

2015 年江西省中考数学试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分，每小题只有一个正确选项）

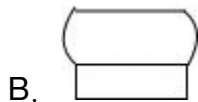
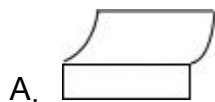
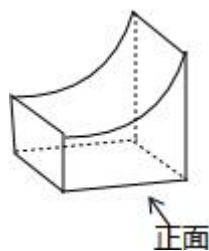
1. (3 分) 计算 $(-1)^0$ 的结果为 ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 无意义

2. (3 分) 2015 年初，一列 CRH5 型高速车组进行了“300000 公里正线运营考核”标志着中国高速快车从“中国制造”到“中国创造”的飞跃，将 300000 用科学记数法表示为 ()

- A. 3×10^6 B. 3×10^5 C. 0.3×10^6 D. 30×10^4

3. (3 分) 如图所示的几何体的左视图为 ()



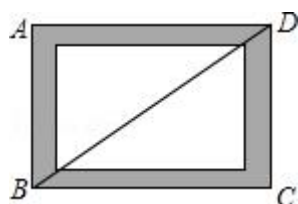
4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $(2a^2)^3 = 6a^6$ B. $-a^2b^2 \cdot 3ab^3 = -3a^2b^5$

C. $\frac{b}{a-b} + \frac{a}{b-a} = -1$

D. $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{1}{a+1} = -1$

5. (3 分) 如图，小贤为了体验四边形的不稳定性，将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 ABCD，B 与 D 两点之间用一根橡皮筋拉直固定，然后向右扭动框架，观察所得四边形的变化，下列判断错误的是 ()



A. 四边形 ABCD 由矩形变为平行四边形

B. BD 的长度增大

C. 四边形 ABCD 的面积不变

D. 四边形 ABCD 的周长不变

6. (3 分) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 过 $(-2, 0)$, $(2, 3)$ 两点, 那么抛物线的对称轴 ()

A. 只能是 $x=-1$

B. 可能是 y 轴

C. 可能在 y 轴右侧且在直线 $x=2$ 的左侧

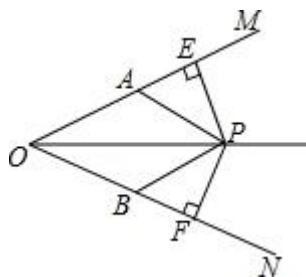
D. 可能在 y 轴左侧且在直线 $x=-2$ 的右侧

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

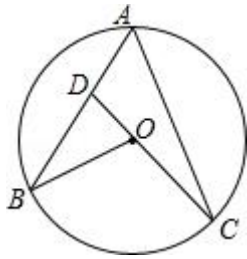
7. (3 分) 一个角的度数为 20° , 则它的补角的度数为_____.

8. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 \leq 0 \\ -3x < 9 \end{cases}$ 的解集是_____.

9. (3 分) 如图, OP 平分 $\angle MON$, $PE \perp OM$ 于 E, $PF \perp ON$ 于 F, $OA=OB$, 则图中有_____对全等三角形.



10. (3 分) 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, CO 的延长线交 AB 于点 D, $\angle A=50^\circ$, $\angle B=30^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数为_____.



11. (3分) 已知一元二次方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根为 m , n , 则 $m^2 - mn + n^2 =$ _____.

12. (3分) 两组数据: 3, a , $2b$, 5 与 a , 6, b 的平均数都是 6, 若将这两组数据合并为一组数据, 则这组新数据的中位数为_____.

13. (3分) 如图 1 是小志同学书桌上的一个电子相框, 将其侧面抽象为如图 2 所示的几何图形, 已知 $BC = BD = 15\text{cm}$, $\angle CBD = 40^\circ$, 则点 B 到 CD 的距离为_____cm (参考数据 $\sin 20^\circ \approx 0.342$, $\cos 20^\circ \approx 0.940$, $\sin 40^\circ \approx 0.643$, $\cos 40^\circ \approx 0.766$, 结果精确到 0.1cm, 可用科学计算器).



图1

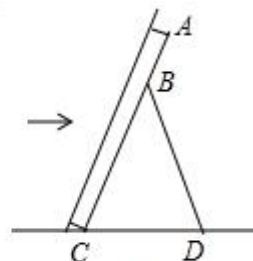
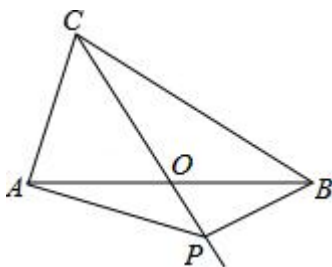


图2

14. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 4$, $AO = BO$, P 是射线 CO 上的一个动点, $\angle AOC = 60^\circ$, 则当 $\triangle PAB$ 为直角三角形时, AP 的长为_____.



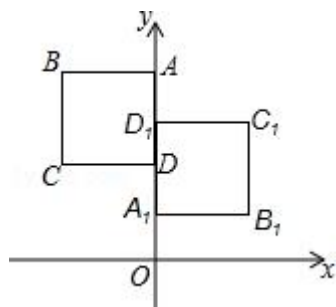
三、(本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

15. (6分) 先化简, 再求值: $2a(a+2b) - (a+2b)^2$, 其中 $a = -1$, $b = \sqrt{3}$.

16. (6分) 如图, 正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 关于某点中心对称, 已知 A , D_1 , D 三点的坐标分别是 $(0, 4)$, $(0, 3)$, $(0, 2)$.

(1) 求对称中心的坐标.

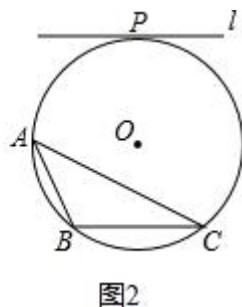
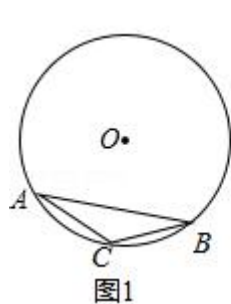
(2) 写出顶点 B , C , B_1 , C_1 的坐标.



17. (6分) $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 请仅用无刻度的直尺, 根据下列条件分别在图 1, 图 2 中画出一条弦, 使这条弦将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分 (保留作图痕迹, 不写作法).

(1) 如图 1, $AC = BC$;

(2) 如图 2, 直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 P , 且 $l \parallel BC$.



18. (6 分) 在一个不透明的袋子中装仅有颜色不同的 10 个小球，其中红球 4 个，黑球 6 个.

(1) 先从袋子中取出 m ($m > 1$) 个红球，再从袋子中随机摸出 1 个球，将“摸出黑球”记为事件 A，请完成下列表格:

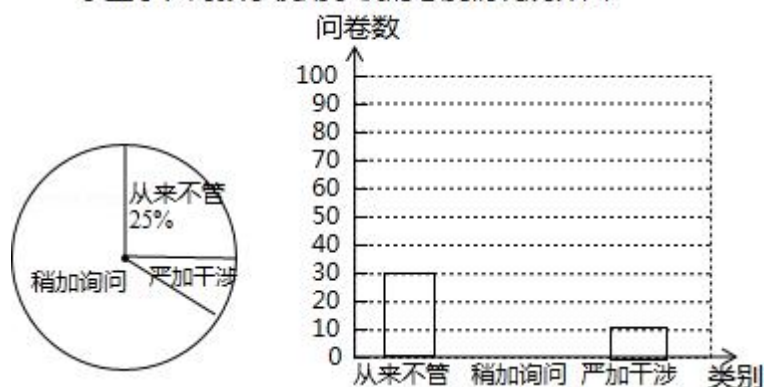
事件 A	必然事件	随机事件
m 的值	_____	_____

(2) 先从袋子中取出 m 个红球，再放入 m 个一样的黑球并摇匀，随机摸出 1 个黑球的概率等于 $\frac{4}{5}$ ，求 m 的值.

四、(本大题共 4 小题，每小题 8 分，共 32 分)

19. (8 分) 某校为了了解学生家长对孩子使用手机的态度情况，随机抽取部分学生家长进行问卷调查，发出问卷 140 份，每位学生家长 1 份，每份问卷仅表明一种态度，将回收的问卷进行整理 (假设回收的问卷都有效)，并绘制了如图两幅不完整的统计图.

学生家长对孩子使用手机的态度情况统计图



根据以上信息解答下列问题:

- (1) 回收的问卷数为_____份, “严加干涉”部分对应扇形的圆心角度数为_____.
- (2) 把条形统计图补充完整
- (3) 若将“稍加询问”和“从不干涉”视为“管理不严”, 已知全校共 1500 名学生, 请估计该校对孩子使用手机“管理不严”的家长大约有多少人?

20. (8 分) (1) 如图 1, 纸片 $\square ABCD$ 中, $AD=5$, $S_{\square ABCD}=15$, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E, 沿 AE 剪下 $\triangle ABE$, 将它平移至 $\triangle DCE'$ 的位置, 拼成四边形 AEE'D, 则四边形 AEE'D 的形状为_____

A. 平行四边形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

(2) 如图 2, 在 (1) 中的四边形纸片 $AEE'D$ 中, 在 EE' 上取一点 F , 使 $EF=4$,

剪下 $\triangle AEF$, 将它平移至 $\triangle DE'F'$ 的位置, 拼成四边形 $AFF'D$.

