

2014 年江西省中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分。每小题只有一个正确选项)

1. (3 分) 下列四个数中, 最小的数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. -2 D. 2

2. (3 分) 某市 6 月份某周气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 为 23、25、28、25、28、31、28, 则这组数据的众数和中位数分别是 ()

- A. 25、25 B. 28、28 C. 25、28 D. 28、31

3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2+a^3=a^5$ B. $(-2a^2)^3=-6a^6$
C. $(2a+1)(2a-1)=2a^2-1$ D. $(2a^3-a^2)\div a^2=2a-1$

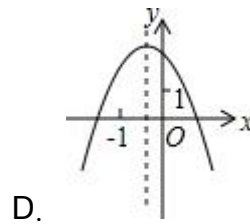
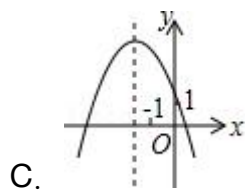
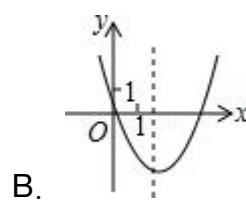
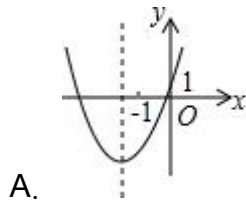
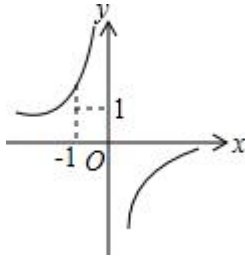
4. (3 分) 直线 $y=x+1$ 与 $y=-2x+a$ 的交点在第一象限, 则 a 的取值可以是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. (3 分) 如图, 贤贤同学用手工纸制作一个台灯灯罩, 做好后发现上口太小了, 于是他把纸灯罩对齐压扁, 剪去上面一截后, 正好合适, 以下裁剪示意图中, 正确的是 ()



6. (3 分) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象如图, 则二次函数 $y=2kx^2-4x+k^2$ 的图象大致为 ()



二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

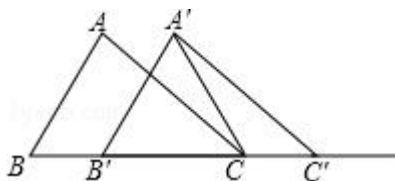
7. (3 分) 计算: $\sqrt{9}$ = _____.

8. (3 分) 据相关报道, 截止到今年四月, 我国已完成 5.78 万个农村教学点的建设任务. 5.78 万可用科学记数法为_____.

9. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ -\frac{1}{2}(x+2) < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

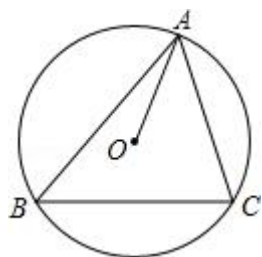
10. (3 分) 若 α 、 β 是方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha^2 + \beta^2$ = _____.

11. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $BC=6$, $\angle B=60^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 沿射线 BC 的方向平移 2 个单位后, 得到 $\triangle A'B'C'$, 连接 $A'C$, 则 $\triangle A'B'C$ 的周长为_____.

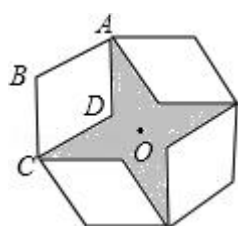


12. (3 分) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AO=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 则 $\angle BAC$ 的度数

为_____.



13. (3分) 如图, 是将菱形 $ABCD$ 以点 O 为中心按顺时针方向分别旋转 90° , 180° , 270° 后形成的图形. 若 $\angle BAD=60^\circ$, $AB=2$, 则图中阴影部分的面积为_____.



14. (3分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, 有一个锐角为 60° , $BC=6$. 若点 P 在直线 AC 上 (不与点 A , C 重合), 且 $\angle ABP=30^\circ$, 则 CP 的长为_____.

三、解答题 (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

15. (6分) 计算: $\left(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}\right) \div \frac{x-2}{x^2-x}$.

16. (6分) 小锦和小丽购买了价格不相同的中性笔和笔芯, 小锦买了 20 支笔和 2 盒笔芯, 用了 56 元; 小丽买了 2 支笔和 3 盒笔芯, 仅用了 28 元. 求每支中性笔和每盒笔芯的价格.

17. (6 分) 已知梯形 $ABCD$ ，请使用无刻度直尺画图.

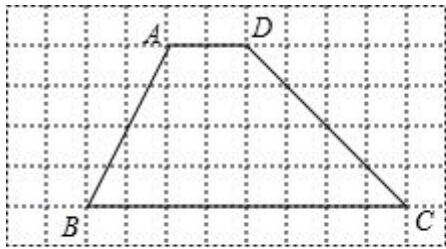


图1

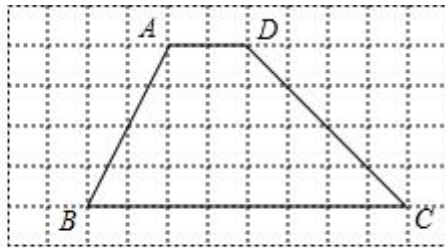


图2

- (1) 在图 1 中画出一个与梯形 $ABCD$ 面积相等，且以 CD 为边的三角形；
- (2) 图 2 中画一个与梯形 $ABCD$ 面积相等，且以 AB 为边的平行四边形.

18. (6 分) 有六张完全相同的卡片，分 A, B 两组，每组三张，在 A 组的卡片上分别画上“√, ×, √”，在 B 组的卡片上分别画上“√, ×, ×”，如图 1 所示.

- (1) 若将卡片无标记的一面朝上摆在桌上再分别从两组卡片中随机各抽取一张，求两张卡片上标记都是“√”的概率. (请用“树形图法”或“列表法”求解)
- (2) 若把 A, B 两组卡片无标记的一面对应粘贴在一起得到三张卡片，其正、反面标记如图 2 所示，将卡片正面朝上摆在桌上，并用瓶盖盖住标记.

