

2015 年河北省中考数学试卷

一.选择题 (1-10 小题每小题 3 分, 11-16 小题每小题 3 分, 共 42 分每小题的四个选项中只有一个是正确的)

1. (3 分) (2015•河北) 计算: $3 - 2 \times (-1) = (\quad)$

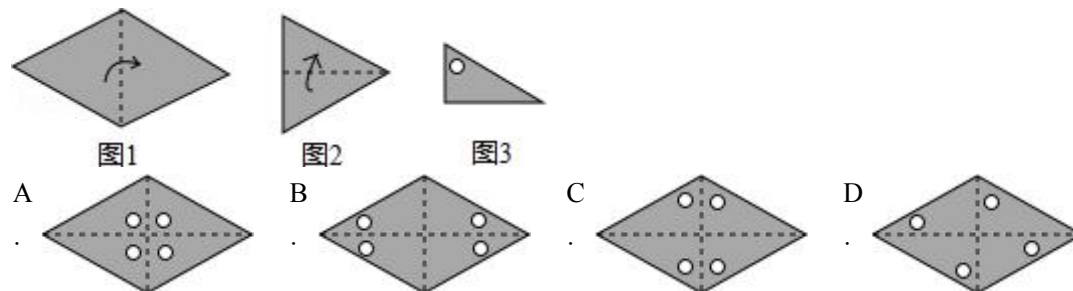
- A 5 B 1 C -1 D 6

2. (3 分) (2015•河北) 下列说法正确的是 ()

- A 1 的相反数是 -1 B 1 的倒数是 -1

- C 1 的立方根是 ± 1 D -1 是无理数

3. (3 分) (2015•河北) 一张菱形纸片按如图 1、图 2 依次对折后, 再按如图 3 打出一个圆形小孔, 则展开铺平后的图案是 ()

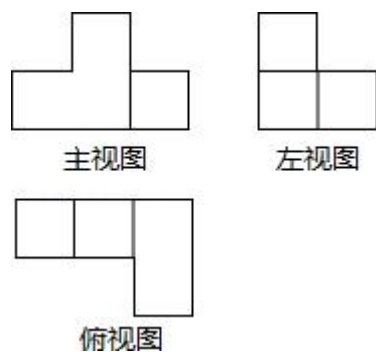


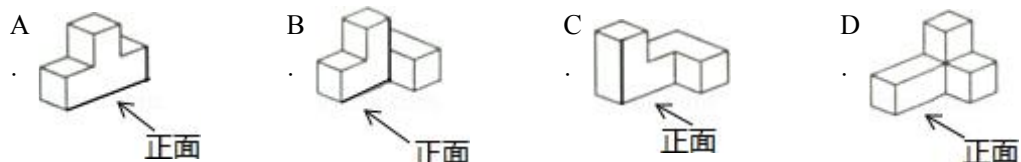
4. (3 分) (2015•河北) 下列运算正确的是 ()

- A $(\frac{1}{2})^{-1} = -\frac{1}{2}$ B $6 \times 10^7 = 60000000$

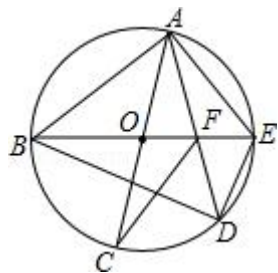
- C $(2a)^2 = 2a^2$ D $a^3 \cdot a^2 = a^5$

5. (3 分) (2015•河北) 如图所示的三视图所对应的几何体是 ()



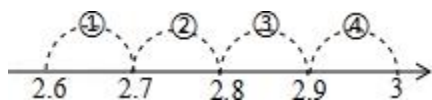


6. (3分) (2015•河北) 如图, AC , BE 是 $\odot O$ 的直径, 弦 AD 与 BE 交于点 F , 下列三角形中, 外心不是点 O 的是 ()



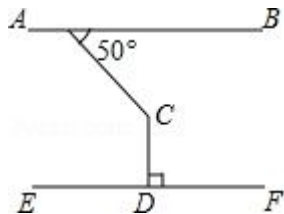
- A $\triangle ABE$ B $\triangle ACF$ C $\triangle ABD$ D $\triangle ADE$

7. (3分) (2015•河北) 在数轴上标注了四段范围, 如图, 则表示 $\sqrt{8}$ 的点落在 ()



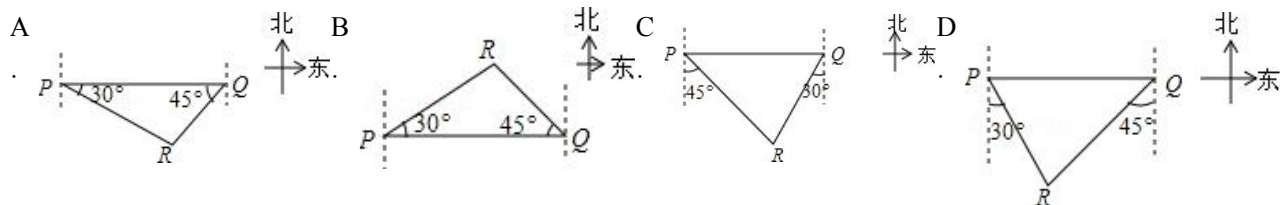
- A 段① B 段② C 段③ D 段④

8. (3分) (2015•河北) 如图, $AB \parallel EF$, $CD \perp EF$, $\angle BAC = 50^\circ$, 则 $\angle ACD =$ ()

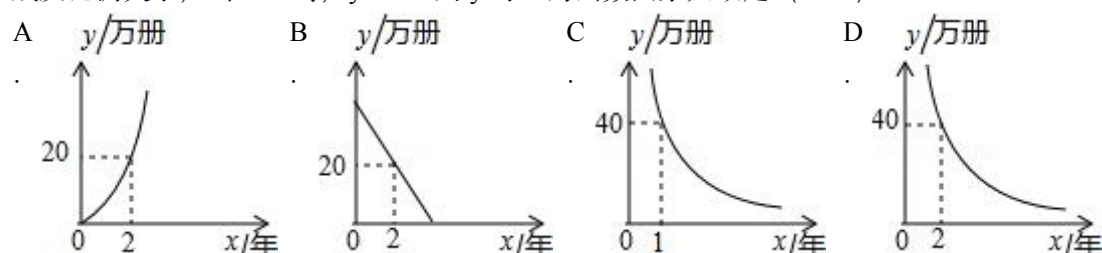


- A 120° B 130° C 140° D 150°

9. (3分) (2015•河北) 已知: 岛 P 位于岛 Q 的正西方, 由岛 P , Q 分别测得船 R 位于南偏东 30° 和南偏西 45° 方向上, 符合条件的示意图是 ()



10. (3分) (2015•河北) 一台印刷机每年可印刷的书本数量 y (万册) 与它的使用时间 x (年) 成反比例关系, 当 $x=2$ 时, $y=20$. 则 y 与 x 的函数图象大致是 ()



11. (2分) (2015•河北) 利用加减消元法解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=-10 \text{ ①} \\ 5x-3y=6 \text{ ②} \end{cases}$, 下列做法正确的是

- ()
- A 要消去 y , 可以将① $\times 5$ +② $\times 2$ B 要消去 x , 可以将① $\times 3$ +② $\times (-5)$
- C 要消去 y , 可以将① $\times 5$ +② $\times 3$ D 要消去 x , 可以将① $\times (-5)$ +② $\times 2$

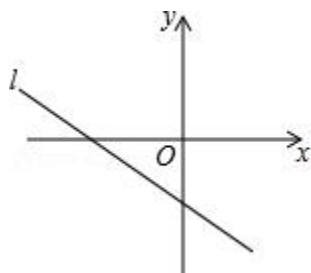
12. (2分) (2015•河北) 若关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 不存在实数根, 则 a 的取值范围是 ()

- A $a < 1$ B $a > 1$ C $a \leq 1$ D $a \geq 1$

13. (2分) (2015•河北) 将一质地均匀的正方体骰子掷一次, 观察向上一面的点数, 与点数 3 相差 2 的概率是 ()

- A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{5}$ D $\frac{1}{6}$

14. (2分) (2015•河北) 如图, 直线 $l: y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与直线 $y=a$ (a 为常数) 的交点在第四象限, 则 a 可能在 ()

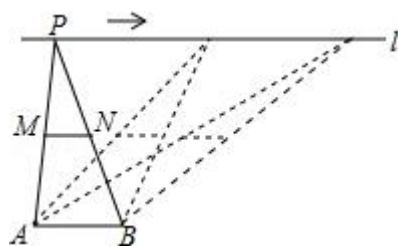


- A $1 < a < 2$ B $-2 < a < 0$ C $-3 \leq a \leq -2$ D $-10 < a < -4$

15. (2分) (2015•河北) 如图, 点 A , B 为定点, 定直线 $l \parallel AB$, P 是 l 上一动点, 点 M , N 分别为 PA , PB 的中点, 对下列各值:

①线段 MN 的长; ② $\triangle PAB$ 的周长; ③ $\triangle PMN$ 的面积; ④直线 MN , AB 之间的距离; ⑤ $\angle APB$ 的大小.