①求证: 四边形 $AFF'D$ 是菱形.

②求四边形 $AFF'D$ 的两条对角线的长.

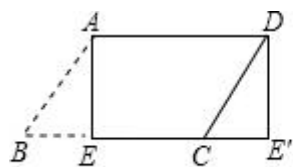


图1

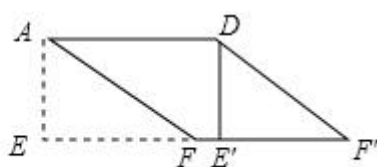
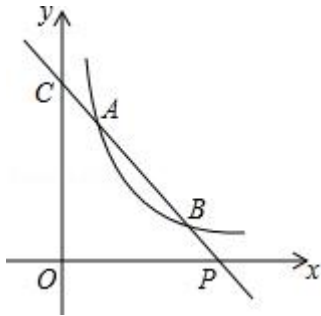


图2

21. (8 分) 如图, 已知直线 $y=ax+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 交于 $A(x_1, y_1)$,

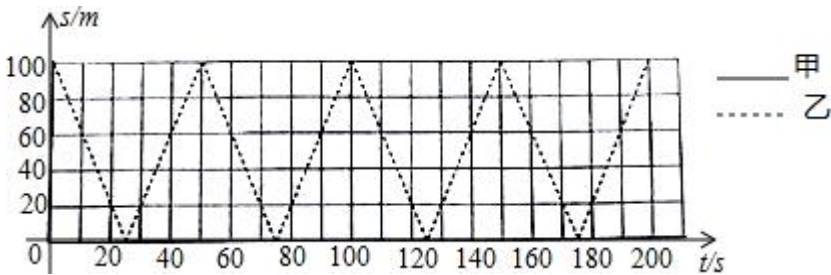
$B(x_2, y_2)$ 两点 (A 与 B 不重合), 直线 AB 与 x 轴交于 $P(x_0, 0)$, 与 y 轴交于点 C .

- (1) 若 A, B 两点坐标分别为 $(1, 3), (3, y_2)$, 求点 P 的坐标.
- (2) 若 $b=y_1+1$, 点 P 的坐标为 $(6, 0)$, 且 $AB=BP$, 求 A, B 两点的坐标.
- (3) 结合 (1), (2) 中的结果, 猜想并用等式表示 x_1, x_2, x_0 之间的关系 (不要求证明).



22. (8 分) 甲、乙两人在 100 米直道 AB 上练习匀速往返跑, 若甲、乙分别在 A, B 两端同时出发, 分别到另一端点处掉头, 掉头时间不计, 速度分别为 5m/s 和 4m/s.

(1) 在坐标系中, 虚线表示乙离 A 端的距离 s (单位: m) 与运动时间 t (单位: s) 之间的函数图象 ($0 \leq t \leq 200$), 请在同一坐标系中用实线画出甲离 A 端的距离 s 与运动时间 t 之间的函数图象 ($0 \leq t \leq 200$).



(2) 根据 (1) 中所画图象, 完成下列表格:

两人相遇次数 (单位: 次)	1	2	3	4	...	n
两人所跑路程之和 (单位: m)	100	300	—	—	...	—

(3) ①直接写出甲、乙两人分别在第一个 100m 内, t 与 s 的函数解析式, 并指出自变量 t 的取值范围.

②求甲、乙第 6 次相遇时 t 的值.

五、(本大题共 10 分)

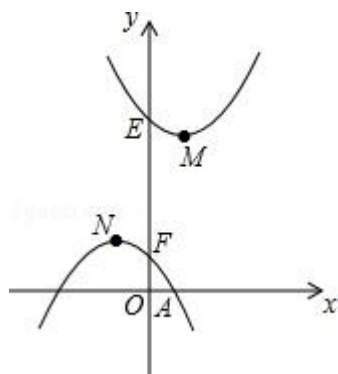
23. (10 分) 如图, 已知二次函数 $L_1: y=ax^2-2ax+a+3$ ($a>0$) 和二次函数 $L_2:$

$y=-a(x+1)^2+1$ ($a>0$) 图象的顶点分别为 M , N , 与 y 轴分别交于点 E , F .

(1) 函数 $y=ax^2-2ax+a+3$ ($a>0$) 的最小值为_____, 当二次函数 L_1 , L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减小时, x 的取值范围是_____.

(2) 当 $EF=MN$ 时, 求 a 的值, 并判断四边形 $ENFM$ 的形状 (直接写出, 不必证明).

(3) 若二次函数 L_2 的图象与 x 轴的右交点为 $A(m, 0)$, 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 求方程 $-a(x+1)^2+1=0$ 的解.



六、(本大题共 12 分)

24. (12 分) 我们把两条中线互相垂直的三角形称为“称为中垂三角形”，例如图

1, 图 2, 图 3 中, AF , BE 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AF \perp BE$, 垂足为 P , 像 $\triangle ABC$

这样的三角形均称为“中垂三角形”, 设 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

特例探索

(1) 如图 1, 当 $\angle ABE=45^\circ$, $c=2\sqrt{2}$ 时, $a=$ _____, $b=$ _____.

如图 2, 当 $\angle ABE=30^\circ$, $c=4$ 时, $a=$ _____, $b=$ _____.

归纳证明

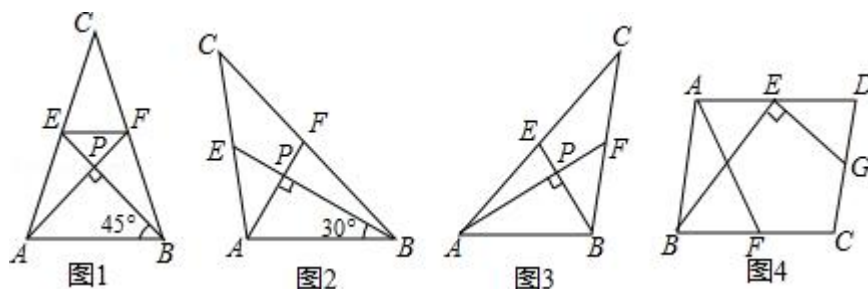
(2) 请你观察 (1) 中的计算结果, 猜想 a^2 , b^2 , c^2 三者之间的关系, 用等式

表示出来, 并利用图 3 证明你发现的关系式.

拓展应用

(3) 如图 4, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 分别是 AD , BC , CD 的中点, $BE \perp$

EG , $AD=2\sqrt{5}$, $AB=3$, 求 AF 的长.



2015 年江西省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分，每小题只有一个正确选项）

1. (3 分) 计算 $(-1)^0$ 的结果为 ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 无意义

【考点】6E: 零指数幂.

【分析】根据零指数幂的运算方法: $a^0=1$ ($a \neq 0$), 求出 $(-1)^0$ 的结果为多少即可.

【解答】解: $\because (-1)^0=1$,

$\therefore (-1)^0$ 的结果为 1.

故选: A.

【点评】此题主要考查了零指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: (1) $a^0=1$ ($a \neq 0$); (2) $0^0 \neq 1$.

2. (3 分) 2015 年初, 一列 CRH5 型高速车组进行了“300000 公里正线运营考核”标志着中国高速快车从“中国制造”到“中国创造”的飞跃, 将 300000 用科学记数法表示为 ()

- A. 3×10^6 B. 3×10^5 C. 0.3×10^6 D. 30×10^4

【考点】1I: 科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1

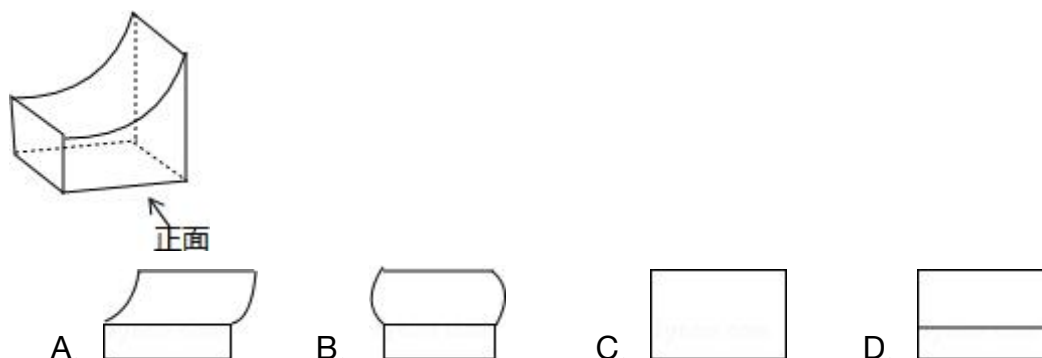
时, n 是负数.

【解答】 解: 将 300000 用科学记数法表示为: 3×10^5 .

故选: B.

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

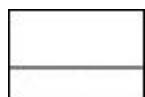
3. (3 分) 如图所示的几何体的左视图为 ()



【考点】 U2: 简单组合体的三视图.

