 $\begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = -1.2 \end{cases}$ 得 $A(-50, -1.2)$, 由 $\begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = -1.5 \end{cases}$ 得 $B(-40, -1.5)$, 为能看到横坐

标是 - 50 的点，需要将图 1 中坐标系的单位长度至少变为原来的 $\frac{1}{4}$ ，即可得整数 $k = 4$ 。

【解答】解：（1） $a = 15$ 时， $y = 15$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = 15 \end{cases} \text{得：} \begin{cases} x = 4 \\ y = 15 \end{cases},$$

故答案为：（4，15）；

$$\text{（2）由} \begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = -1.2 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -50 \\ y = -1.2 \end{cases},$$

$\therefore A(-50, -1.2)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{60}{x} \\ y = -1.5 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = -40 \\ y = -1.5 \end{cases},$$

$\therefore B(-40, -1.5)$ ，

为能看到 m 在 $A(-50, -1.2)$ 和 $B(-40, -1.5)$ 之间的一整段图象，需要将图 1 中坐标系的单位长度至少变为原来的 $\frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 整数 $k = 4$ 。

故答案为：4。

三、解答题（本大题有 7 个小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

20.（8 分）某书店新进了一批图书，甲、乙两种书的进价分别为 4 元/本、10 元/本。现购进 m 本甲种书和 n 本乙种书，共付款 Q 元。

（1）用含 m, n 的代数式表示 Q ；

（2）若共购进 5×10^4 本甲种书及 3×10^3 本乙种书，用科学记数法表示 Q 的值。

【分析】（1）分析题目，看懂题意即可根据题意列出代数式；

（2）根据（1）式的代数式将数字代入，再用科学记数法表示出即可。

【解答】（1）由题意可得： $Q = 4m + 10n$ ；

（2）将 $m = 5 \times 10^4$ ， $n = 3 \times 10^3$ 代入（1）式得：

$$Q = 4 \times 5 \times 10^4 + 10 \times 3 \times 10^3 = 2.3 \times 10^5.$$

21.（9 分）已知训练场球筐中有 A 、 B 两种品牌的乒乓球共 101 个，设 A 品牌乒乓球有 x 个。

（1）淇淇说：“筐里 B 品牌球是 A 品牌球的两倍。”嘉嘉根据她的说法列出了方程： $101 - x = 2x$ 。请用嘉嘉所列方程分析淇淇的说法是否正确；

(2) 据工作人员透露: B 品牌球比 A 品牌球至少多 28 个, 试通过列不等式的方法说明 A 品牌球最多有几个.

【分析】(1) 解嘉嘉所列的方程可得出 x 的值, 由 x 的值不为整数, 即可得出淇淇的说法不正确;

(2) 设 A 品牌乒乓球有 x 个, 则 B 品牌乒乓球有 $(101 - x)$ 个, 根据 B 品牌球比 A 品牌球至少多 28 个, 即可得出关于 x 的一元一次不等式, 解之即可得出 x 的取值范围, 再取其中的最大整数值即可得出结论.

【解答】解: (1) 嘉嘉所列方程为 $101 - x = 2x$,

$$\text{解得: } x = 33\frac{2}{3},$$

又 $\because x$ 为整数,

$$\therefore x = 33\frac{2}{3} \text{ 不合题意,}$$

$\therefore$ 淇淇的说法不正确.

(2) 设 A 品牌乒乓球有 x 个, 则 B 品牌乒乓球有 $(101 - x)$ 个,

依题意得: $101 - x - x \geq 28$,

$$\text{解得: } x \leq 36\frac{1}{2},$$

又 $\because x$ 为整数,

$\therefore x$ 可取的最大值为 36.

答: A 品牌球最多有 36 个.

22. (9 分) 某博物馆展厅的俯视示意图如图 1 所示. 嘉淇进入展厅后开始自由参观, 每走到一个十字道口, 她自己可能直行, 也可能向左转或向右转, 且这三种可能性均相同.

(1) 求嘉淇走到十字道口 A 向北走的概率;

(2) 补全图 2 的树状图, 并分析嘉淇经过两个十字道口后向哪个方向参观的概率较大.