其中会随点 P 的移动而变化的是 ()



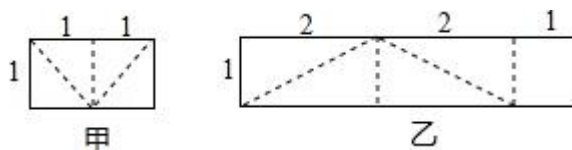
A ②③

B ②⑤

C ①③④

D ④⑤

16. (2 分) (2015•河北) 如图是甲、乙两张不同的矩形纸片, 将它们分别沿着虚线剪开后, 各自要拼一个与原来面积相等的正方形, 则 ()



A 甲、乙都可以

B 甲、乙都不可以

C 甲不可以、乙可以

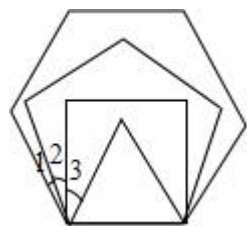
D 甲可以、乙不可以

二.填空题 (4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

17. (3 分) (2015•河北) 若 $|a|=2015^0$, 则 $a=$ _____.

18. (3 分) (2015•河北) 若 $a=2b \neq 0$, 则 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$ 的值为_____.

19. (3 分) (2015•河北) 平面上, 将边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形的一边重合并叠在一起, 如图, 则 $\angle 3 + \angle 1 - \angle 2 =$ _____.



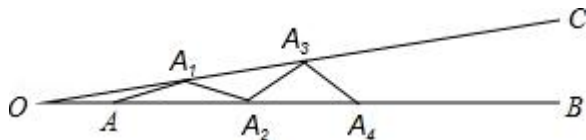
20. (3 分) (2015•河北) 如图, $\angle BOC=9^\circ$, 点 A 在 OB 上, 且 $OA=1$, 按下列要求画图:

以 A 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_1 , 得第 1 条线段 AA_1 ;

再以 A_1 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OB 于点 A_2 , 得第 2 条线段 A_1A_2 ;

再以 A_2 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_3 , 得第 3 条线段 A_2A_3 ; ...

这样画下去, 直到得第 n 条线段, 之后就不能再画出符合要求的线段了, 则 $n=$ _____.

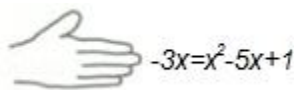


三.解答题 (共 6 个小题, 共 66 分)

21. (10 分) (2015•河北) 老师在黑板上书写了一个正确的演算过程随后用手掌捂住了如图所示的一个二次三项式, 形式如图:

(1) 求所捂的二次三项式;

(2) 若 $x = \sqrt{6} + 1$, 求所捂二次三项式的值.



22. (10 分) (2015•河北) 嘉淇同学要证明命题“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”是正确的, 她先用尺规作出了如图 1 的四边形 ABCD, 并写出了如下不完整的已知和求证.

已知: 如图 1, 在四边形 ABCD 中, $BC = AD$, $AB =$ _____

求证: 四边形 ABCD 是 _____ 四边形.

(1) 在方框中填空, 以补全已知和求证;

(2) 按嘉淇的想法写出证明;

(3) 用文字叙述所证命题的逆命题为 _____.

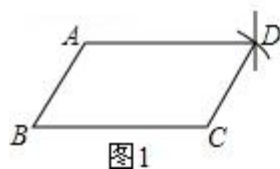


图1

我的想法是: 利用三角形全等, 依据“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”来证明



嘉淇

图2

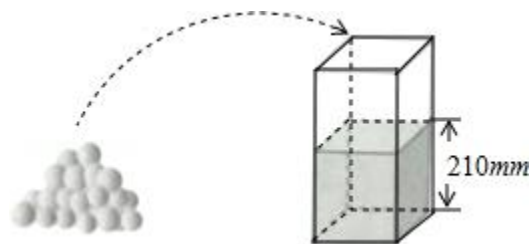
23. (10 分) (2015•河北) 水平放置的容器内原有 210 毫米高的水, 如图, 将若干个球逐一放入该容器中, 每放入一个大球水面就上升 4 毫米, 每放入一个小球水面就上升 3 毫米, 假定放入容器中的所有球完全浸没水中且水不溢出. 设水面高为 y 毫米.

(1) 只放入大球, 且个数为 $x_{\text{大}}$, 求 y 与 $x_{\text{大}}$ 的函数关系式 (不必写出 $x_{\text{大}}$ 的范围);

(2) 仅放入 6 个大球后, 开始放入小球, 且小球个数为 $x_{\text{小}}$

①求 y 与 $x_{\text{小}}$ 的函数关系式 (不必写出 $x_{\text{小}}$ 范围);

②限定水面高不超过 260 毫米, 最多能放入几个小球?



24. (11 分) (2015•河北) 某厂生产 A, B 两种产品, 其单价随市场变化而做相应调整. 营销人员根据前三次单价变化的情况, 绘制了如表统计表及不完整的折线图.

A, B 产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A 产品单价 (元/件)	6	5.2	6.5
B 产品单价 (元/件)	3.5	4	3

并求得了 A 产品三次单价的平均数和方差:

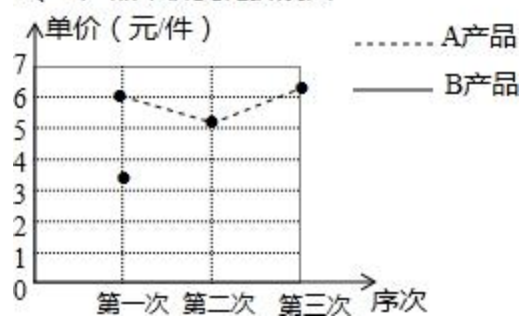
$$\bar{x}_A = 5.9, s_A^2 = \frac{1}{3}[(6 - 5.9)^2 + (5.2 - 5.9)^2 + (6.5 - 5.9)^2] = \frac{43}{150}$$

(1) 补全如图中 B 产品单价变化的折线图. B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了 _____ %

(2) 求 B 产品三次单价的方差, 并比较哪种产品的单价波动小;

(3) 该厂决定第四次调价, A 产品的单价仍为 6.5 元/件, B 产品的单价比 3 元/件上调 $m\%$ ($m > 0$), 使得 A 产品这四次单价的中位数是 B 产品四次单价中位数的 2 倍少 1, 求 m 的值.

A, B 产品单价变化折线图

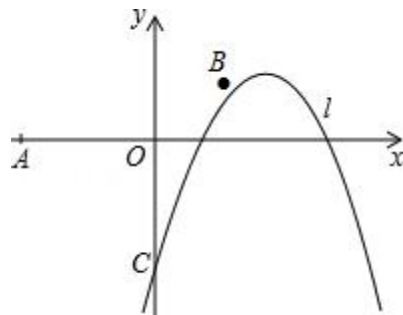


25. (11 分) (2015•河北) 如图, 已知点 $O(0, 0)$, $A(-5, 0)$, $B(2, 1)$, 抛物线 $l: y = -(x - h)^2 + 1$ (h 为常数) 与 y 轴的交点为 C .

(1) l 经过点 B , 求它的解析式, 并写出此时 l 的对称轴及顶点坐标;

(2) 设点 C 的纵坐标为 y_C , 求 y_C 的最大值, 此时 l 上有两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 其中 $x_1 > x_2 \geq 0$, 比较 y_1 与 y_2 的大小;

(3) 当线段 OA 被 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 1: 4 时, 求 h 的值.



26. (14 分) (2015•河北) 平面上, 矩形 $ABCD$ 与直径为 QP 的半圆 K 如图 1 摆放, 分别延长 DA 和 QP 交于点 O , 且 $\angle DOQ = 60^\circ$, $OQ = OD = 3$, $OP = 2$, $OA = AB = 1$. 让线段 OD 及矩形

ABCD 位置固定，将线段 OQ 连带着半圆 K 一起绕着点 O 按逆时针方向开始旋转，设旋转角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$).