【分析】 找到从左面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在左视图中.

【解答】 解: 从左面看易得左视图为:



故选: D.

【点评】 本题考查了三视图的知识, 左视图是从物体的左面看得到的视图.

4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $(2a^2)^3 = 6a^6$

B. $-a^2b^2 \cdot 3ab^3 = -3a^2b^5$

C. $\frac{b}{a-b} + \frac{a}{b-a} = -1$

D. $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{1}{a+1} = -1$

【考点】 47: 幂的乘方与积的乘方; 49: 单项式乘单项式; 6A: 分式的乘除法; 6B: 分式的加减法.

【专题】 11: 计算题.

【分析】A、原式利用幂的乘方及积的乘方运算法则计算得到结果，即可做出判断；

B、原式利用单项式乘以单项式法则计算得到结果，即可做出判断；

C、原式变形后，利用同分母分式的减法法则计算得到结果，即可做出判断；

D、原式约分得到结果，即可做出判断.

【解答】解：A、原式= $8a^6$ ，错误；

B、原式= $-3a^3b^5$ ，错误；

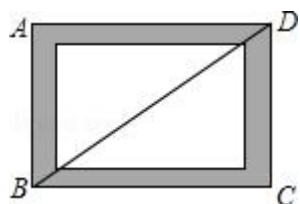
C、原式= $\frac{b-a}{a-b} - \frac{-(a-b)}{a-b} = -1$ ，正确；

D、原式= $\frac{(a+1)(a-1)}{a} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a-1}{a}$ ，错误，

故选：C.

【点评】此题考查了分式的加减法，幂的乘方与积的乘方，单项式乘单项式，以及分式的乘除法，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

5. (3 分) 如图，小贤为了体验四边形的不稳定性，将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 ABCD，B 与 D 两点之间用一根橡皮筋拉直固定，然后向右扭动框架，观察所得四边形的变化，下列判断错误的是 ()



- A. 四边形 ABCD 由矩形变为平行四边形
- B. BD 的长度增大
- C. 四边形 ABCD 的面积不变
- D. 四边形 ABCD 的周长不变

【考点】L5：平行四边形的性质；LB：矩形的性质.

【分析】由将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 ABCD，B 与 D 两点之间用一

根橡皮筋拉直固定，然后向右扭动框架，由平行四边形的判定定理知四边形变成平行四边形，由于四边形的每条边的长度没变，所以周长没变；拉成平行四边形后，高变小了，但底边没变，所以面积变小了，BD 的长度增加了.

【解答】解：∵矩形框架 ABCD，B 与 D 两点之间用一根橡皮筋拉直固定，然后向右扭动框架，

∴AD=BC，AB=DC，

∴四边形变成平行四边形，

故 A 正确；

BD 的长度增加，

故 B 正确；

∵拉成平行四边形后，高变小了，但底边没变，

∴面积变小了，故 C 错误；

∵四边形的每条边的长度没变，

∴周长没变，

故 D 正确，

故选：C.

【点评】本题主要考查了矩形的性质和平行四边形的性质，弄清图形变化后的变量和不变量是解答此题的关键.

6. (3 分) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 过 $(-2, 0)$, $(2, 3)$ 两点，那么抛物线的对称轴 ()

A. 只能是 $x=-1$

B. 可能是 y 轴

C. 可能在 y 轴右侧且在直线 $x=2$ 的左侧

D. 可能在 y 轴左侧且在直线 $x=-2$ 的右侧

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】16：压轴题.

【分析】根据题意，将 $(-2, 0)$ ， $(2, 3)$ 代入可得两个方程，解出可作判定抛物线对称轴的位置.

【解答】解：∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 过 $(-2, 0)$ ， $(2, 3)$ 两点，

$$\therefore 0=4a-2b+c,$$

$$3=4a+2b+c,$$

$$\text{解得 } b=\frac{3}{4}, \quad c=\frac{3}{2}-4a,$$

$$\therefore y=ax^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}-4a \text{ 的对称轴是直线 } x=-\frac{\frac{3}{4}}{2a}=-\frac{3}{8a}<0, \text{ 在 } y \text{ 轴的左侧,}$$

其对称轴可能在 $x=-2$ 的左侧，也可能在 $x=-2$ 的右侧，

所以可能在 y 轴左侧且在直线 $x=-2$ 的右侧，是正确的；

故选：D.

【点评】本题考查了二次函数的性质，根据点坐标代入列方程是解题的关键.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

7. (3 分) 一个角的度数为 20° ，则它的补角的度数为 160° .

【考点】1L：余角和补角.

【分析】根据互为补角的两个角的和等于 180° 列式进行计算即可得解.

【解答】解： $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

故答案为： 160° .

【点评】本题考查了余角和补角，解决本题的关键是熟记互为补角的和等于 180° .

8. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 \leq 0 \\ -3x < 9 \end{cases}$ 的解集是 $-3 < x \leq 2$.

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【专题】11：计算题.

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1 \leq 0 \textcircled{1} \\ -3x < 9 \textcircled{2} \end{cases},$$

由①得： $x \leq 2$,

由②得： $x > -3$,

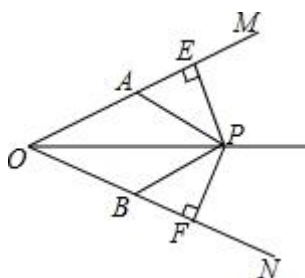
则不等式组的解集为 $-3 < x \leq 2$.

故答案为： $-3 < x \leq 2$

【点评】此题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

9. (3分) 如图，OP 平分 $\angle MON$ ， $PE \perp OM$ 于 E， $PF \perp ON$ 于 F， $OA=OB$ ，则

图中有 3 对全等三角形.



【考点】KB：全等三角形的判定；KF：角平分线的性质.

【分析】由 OP 平分 $\angle MON$ ， $PE \perp OM$ 于 E， $PF \perp ON$ 于 F，得到 $PE=PF$ ， $\angle$

$1=\angle 2$ ，证得 $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ ，再根据 $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ ，得出 $AP=BP$ ，于是

证得 $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ ，和 $Rt\triangle AOP \cong Rt\triangle BOP$.

【解答】解：OP 平分 $\angle MON$ ， $PE \perp OM$ 于 E， $PF \perp ON$ 于 F，

$\therefore PE=PF$ ， $\angle 1=\angle 2$ ，

在 $\triangle AOP$ 与 $\triangle BOP$ 中，

$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle 1=\angle 2, \\ OP=OP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP,$$

$$\therefore AP=BP,$$

在 $\triangle EOP$ 与 $\triangle FOP$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1=\angle 2 \\ \angle OEP=\angle OFP=90^\circ, \\ OP=OP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EOP \cong \triangle FOP,$$

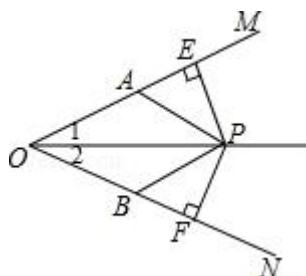
在 $Rt\triangle AEP$ 与 $Rt\triangle BFP$ 中,

$$\begin{cases} PA=PB \\ PE=PF, \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle AEP \cong Rt\triangle BFP,$$

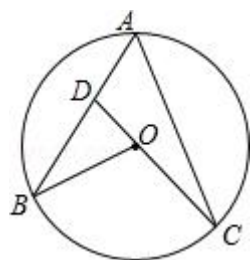
$\therefore$ 图中有 3 对全等三角形,

故答案为: 3.



【点评】 本题考查了角平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的判定定理是解题的关键.

10. (3 分) 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, CO 的延长线交 AB 于点 D, $\angle A=50^\circ$, $\angle B=30^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数为 110°.



【考点】 M5: 圆周角定理.

【分析】 根据圆周角定理求得 $\angle BOC=100^\circ$, 进而根据三角形的外角的性质求得

$\angle BDC=70^\circ$, 然后根据邻补角求得 $\angle ADC$ 的度数.

【解答】 解: $\because \angle A=50^\circ$,

$$\therefore \angle BOC=2\angle A=100^\circ,$$

$$\because \angle B=30^\circ, \angle BOC=\angle B+\angle BDC,$$

$$\therefore \angle BDC=\angle BOC-\angle B=100^\circ-30^\circ=70^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle BDC=110^\circ,$$

故答案为 110° .

【点评】 本题考查了圆心角和圆周角的关系及三角形外角的性质, 圆心角和圆周角的关系是解题的关键.

11. (3 分) 已知一元二次方程 $x^2-4x-3=0$ 的两根为 m , n , 则 $m^2-mn+n^2=$
25.

【考点】 AB: 根与系数的关系.

【分析】 由 m 与 n 为已知方程的解, 利用根与系数的关系求出 $m+n$ 与 mn 的值, 将所求式子利用完全平方公式变形后, 代入计算即可求出值.

【解答】 解: $\because m, n$ 是一元二次方程 $x^2-4x-3=0$ 的两个根,

$$\therefore m+n=4, mn=-3,$$

$$\text{则 } m^2-mn+n^2=(m+n)^2-3mn=16+9=25.$$

故答案为: 25.