- ①若随机揭开其中一个盖子，看到的标记是“√”的概率是多少？
- ②若揭开盖子，看到的卡片正面标记是“√”后，猜想它的反面也是“√”，求猜对的概率.

A组	B组	正面	反面
√	√	① √	√
×	×	② ×	×
√	×	③ √	×

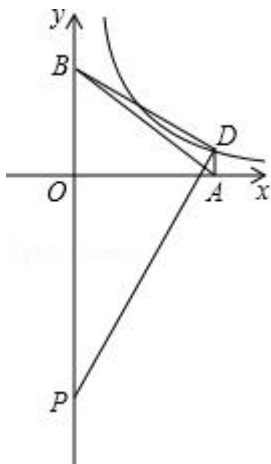
图1

图2

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

19. (8 分) 如图，在平面直角坐标系中，点 A, B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，
OA=4, AB=5. 点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象上， $DA\perp OA$ ，点 P
在 y 轴负半轴上，OP=7.

- (1) 求点 B 的坐标和线段 PB 的长；
- (2) 当 $\angle PDB=90^\circ$ 时，求反比例函数的解析式.



20. (8 分) 某教研机构为了了解在校初中生阅读数学教科书的现状，随机抽取
某校部分初中学生进行了调查，依据相关数据绘制成以下不完整的统计表，
请根据图表中的信息解答下列问题：

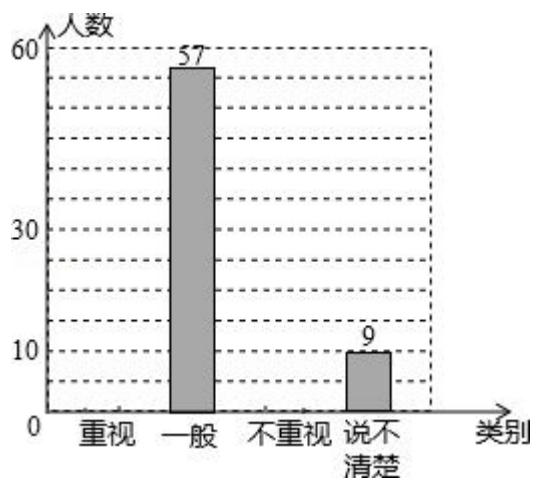
某校初中生阅读数学教科书情况统计图表

类别	人数	占总人数比例
重视	a	0.3
一般	57	0.38
不重视	b	c
说不清楚	9	0.06

- (1) 求样本容量及表格中 a, b, c 的值，并补全统计图；
- (2) 若该校共有初中生 2300 名，请估计该校“不重视阅读数学教科书”的初中
人数；

(3) ①根据上面的统计结果，谈谈你对该校初中生阅读数学教科书的现状的看法及建议；

②如果要了解全省初中生阅读数学教科书的情况，你认为应该如何进行抽样？

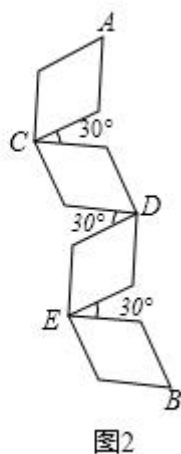


21. (8 分) 图 1 中的中国结挂件是由四个相同的菱形在顶点处依次串联而成，每相邻两个菱形均成 30° 的夹角，示意图如图 2. 在图 2 中，每个菱形的边长为 10cm，锐角为 60° .

(1) 连接 CD，EB，猜想它们的位置关系并加以证明；

(2) 求 A，B 两点之间的距离（结果取整数，可以使用计算器）

(参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{6} \approx 2.45$)



五、(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

22. (9 分) 如图 1，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 AB 的延长线上，AB=4，BC=2，

P 是 $\odot O$ 上半部分的一个动点，连接 OP，CP.

(1) 求 $\triangle OPC$ 的最大面积；

(2) 求 $\angle OCP$ 的最大度数;

(3) 如图 2, 延长 PO 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 DB , 当 $CP = DB$ 时, 求证: CP 是 $\odot O$ 的切线.

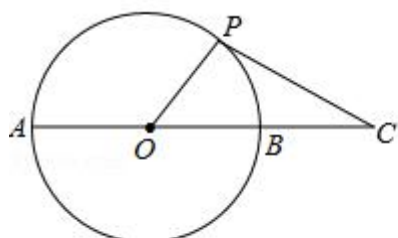


图1

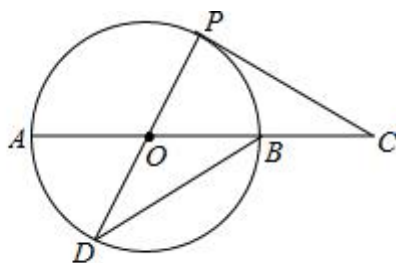


图2

23. (9 分) 如图 1, 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AB 边上 (不与点 A , B 重合), 点 F 在 BC 边上 (不与点 B , C 重合).

第一次操作: 将线段 EF 绕点 F 顺时针旋转, 当点 E 落在正方形上时, 记为点 G ;

第二次操作：将线段 FG 绕点 G 顺时针旋转，当点 F 落在正方形上时，记为点 H ；
依此操作下去...

(1) 图 2 中的 $\triangle EFD$ 是经过两次操作后得到的，其形状为_____，求此时线段 EF 的长；

(2) 若经过三次操作可得到四边形 $EFGH$.

①请判断四边形 $EFGH$ 的形状为_____，此时 AE 与 BF 的数量关系是_____；

②以①中的结论为前提，设 AE 的长为 x ，四边形 $EFGH$ 的面积为 y ，求 y 与 x 的函数关系式及面积 y 的取值范围.