发现：

(1) 当 $\alpha=0^\circ$ ，即初始位置时，点 P _____ 直线 AB 上. (填“在”或“不在”) 求当 α 是多少时，OQ 经过点 B.

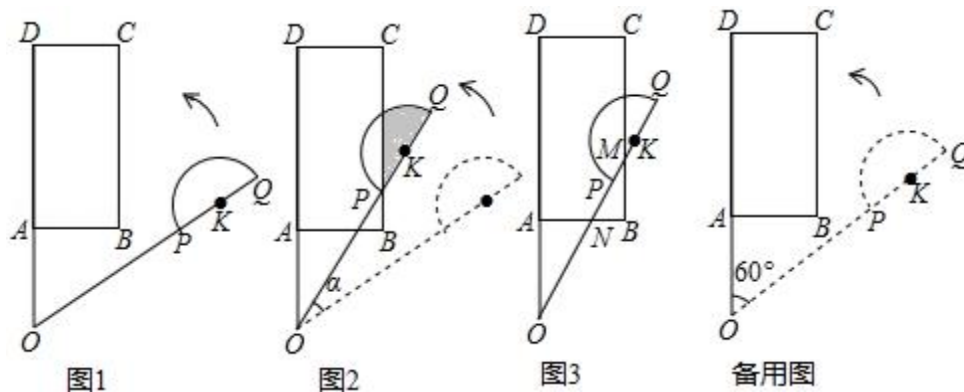
(2) 在 OQ 旋转过程中，简要说明 α 是多少时，点 P, A 间的距离最小？并指出这个最小值；

(3) 如图 2，当点 P 恰好落在 BC 边上时，求 α 及 $S_{\text{阴影}}$

拓展：

如图 3，当线段 OQ 与 CB 边交于点 M，与 BA 边交于点 N 时，设 $BM=x$ ($x>0$)，用含 x 的代数式表示 BN 的长，并求 x 的取值范围.

探究：当半圆 K 与矩形 ABCD 的边相切时，求 $\sin \alpha$ 的值.



2015 年河北省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一.选择题 (1-10 小题每小题 3 分, 11-16 小题每小题 3 分, 共 42 分每小题的四个选项中只有一个是正确的)

1. (3 分) (2015•河北) 计算: $3 - 2 \times (-1) = (\quad)$

A 5

B 1

C -1

D 6

考点: 有理数的混合运算.

分析: 先算乘法, 再算减法, 由此顺序计算即可.

解答: 解: 原式 $= 3 - (-2)$

$$= 3 + 2$$

$$= 5.$$

故选: A.

点评: 此题考查有理数的混合运算, 掌握运算顺序与符号的判定是解决问题的关键.

2. (3 分) (2015•河北) 下列说法正确的是 ()

A 1 的相反数是 -1

B 1 的倒数是 -1

C 1 的立方根是 ± 1

D -1 是无理数

考点: 立方根; 相反数; 倒数; 无理数.

分析: 根据相反数、倒数、立方根, 即可解答.

解答: 解: A、1 的相反数是 -1, 正确;

B、1 的倒数是 1, 故错误;

C、1 的立方根是 1, 故错误;

D、-1 是有理数, 故错误;

故选: A.

点评: 本题考查了相反数、倒数、立方根, 解决本题的关键是熟记相反数、倒数、立方根的定义.

3. (3 分) (2015•河北) 一张菱形纸片按如图 1、图 2 依次对折后, 再按如图 3 打出一个圆形小孔, 则展开铺平后的图案是 ()

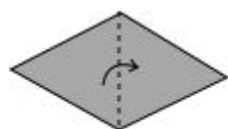


图1

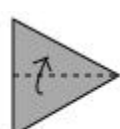
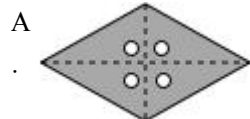


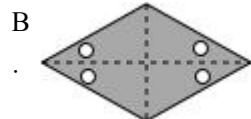
图2



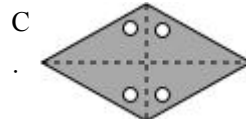
图3



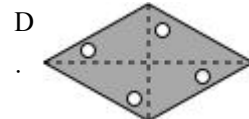
A



B



C



D

考点: 剪纸问题.

分析: 对于此类问题, 学生只要亲自动手操作, 答案就会很直观地呈现.

解答: 解: 严格按照图中的顺序向右翻折, 向右上角翻折, 打出一个圆形小孔, 展开得到结论.

故选 C.

点评: 此题主要考查了剪纸问题; 学生的动手能力及空间想象能力是非常重要的, 做题时, 要注意培养.

4. (3 分) (2015•河北) 下列运算正确的是 ()

A $(\frac{1}{2})^{-1} = -\frac{1}{2}$

B $6 \times 10^7 = 6000000$

C $(2a)^2 = 2a^2$

D $a^3 \cdot a^2 = a^5$

考点: 幂的乘方与积的乘方; 科学记数法—原数; 同底数幂的乘法; 负整数指数幂.

分析: A: 根据负整数指数幂的运算方法判断即可.

B: 科学记数法 $a \times 10^n$ 表示的数“还原”成通常表示的数, 就是把 a 的小数点向右移动 n 位所得到的数, 据此判断即可.

C: 根据积的乘方的运算方法判断即可.

D: 根据同底数幂的乘法法则判断即可.

解答: 解: $\because (\frac{1}{2})^{-1} = 2,$

$\therefore$ 选项 A 不正确;

$\because 6 \times 10^7 = 60000000,$

$\therefore$ 选项 B 不正确;

$\because (2a)^2 = 4a^2,$

$\therefore$ 选项 C 不正确;

$\because a^3 \cdot a^2 = a^5,$

$\therefore$ 选项 D 正确.

故选: D.

点评: (1) 此题主要考查了幂的乘方和积的乘方, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确:

① $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数); ② $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

(2) 此题还考查了负整数指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确:

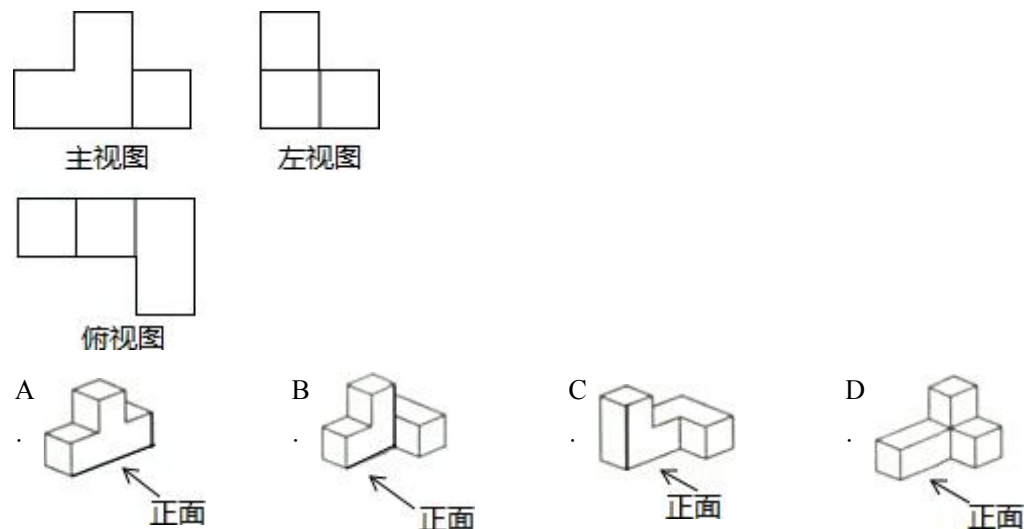
① $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0, p$ 为正整数); ② 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的

意义计算; ③ 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数.

(3) 此题还考查了同底数幂的乘法法则: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ① 底数必须相同; ② 按照运算性质, 只有相乘时才是底数不变, 指数相加.

(4) 此题还考查了科学计数法—原数, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 科学记数法 $a \times 10^n$ 表示的数“还原”成通常表示的数, 就是把 a 的小数点向右移动 n 位所得到的数. 若科学记数法表示较小的数 $a \times 10^{-n}$, 还原为原来的数, 需要把 a 的小数点向左移动 n 位得到原数.