【点评】 此题考查了一元二次方程根与系数的关系, 将根与系数的关系与代数式变形相结合解题是一种经常使用的解题方法.

12. (3 分) 两组数据: 3, a , $2b$, 5 与 a , 6, b 的平均数都是 6, 若将这两组

数据合并为一组数据，则这组新数据的中位数为 6 .

【考点】 W1：算术平均数；W4：中位数.

【分析】 首先根据平均数的定义列出关于 a 、 b 的二元一次方程组，再解方程组求得 a 、 b 的值，然后求中位数即可.

【解答】 解： $\because$ 两组数据：3， a ， $2b$ ，5 与 a ，6， b 的平均数都是 6，

$$\therefore \begin{cases} a+2b=24-3-5 \\ a+b=18-6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=8 \\ b=4 \end{cases},$$

若将这两组数据合并为一组数据，按从小到大的顺序排列为 3，4，5，6，8，8，8，

一共 7 个数，第四个数是 6，所以这组数据的中位数是 6.

故答案为 6.

【点评】 本题考查平均数和中位数. 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 一组数据的中位数与这组数据的排序及数据个数有关，因此求一组数据的中位数时，先将该组数据按从小到大（或按从大到小）的顺序排列，然后根据数据的个数确定中位数：当数据个数为奇数时，则中间的一个数即为这组数据的中位数；当数据个数为偶数时，则最中间的两个数的算术平均数即为这组数据的中位数.

13. (3 分) 如图 1 是小志同学书桌上的一个电子相框，将其侧面抽象为如图 2 所示的几何图形，已知 $BC=BD=15\text{cm}$ ， $\angle CBD=40^\circ$ ，则点 B 到 CD 的距离为 14.1 cm (参考数据 $\sin 20^\circ \approx 0.342$ ， $\cos 20^\circ \approx 0.940$ ， $\sin 40^\circ \approx 0.643$ ， $\cos 40^\circ \approx 0.766$ ，结果精确到 0.1cm，可用科学计算器).



图1

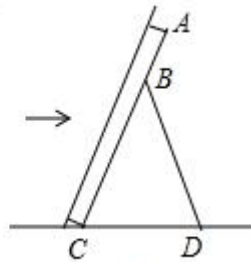


图2

【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【分析】 作 $BE \perp CD$ 于 E , 根据等腰三角形的性质和 $\angle CBD = 40^\circ$, 求出 $\angle CBE$ 的度数, 根据余弦的定义求出 BE 的长.

【解答】 解: 如图 2, 作 $BE \perp CD$ 于 E ,

$$\therefore BC = BD, \angle CBD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = 20^\circ,$$

$$\text{在 Rt} \triangle CBE \text{ 中, } \cos \angle CBE = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore BE = BC \cdot \cos \angle CBE$$

$$= 15 \times 0.940$$

$$= 14.1 \text{ cm.}$$

故答案为: 14.1.



图1

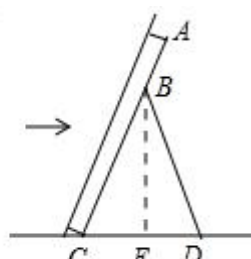
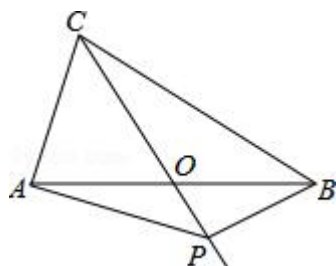


图2

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用, 掌握锐角三角函数的概念是解题的关键, 作出合适的辅助线构造直角三角形是解题的重要环节.

14. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 4$, $AO = BO$, P 是射线 CO 上的一个动点, $\angle AOC = 60^\circ$, 则当 $\triangle PAB$ 为直角三角形时, AP 的长为 $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ 或

2.



【考点】KO：含 30° 度角的直角三角形；KP：直角三角形斜边上的中线；KQ：勾股定理.

【专题】16：压轴题；32：分类讨论.

【分析】利用分类讨论，当 $\angle ABP=90^\circ$ 时，如图 2，由对顶角的性质可得 $\angle AOC=\angle BOP=60^\circ$ ，易得 $\angle BPO=30^\circ$ ，易得 BP 的长，利用勾股定理可得 AP 的长；当 $\angle APB=90^\circ$ 时，分两种情况讨论，情况一：如图 1，利用直角三角形斜边的中线等于斜边的一半得出 $PO=BO$ ，易得 $\triangle BOP$ 为等边三角形，利用锐角三角函数可得 AP 的长；易得 BP，利用勾股定理可得 AP 的长；情况二：如图 3，利用直角三角形斜边的中线等于斜边的一半可得结论.

【解答】解：当 $\angle APB=90^\circ$ 时（如图 1），

$$\because AO=BO,$$

$$\therefore PO=BO,$$

$$\because \angle AOC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP=60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BOP \text{ 为等边三角形},$$

$$\because AB=BC=4,$$

$$\therefore AP=AB \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

当 $\angle ABP=90^\circ$ 时（如图 2），

$$\therefore \angle AOC = \angle BOP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BPO = 30^\circ,$$

$$\therefore BP = \frac{OB}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

在直角三角形 ABP 中,

$$AP = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7},$$

情况二: 如图 3, $\because AO = BO, \angle APB = 90^\circ,$

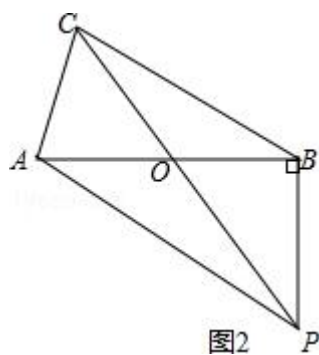
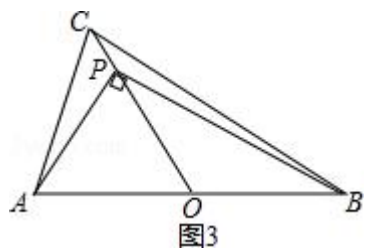
$$\therefore PO = AO,$$

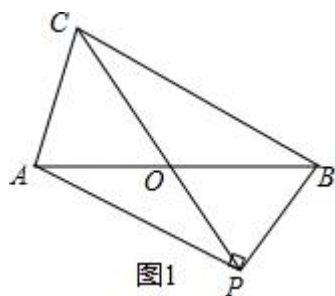
$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOP$ 为等边三角形,

$$\therefore AP = AO = 2,$$

故答案为: $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{7}$ 或 2.





【点评】 本题主要考查了勾股定理，含 30° 直角三角形的性质和直角三角形斜边的中线，分类讨论，数形结合是解答此题的关键.

三、(本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分)

15. (6 分) 先化简，再求值： $2a(a+2b) - (a+2b)^2$ ，其中 $a = -1$ ， $b = \sqrt{3}$.

【考点】 4J：整式的混合运算—化简求值.

【专题】 11：计算题.

【分析】 原式第一项利用单项式乘以多项式法则计算，第二项利用完全平方公式化简，去括号合并得到最简结果，把 a 与 b 的值代入计算即可求出值.

【解答】 解：原式 $= 2a^2 + 4ab - a^2 - 4ab - 4b^2 = a^2 - 4b^2$,

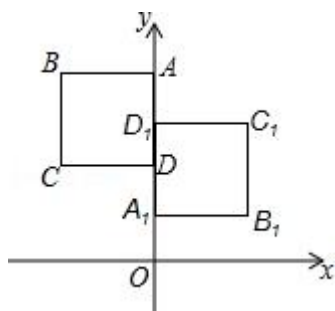
当 $a = -1$ ， $b = \sqrt{3}$ 时，原式 $= 1 - 12 = -11$.

【点评】 此题考查了整式的混合运算—化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

16. (6 分) 如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 关于某点中心对称，已知 A ， D_1 ， D 三点的坐标分别是 $(0, 4)$ ， $(0, 3)$ ， $(0, 2)$.

(1) 求对称中心的坐标.

(2) 写出顶点 B ， C ， B_1 ， C_1 的坐标.



【考点】 D5: 坐标与图形性质; R4: 中心对称.

【分析】 (1) 根据对称中心的性质, 可得对称中心的坐标是 D_1D 的中点, 据此解答即可.

(2) 首先根据 A , D 的坐标分别是 $(0, 4)$, $(0, 2)$, 求出正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长是多少, 然后根据 A , D_1 , D 三点的坐标分别是 $(0, 4)$, $(0, 3)$, $(0, 2)$, 判断出顶点 B , C , B_1 , C_1 的坐标各是多少即可.

【解答】 解: (1) 根据对称中心的性质, 可得

对称中心的坐标是 D_1D 的中点,

$\therefore D_1$, D 的坐标分别是 $(0, 3)$, $(0, 2)$,

$\therefore$ 对称中心的坐标是 $(0, 2.5)$.