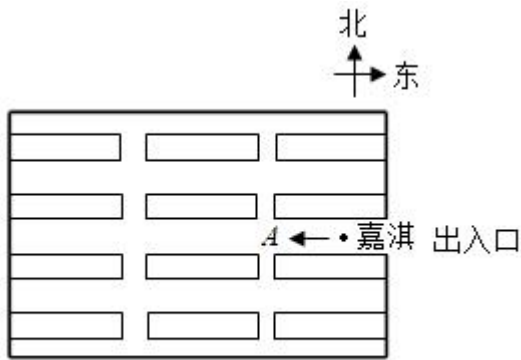


图1

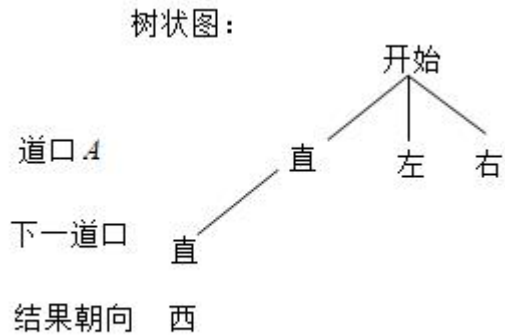


图2

【分析】(1) 直接由概率公式求解即可；

(2) 补全树状图，共有 9 种等可能的结果，嘉淇经过两个十字路口后向西参观的结果有 3 种，向南参观的结果有 2 种，向北参观的结果有 2 种，向东参观的结果有 2 种，由概率公式求解即可．

【解答】解：(1) 嘉淇走到十字路口 A 向北走的概率为 $\frac{1}{3}$ ；

(2) 补全树状图如下：

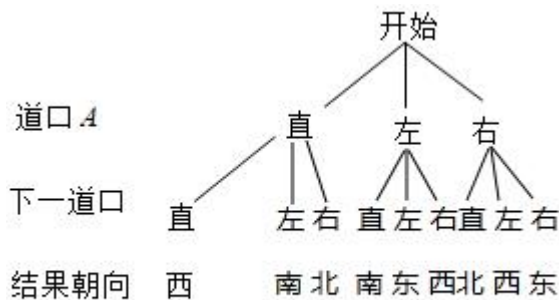


图2

共有 9 种等可能的结果，嘉淇经过两个十字路口后向西参观的结果有 3 种，向南参观的结果有 2 种，向北参观的结果有 2 种，向东参观的结果有 2 种，

$\therefore$ 向西参观的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，向南参观的概率 = 向北参观的概率 = 向东参观的概率 = $\frac{2}{9}$ ，

$\therefore$ 向西参观的概率大．

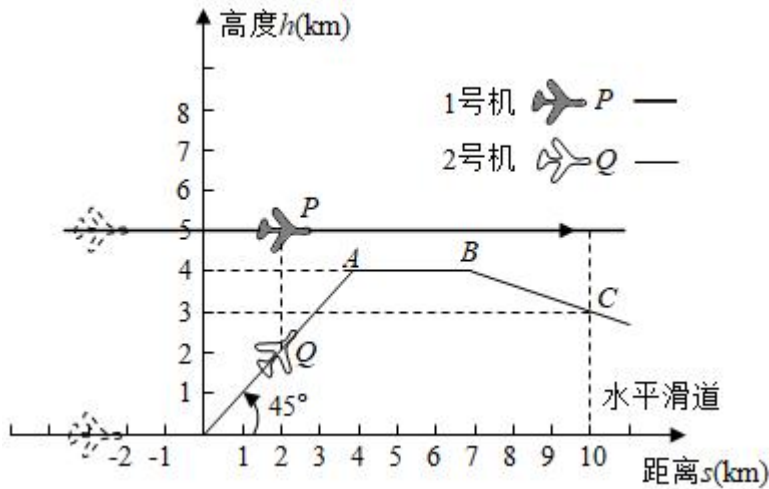
23. (9 分) 如图是某机场监控屏显示两飞机的飞行图象，1 号指挥机（看成点 P）始终以 3km/min 的速度在离地面 5km 高的上空匀速向右飞行，2 号试飞机（看成点 Q）一直保持在 1 号机 P 的正下方．2 号机从原点 O 处沿 45° 仰角爬升，到 4km 高的 A 处便立刻转为水平飞行，再过 1min 到达 B 处开始沿直线 BC 降落，要求 1min 后到达 C (10, 3) 处．

(1) 求 OA 的 h 关于 s 的函数解析式，并直接写出 2 号机的爬升速度；

(2) 求 BC 的 h 关于 s 的函数解析式，并预计 2 号机着陆点的坐标；

(3) 通过计算说明两机距离 PQ 不超过 3km 的时长是多少.