5. (3分) (2015•河北) 如图所示的三视图所对应的几何体是 ()



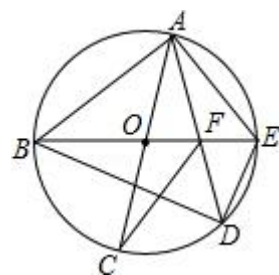
考点: 由三视图判断几何体.

分析: 对所给四个几何体, 分别从主视图和俯视图进行判断.

解答: 解: 从主视图可判断 A 错误; 从俯视图可判断 C、D 错误.
故选 B.

点评: 本题考查了由三视图判断几何体: 由三视图想象几何体的形状, 首先应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状, 然后综合起来考虑整体形状.

6. (3分) (2015•河北) 如图, AC, BE 是 $\odot O$ 的直径, 弦 AD 与 BE 交于点 F, 下列三角形中, 外心不是点 O 的是 ()



A $\triangle ABE$

B $\triangle ACF$

C $\triangle ABD$

D $\triangle ADE$

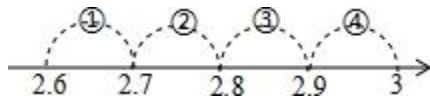
考点: 三角形的外接圆与外心.

分析: 利用外心的定义, 外心: 三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点, 叫做三角形的外心, 进而判断得出即可.

解答: 解: 如图所示: 只有 $\triangle ACF$ 的三个顶点不都在圆上, 故外心不是点 O 的是 $\triangle ACF$.
故选: B.

点评: 此题主要考查了三角形外心的定义, 正确把握外心的定义是解题关键.

7. (3分) (2015•河北) 在数轴上标注了四段范围, 如图, 则表示 $\sqrt{8}$ 的点落在 ()



A 段①

B 段②

C 段③

D 段④

考点：估算无理数的大小；实数与数轴.

分析：根据数的平方，即可解答.

解答：解： $2.6^2=6.76$ ， $2.7^2=7.29$ ， $2.8^2=7.84$ ， $2.9^2=8.41$ ， $3^2=9$ ，
 $\therefore 7.84 < 8 < 8.41$ ，

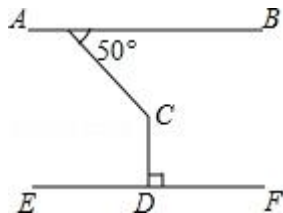
$$\therefore 2.8 < \sqrt{8} < 2.9,$$

$\therefore \sqrt{8}$ 的点落在段③，

故选：C.

点评：本题考查了估算无理数的大小，解决本题的关键是计算出各数的平方.

8. (3 分) (2015•河北) 如图， $AB \parallel EF$ ， $CD \perp EF$ ， $\angle BAC=50^\circ$ ， 则 $\angle ACD= (\quad)$



A 120°

B 130°

C 140°

D 150°

考点：平行线的性质；垂线.

分析：如图，作辅助线：首先运用平行线的性质求出 $\angle DGC$ 的度数，借助三角形外角的性质求出 $\angle ACD$ 即可解决问题.

解答：解：如图，延长 AC 交 EF 于点 G；

$\because AB \parallel EF$ ，

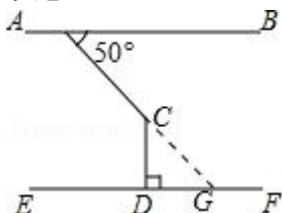
$\therefore \angle DGC = \angle BAC = 50^\circ$ ；

$\because CD \perp EF$ ，

$\therefore \angle CDG = 90^\circ$ ，

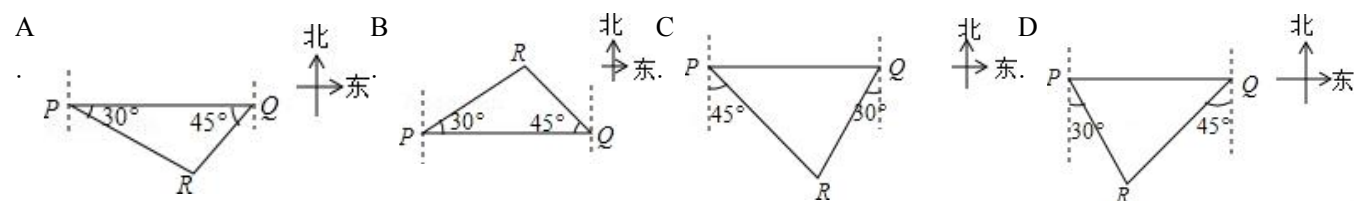
$\therefore \angle ACD = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$ ，

故选 C.



点评：该题主要考查了垂线的定义、平行线的性质、三角形的外角性质等几何知识点及其应用问题；解题的方法是作辅助线，将分散的条件集中；解题的关键是灵活运用平行线的性质、三角形的外角性质等几何知识点来分析、判断、解答.

9. (3分) (2015•河北) 已知: 岛P位于岛Q的正西方, 由岛P, Q分别测得船R位于南偏东 30° 和南偏西 45° 方向上, 符合条件的示意图是 ()



考点: 方向角.

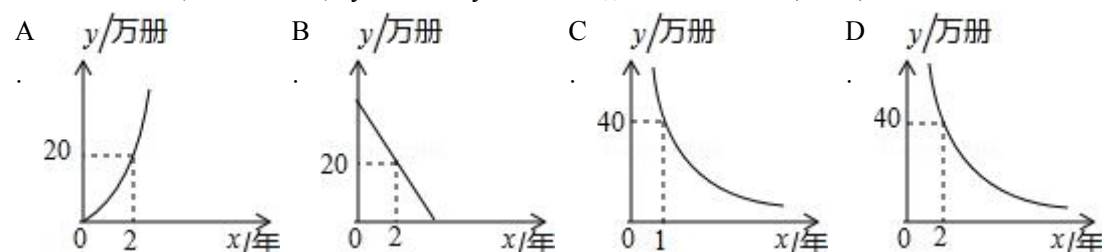
分析: 根据方向角的定义, 即可解答.

解答: 解: 根据岛P, Q分别测得船R位于南偏东 30° 和南偏西 45° 方向上, 故D符合.

故选: D.

点评: 本题考查了方向角, 解决本题的关键是熟记方向角的定义.

10. (3分) (2015•河北) 一台印刷机每年可印刷的书本数量y(万册)与它的使用时间x(年)成反比例关系, 当 $x=2$ 时, $y=20$. 则y与x的函数图象大致是 ()



考点: 反比例函数的应用; 反比例函数的图象.

分析: 设 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 根据当 $x=2$ 时, $y=20$, 求出k, 即可得出y与x的函数图象.

解答: 解: 设 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

$\because$ 当 $x=2$ 时, $y=20$,

$\therefore k=40$,

$\therefore y=\frac{40}{x}$,

则y与x的函数图象大致是C,

故选: C.

点评: 此题考查了反比例函数的应用, 关键是根据题意设出解析式, 根据函数的解析式得出函数的图象.

11. (2分) (2015•河北) 利用加减消元法解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=-10 \text{ ①} \\ 5x-3y=6 \text{ ②} \end{cases}$, 下列做法正确的是

()

A 要消去y, 可以将 $\text{①} \times 5 + \text{②} \times 2$

B 要消去x, 可以将 $\text{①} \times 3 + \text{②} \times (-5)$

C 要消去y, 可以将 $\text{①} \times 5 + \text{②} \times 3$

D 要消去x, 可以将 $\text{①} \times (-5) + \text{②} \times 2$

考点: 解二元一次方程组.

专题: 计算题.

分析: 方程组利用加减消元法求出解即可.

解答:

解: 利用加减消元法解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=-10 \textcircled{1} \\ 5x-3y=6 \textcircled{2} \end{cases}$, 要消去 x , 可以将 $\textcircled{1} \times (-5) + \textcircled{2} \times 2$.

故选 D

点评: 此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

12. (2 分) (2015•河北) 若关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 不存在实数根, 则 a 的取值范围是 ()

A $a < 1$

B $a > 1$

C $a \leq 1$

D $a \geq 1$

考点: 根的判别式.

分析: 根据根的判别式得出 $b^2 - 4ac < 0$, 代入求出不等式的解集即可得到答案.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2+2x+a=0$ 不存在实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times a < 0,$$

解得: $a > 1$.

故选 B.

点评: 此题主要考查了一元二次方程根的情况与判别式, 关键是掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系:

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

13. (2 分) (2015•河北) 将一质地均匀的正方体骰子掷一次, 观察向上一面的点数, 与点数 3 相差 2 的概率是 ()

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{5}$

D $\frac{1}{6}$

考点: 概率公式.