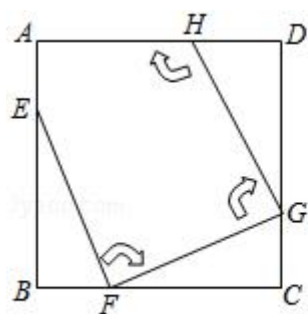


图 1

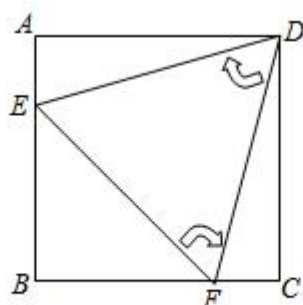
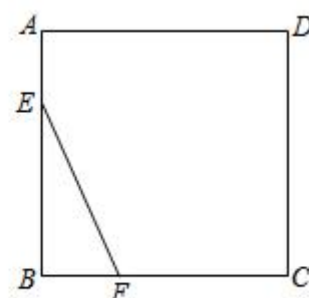


图 2



备用图

六 (本大题共 12 分)

24. (12 分) 如图 1, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的顶点为 M , 直线 $y=m$ 与 x 轴平行, 且与抛物线交于点 A, B , 若 $\triangle AMB$ 为等腰直角三角形, 我们把抛物线上 A, B 两点之间的部分与线段 AB 围成的图形称为该抛物线对应的准蝶形, 线段 AB 称为碟宽, 顶点 M 称为碟顶, 点 M 到线段 AB 的距离称为碟高.

(1) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 对应的碟宽为_____; 抛物线 $y=4x^2$ 对应的碟宽为_____;

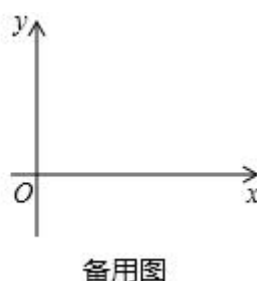
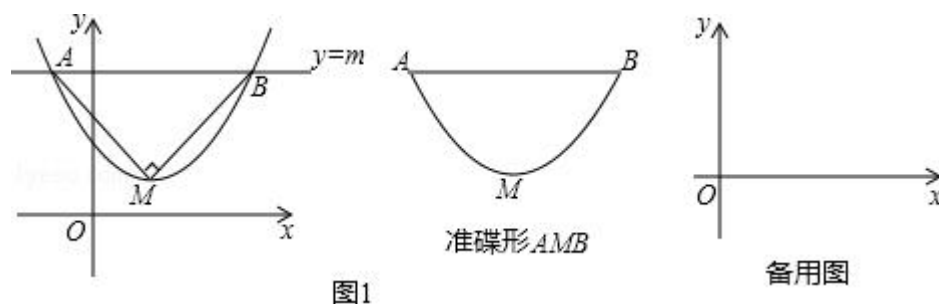
抛物线 $y=ax^2$ ($a>0$) 对应的碟宽为_____; 抛物线 $y=a(x-2)^2+3$ ($a>0$) 对应的碟宽为_____;

(2) 抛物线 $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}$ ($a>0$) 对应的碟宽为 6, 且在 x 轴上, 求 a 的值;

(3) 将抛物线 $y=a_nx^2+b_nx+c_n$ ($a_n>0$) 的对应准蝶形记为 F_n ($n=1, 2, 3, \dots$), 定义 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 为相似准蝶形, 相应的碟宽之比即为相似比. 若 F_n 与 F_{n-1} 的相似比为 $\frac{1}{2}$, 且 F_n 的碟顶是 F_{n-1} 的碟宽的中点, 现将 (2) 中求得的抛物线记为 y_1 , 其对应的准蝶形记为 F_1 .

①求抛物线 y_2 的表达式;

②若 F_1 的碟高为 h_1 , F_2 的碟高为 h_2 , ... F_n 的碟高为 h_n , 则 h_n =_____, F_n 的碟宽右端点横坐标为_____; $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的碟宽右端点是否在一条直线上? 若是, 直接写出该直线的表达式; 若不是, 请说明理由.



2014 年江西省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。每小题只有一个正确选项）

1. (3 分) 下列四个数中，最小的数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. -2 D. 2

【考点】18：有理数大小比较.

【分析】有正数，0，负数，较小的数应为负数；在 2 个负数里，较小的数为绝对值较大的那个数.

【解答】解：∵在 $-\frac{1}{2}$ ，0，-2，2 这 4 个数中， $-\frac{1}{2}$ ，-2 为负数，

∴ $-\frac{1}{2}$ ，-2 比较即可，

∵ $|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ ， $|-2| = 2$ ， $\frac{1}{2} < 2$ ，

∴ $-\frac{1}{2} > -2$ ，

∴最小的数为 -2.

故选：C.

【点评】考查有理数的比较；用到的知识点为：负数小于 0，负数小于一切正数；两个负数，绝对值大的反而小.

2. (3 分) 某市 6 月份某周气温（单位：°C）为 23、25、28、25、28、31、28，则这组数据的众数和中位数分别是 ()

- A. 25、25 B. 28、28 C. 25、28 D. 28、31

【考点】W4：中位数；W5：众数.

【分析】根据中位数和众数的定义求解：众数是一组数据中出现次数最多的数据，

注意众数可以不止一个；找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数（或两个数的平均数）为中位数

【解答】解：将这组数据从小到大的顺序排列 23, 25, 25, 28, 28, 28, 31, 在这一组数据中 28 是出现次数最多的，故众数是 28°C .

处于中间位置的那个数是 28，那么由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 28°C ;

故选：B.

【点评】本题为统计题，考查中位数与众数的意义，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数，如果中位数的概念掌握得不好，不把数据按要求重新排列，就会出错.

3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2+a^3=a^5$

B. $(-2a^2)^3=-6a^6$

C. $(2a+1)(2a-1)=2a^2-1$

D. $(2a^3-a^2)\div a^2=2a-1$

【考点】35: 合并同类项; 47: 幂的乘方与积的乘方; 4F: 平方差公式; 4H: 整式的除法.