[注: (1) 及 (2) 中不必写 s 的取值范围]



【分析】(1) 由爬升角度为 45° , 可知 OA 上的点的横纵坐标相同, 由此得到点 A 坐标, 用待定系数法 OA 解析式可求; 利用 2 号试飞机一直保持在 1 号机的正下方, 可知它们的飞行的时间和飞行的水平距离相同, 由此可求爬升速度;

(2) 设 BC 的解析式为 $h = ms + n$, 由题意将 B, C 坐标代入即可求得; 令 $h = 0$, 求得 s , 即可得到结论;

(3) PQ 不超过 3km , 得到 $5 - h \leq 3$, 利用 (1)(2) 中的解析式得出关于 s 的不等式组, 确定 s 的取值范围, 得出了两机距离 PQ 不超过 3km 的飞行的水平距离, 再除以 1 号飞机的飞行速度, 结论可得.

【解答】解: (1) $\because$ 2 号飞机爬升角度为 45° ,

$\therefore OA$ 上的点的横纵坐标相同.

$\therefore A(4, 4)$.

设 OA 的解析式为: $h = ks$,

$\therefore 4k = 4$.

$\therefore k = 1$.

$\therefore OA$ 的解析式为: $h = s$.

$\because$ 2 号试飞机一直保持在 1 号机的正下方,

$\therefore$ 它们的飞行的时间和飞行的水平距离相同.

$\therefore$ 2 号机的爬升到 A 处时水平方向上移动了 4km , 爬升高度为 4km ,

又 1 号机的飞行速度为 $3\text{km}/\text{min}$,

$\therefore 2$ 号机的爬升速度为： $4 \div \frac{4}{3} = 3 \text{ km/min}$.

(2) 设 BC 的解析式为 $h = ms + n$,

由题意： $B(7, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} 7m + n = 4 \\ 10m + n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ n = \frac{19}{3} \end{cases}.$$

$\therefore BC$ 的解析式为 $h = -\frac{1}{3}s + \frac{19}{3}$.

令 $h = 0$, 则 $s = 19$.

$\therefore$ 预计 2 号机着陆点的坐标为 $(19, 0)$.

(3) $\because PQ$ 不超过 3 km ,

$\therefore 5 - h \leq 3$.

$$\therefore \begin{cases} 5 - s \leq 3 \\ 5 - (-\frac{1}{3}s + \frac{19}{3}) \leq 3 \end{cases},$$

解得： $2 \leq s \leq 13$.

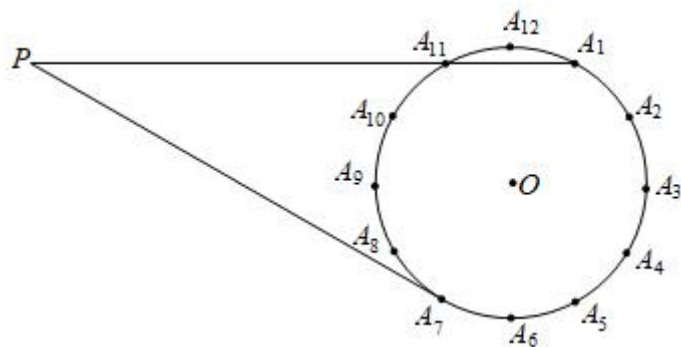
$\therefore$ 两机距离 PQ 不超过 3 km 的时长为： $(13 - 2) \div 3 = \frac{11}{3} \text{ min}$.

24. (9 分) 如图, $\odot O$ 的半径为 6, 将该圆周 12 等分后得到表盘模型, 其中整钟点为 A_n (n 为 1~12 的整数), 过点 A_7 作 $\odot O$ 的切线交 A_1A_{11} 延长线于点 P .

(1) 通过计算比较直径和劣弧 $\widehat{A_7A_{11}}$ 长度哪个更长;

(2) 连接 A_7A_{11} , 则 A_7A_{11} 和 PA_1 有什么特殊位置关系? 请简要说明理由;

(3) 求切线长 PA_7 的值.



【分析】(1) 利用弧长公式求解即可.