分析: 由一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数, 掷一次这枚骰子, 向上的一面的点数为与点数 3 相差 2 的有 2 种情况, 直接利用概率公式求解即可求得答案.

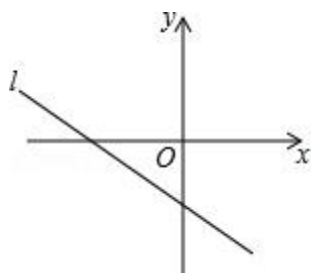
解答: 解: $\because$ 一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数, 掷一次这枚骰子, 向上的一面的点数为与点数 3 相差 2 的有 2 种情况,

$\therefore$ 掷一次这枚骰子, 向上的一面的点数为与点数 3 相差 2 的概率是: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选 B.

点评: 此题考查了概率公式的应用. 注意用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

14. (2分) (2015•河北) 如图, 直线 $l: y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与直线 $y = a$ (a 为常数) 的交点在第四象限, 则 a 可能在 ()



- A $1 < a < 2$ B $-2 < a < 0$ C $-3 \leq a \leq -2$ D $-10 < a < -4$

考点: 两条直线相交或平行问题.

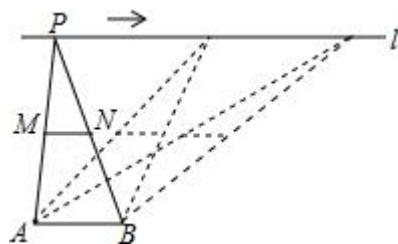
专题: 计算题.

分析: 先求出直线 $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与 y 轴的交点, 则根据题意得到 $a < -3$ 时, 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与直线 $y = a$ (a 为常数) 的交点在第四象限, 而四个选项中, 只有 $-10 < a < -4$ 满足条件, 故选 D.

解答: 解: $\because$ 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与 y 轴的交点为 $(0, -3)$,
而直线 $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 与直线 $y = a$ (a 为常数) 的交点在第四象限,
 $\therefore a < -3$.
故选 D.

点评: 本题考查了两直线相交或平行问题: 两条直线的交点坐标, 就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解; 若两条直线是平行的关系, 那么它们的自变量系数相同, 即 k 值相同.

15. (2分) (2015•河北) 如图, 点 A, B 为定点, 定直线 $l \parallel AB$, P 是 l 上一动点, 点 M, N 分别为 PA, PB 的中点, 对下列各值:
①线段 MN 的长; ② $\triangle PAB$ 的周长; ③ $\triangle PMN$ 的面积; ④直线 MN, AB 之间的距离; ⑤ $\angle APB$ 的大小.
其中会随点 P 的移动而变化的是 ()



- A ②③ B ②⑤ C ①③④ D ④⑤

考点：三角形中位线定理；平行线之间的距离.

分析：根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半可得 $MN = \frac{1}{2}AB$ ，从而判断

出①不变；再根据三角形的周长的定义判断出②是变化的；确定出点 P 到 MN 的距离不变，然后根据等底等高的三角形的面积相等确定出③不变；根据平行线间的距离相等判断出④不变；根据角的定义判断出⑤变化.

解答：解：∵点 A, B 为定点，点 M, N 分别为 PA, PB 的中点，
∴MN 是 $\triangle PAB$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AB,$$

即线段 MN 的长度不变，故①错误；

PA、PB 的长度随点 P 的移动而变化，

所以， $\triangle PAB$ 的周长会随点 P 的移动而变化，故②正确；

∵MN 的长度不变，点 P 到 MN 的距离等于 P 与 AB 的距离的一半，

∴ $\triangle PMN$ 的面积不变，故③错误；

直线 MN, AB 之间的距离不随点 P 的移动而变化，故④错误；

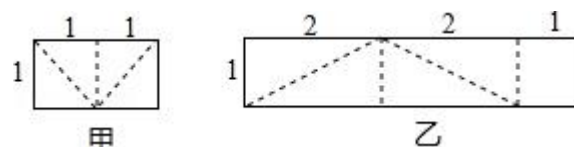
$\angle APB$ 的大小随点 P 的移动而变化，故⑤正确.

综上所述，会随点 P 的移动而变化的是②⑤.

故选 B.

点评：本题考查了三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半，等底等高的三角形的面积相等，平行线间的距离的定义，熟记定理是解题的关键.

16. (2 分) (2015•河北) 如图是甲、乙两张不同的矩形纸片，将它们分别沿着虚线剪开后，各自要拼一个与原来面积相等的正方形，则 ()



A 甲、乙都可以

B 甲、乙都不可以

C 甲不可以、乙可以

D 甲可以、乙不可以

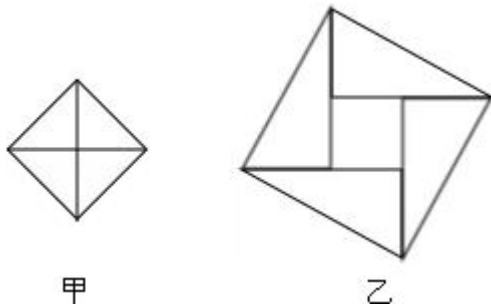
考点：图形的剪拼.

分析：根据图形可得甲可以拼一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，图乙可以拼一个边长为 $\sqrt{5}$ 的正方形.

解答：解：所作图形如图所示，

甲乙都可以拼一个与原来面积相等的正方形.

故选 A.



点评: 本题考查了图形的简拼, 解答本题的关键是根据题意作出图形.

二.填空题 (4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

17. (3 分) (2015•河北) 若 $|a|=2015^0$, 则 $a=$ ± 1 .

考点: 绝对值; 零指数幂.

分析: 先根据 0 次幂, 得到 $|a|=1$, 再根据互为相反数的绝对值相等, 即可解答.

解答: 解: $\because |a|=2015^0$,
 $\therefore |a|=1$,
 $\therefore a=\pm 1$,
 故答案为: ± 1 .

点评: 本题考查了绝对值, 解决本题的关键是熟记互为相反数的两个数绝对值相等.

18. (3 分) (2015•河北) 若 $a=2b \neq 0$, 则 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$ 的值为 $\frac{3}{2}$.

考点: 分式的化简求值.

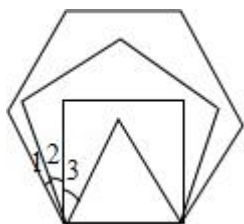
专题: 计算题.

分析: 把 $a=2b$ 代入原式计算, 约分即可得到结果.

解答: 解: $\because a=2b$,
 $\therefore$ 原式 $= \frac{4b^2 - b^2}{4b^2 - 2b^2} = \frac{3}{2}$,
 故答案为: $\frac{3}{2}$.

点评: 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (3 分) (2015•河北) 平面上, 将边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形的一边重合并叠在一起, 如图, 则 $\angle 3 + \angle 1 - \angle 2 =$ 24° .



考点: 多边形内角与外角.

分析: 首先根据多边形内角和定理, 分别求出正三角形、正方形、正五边形、正六边形的每个内角的度数是多少, 然后分别求出 $\angle 3$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 的度数是多少, 进而求出 $\angle 3 + \angle 1 - \angle 2$ 的度数即可.

解答: 解: 正三角形的每个内角是:

$$180^\circ \div 3 = 60^\circ,$$

正方形的每个内角是:

$$360^\circ \div 4 = 90^\circ,$$

正五边形的每个内角是:

$$(5 - 2) \times 180^\circ \div 5$$

$$= 3 \times 180^\circ \div 5$$

$$= 540^\circ \div 5$$

$$= 108^\circ,$$

正六边形的每个内角是:

$$(6 - 2) \times 180^\circ \div 6$$

$$= 4 \times 180^\circ \div 6$$

$$= 720^\circ \div 6$$

$$= 120^\circ,$$

则 $\angle 3 + \angle 1 - \angle 2$

$$= (90^\circ - 60^\circ) + (120^\circ - 108^\circ) - (108^\circ - 90^\circ)$$

$$= 30^\circ + 12^\circ - 18^\circ$$

$$= 24^\circ.$$

故答案为: 24° .

点评: 此题主要考查了多边形内角和定理, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: (1) n 边形的内角和 $= (n - 2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 为整数). (2) 多边形的外角和指每个顶点处取一个外角, 则 n 边形取 n 个外角, 无论边数是几, 其外角和永远为 360° .