(2) $\because A$, D 的坐标分别是 $(0, 4)$, $(0, 2)$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长都是: $4 - 2 = 2$,

$\therefore B$, C 的坐标分别是 $(-2, 4)$, $(-2, 2)$,

$\because A_1D_1 = 2$, D_1 的坐标是 $(0, 3)$,

$\therefore A_1$ 的坐标是 $(0, 1)$,

$\therefore B_1$, C_1 的坐标分别是 $(2, 1)$, $(2, 3)$,

综上, 可得

顶点 B , C , B_1 , C_1 的坐标分别是 $(-2, 4)$, $(-2, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$.

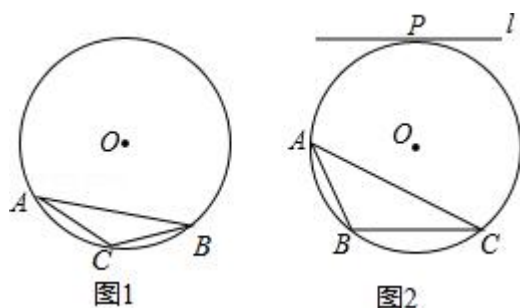
【点评】(1) 此题主要考查了中心对称的性质和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确中心对称的性质：①关于中心对称的两个图形能够完全重合；②关于中心对称的两个图形，对应点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分.

(2) 此题还考查了坐标与图形的性质的应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确点到坐标轴的距离与这个点的坐标是有区别的，表现在两个方面：①到 x 轴的距离与纵坐标有关，到 y 轴的距离与横坐标有关；②距离都是非负数，而坐标可以是负数，在由距离求坐标时，需要加上恰当的符号.

17. (6分) $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，请仅用无刻度的直尺，根据下列条件分别在图 1，图 2 中画出一条弦，使这条弦将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分（保留作图痕迹，不写作法）.

(1) 如图 1， $AC=BC$;

(2) 如图 2，直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 P ，且 $l \parallel BC$.



【考点】MA: 三角形的外接圆与外心；MC: 切线的性质；N3: 作图—复杂作图.

【专题】13: 作图题.

【分析】(1) 过点 C 作直径 CD ，由于 $AC=BC$ ， $\widehat{AC}=\widehat{BC}$ ，根据垂径定理的推理得 CD 垂直平分 AB ，所以 CD 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分；

(2) 连结 PO 并延长交 BC 于 E ，过点 A 、 E 作弦 AD ，由于直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 P ，根据切线的性质得 $OP \perp l$ ，而 $l \parallel BC$ ，则 $PE \perp BC$ ，根据垂径定理得

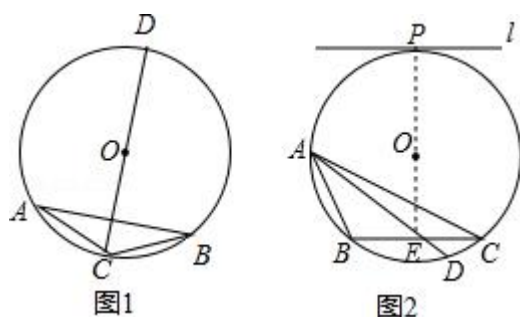
$BE=CE$ ，所以弦 AE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分.

【解答】解：(1) 如图 1,

直径 CD 为所求;

(2) 如图 2,

弦 AD 为所求.



【点评】本题考查了复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．也考查了切线的性质．

18. (6 分) 在一个不透明的袋子中装有一定颜色不同的 10 个小球，其中红球 4 个，黑球 6 个.

(1) 先从袋子中取出 m ($m > 1$) 个红球，再从袋子中随机摸出 1 个球，将“摸出黑球”记为事件 A，请完成下列表格：

事件 A	必然事件	随机事件
m 的值	<u>4</u>	<u>2, 3</u>

(2) 先从袋子中取出 m 个红球，再放入 m 个一样的黑球并摇匀，随机摸出 1 个黑球的概率等于 $\frac{4}{5}$ ，求 m 的值.

【考点】X1：随机事件；X4：概率公式.

【分析】(1) 当袋子中全部为黑球时，摸出黑球才是必然事件，否则就是随机事

件;

(2) 利用概率公式列出方程, 求得 m 的值即可.

【解答】解: (1) 当袋子中全为黑球, 即摸出 4 个红球时, 摸到黑球是必然事件;

当摸出 2 个或 3 个时, 摸到黑球为随机事件,

故答案为: 4; 2, 3.

(2) 根据题意得: $\frac{6+m}{10} = \frac{4}{5}$,

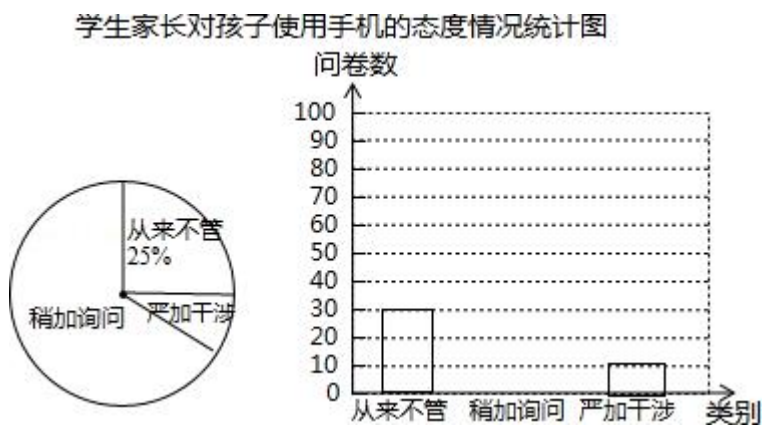
解得: $m=2$,

所以 m 的值为 2.

【点评】本题考查的是概率的求法. 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

四、(本大题共 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

19. (8 分) 某校为了了解学生家长对孩子使用手机的态度情况, 随机抽取部分学生家长进行问卷调查, 发出问卷 140 份, 每位学生家长 1 份, 每份问卷仅表明一种态度, 将回收的问卷进行整理 (假设回收的问卷都有效), 并绘制了如图两幅不完整的统计图.



根据以上信息解答下列问题:

(1) 回收的问卷数为 120 份, “严加干涉”部分对应扇形的圆心角度数为 30° .

(2) 把条形统计图补充完整

(3) 若将“稍加询问”和“从来不管”视为“管理不严”, 已知全校共 1500 名学生, 请估计该校对孩子使用手机“管理不严”的家长大约有多少人?

【考点】 V5: 用样本估计总体; VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图.

【分析】 (1) 用“从来不管”的问卷数除以其所占百分比求出回收的问卷总数; 用“严加干涉”部分的问卷数除以问卷总数得出百分比, 再乘以 360° 即可;

(2) 用问卷总数减去其他两个部分的问卷数, 得到“稍加询问”的问卷数, 进而补全条形统计图;

(3) 用“稍加询问”和“从来不管”两部分所占的百分比的和乘以 1500 即可得到结果.

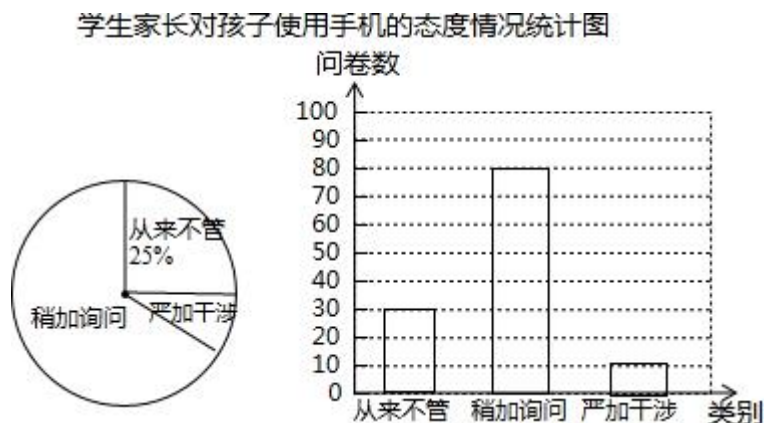
【解答】 解: (1) 回收的问卷数为: $30 \div 25\% = 120$ (份),

“严加干涉”部分对应扇形的圆心角度数为: $\frac{10}{120} \times 360^\circ = 30^\circ$.

故答案为: 120, 30° ;

(2) “稍加询问”的问卷数为: $120 - (30 + 10) = 80$ (份),

补全条形统计图, 如图所示:



(3) 根据题意得: $1500 \times \frac{30+80}{120} = 1375$ (人),

则估计该校对孩子使用手机“管理不严”的家长大约有 1375 人.

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小. 也考查了利用样本估计总体.

20. (8 分) (1) 如图 1, 纸片 $\square ABCD$ 中, $AD=5$, $S_{\square ABCD}=15$, 过点 A 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E, 沿 AE 剪下 $\triangle ABE$, 将它平移至 $\triangle DCE'$ 的位置, 拼成四边形 AEE'D, 则四边形 AEE'D 的形状为 C

A. 平行四边形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

(2) 如图 2, 在 (1) 中的四边形纸片 AEE'D 中, 在 EE' 上取一点 F, 使 $EF=4$, 剪下 $\triangle AEF$, 将它平移至 $\triangle DE'F'$ 的位置, 拼成四边形 AFF'D.

①求证: 四边形 AFF'D 是菱形.