【分析】A. 根据合并同类项法则判断;

B. 根据积的乘方法则判断即可;

C. 根据平方差公式计算并判断;

D. 根据多项式除以单项式判断.

【解答】解：A. a^2 与 a^3 不能合并，故本项错误;

B. $(-2a^2)^3=-8a^6$ ，故本项错误;

C. $(2a+1)(2a-1)=4a^2-1$ ，故本项错误;

D. $(2a^3-a^2)\div a^2=2a-1$ ，本项正确，

故选：D.

【点评】本题主要考查了积的乘方运算、平方差公式以及多项式除以单项式和合并同类项，熟练掌握运算是解题的关键.

4. (3分) 直线 $y=x+1$ 与 $y=-2x+a$ 的交点在第一象限, 则 a 的取值可以是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【考点】FF: 两条直线相交或平行问题.

【分析】联立两直线解析式, 解关于 x 、 y 的二元一次方程组, 然后根据交点在第一象限, 横坐标是正数, 纵坐标是正数, 列出不等式组求解即可.

【解答】解: 联立 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+a \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} x=\frac{a-1}{3} \\ y=\frac{a+2}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 交点在第一象限,

$$\therefore \begin{cases} \frac{a-1}{3} > 0 \\ \frac{a+2}{3} > 0 \end{cases},$$

解得: $a > 1$.

故选：D.

【点评】本题考查了两直线相交的问题, 第一象限内点的横坐标是正数, 纵坐标是正数, 以及一元一次不等式组的解法, 把 a 看作常数表示出 x 、 y 是解题的关键.

5. (3分) 如图, 贤贤同学用手工纸制作一个台灯灯罩, 做好后发现上口太小了, 于是他把纸灯罩对齐压扁, 剪去上面一截后, 正好合适, 以下裁剪示意图中, 正确的是 ()





【考点】I6: 几何体的展开图.

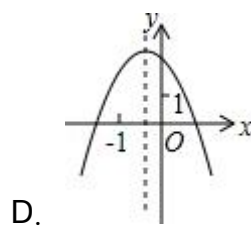
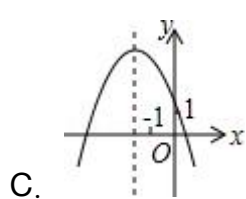
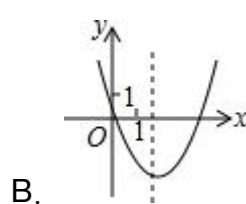
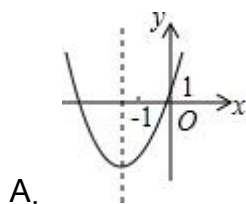
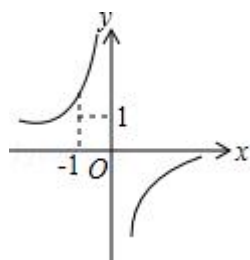
【分析】根据圆台压扁后的图形形状, 可得答案.

【解答】解: 圆锥压扁后为扇形, 圆台压扁后为扇形的一部分.

故选: A.

【点评】本题考查了几何体的展开图, 理解压扁是解题关键.

6. (3 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象如图, 则二次函数 $y = 2kx^2 - 4x + k^2$ 的图象大致为 ()



【考点】G2: 反比例函数的图象; H2: 二次函数的图象.

【专题】16: 压轴题.

【分析】本题可先由反比例函数的图象得到字母系数 $k < -1$, 再与二次函数的图象的开口方向 and 对称轴的位置相比较看是否一致, 最终得到答案.

【解答】解: $\because$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过二、四象限, $\therefore k < 0$,

由图知当 $x = -1$ 时, $y = -k > 1$, $\therefore k < -1$,

∴ 抛物线 $y=2kx^2-4x+k^2$ 开口向下,

对称轴为 $x=-\frac{-4}{2 \times 2k}=\frac{1}{k}$, $-1 < \frac{1}{k} < 0$,

∴ 对称轴在 -1 与 0 之间,

故选: D.

【点评】 此题主要考查了二次函数与反比例函数的图象与系数的综合应用, 正确判断抛物线开口方向和对称轴位置是解题关键. 属于基础题.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

7. (3 分) 计算: $\sqrt{9}=\underline{3}$.

【考点】 22: 算术平方根.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据算术平方根的定义计算即可.

【解答】 解: $\because 3^2=9$,

$\therefore \sqrt{9}=3$.

故答案为: 3.

【点评】 本题较简单, 主要考查了学生开平方的运算能力.

8. (3 分) 据相关报道, 截止到今年四月, 我国已完成 5.78 万个农村教学点的建设任务. 5.78 万可用科学记数法为 $\underline{5.78 \times 10^4}$.

【考点】 11: 科学记数法—表示较大的数.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解：将 5.78 万用科学记数法表示为： 5.78×10^4 .

故答案为： 5.78×10^4 .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

9. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ -\frac{1}{2}(x+2) < 0 \end{cases}$ 的解集是 $x > \frac{1}{2}$.

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

【解答】解： $\begin{cases} 2x-1 > 0 \text{ ①} \\ -\frac{1}{2}(x+2) < 0 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得， $x > \frac{1}{2}$,

由②得， $x > -2$,

故此不等式组的解集为： $x > \frac{1}{2}$.

故答案为： $x > \frac{1}{2}$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

10. (3 分) 若 α 、 β 是方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个实数根，则 $\alpha^2 + \beta^2 = 10$.

【考点】AB：根与系数的关系.

【分析】根据根与系数的关系求得 $\alpha + \beta = 2$ ， $\alpha\beta = -3$ ，则将所求的代数式变形为

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ，将其整体代入即可求值.

【解答】解： $\because \alpha, \beta$ 是方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个实数根，

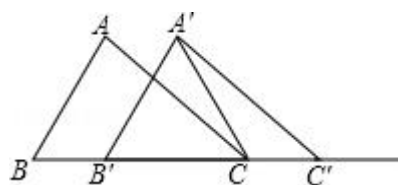
$$\therefore \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -3,$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-3) = 10.$$

故答案是：10.