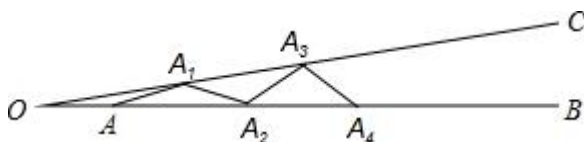
20. (3 分) (2015•河北) 如图, $\angle BOC = 9^\circ$, 点 A 在 OB 上, 且 $OA = 1$, 按下列要求画图:

以 A 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_1 , 得第 1 条线段 AA_1 ;

再以 A_1 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OB 于点 A_2 , 得第 2 条线段 A_1A_2 ;

再以 A_2 为圆心, 1 为半径向右画弧交 OC 于点 A_3 , 得第 3 条线段 A_2A_3 ; ...

这样画下去, 直到得第 n 条线段, 之后就不能再画出符合要求的线段了, 则 $n = \underline{9}$.



考点: 等腰三角形的性质.

分析: 根据等腰三角形的性质和三角形外角的性质依次可得 $\angle A_1AB$ 的度数, $\angle A_2A_1C$ 的度数, $\angle A_3A_2B$ 的度数, $\angle A_4A_3C$ 的度数, ..., 依此得到规律, 再根据三角形外角小于 90° 即可求解.

解答: 解: 由题意可知: $AO = A_1A$, $A_1A = A_2A_1$, ...,

则 $\angle AOA_1 = \angle OA_1A$, $\angle A_1OA_2 = \angle A_1A_2A$, ...,

$\therefore \angle BOC = 9^\circ$,
 $\therefore \angle A_1AB = 18^\circ$, $\angle A_2A_1C = 27^\circ$, $\angle A_3A_2B = 36^\circ$ 的度数, $\angle A_4A_3C = 45^\circ$, ...,
 $\therefore 9^\circ n < 90^\circ$,
 解得 $n < 10$.
 故答案为: 9.

点评: 考查了等腰三角形的性质: 等腰三角形的两个底角相等; 三角形外角的性质: 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

三.解答题 (共 6 个小题, 共 66 分)

21. (10 分) (2015•河北) 老师在黑板上书写了一个正确的演算过程随后用手掌捂住了如图所示的一个二次三项式, 形式如图:

- (1) 求所捂的二次三项式;
 (2) 若 $x = \sqrt{6} + 1$, 求所捂二次三项式的值.



$$-3x = x^2 - 5x + 1$$

考点: 整式的混合运算—化简求值.

专题: 计算题.

分析: (1) 根据题意列出关系式, 去括号合并即可得到结果;
 (2) 把 x 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: (1) 设所捂的二次三项式为 A ,

根据题意得: $A = x^2 - 5x + 1 + 3x = x^2 - 2x + 1$;

(2) 当 $x = \sqrt{6} + 1$ 时, 原式 $= 7 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 2 + 1 = 6$.

点评: 此题考查了整式的混合运算—化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

22. (10 分) (2015•河北) 嘉淇同学要证明命题“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”是正确的, 她先用尺规作出了如图 1 的四边形 $ABCD$, 并写出了如下不完整的已知和求证.

已知: 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $BC = AD$, $AB = \underline{CD}$

求证: 四边形 $ABCD$ 是 平行 四边形.

- (1) 在方框中填空, 以补全已知和求证;
 (2) 按嘉淇的想法写出证明;
 (3) 用文字叙述所证命题的逆命题为 平行四边形两组对边分别相等.

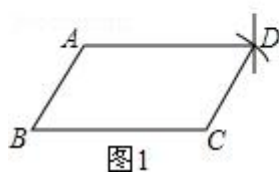


图1

我的想法是: 利用三角形全等, 依据“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”来证明



嘉淇

图2

考点: 平行四边形的判定; 命题与定理.

分析: (1) 命题的题设为“两组对边分别相等的四边形”, 结论是“是平行四边形”, 根据题设

可得已知：在四边形 ABCD 中， $BC=AD$ ， $AB=CD$ ，求证：四边形 ABCD 是平行四边形；

(2) 连接 BD，利用 SSS 定理证明 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ 可得 $\angle ADB = \angle DBC$ ， $\angle ABD = \angle CDB$ ，进而可得 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel CB$ ，根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形可得四边形 ABCD 是平行四边形；

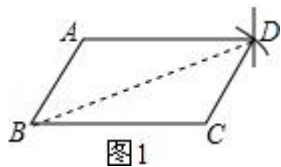
(3) 把命题“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”的题设和结论对换可得平行四边形两组对边分别相等.

解答：解：(1) 已知：如图 1，在四边形 ABCD 中， $BC=AD$ ， $AB=CD$
求证：四边形 ABCD 是平行四边形.

(2) 证明：连接 BD，
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，
$$\begin{cases} AB=CD \\ AD=BC, \\ BD=DB \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB$ (SSS),
 $\therefore \angle ADB = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle CDB$,
 $\therefore AB \parallel CD$, $AD \parallel CB$,
 $\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形；

(2) 用文字叙述所证命题的逆命题为：平行四边形两组对边分别相等.



点评：此题主要考查了平行四边形的判定，关键是掌握两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

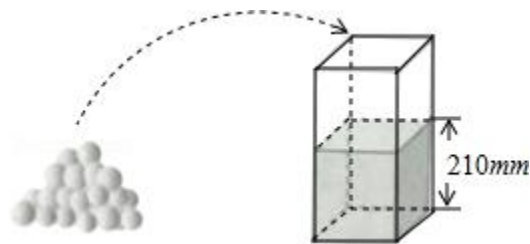
23. (10 分) (2015•河北) 水平放置的容器内原有 210 毫米高的水，如图，将若干个球逐一放入该容器中，每放入一个大球水面就上升 4 毫米，每放入一个小球水面就上升 3 毫米，假定放入容器中的所有球完全浸没水中且水不溢出. 设水面高为 y 毫米.

(1) 只放入大球，且个数为 $x_{\text{大}}$ ，求 y 与 $x_{\text{大}}$ 的函数关系式 (不必写出 $x_{\text{大}}$ 的范围)；

(2) 仅放入 6 个大球后，开始放入小球，且小球个数为 $x_{\text{小}}$

①求 y 与 $x_{\text{小}}$ 的函数关系式 (不必写出 $x_{\text{小}}$ 范围)；

②限定水面高不超过 260 毫米，最多能放入几个小球？



考点：一次函数的应用.

分析：(1) 根据每放入一个大球水面就上升 4 毫米，即可解答；

(2) ①根据 $y = \text{放入大球上面的高度} + \text{放入小球上面的高度}$ ，即可解答；

②根据题意列出不等式，即可解答.

解答: 解: (1) 根据题意得: $y = 4x_{\text{大}} + 210$;

(2) ①当 $x_{\text{大}} = 6$ 时, $y = 4 \times 6 + 210 = 234$,

$\therefore y = 3x_{\text{小}} + 234$;

②依题意, 得 $3x_{\text{小}} + 234 \leq 260$,

解得: $x_{\text{小}} \leq 8\frac{2}{3}$,

$\therefore x_{\text{小}}$ 为自然数,

$\therefore x_{\text{小}}$ 最大为 8, 即最多能放入 8 个小球.

点评: 本题考查了一次函数的应用, 解决本题的关键是根据题意, 列出函数关系式、一元一次不等式.

24. (11 分) (2015•河北) 某厂生产 A, B 两种产品, 其单价随市场变化而做相应调整. 营销人员根据前三次单价变化的情况, 绘制了如表统计表及不完整的折线图.

A, B 产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A 产品单价 (元/件)	6	5.2	6.5
B 产品单价 (元/件)	3.5	4	3

并求得了 A 产品三次单价的平均数和方差:

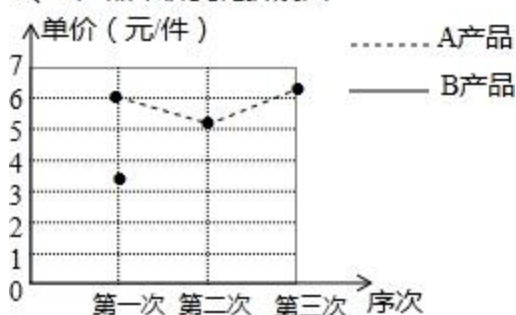
$$\bar{x}_A = 5.9, s_A^2 = \frac{1}{3}[(6 - 5.9)^2 + (5.2 - 5.9)^2 + (6.5 - 5.9)^2] = \frac{43}{150}$$

(1) 补全如图中 B 产品单价变化的折线图. B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了 25 %

(2) 求 B 产品三次单价的方差, 并比较哪种产品的单价波动小;

(3) 该厂决定第四次调价, A 产品的单价仍为 6.5 元/件, B 产品的单价比 3 元/件上调 $m\%$ ($m > 0$), 使得 A 产品这四次单价的中位数是 B 产品四次单价中位数的 2 倍少 1, 求 m 的值.