②求四边形 AFF'D 的两条对角线的长.

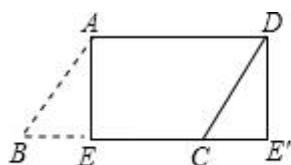


图1

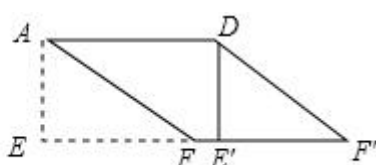


图2

【考点】 L5: 平行四边形的性质; LA: 菱形的判定与性质; LC: 矩形的判定;

PC: 图形的剪拼; Q2: 平移的性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 根据矩形的判定, 可得答案;

(2) ①根据菱形的判定, 可得答案;

②根据勾股定理, 可得答案.

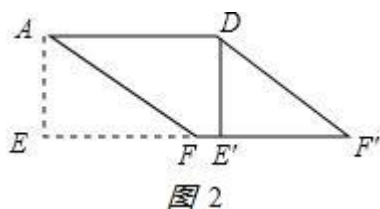
【解答】解：（1）如图 1，纸片 $\square ABCD$ 中， $AD=5$ ， $S_{\square ABCD}=15$ ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为 E，沿 AE 剪下 $\triangle ABE$ ，将它平移至 $\triangle DCE'$ 的位置，拼成四边形 AEE'D，则四边形 AEE'D 的形状为矩形，

故选：C；

（2）①证明： $\because$ 纸片 $\square ABCD$ 中， $AD=5$ ， $S_{\square ABCD}=15$ ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为 E，

$\therefore AE=3$ ．

如图 2：



$\therefore \triangle AEF$ ，将它平移至 $\triangle DE'F'$ ，

$\therefore AF \parallel DF'$ ， $AF=DF'$ ，

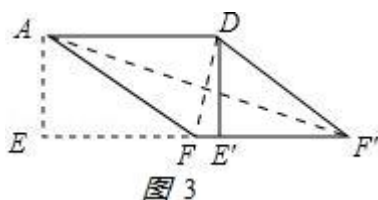
$\therefore$ 四边形 $AFF'D$ 是平行四边形．

在 $Rt\triangle AEF$ 中，由勾股定理，得

$$AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore AF=AD=5$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFF'D$ 是菱形；



②连接 AF' ， DF ，如图 3：

在 $Rt\triangle DE'F$ 中 $E'F=FF'-E'F'=5-4=1$ ， $DE'=3$ ，

$$\therefore DF = \sqrt{E'D^2 + E'F^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF'$ 中 $EF'=EF+FF'=4+5=9$, $AE=3$,

$$\therefore AF' = \sqrt{AE^2 + F'E^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}.$$

【点评】 本题考查了图形的剪拼，利用了矩形的判定，菱形的判定，勾股定理.

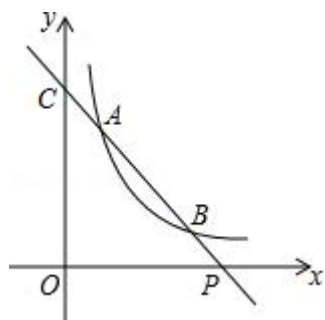
21. (8分) 如图，已知直线 $y=ax+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 交于 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$ 两点 (A 与 B 不重合)，直线 AB 与 x 轴交于 $P(x_0, 0)$ ，与 y 轴交于点 C .

(1) 若 A, B 两点坐标分别为 $(1, 3), (3, y_2)$ ，求点 P 的坐标.

(2) 若 $b=y_1+1$ ，点 P 的坐标为 $(6, 0)$ ，且 $AB=BP$ ，求 A, B 两点的坐标.

(3) 结合 (1)，(2) 中的结果，猜想并用等式表示 x_1, x_2, x_0 之间的关系 (不要求证明).



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 先把 $A(1, 3), B(3, y_2)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 求得反比例函数的解析式，

进而求得 B 的坐标，然后把 A, B 代入 $y=ax+b$ 利用待定系数法即可求得直线的解析式，继而即可求得 P 的坐标；

(2) 作 $AD \perp y$ 轴于 D ， $AE \perp x$ 轴于 E ， $BF \perp x$ 轴于 F ， $BG \perp y$ 轴于 G ， AE 、

BG 交于 H ，则 $AD \parallel BG \parallel x$ 轴， $AE \parallel BF \parallel y$ 轴，得出 $\frac{CD}{OC} = \frac{AD}{OP}$ ， $\frac{PF}{PE} = \frac{BF}{AE} = \frac{PB}{PA}$ ，

根据题意得出 $\frac{1}{y_1+1} = \frac{x_1}{6}$ ， $\frac{PF}{PE} = \frac{BF}{AE} = \frac{1}{2}$ ，从而求得 $B(\frac{6+x_1}{2}, \frac{1}{2}y_1)$ ，然后根据

$k=xy$ 得出 $x_1 \cdot y_1 = \frac{6+x_1}{2} \cdot \frac{1}{2}y_1$ ，求得 $x_1=2$ ，代入 $\frac{1}{y_1+1} = \frac{x_1}{6}$ ，解得 $y_1=2$ ，即可求

得 A、B 的坐标;

(3) 合 (1), (2) 中的结果, 猜想 $x_1+x_2=x_0$.

【解答】解: (1) $\because$ 直线 $y=ax+b$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 交于 A (1, 3),

$$\therefore k=1 \times 3=3,$$

$$\therefore y=\frac{3}{x},$$

$\because$ B (3, y_2) 在反比例函数的图象上,

$$\therefore y_2=\frac{3}{3}=1,$$

$$\therefore B (3, 1),$$

$\because$ 直线 $y=ax+b$ 经过 A、B 两点,

$$\therefore \begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线为 $y=-x+4$,

令 $y=0$, 则 $x=4$,

$$\therefore P (4, 0);$$

(2) 如图, 作 $AD \perp y$ 轴于 D, $AE \perp x$ 轴于 E, $BF \perp x$ 轴于 F, $BG \perp y$ 轴于 G,

AE、BG 交于 H,

则 $AD \parallel BG \parallel x$ 轴, $AE \parallel BF \parallel y$ 轴,

$$\therefore \frac{CD}{OC} = \frac{AD}{OP}, \frac{PF}{PE} = \frac{BF}{AE} = \frac{PB}{PA},$$

$$\therefore b=y_1+1, AB=BP,$$

$$\therefore \frac{1}{y_1+1} = \frac{x_1}{6},$$

$$\frac{PF}{PE} = \frac{BF}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B \left(\frac{6+x_1}{2}, \frac{1}{2}y_1 \right)$$

$\because$ A、B 两点都是反比例函数图象上的点,

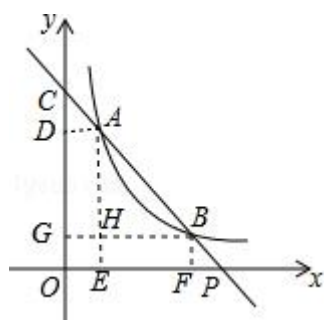
$$\therefore x_1 \cdot y_1 = -\frac{6+x_1}{2} \cdot \frac{1}{2} y_1,$$

解得 $x_1=2$,

代入 $\frac{1}{y_1+1} = \frac{x_1}{6}$, 解得 $y_1=2$,

$\therefore A(2, 2), B(4, 1)$.

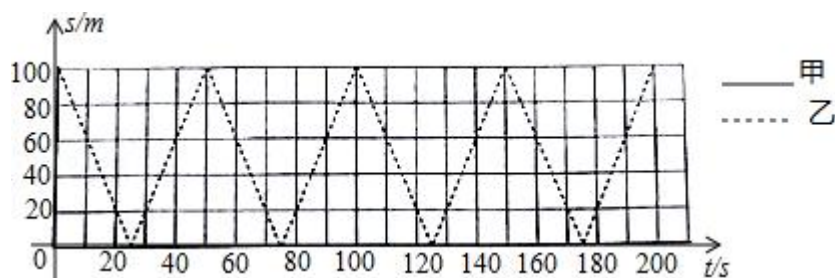
(3) 根据 (1), (2) 中的结果, 猜想: x_1, x_2, x_0 之间的关系为 $x_1+x_2=x_0$.



【点评】 本题考查了待定系数法求解析式以及反比例函数和一次函数的交点问题, 数形结合思想的运用是解题的关键.

22. (8分) 甲、乙两人在 100 米直道 AB 上练习匀速往返跑, 若甲、乙分别在 A, B 两端同时出发, 分别到另一端点处掉头, 掉头时间不计, 速度分别为 5m/s 和 4m/s.

(1) 在坐标系中, 虚线表示乙离 A 端的距离 s (单位: m) 与运动时间 t (单位: s) 之间的函数图象 ($0 \leq t \leq 200$), 请在同一坐标系中用实线画出甲离 A 端的距离 s 与运动时间 t 之间的函数图象 ($0 \leq t \leq 200$).