(2) 利用圆周角定理证明即可.

(3) 解直角三角形求出 PA_7 即可.

【解答】解: (1) 由题意, $\angle A_7OA_{11} = 120^\circ$,

$$\therefore \widehat{A_7A_{11}} \text{ 的长} = \frac{120\pi \cdot 6}{180} = 4\pi > 12,$$

$\therefore \widehat{A_7A_{11}}$ 比直径长.

(2) 结论: $PA_1 \perp A_7A_{11}$.

理由: 连接 A_1A_7 .

$\because A_1A_7$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle A_7A_{11}A_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore PA_1 \perp A_7A_{11}.$$

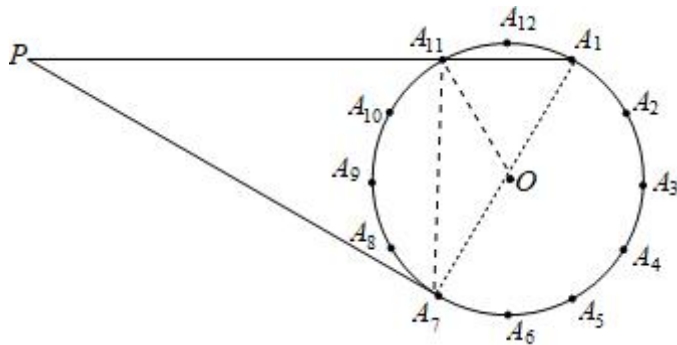
(3) $\because PA_7$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore PA_7 \perp A_1A_7,$$

$$\therefore \angle PA_7A_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PA_1A_7 = 60^\circ, A_1A_7 = 12,$$

$$\therefore PA_7 = A_1A_7 \cdot \tan 60^\circ = 12\sqrt{3}.$$



25. (10 分) 如图是某同学正在设计的一动画示意图, x 轴上依次有 A , O , N 三个点, 且 $AO = 2$, 在 ON 上方有五个台阶 $T_1 \sim T_5$ (各拐角均为 90°), 每个台阶的高、宽分别是 1 和 1.5, 台阶 T_1 到 x 轴距离 $OK = 10$. 从点 A 处向右上方沿抛物线 $L: y = -x^2 + 4x + 12$ 发出一个带光的点 P .

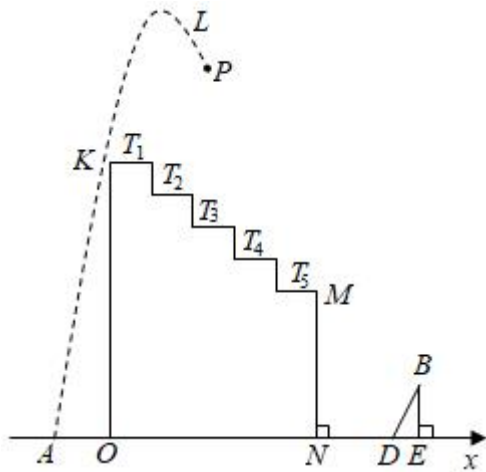
(1) 求点 A 的横坐标, 且在图中补画出 y 轴, 并直接指出点 P 会落在哪个台阶上;

(2) 当点 P 落到台阶上后立即弹起, 又形成了另一条与 L 形状相同的抛物线 C , 且最大

高度为 11，求 C 的解析式，并说明其对称轴是否与台阶 T_5 有交点；

(3) 在 x 轴上从左到右有两点 D, E ，且 $DE = 1$ ，从点 E 向上作 $EB \perp x$ 轴，且 $BE = 2$ 。在 $\triangle BDE$ 沿 x 轴左右平移时，必须保证 (2) 中沿抛物线 C 下落的点 P 能落在边 BD (包括端点) 上，则点 B 横坐标的最大值比最小值大多少？

[注：(2) 中不必写 x 的取值范围]



【分析】(1) 由题意台阶 T_4 的左边端点 $(4.5, 7)$ ，右边端点的坐标 $(6, 7)$ ，求出 $x = 4.5, 6$ 时的 y 的值，即可判断。