A, B 产品单价变化折线图



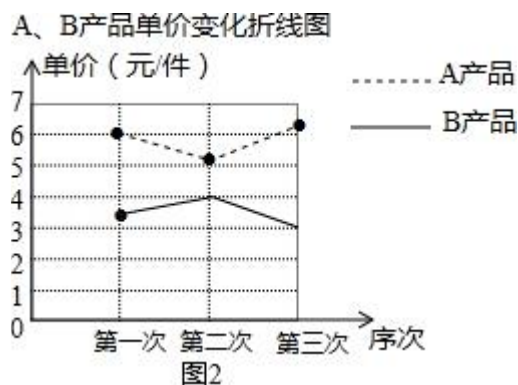
考点: 方差; 统计表; 折线统计图; 算术平均数; 中位数.

分析: (1) 根据题目提供数据补充折线统计图即可;

(2) 分别计算平均数及方差即可;

(3) 首先确定这四次单价的中位数, 然后确定第四次调价的范围, 根据“A 产品这四次单价的中位数是 B 产品四次单价中位数的 2 倍少 1”列式求 m 即可.

解答: 解: (1) 如图 2 所示:



B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了 $\frac{4-3}{4}=25\%$,

$$(2) \bar{x}_B = \frac{1}{3} (3.5+4+3) = 3.5,$$

$$S_n^2 = \frac{(3.5-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (3-3.5)^2}{3} = \frac{1}{6},$$

$\therefore$ B 产品的方差小,

$\therefore$ B 产品的单价波动小;

$$(3) \text{第四次调价后, 对于 A 产品, 这四次单价的中位数为 } \frac{6+6.5}{2} = \frac{25}{4},$$

对于 B 产品, $\therefore m < 0$,

$\therefore$ 第四次单价大于 3,

$$\therefore \frac{3.5+4}{2} \times 2 - 1 > \frac{25}{4},$$

$\therefore$ 第四次单价小于 4,

$$\therefore \frac{3(1+m\%) + 3.5}{2} \times 2 - 1 = \frac{25}{4},$$

$$\therefore m = 25.$$

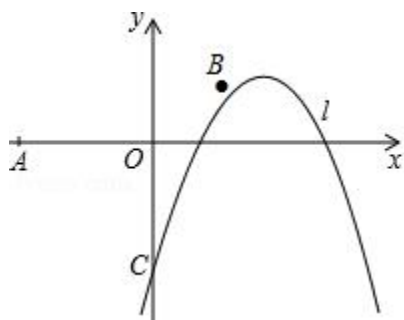
点评: 本题考查了方差、条形统计图、算术平均数、中位数的知识, 解题的关键是根据方差公式进行有关的运算, 难度不大.

25. (11 分) (2015•河北) 如图, 已知点 O (0, 0), A (-5, 0), B (2, 1), 抛物线 l: $y = -(x-h)^2 + 1$ (h 为常数) 与 y 轴的交点为 C.

(1) l 经过点 B, 求它的解析式, 并写出此时 l 的对称轴及顶点坐标;

(2) 设点 C 的纵坐标为 y_c , 求 y_c 的最大值, 此时 l 上有两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 其中 $x_1 > x_2 \geq 0$, 比较 y_1 与 y_2 的大小;

(3) 当线段 OA 被 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 1: 4 时, 求 h 的值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 把点 B 的坐标代入函数解析式, 列出关于 h 的方程, 借助于方程可以求得 h 的值; 利用抛物线函数解析式得到该图象的对称轴和顶点坐标;

(2) 把点 C 的坐标代入函数解析式得到: $y_C = -h^2 + 1$, 则由二次函数的最值的求法易得 y_C 的最大值, 并可以求得此时抛物线的解析式, 根据抛物线的增减性来求 y_1 与 y_2 的大小;

(3) 根据已知条件“O (0, 0), A (-5, 0), 线段 OA 被 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 1: 4”可以推知把线段 OA 被 l 只分为两部分的点的坐标分别是 (-1, 0), (-4, 0). 由二次函数图象上点的坐标特征可以求得 h 的值.

解答: 解: (1) 把点 B 的坐标 B (2, 1) 代入 $y = -(x-h)^2 + 1$, 得
 $1 = -(2-h)^2 + 1$.

解得 $h=2$.

则该函数解析式为 $y = -(x-2)^2 + 1$ (或 $y = -x^2 + 4x - 3$).

故抛物线 l 的对称轴为 $x=2$, 顶点坐标是 (2, 1);

(2) 点 C 的横坐标为 0, 则 $y_C = -h^2 + 1$.

当 $h=0$ 时, y_C 有最大值 1,

此时, 抛物线 l 为: $y = -x^2 + 1$, 对称轴为 y 轴, 开口方向向下,

所以, 当 $x \geq 0$ 时, y 随 x 的增大而减小,

所以, $x_1 > x_2 \geq 0$, $y_1 < y_2$;

(3) $\because$ 线段 OA 被 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 1: 4, 且 O (0, 0), A (-5, 0),

$\therefore$ 把线段 OA 被 l 只分为两部分的点的坐标分别是 (-1, 0), (-4, 0).

把 $x=-1$, $y=0$ 代入 $y = -(x-h)^2 + 1$, 得

$0 = -(-1-h)^2 + 1$,

解得 $h_1=0$, $h_2=-2$.

但是当 $h=-2$ 时, 线段 OA 被抛物线 l 分为三部分, 不合题意, 舍去.

同样, 把 $x=-4$, $y=0$ 代入 $y = -(x-h)^2 + 1$, 得

$h=-5$ 或 $h=-3$ (舍去).

综上所述, h 的值是 0 或 -5.

点评: 本题考查了二次函数综合题. 该题涉及到了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数最值的求法以及点的坐标与图形的性质等知识点, 综合性比较强, 难度较大. 解答 (3) 题时, 注意对 h 的值根据实际意义进行取舍.

26. (14分) (2015•河北) 平面上, 矩形 ABCD 与直径为 QP 的半圆 K 如图 1 摆放, 分别延长 DA 和 QP 交于点 O, 且 $\angle DOQ=60^\circ$, $OQ=OD=3$, $OP=2$, $OA=AB=1$. 让线段 OD 及矩形 ABCD 位置固定, 将线段 OQ 连带着半圆 K 一起绕着点 O 按逆时针方向开始旋转, 设旋转角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$).

发现:

(1) 当 $\alpha=0^\circ$, 即初始位置时, 点 P 在直线 AB 上. (填“在”或“不在”) 求当 α 是多少时, OQ 经过点 B.

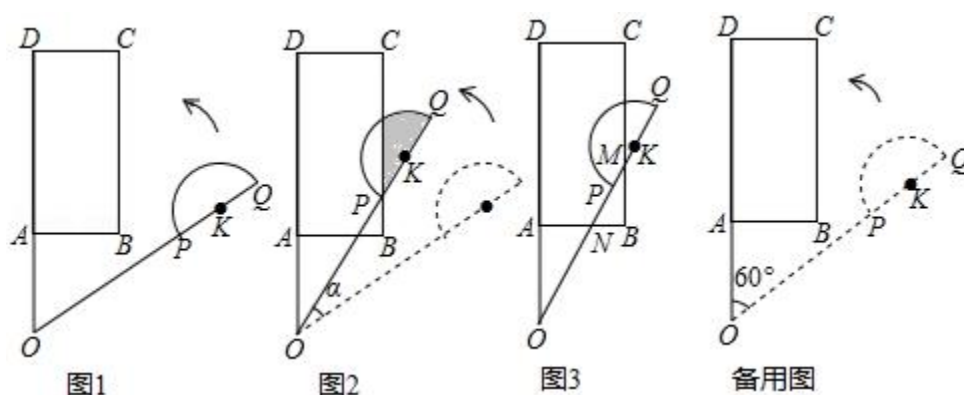
(2) 在 OQ 旋转过程中, 简要说明 α 是多少时, 点 P, A 间的距离最小? 并指出这个最小值;

(3) 如图 2, 当点 P 恰好落在 BC 边上时, 求 α 及 $S_{\text{阴影}}$

拓展:

如图 3, 当线段 OQ 与 CB 边交于点 M, 与 BA 边交于点 N 时, 设 $BM=x$ ($x>0$), 用含 x 的代数式表示 BN 的长, 并求 x 的取值范围.