(2) 根据 (1) 中所画图象, 完成下列表格:

两人相遇次数 (单位: 次)	1	2	3	4	...	n
两人所跑路程之和 (单位: m)	100	300	500	700	...	$200n - 100$

(3) ①直接写出甲、乙两人分别在第一个 100m 内, t 与 s 的函数解析式, 并指出自变量 t 的取值范围.

②求甲、乙第 6 次相遇时 t 的值.

【考点】 FH: 一次函数的应用.

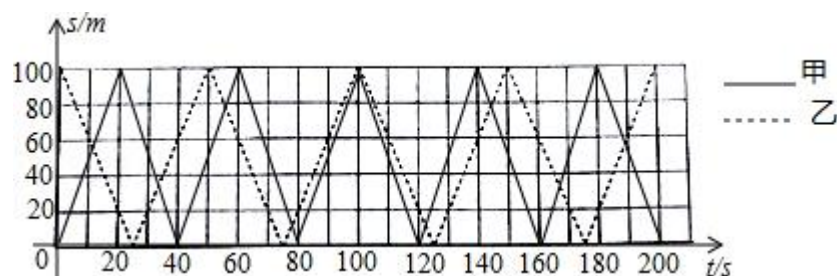
【分析】 (1) 根据甲跑 100 米所用的时间为 $100 \div 5 = 20$ (秒), 画出图象即可;

(2) 根据甲和乙第一次相遇时, 两人所跑路程之和为 100 米, 甲和乙第二次相遇时, 两人所跑路程之和为 $100 \times 2 + 100 = 300$ (米), 甲和乙第三次相遇时, 两人所跑路程之和为 $200 \times 2 + 100 = 500$ (米), 甲和乙第四次相遇时, 两人所跑路程之和为 $300 \times 2 + 100 = 700$ (米), 找到规律即可解答;

(3) 根据路程、速度、时间之间的关系即可解答;

(4) 根据当甲和乙第 6 次相遇时, 两人所跑路程之和为 $500 \times 2 + 100 = 1100$ (米), 根据题意得: $5t + 4t = 1100$, 即可解答.

【解答】 解: (1) 如图:



(2) 甲和乙第一次相遇时, 两人所跑路程之和为 100 米,

甲和乙第二次相遇时, 两人所跑路程之和为 $100 \times 2 + 100 = 300$ (米),

甲和乙第三次相遇时，两人所跑路程之和为 $200 \times 2 + 100 = 500$ (米)，

甲和乙第四次相遇时，两人所跑路程之和为 $300 \times 2 + 100 = 700$ (米)，

...

甲和乙第 n 次相遇时，两人所跑路程之和为 $(n-1) \times 100 \times 2 + 100 = 200n - 100$ (米)，

故答案为：500, 700, $200n - 100$;

(3) ① $s_{\text{甲}} = 5t$ ($0 \leq t \leq 20$), $s_{\text{乙}} = 100 - 4t$ ($0 \leq t \leq 25$).

②当甲和乙第 6 次相遇时，两人所跑路程之和为 $500 \times 2 + 100 = 1100$ (米)，

根据题意得： $5t + 4t = 1100$,

解得： $t = \frac{1100}{9}$.

【点评】 本题考查了一次函数的应用，解决本题的关键是相遇问题，第一次相遇 100 米，以后每次走 200 米相遇一次，根据所走的路程可求解.

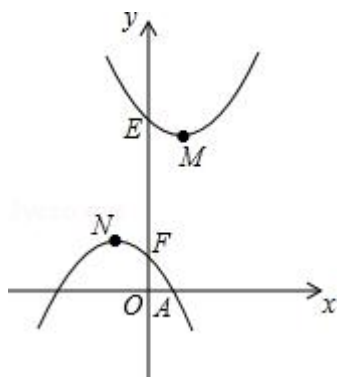
五、(本大题共 10 分)

23. (10 分) 如图，已知二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 和二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1$ ($a > 0$) 图象的顶点分别为 M, N, 与 y 轴分别交于点 E, F.

(1) 函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 的最小值为 3，当二次函数 L_1, L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 1$.

(2) 当 $EF = MN$ 时，求 a 的值，并判断四边形 ENFM 的形状 (直接写出，不必证明).

(3) 若二次函数 L_2 的图象与 x 轴的右交点为 A ($m, 0$)，当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时，求方程 $-a(x+1)^2 + 1 = 0$ 的解.



【考点】HF：二次函数综合题.

【专题】16：压轴题.

【分析】(1) 把二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3$ 化成顶点式，即可求得最小值，分别求得二次函数 L_1, L_2 的 y 值随着 x 的增大而减小的 x 的取值，从而求得二次函数 L_1, L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减小时， x 的取值范围；

(2) 先求得 E, F 点的坐标，作 $MG \perp y$ 轴于 G ，则 $MG=1$ ，作 $NH \perp y$ 轴于 H ，则 $NH=1$ ，从而求得 $MG=NH=1$ ，然后证得 $\triangle EMG \cong \triangle FNH$ ， $\angle MEF = \angle NFE$ ， $EM=NF$ ，进而证得 $EM \parallel NF$ ，从而得出四边形 $ENFM$ 是平行四边形；

(3) 作 MN 的垂直平分线，交 MN 于 D ，交 x 轴于 A ，先求得 D 的坐标，继而求得 MN 的解析式，进而就可求得直线 AD 的解析式，令 $y=0$ ，求得 A 的坐标，根据对称轴从而求得另一个交点的坐标，就可求得方程 $-a(x+1)^2 + 1 = 0$ 的解.

【解答】解：(1) $\because$ 二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3 = a(x-1)^2 + 3$,

$\therefore$ 顶点 M 坐标为 $(1, 3)$,

$\because a > 0$,

$\therefore$ 函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 的最小值为 3,

$\therefore$ 二次函数 L_1 的对称轴为 $x=1$ ，当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小；

二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1$ 的对称轴为 $x=-1$ ，当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增

大而减小;

∴当二次函数 L_1 , L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减小时, x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 1$;

故答案为: 3, $-1 \leq x \leq 1$.

(2) 由二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3$ 可知 $E(0, a+3)$,

由二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1 = -a^2x - 2ax - a + 1$ 可知 $F(0, -a+1)$,

∴ $M(1, 3)$, $N(-1, 1)$,

$$\therefore EF = MN = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore a+3 - (-a+1) = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1,$$

作 $MG \perp y$ 轴于 G , 则 $MG=1$, 作 $NH \perp y$ 轴于 H , 则 $NH=1$,

$$\therefore MG = NH = 1,$$

$$\therefore EG = a+3 - 3 = a, \quad FH = 1 - (-a+1) = a,$$

$$\therefore EG = FH,$$

在 $\triangle EMG$ 和 $\triangle FNH$ 中,

$$\begin{cases} EG = FH \\ \angle EGM = \angle FHN, \\ MG = NH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EMG \cong \triangle FNH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle MEF = \angle NFE, \quad EM = NF,$$

$$\therefore EM \parallel NF,$$

∴ 四边形 ENFM 是平行四边形;

$$\therefore EF = MN,$$

∴ 四边形 ENFM 是矩形;

(3) 由 $\triangle AMN$ 为等腰三角形, 可分为如下三种情况:

①如图 2, 当 $MN=NA=2\sqrt{2}$ 时, 过点 N 作 $ND \perp x$ 轴, 垂足为点 D , 则有 $ND=1$,

$$DA=m - (-1) = m+1,$$

在 $Rt\triangle NDA$ 中, $NA^2=DA^2+ND^2$, 即 $(2\sqrt{2})^2 = (m+1)^2 + 1^2$,

$$\therefore m_1 = \sqrt{7} - 1, m_2 = -\sqrt{7} - 1 \text{ (不合题意, 舍去)},$$

$$\therefore A(\sqrt{7} - 1, 0).$$

由抛物线 $y = -a(x+1)^2 + 1$ ($a > 0$) 的对称轴为 $x = -1$,

$$\therefore \text{它与 } x \text{ 轴的另一个交点坐标为 } (-1 - \sqrt{7}, 0).$$

$$\therefore \text{方程 } -a(x+1)^2 + 1 = 0 \text{ 的解为 } x_1 = \sqrt{7} - 1, x_2 = -1 - \sqrt{7}.$$