(2) 由题意抛物线 $C: y = -x^2 + bx + c$ ，经过 $R(5, 7)$ ，最高点的纵坐标为 11，构建方程组求出 b, c ，可得结论。

(3) 求出抛物线与 x 轴的交点，以及 $y = 2$ 时，点的坐标，判断出两种特殊位置点 B 的横坐标的值，可得结论。

【解答】解：(1) 图形如图所示，由题意台阶 T_4 左边的端点坐标 $(4.5, 7)$ ，右边的端点 $(6, 7)$ ，

对于抛物线 $y = -x^2 + 4x + 12$ ，

令 $y = 0$ ， $x^2 - 4x - 12 = 0$ ，解得 $x = -2$ 或 6 ，

$\therefore A(-2, 0)$ ，

$\therefore$ 点 A 的横坐标为 -2 ，

当 $x = 4.5$ 时， $y = 9.75 > 7$ ，

当 $x = 6$ 时， $y = 0 < 7$ ，

当 $y = 7$ 时， $7 = -x^2 + 4x + 12$ ，

解得 $x = -1$ 或 5 ，

$\therefore$ 抛物线与台阶 T_4 有交点，设交点为 $R(5, 7)$ ，

∴点 P 会落在哪个台阶 T_4 上.

(2) 由题意抛物线 $C: y = -x^2 + bx + c$, 经过 $R(5, 7)$, 最高点的纵坐标为 11,

$$\therefore \begin{cases} \frac{-4c - b^2}{-4} = 11, \\ -25 + 5b + c = 7 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=14 \\ c=-38 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b=6 \\ c=2 \end{cases} \text{ (舍弃),}$$

∴抛物线 C 的解析式为 $y = -x^2 + 14x - 38$,

对称轴 $x = 7$,

∴台阶 T_5 的左边的端点 $(6, 6)$, 右边的端点为 $(7.5, 6)$,

∴抛物线 C 的对称轴与台阶 T_5 有交点.

(3) 对于抛物线 $C: y = -x^2 + 14x - 38$,

令 $y = 0$, 得到 $x^2 - 14x + 38 = 0$, 解得 $x = 7 \pm \sqrt{11}$,

∴抛物线 C 交 x 轴的正半轴于 $(7 + \sqrt{11}, 0)$,

当 $y = 2$ 时, $2 = -x^2 + 14x - 38$, 解得 $x = 4$ 或 10 ,

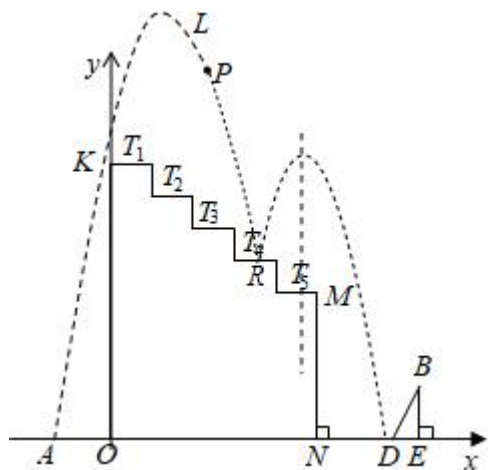
∴抛物线经过 $(10, 2)$,

Rt $\triangle BDE$ 中, $\angle DEB = 90^\circ$, $DE = 1$, $BE = 2$,

∴当点 D 与 $(7 + \sqrt{11}, 0)$ 重合时, 点 B 的横坐标的值最大, 最大值为 $8 + \sqrt{11}$,

当点 B 与 $(10, 2)$ 重合时, 点 B 的横坐标最小, 最小值为 10,

∴点 B 横坐标的最大值比最小值大 $\sqrt{11} - 2$.



26. (12 分) 在一平面内, 线段 $AB = 20$, 线段 $BC = CD = DA = 10$, 将这四条线段顺次首尾

相接. 把 AB 固定, 让 AD 绕点 A 从 AB 开始逆时针旋转角 α ($\alpha > 0^\circ$) 到某一位置时, BC, CD 将会跟随出现到相应的位置.