【点评】此题主要考查了根与系数的关系，将根与系数的关系与代数式变形相结合解题是一种经常使用的解题方法.

11. (3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $BC=6$ ， $\angle B=60^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿射线 BC 的方向平移2个单位后，得到 $\triangle A'B'C'$ ，连接 $A'C$ ，则 $\triangle A'B'C$ 的周长为 12.



【考点】Q2：平移的性质.

【分析】根据平移性质，判定 $\triangle A'B'C$ 为等边三角形，然后求解.

【解答】解：由题意，得 $BB'=2$,

$$\therefore B'C = BC - BB' = 4.$$

由平移性质，可知 $A'B' = AB = 4$ ， $\angle A'B'C = \angle ABC = 60^\circ$,

$$\therefore A'B' = B'C, \text{ 且 } \angle A'B'C = 60^\circ,$$

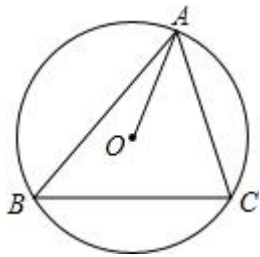
$\therefore \triangle A'B'C$ 为等边三角形,

$$\therefore \triangle A'B'C \text{ 的周长} = 3A'B' = 12.$$

故答案为：12.

【点评】本题考查的是平移的性质，熟知图形平移后新图形与原图形的形状和大小完全相同是解答此题的关键.

12. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AO=2$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 60° .



【考点】 M2: 垂径定理; M5: 圆周角定理; T7: 解直角三角形.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 连结 OB、OC，作 $OD \perp BC$ 于 D，根据垂径定理得 $BD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle OBD$ 中，根据余弦的定义得 $\cos \angle OBD = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $\angle OBD = 30^\circ$ ，由于 $OB = OC$ ，则 $\angle OCB = 30^\circ$ ，所以 $\angle BOC = 120^\circ$ ，然后根据圆周角定理即可得到 $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$.

【解答】 解：连结 OB、OC，作 $OD \perp BC$ 于 D，如图，

$$\therefore OD \perp BC,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

在 $Rt\triangle OBD$ 中， $OB = OA = 2$ ， $BD = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \cos \angle OBD = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle OBD = 30^\circ,$$

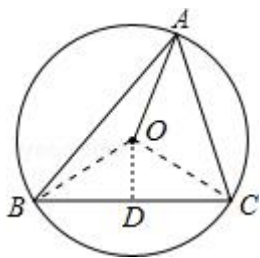
$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle OCB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$$

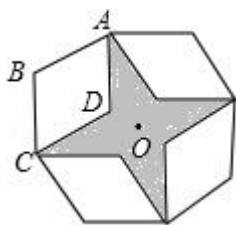
$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ.$$

故答案为 60° .



【点评】 本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了圆周角定理和解直角三角形．

13. (3 分) 如图，是将菱形 $ABCD$ 以点 O 为中心按顺时针方向分别旋转 90° ， 180° ， 270° 后形成的图形．若 $\angle BAD=60^\circ$ ， $AB=2$ ，则图中阴影部分的面积为 $12 - 4\sqrt{3}$ ．



【考点】 L8：菱形的性质；R2：旋转的性质．

【分析】 根据菱形的性质得出 DO 的长，进而求出 $S_{\text{正方形 } DNMF}$ ，进而得出 $S_{\triangle ADF}$ 即可得出答案．

【解答】 解：如图所示：连接 AC ， BD 交于点 E ，连接 DF ， FM ， MN ， DN ，
 $\therefore$ 将菱形 $ABCD$ 以点 O 为中心按顺时针方向分别旋转 90° ， 180° ， 270° 后形成的图形， $\angle BAD=60^\circ$ ， $AB=2$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ，四边形 $DNMF$ 是正方形， $\angle AOC=90^\circ$ ， $BD=2$ ， $AE=EC=\sqrt{3}$ ，

$\therefore \angle AOE=45^\circ$ ， $ED=1$ ，

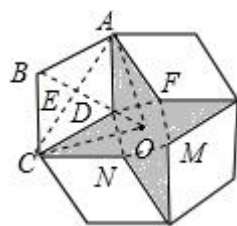
$\therefore AE=EO=\sqrt{3}$ ， $DO=\sqrt{3}-1$ ，

$\therefore S_{\text{正方形 } DNMF}=2(\sqrt{3}-1) \times 2(\sqrt{3}-1) \times \frac{1}{2}=8-4\sqrt{3}$ ，

$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2} \times AD \times AF \sin 30^\circ=1$ ，

$\therefore$ 则图中阴影部分的面积为： $4S_{\triangle ADF}+S_{\text{正方形 } DNMF}=4+8-4\sqrt{3}=12-4\sqrt{3}$ ．

故答案为： $12 - 4\sqrt{3}$.



【点评】此题主要考查了菱形的性质以及旋转的性质，得出正确分割图形得出 DO 的长是解题关键.

14. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ，有一个锐角为 60° ， $BC=6$. 若点 P 在直线 AC 上 (不与点 A, C 重合)，且 $\angle ABP=30^\circ$ ，则 CP 的长为 6 或 $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$.

【考点】T7：解直角三角形.

【专题】16：压轴题；32：分类讨论.

【分析】根据题意画出图形，分 4 种情况进行讨论，利用直角三角形的性质解答.