②如图 3, 当 $MA=NA$ 时, 过点 M 作 $MG \perp x$ 轴, 垂足为 G , 则有 $OG=1$, $MG=3$,

$$GA = |m - 1|,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle MGA \text{ 中, } MA^2 = MG^2 + GA^2, \text{ 即 } MA^2 = 3^2 + (m - 1)^2,$$

$$\text{又 } \because NA^2 = (m+1)^2 + 1^2,$$

$$\therefore (m+1)^2 + 1^2 = 3^2 + (m - 1)^2, m = 2,$$

$$\therefore A(2, 0),$$

则抛物线 $y = -a(x+1)^2 + 1$ ($a > 0$) 的左交点坐标为 $(-4, 0)$,

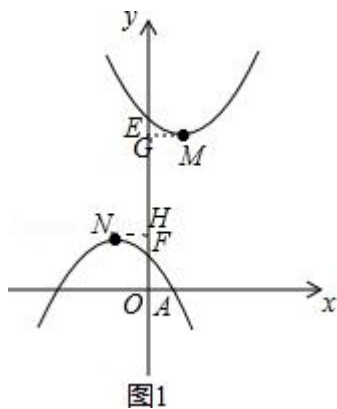
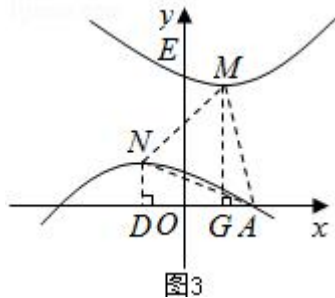
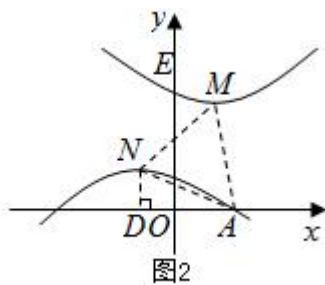
$$\therefore \text{方程 } -a(x+1)^2 + 1 = 0 \text{ 的解为 } x_1 = 2, x_2 = -4.$$

$$\text{③当 } MN=MA \text{ 时, } 3^2 + (m - 1)^2 = (2\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore m \text{ 无实数解, 舍去.}$$

综上所述, 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 方程 $-a(x+1)^2 = 0$ 的解为

$$x_1 = \sqrt{7} - 1, x_2 = -1 - \sqrt{7} \text{ 或 } x_1 = 2, x_2 = -4.$$



【点评】本题是二次函数的综合题，考查了二次函数的性质，三角形全等的判定和性质，平行四边形的判定，待定系数法求一次函数的解析式等，求得 A 的坐标是解题的关键.

六、(本大题共 12 分)

24. (12 分) 我们把两条中线互相垂直的三角形称为“称为中垂三角形”，例如图

1，图 2，图 3 中，AF，BE 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AF \perp BE$ ，垂足为 P，像 $\triangle ABC$

这样的三角形均称为“中垂三角形”，设 $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$.

特例探索

(1) 如图 1，当 $\angle ABE=45^\circ$ ， $c=2\sqrt{2}$ 时， $a=2\sqrt{5}$ ， $b=2\sqrt{5}$.

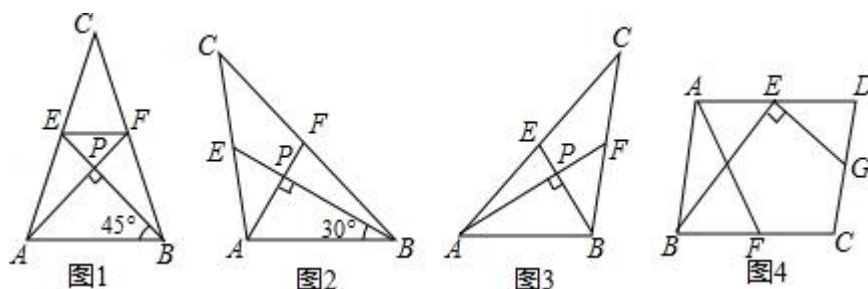
如图 2，当 $\angle ABE=30^\circ$ ， $c=4$ 时， $a=2\sqrt{13}$ ， $b=2\sqrt{7}$.

归纳证明

- (2) 请你观察 (1) 中的计算结果, 猜想 a^2 , b^2 , c^2 三者之间的关系, 用等式表示出来, 并利用图 3 证明你发现的关系式.

拓展应用

- (3) 如图 4, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E、F、G 分别是 AD, BC, CD 的中点, $BE \perp EG$, $AD=2\sqrt{5}$, $AB=3$, 求 AF 的长.



【考点】SO: 相似形综合题.

【专题】16: 压轴题.

【分析】(1) 由等腰直角三角形的性质得到 $AP=BP=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$, 根据三角形中位线的性质, 得到 $EF \parallel AB$, $EF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$, 再由勾股定理得到结果;

(2) 连接 EF, 设 $\angle ABP=\alpha$, 类比着 (1) 即可证得结论.

(3) 连接 AC 交 EF 于 H, 设 BE 与 AF 的交点为 P, 由点 E、G 分别是 AD, CD 的中点, 得到 EG 是 $\triangle ACD$ 的中位线于是证出 $BE \perp AC$, 由四边形 ABCD 是平行四边形, 得到 $AD \parallel BC$, $AD=BC=2\sqrt{5}$, $\angle EAH=\angle FCH$ 根据 E, F 分别是 AD, BC 的中点, 得到 $AE=BF=CF=\frac{1}{2}AD=\sqrt{5}$, 证出四边形 ABFE 是平行四边形, 证得 $EH=FH$, 推出 EH, AH 分别是 $\triangle AFE$ 的中线, 由 (2) 的结论得即可得到结果. 或构造出“中垂三角形”, 利用 (2) 结论计算即可.

【解答】解: (1) $\because AF \perp BE$, $\angle ABE=45^\circ$,

$$\therefore AP=BP=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2,$$

∵ AF, BE 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle PFE = \angle PEF = 45^\circ,$$

$$\therefore PE = PF = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle FPB$ 和 $\text{Rt}\triangle PEA$ 中,

$$AE = BF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore AC = BC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore a = b = 2\sqrt{5},$$

如图 2, 连接 EF,

$$\text{同理可得: } EF = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle PEF \sim \triangle ABP,$$

$$\therefore \frac{PF}{AP} = \frac{PE}{PB} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中,

$$AB = 4, \angle ABP = 30^\circ,$$

$$\therefore AP = 2, PB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PF = 1, PE = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle APE$ 和 $\text{Rt}\triangle BPF$ 中,

$$AE = \sqrt{7}, BF = \sqrt{13},$$

$$\therefore a = 2\sqrt{13}, b = 2\sqrt{7},$$

故答案为: $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{13}, 2\sqrt{7}$;

(2) 猜想: $a^2+b^2=5c^2$,

如图 3, 连接 EF,

设 $\angle ABP=\alpha$,

$$\therefore AP=c\sin\alpha, PB=c\cos\alpha,$$

$$\text{由 (1) 同理可得, } PF=\frac{1}{2}PA=\frac{c\sin\alpha}{2}, PE=\frac{1}{2}PB=\frac{c\cos\alpha}{2},$$

$$AE^2=AP^2+PE^2=c^2\sin^2\alpha+\frac{c^2\cos^2\alpha}{4}, BF^2=PB^2+PF^2=\frac{c^2\sin^2\alpha}{4}+c^2\cos^2\alpha,$$

$$\therefore \left(\frac{b}{2}\right)^2=c^2\sin^2\alpha+\frac{c^2\cos^2\alpha}{4}, \left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{c^2\sin^2\alpha}{4}+c^2\cos^2\alpha,$$

$$\therefore \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{c^2\sin^2\alpha}{4}+c^2\cos^2\alpha+c^2\sin^2\alpha+\frac{c^2\cos^2\alpha}{4},$$

$$\therefore a^2+b^2=5c^2;$$

(3) 如图 4, 连接 AC, EF 交于 H, AC 与 BE 交于点 Q, 设 BE 与 AF 的交点为 P,

$\therefore$ 点 E、G 分别是 AD, CD 的中点,

$$\therefore EG\parallel AC,$$

$$\therefore BE\perp EG,$$

$$\therefore BE\perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AD\parallel BC, AD=BC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle EAH=\angle FCH,$$

$\therefore$ E, F 分别是 AD, BC 的中点,

$$\therefore AE=\frac{1}{2}AD, BF=\frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AE=BF=CF=\frac{1}{2}AD=\sqrt{5},$$

$$\therefore AE \parallel BF,$$

$\therefore$ 四边形 ABFE 是平行四边形,

$$\therefore EF=AB=3, AP=PF,$$

在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle CFH$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAH = \angle FCH \\ \angle AHE = \angle FHC, \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CFH,$$

$$\therefore EH = FH,$$

$\therefore EP, AH$ 分别是 $\triangle AFE$ 的中线,

由 (2) 的结论得: $AF^2 + EF^2 = 5AE^2$,

$$\therefore AF^2 = 5(\sqrt{5})^2 - EF^2 = 16,$$

$$\therefore AF = 4.$$

或连接 F 与 AB 的中点 M, 证 MF 垂直 BP, 构造出“中垂三角形”, 因为 $AB=3$,

$BC=1/2AD=\sqrt{5}$, 根据上一问的结论, 直接可求 AF.

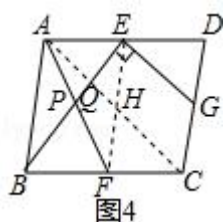


图4

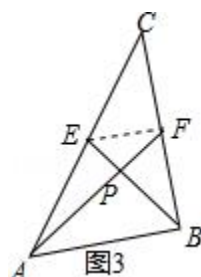
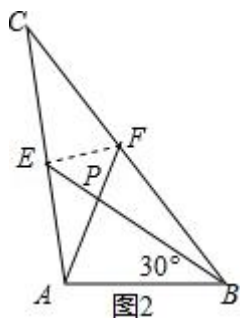


图3



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，锐角三角函数，注意类比思想在本题中的应用.