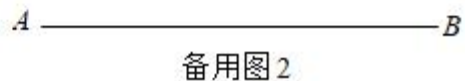
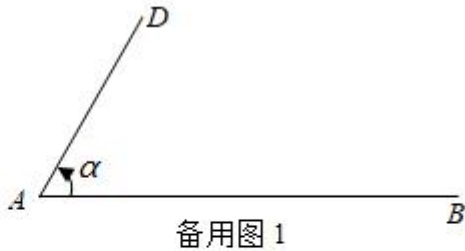
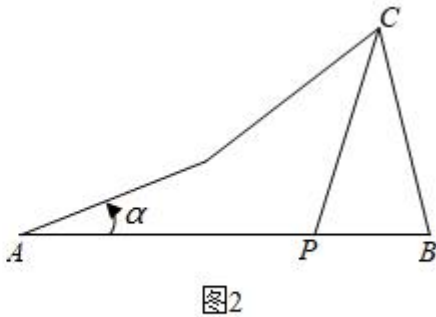
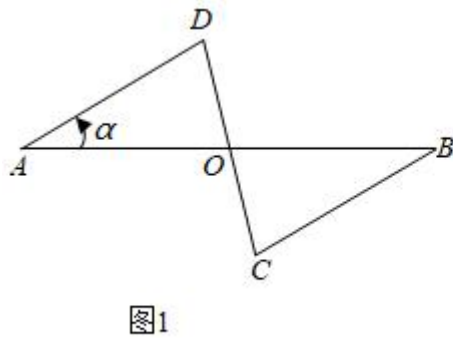
论证: 如图 1, 当 $AD \parallel BC$ 时, 设 AB 与 CD 交于点 O , 求证: $AO = 10$;

发现: 当旋转角 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\angle ADC$ 的度数可能是多少?

尝试: 取线段 CD 的中点 M , 当点 M 与点 B 距离最大时, 求点 M 到 AB 的距离;

拓展: ①如图 2, 设点 D 与 B 的距离为 d , 若 $\angle BCD$ 的平分线所在直线交 AB 于点 P , 直接写出 BP 的长 (用含 d 的式子表示);

②当点 C 在 AB 下方, 且 AD 与 CD 垂直时, 直接写出 α 的余弦值.



【分析】 论证: 由 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$, 得 $AO = BO$, 而 $AB = 20$, 可得 $AO = 10$;

发现: 设 AB 的中点为 O , 当 AD 从初始位置 AO 绕 A 顺时针旋转 60° 时, BC 也从初始位置 BC 绕点 B 顺时针旋转 60° , BC 旋转到 BO 的位置, 即 C 以 O 重合, 从而可得 $\angle ADC = 60^\circ$;

尝试: 当点 M 与点 B 距离最大时, D, C, B 共线, 过 D 作 $DQ \perp AB$ 于 Q , 过 M 作 $MN \perp AB$ 于 N , 由已知可得 $AD = 10$, 设 $AQ = x$, 则 $BQ = 20 - x$, $100 - x^2 = 400 - (20 - x)^2$, 可得 $AQ = \frac{5}{2}$, $DQ = \frac{5\sqrt{15}}{2}$, 再由 $MN \parallel DQ$, 得 $\frac{MN}{DQ} = \frac{BM}{BD}$, $MN = \frac{15\sqrt{15}}{8}$, 即点 M 到 AB 的距离为 $\frac{15\sqrt{15}}{8}$;

拓展:

①设直线 CP 交 DB 于 H , 过 G 作 $DG \perp AB$ 于 G , 连接 DP , 设 $BG = m$, 则 $AG = 20 - m$,

由 $AD^2 - AG^2 = BD^2 - BG^2$, 可得 $m = \frac{d^2+300}{40}$, $BG = \frac{d^2+300}{40}$, 而 $\triangle BHP \sim \triangle BGD$, 有

$$\frac{BP}{BD} = \frac{BH}{BG}, \text{ 即可得 } BP = \frac{20d^2}{d^2+300};$$

②过 B 作 $BG \perp CD$ 于 G , 设 $AN = t$, 则 $BN = 20 - t$, $DN = \sqrt{AN^2 - AD^2} = \sqrt{t^2 - 100}$, 由

$$\triangle ADN \sim \triangle BGN, \frac{NG}{DN} = \frac{BN}{AN} = \frac{BG}{AD}, \text{ 表达出 } NG = \frac{(20-t)\sqrt{t^2-100}}{t}, BG = \frac{200-10t}{t},$$