【解答】解：如图 1：

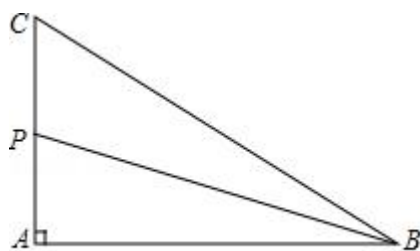


图1

当 $\angle C=60^\circ$ 时， $\angle ABC=30^\circ$ ，与 $\angle ABP=30^\circ$ 矛盾；

如图 2：

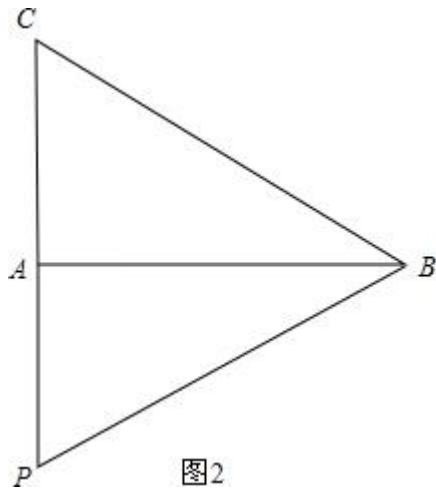


图2

当 $\angle C=60^\circ$ 时, $\angle ABC=30^\circ$,

$\therefore \angle ABP=30^\circ$,

$\therefore \angle CBP=60^\circ$,

$\therefore \triangle PBC$ 是等边三角形,

$\therefore CP=BC=6$;

如图 3:

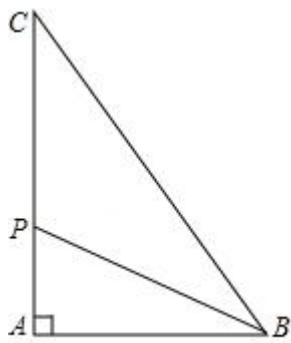


图3

当 $\angle ABC=60^\circ$ 时, $\angle C=30^\circ$,

$\therefore \angle ABP=30^\circ$,

$\therefore \angle PBC=60^\circ - 30^\circ=30^\circ$,

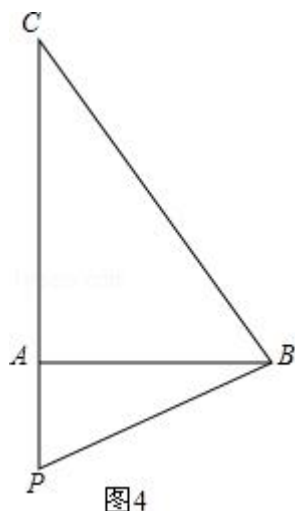
$\therefore PC=PB$,

$\therefore BC=6$,

$$\therefore AB=3,$$

$$\therefore PC=PB=\frac{3}{\cos 30^{\circ}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3};$$

如图 4:



当 $\angle ABC=60^{\circ}$ 时, $\angle C=30^{\circ}$,

$$\therefore \angle ABP=30^{\circ},$$

$$\therefore \angle PBC=60^{\circ}+30^{\circ}=90^{\circ},$$

$$\therefore PC=BC \div \cos 30^{\circ}=4\sqrt{3}.$$

故答案为: 6 或 $2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了解直角三角形, 熟悉特殊角的三角函数值是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

15. (6 分) 计算: $(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}) \div \frac{x-2}{x^2-x}$.

【考点】 6C: 分式的混合运算.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 原式括号中两项利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分即可得到结果.

【解答】解：原式 $=\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x(x-1)}{x-2}=x-1$.

【点评】此题考查了分式的混合运算，熟练掌握运算是解本题的关键.

16. (6分) 小锦和小丽购买了价格不相同的中性笔和笔芯，小锦买了 20 支笔和 2 盒笔芯，用了 56 元；小丽买了 2 支笔和 3 盒笔芯，仅用了 28 元. 求每支中性笔和每盒笔芯的价格.

【考点】9A: 二元一次方程组的应用.

【分析】设每支中性笔的价格为 x 元，每盒笔芯的价格为 y 元，根据单价 $\times$ 数量 = 总价建立方程组，求出其解即可.

【解答】解：设每支中性笔的价格为 x 元，每盒笔芯的价格为 y 元，由题意，得

$$\begin{cases} 20x+2y=56 \\ 2x+3y=28 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$.

答：每支中性笔的价格为 2 元，每盒笔芯的价格为 8 元.

【点评】本题考查了列二元一次方程解实际问题的运用，二元一次方程的解法的运用，总价 = 单价 $\times$ 数量的运用，解答时根据题意的等量关系建立方程组是关键.

17. (6分) 已知梯形 ABCD，请使用无刻度直尺画图.

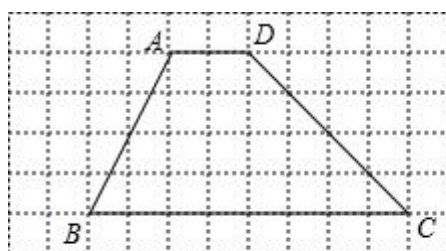


图1

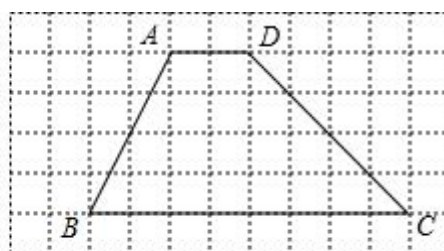


图2

- (1) 在图 1 中画出一个与梯形 ABCD 面积相等，且以 CD 为边的三角形；
- (2) 图 2 中画一个与梯形 ABCD 面积相等，且以 AB 为边的平行四边形.

【考点】N4: 作图—应用与设计作图.

【专题】13: 作图题.

【分析】(1) 求出三角形 CD 边上的高作图,

(2) 找出 BE 及它的高相乘得 20, 以 AB 为一边作平行四边形..

【解答】解: 设小正方形的边长为 1, 则 $S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} (AD+BC) \times 4 = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$,

(1) $\therefore CD = 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 三角形的高 $= 20 \times 2 \div 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, 如图 1, $\triangle CDE$ 就是所作的三角形,

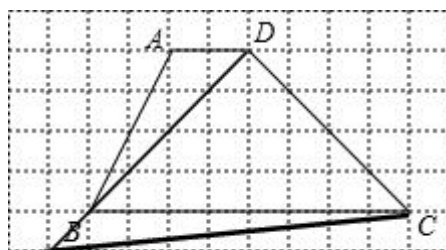


图1

(2) 如图 2, $BE=5$, BE 边上的高为 4,

$\therefore$ 平行四边形 $ABEF$ 的面积是 $5 \times 4 = 20$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABEF$ 就是所作的平行四边形.