探究: 当半圆 K 与矩形 ABCD 的边相切时, 求 $\sin \alpha$ 的值.



考点: 圆的综合题.

分析: (1) 在, 当 OQ 过点 B 时, 在 $Rt\triangle OAB$ 中, $AO=AB$, 得到 $\angle DOQ=\angle ABO=45^\circ$, 求得 $\alpha=60^\circ-45^\circ=15^\circ$;

(2) 如图 2, 连接 AP, 由 $OA+AP \geq OP$, 当 OP 过点 A, 即 $\alpha=60^\circ$ 时, 等号成立, 于是有 $AP \geq OP-OA=2-1=1$, 当 $\alpha=60^\circ$ 时, P、A 之间的距离最小, 即可求得结果

(3) 如图 2, 设半圆 K 与 PC 交点为 R, 连接 RK, 过点 P 作 $PH \perp AD$ 于点 H, 过点 R 作 $RE \perp KQ$ 于点 E, 在 $Rt\triangle OPH$ 中, $PH=AB=1$, $OP=2$, 得到 $\angle POH=30^\circ$, 求得 $\alpha=60^\circ-30^\circ=30^\circ$, 由于 $AD \parallel BC$, 得到 $\angle RPO=\angle POH=30^\circ$, 求出 $\angle RKQ=2 \times 30^\circ=60^\circ$, 于是得到结果;

拓展: 如图 5, 由 $\angle OAN=\angle MBN=90^\circ$, $\angle ANO=\angle BNM$, 得到 $\triangle AON \sim \triangle BMN$ 求出 $BN=\frac{x}{x+1}$, 如图 4, 当点 Q 落在 BC 上时, x 取最大值, 作 $QF \perp AD$ 于点 F,

$BQ=AF=\sqrt{OQ^2-QF^2}-AO=2\sqrt{2}-1$, 求出 x 的取值范围是 $0 < x \leq \sqrt{2}-1$;

探究: 半圆 K 与矩形 ABCD 的边相切, 分三种情况;

①如图 5, 半圆 K 与 BC 相切于点 T, 设直线 KT 与 AD, OQ 的初始位置所在的直线分别交于点 S, O', 于是得到 $\angle KSO=\angle KTB=90^\circ$, 作 $KG \perp OO'$ 于 G, 在 $Rt\triangle OSK$ 中, 求出 $OS=\sqrt{OK^2-SK^2}=2$, 在 $Rt\triangle OSO'$ 中, $SO'=OS \cdot \tan 60^\circ=2\sqrt{3}$, $KO'=2\sqrt{3}-\frac{3}{2}$ 在

$Rt\triangle KGO'$ 中, $\angle O'=30^\circ$, 求得 $KG=\frac{1}{2}KO'=\sqrt{3}-\frac{3}{4}$, 在 $Rt\triangle OGK$ 中, 求得结果; ②

当半圆 K 与 AD 相切于 T, 如图 6, 同理可得 $\sin\alpha$ 的值③当半圆 K 与 CD 切线时, 点 Q 与点 D 重合, 且为切点, 得到 $\alpha=60^\circ$ 于是结论可求.

解答: 解: 发现: (1) 在,

当 OQ 过点 B 时, 在 $Rt\triangle OAB$ 中, $AO=AB$,

$\therefore \angle DOQ = \angle ABO = 45^\circ$,

$\therefore \alpha = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$;

(2) 如图 2, 连接 AP,

$\therefore OA+AP \geq OP$,

当 OP 过点 A, 即 $\alpha=60^\circ$ 时, 等号成立,

$\therefore AP \geq OP - OA = 2 - 1 = 1$,

$\therefore$ 当 $\alpha=60^\circ$ 时, P、A 之间的距离最小,

$\therefore PA$ 的最小值=1;

(3) 如图 2, 设半圆 K 与 PC 交点为 R, 连接 RK, 过点 P 作 $PH \perp AD$ 于点 H, 过点 R 作 $RE \perp KQ$ 于点 E, 在 $Rt\triangle OPH$ 中, $PH=AB=1$, $OP=2$,

$\therefore \angle POH = 30^\circ$,

$\therefore \alpha = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle RPO = \angle POH = 30^\circ$,

$\therefore \angle RKQ = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore S_{\text{扇形} KRQ} = \frac{60\pi \cdot (\frac{1}{2})^2}{360} = \frac{\pi}{24}$,

在 $Rt\triangle RKE$ 中, $RE = RK \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore S_{\triangle PRK} = \frac{1}{2} \cdot RE = \frac{\sqrt{3}}{16}$, $\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}$;

拓展: 如图 5,

$\therefore \angle OAN = \angle MBN = 90^\circ$, $\angle ANO = \angle BNM$,

$\therefore \triangle AON \sim \triangle BMN$,

$\therefore \frac{AN}{BN} = \frac{AO}{BM}$, 即 $\frac{1-BN}{BN} = \frac{1}{x}$,

$\therefore BN = \frac{x}{x+1}$,

如图 4, 当点 Q 落在 BC 上时, x 取最大值, 作 $QF \perp AD$ 于点 F, $BQ=AF=\sqrt{OQ^2 - QF^2}$

$-AO = 2\sqrt{2} - 1$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $0 < x \leq \sqrt{2} - 1$;

探究: 半圆 K 与矩形 ABCD 的边相切, 分三种情况;

①如图 5，半圆 K 与 BC 相切于点 T，设直线 KT 与 AD，OQ 的初始位置所在的直线分别交于点 S，O'，

则 $\angle KSO = \angle KTB = 90^\circ$ ，

作 $KG \perp OO'$ 于 G，在 $Rt\triangle OSK$ 中，

$$OS = \sqrt{OK^2 - SK^2} = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OSO' \text{ 中, } SO' = OS \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}, \quad KO' = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

在 $Rt\triangle KGO'$ 中， $\angle O' = 30^\circ$ ，

$$\therefore KG = \frac{1}{2}KO' = \sqrt{3} - \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle OGK \text{ 中, } \sin \alpha = \frac{KG}{OK} = \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10},$$

②当半圆 K 与 AD 相切于 T，如图 6，同理可得

$$\sin \alpha = \frac{KG}{OK} = \frac{\frac{1}{2}O'K - \frac{1}{2}(O'T - KT)}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{(\frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}}{5} = \frac{6\sqrt{2} - 1}{10};$$

③当半圆 K 与 CD 切线时，点 Q 与点 D 重合，且为切点，

$\therefore \alpha = 60^\circ$ ，

$$\therefore \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

综上所述 $\sin \alpha$ 的值为： $\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$ 或 $\frac{6\sqrt{2} - 1}{10}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

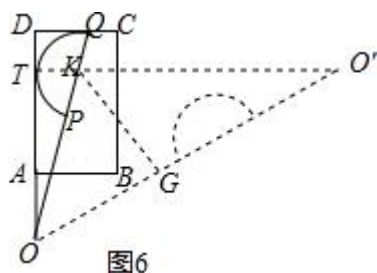


图6

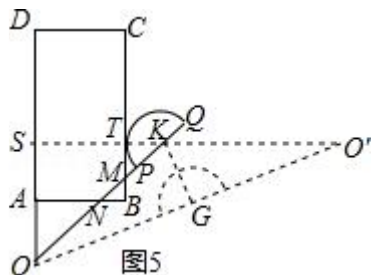


图5

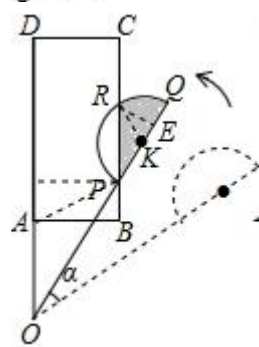
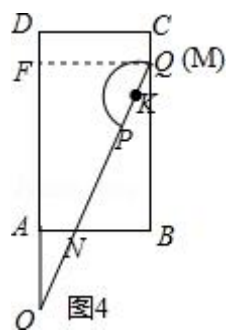


图2

点评: 本题考查了矩形的性质，直线与圆的位置关系，勾股定理，锐角三角函数，根据题意正确的画出图形是解题的关键.