Rt $\triangle BCG$ 中, $CG = \frac{20\sqrt{10t-100}}{t}$, 根据 $DN+NG+CG = 10$, 列方程

$$\sqrt{t^2-100} + \frac{(20-t)\sqrt{t^2-100}}{t} + \frac{20\sqrt{10t-100}}{t} = 10, \text{ 解得 } t = \frac{200-40\sqrt{7}}{9}, \text{ 即可得 } \cos \alpha$$

$$= \frac{AD}{AN} = \frac{10}{\frac{200-40\sqrt{7}}{9}} = \frac{5+\sqrt{7}}{8}.$$

【解答】论证:

证明: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle A = \angle B, \angle C = \angle D,$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ AD = BC \\ \angle D = \angle C \end{cases},$$

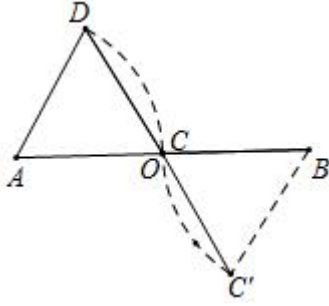
$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AO = BO,$$

$$\therefore AO + BO = AB = 20,$$

$$\therefore AO = 10;$$

发现: 设 AB 的中点为 O , 如图:



当 AD 从初始位置 AO 绕 A 顺时针旋转 60° 时, BC 也从初始位置 BC' 绕点 B 顺时针旋转 60° ,

而 $BO = BC' = 10$,

$\therefore \triangle BC'O$ 是等边三角形,

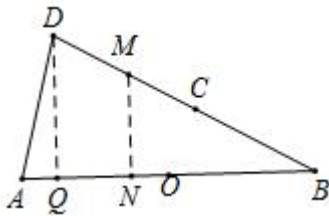
$\therefore BC$ 旋转到 BO 的位置, 即 C 以 O 重合,

$\because AO = AD = CD = 10$,

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ADC = 60^\circ$;

尝试: 取线段 CD 的中点 M , 当点 M 与点 B 距离最大时, D 、 C 、 B 共线, 过 D 作 $DQ \perp AB$ 于 Q , 过 M 作 $MN \perp AB$ 于 N , 如图:



由已知可得 $AD = 10$, $BD = BC + CD = 20$, $BM = CM + BC = 15$,

设 $AQ = x$, 则 $BQ = 20 - x$,

$$\because AD^2 - AQ^2 = DQ^2 = BD^2 - BQ^2,$$

$$\therefore 100 - x^2 = 400 - (20 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AQ = \frac{5}{2},$$

$$\therefore DQ = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \frac{5\sqrt{15}}{2},$$

$$\because DQ \perp AB, MN \perp AB,$$

$$\therefore MN \parallel DQ,$$

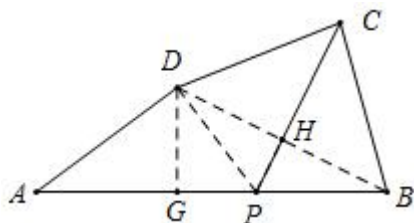
$$\therefore \frac{MN}{DQ} = \frac{BM}{BD}, \text{ 即 } \frac{MN}{\frac{5\sqrt{15}}{2}} = \frac{15}{20},$$

$$\therefore MN = \frac{15\sqrt{15}}{8},$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 到 } AB \text{ 的距离为 } \frac{15\sqrt{15}}{8};$$

拓展:

①设直线 CP 交 DB 于 H , 过 G 作 $DG \perp AB$ 于 G , 连接 DP , 如图:



$$\because BC = DC = 10, CP \text{ 平分 } \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BHC = \angle DHC = 90^\circ, BH = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}d,$$

$$\text{设 } BG = m, \text{ 则 } AG = 20 - m,$$

$$\because AD^2 - AG^2 = BD^2 - BG^2,$$

$$\therefore 100 - (20 - m)^2 = d^2 - m^2,$$

$$\therefore m = \frac{d^2 + 300}{40},$$

$$\therefore BG = \frac{d^2 + 300}{40},$$

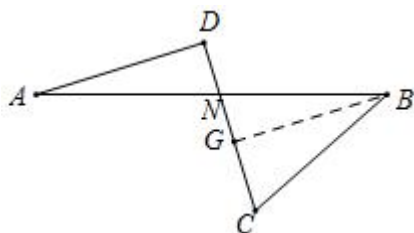
$$\because \angle BHP = \angle BGD = 90^\circ, \angle PBH = \angle DBG,$$