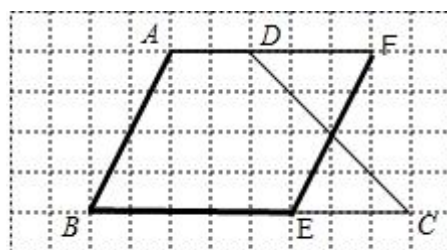


图2

【点评】本题主要考查了作图的设计和应用, 解决问题的关键是根据面积相等求出高画图.

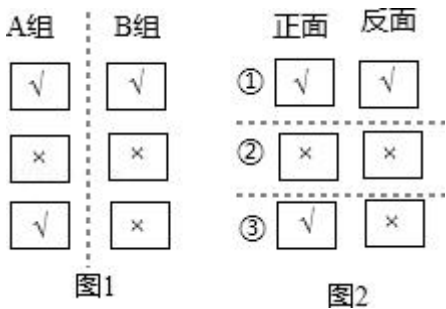
18. (6 分) 有六张完全相同的卡片, 分 A, B 两组, 每组三张, 在 A 组的卡片上分别画上“ $\sqrt{}$, $\times$, $\sqrt{}$ ”, 在 B 组的卡片上分别画上“ $\sqrt{}$, $\times$, $\times$ ”, 如图 1 所示.

(1) 若将卡片无标记的一面朝上摆在桌上再分别从两组卡片中随机各抽取一张,

求两张卡片上标记都是“√”的概率. (请用“树形图法”或“列表法”求解)

(2) 若把 A, B 两组卡片无标记的一面对应粘贴在一起得到三张卡片, 其正、反面标记如图 2 所示, 将卡片正面朝上摆在桌上, 并用瓶盖盖住标记.

- ①若随机揭开其中一个盖子, 看到的标记是“√”的概率是多少?
- ②若揭开盖子, 看到的卡片正面标记是“√”后, 猜想它的反面也是“√”, 求猜对的概率.



【考点】 X6: 列表法与树状图法.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 列表得出所有等可能的情况数, 找出两种卡片上标记都是“√”的情况数, 即可求出所求的概率;

(2) ①根据题意得到所有等可能情况有 3 种, 其中看到的标记是“√”的情况有 2 种, 即可求出所求概率;

②所有等可能的情况有 2 种, 其中揭开盖子, 看到的卡片正面标记是“√”后, 它的反面也是“√”的情况有 1 种, 即可求出所求概率.

【解答】 解: (1) 列表如下:

	√	×	√
√	(√, √)	(×, √)	(√, √)
×	(√, ×)	(×, ×)	(√, ×)

$\times$	$(\sqrt{\quad}, \times)$	$(\times, \times)$	$(\sqrt{\quad}, \times)$
----------	--------------------------	--------------------	--------------------------

所有等可能的情况有 9 种，两种卡片上标记都是“ $\sqrt{\quad}$ ”的情况有 2 种，

则 $P = \frac{2}{9}$;

(2) ① $\because$ 三张卡片上正面的标记有三种可能，分别为“ $\sqrt{\quad}$ ”， $\times$ ， $\sqrt{\quad}$ ，

$\therefore$ 随机揭开其中一个盖子，看到的标记是“ $\sqrt{\quad}$ ”的概率为 $\frac{2}{3}$.

则 $P = \frac{2}{3}$;

② $\because$ 正面标记为“ $\sqrt{\quad}$ ”的卡片，其反面标记情况有两种可能，分别为“ $\sqrt{\quad}$ ”和“ $\times$ ”，

$\therefore$ 猜对反面也是“ $\sqrt{\quad}$ ”的概率为 $\frac{1}{2}$.

则 $P = \frac{1}{2}$.

【点评】 此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

19. (8 分) 如图，在平面直角坐标系中，点 A, B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，

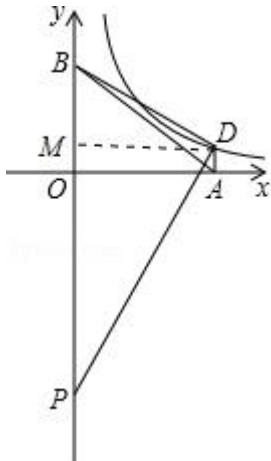
OA=4, AB=5. 点 D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象上，DA $\perp$ OA, 点 P

在 y 轴负半轴上，OP=7.

(1) 求点 B 的坐标和线段 PB 的长;

(2) 当 $\angle PDB = 90^\circ$ 时，求反比例函数的解析式.

$\because OA=4, AD \perp x$ 轴,
 $\therefore$ 设 D 的坐标是 $(4, y) (y > 0)$,
 $\therefore \frac{4}{3-y} = \frac{7+y}{4}$,
 解得: $y=1, (y=-5 \text{ 舍去})$,
 即 D 点的坐标是 $(4, 1)$,
 把 D 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 得: $k=4$,
 即反比例函数的解析式是 $y=\frac{4}{x}$.



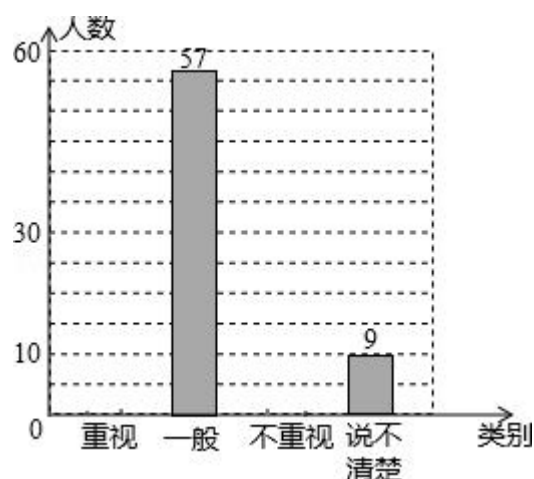
【点评】 本题考查了一次函数和反比例函数的交点问题，相似三角形的性质和判定，用待定系数法求函数的解析式的应用，能综合运用知识点进行推理和计算是解此题的关键，题目比较典型，难度不大.