$$\therefore \triangle BHP \sim \triangle BGD,$$

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BH}{BG},$$

$$\therefore BP = \frac{BH \cdot BD}{BG} = \frac{20d^2}{d^2 + 300};$$

②过 B 作 $BG \perp CD$ 于 G , 如图:



$$\text{设 } AN = t, \text{ 则 } BN = 20 - t, DN = \sqrt{AN^2 - AD^2} = \sqrt{t^2 - 100},$$

$$\because \angle D = \angle BGN = 90^\circ, \angle AND = \angle BNG,$$

$$\therefore \triangle ADN \sim \triangle BGN,$$

$$\therefore \frac{NG}{DN} = \frac{BN}{AN} = \frac{BG}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{NG}{\sqrt{t^2 - 100}} = \frac{20 - t}{t} = \frac{BG}{10},$$

$$\therefore NG = \frac{(20 - t)\sqrt{t^2 - 100}}{t}, BG = \frac{200 - 10t}{t},$$

$$\text{Rt}\triangle BCG \text{ 中, } BC = 10,$$

$$\therefore CG = \sqrt{BC^2 - BG^2} = \frac{20\sqrt{10t - 100}}{t},$$

$$\because CD = 10,$$

$$\therefore DN + NG + CG = 10,$$

$$\text{即 } \sqrt{t^2 - 100} + \frac{(20 - t)\sqrt{t^2 - 100}}{t} + \frac{20\sqrt{10t - 100}}{t} = 10,$$

$$\therefore t\sqrt{t^2 - 100} + (20 - t)\sqrt{t^2 - 100} + 20\sqrt{10t - 100} = 10t,$$

$$20\sqrt{t^2 - 100} + 20\sqrt{10t - 100} = 10t, \text{ 即 } 2\sqrt{t^2 - 100} = t - 2\sqrt{10t - 100},$$

$$\text{两边平方, 整理得: } 3t^2 - 40t = -4t\sqrt{10t - 100},$$

$$\because t \neq 0,$$

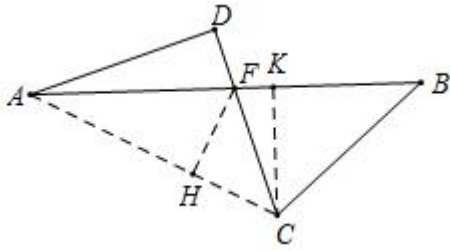
$$\therefore 3t - 40 = -4\sqrt{10t - 100},$$

$$\text{解得 } t = \frac{200 + 40\sqrt{7}}{9} \text{ (大于 20, 舍去) 或 } t = \frac{200 - 40\sqrt{7}}{9},$$

$$\therefore AN = \frac{200 - 40\sqrt{7}}{9},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{AD}{AN} = \frac{10}{\frac{200 - 40\sqrt{7}}{9}} = \frac{5 + \sqrt{7}}{8}.$$

方法二: 过 C 作 $CK \perp AB$ 于 K , 过 F 作 $FH \perp AC$ 于 H , 如图:



$$\because AD = CD = 10, AD \perp DC,$$

$$\therefore AC^2 = 200,$$

$$\because AC^2 - AK^2 = BC^2 - BK^2,$$

$$\therefore 200 - AK^2 = 100 - (20 - AK)^2,$$

$$\text{解得 } AK = \frac{25}{2},$$

$$\therefore CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \frac{5\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{Rt}\triangle ACK \text{ 中, } \tan \angle KAC = \frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{7}}{5},$$

$$\text{Rt}\triangle AFH \text{ 中, } \tan \angle KAC = \frac{FH}{AH} = \frac{\sqrt{7}}{5},$$

$$\text{设 } FH = \sqrt{7}n, \text{ 则 } CH = FH = \sqrt{7}n, AH = 5n,$$

$$\therefore AC = AH + CH = 10\sqrt{2},$$

$$\therefore 5n + \sqrt{7}n = 10\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } n = \frac{10\sqrt{2}}{5 + \sqrt{7}},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AH^2 + FH^2} = \sqrt{32}n = \sqrt{32} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{5 + \sqrt{7}} = \frac{80}{5 + \sqrt{7}},$$

$$\text{Rt}\triangle ADF \text{ 中,}$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{AF} = \frac{10}{\frac{80}{5 + \sqrt{7}}} = \frac{5 + \sqrt{7}}{8}.$$