20. (8 分) 某教研机构为了了解在校初中生阅读数学教科书的现状，随机抽取某校部分初中学生进行了调查，依据相关数据绘制成以下不完整的统计表，请根据图表中的信息解答下列问题：

某校初中生阅读数学教科书情况统计图表

类别	人数	占总人数比例
重视	a	0.3
一般	57	0.38
不重视	b	c
说不清楚	9	0.06

- (1) 求样本容量及表格中 a , b , c 的值, 并补全统计图;
- (2) 若该校共有初中生 2300 名, 请估计该校“不重视阅读数学教科书”的初中人数;
- (3) ①根据上面的统计结果, 谈谈你对该校初中生阅读数学教科书的现状的看法及建议;
②如果要了解全省初中生阅读数学教科书的情况, 你认为应该如何进行抽样?



【考点】 V5: 用样本估计总体; V8: 频数 (率) 分布直方图.

【分析】 (1) 利用类别为“一般”人数与所占百分比, 进而得出样本容量, 进而得出 a , b , c 的值;

(2) 利用“不重视阅读数学教科书”在样本中所占比例, 进而估计全校在这一类别的人数;

(3) 根据 (1) 中所求数据进而分析得出答案, 再从样本抽出的随机性进而得出答案.

【解答】 解: (1) 由题意可得出: 样本容量为: $57 \div 0.38 = 150$ (人),

$$\therefore a = 150 \times 0.3 = 45,$$

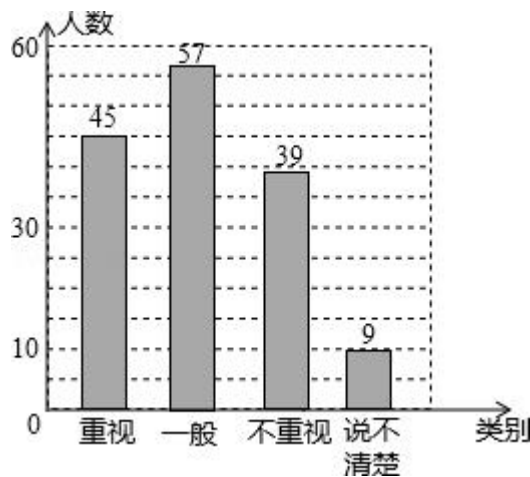
$$b = 150 - 57 - 45 - 9 = 39,$$

$$c = 39 \div 150 = 0.26,$$

如图所示:

(2) 若该校共有初中生 2300 名,
该校“不重视阅读数学教科书”的初中人数约为: $2300 \times 0.26=598$ (人);

(3) ①根据以上所求可得出: 只有 30%的学生重视阅读数学教科书, 有 32% 的学生不重视阅读数学教科书或说不清楚, 可以看出大部分学生忽略了阅读数学教科书, 同学们应重视阅读数学教科书, 从而获取更多的数学课外知识和对相关习题、定理的深层次理解与认识.
②如果要了解全省初中生阅读数学教科书的情况, 应随机抽取不同的学校以及不同的年级进行抽样, 进而分析.



【点评】此题主要考查了频数分布直方表以及条形统计图和利用样本估计总体等知识, 理论联系实际进而结合抽样调查的随机性进而得出是解题关键.

21. (8 分) 图 1 中的中国结挂件是由四个相同的菱形在顶点处依次串联而成, 每相邻两个菱形均成 30° 的夹角, 示意图如图 2. 在图 2 中, 每个菱形的边长为 10cm, 锐角为 60° .

- (1) 连接 CD, EB, 猜想它们的位置关系并加以证明;
- (2) 求 A, B 两点之间的距离 (结果取整数, 可以使用计算器)
- (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{6} \approx 2.45$)



图1

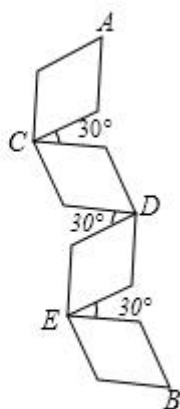


图2

【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【分析】 (1) 连接 DE . 根据菱形的性质和角的和差关系可得 $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$,

再根据平行线的判定可得 CD , EB 的位置关系;

(2) 根据菱形的性质可得 BE , DE , 再根据三角函数可得 BD , AD , 根据 $AB = BD + AD$, 即可求解.

【解答】 解: (1) 猜想 $CD \parallel EB$.

证明: 连接 DE .

$\because$ 中国结挂件是四个相同的菱形, 每相邻两个菱形均成 30° 的夹角, 菱形的锐角为 60°

$$\therefore \angle CDE = 60^\circ \div 2 \times 2 + 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 60^\circ \div 2 \times 2 + 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BED,$$

$$\therefore CD \parallel EB.$$

(2) 如图 2, 连接 AD , BD .

由 (1) 知, $\angle BED = 90^\circ$,

$\therefore BE=DE$,

$\therefore \angle EDB=\angle EBD=45^\circ$,

同理, $\angle ADC=45^\circ$

又由 (1) 知, $\angle CDE=90^\circ$,

$\therefore \angle ADC+\angle CDE+\angle EDB=180^\circ$,

$\therefore$ 点 A、D、B 三点共线.

$BE=2OE=2 \times 10 \times \cos 30^\circ=10\sqrt{3}\text{cm}$,

同理可得, $DE=10\sqrt{3}\text{cm}$,

则 $BD=10\sqrt{6}\text{cm}$,

同理可得, $AD=10\sqrt{6}\text{cm}$,

$AB=BD+AD=20\sqrt{6}\approx 49\text{cm}$.

答: A、B 两点之间的距离大约为 49cm.

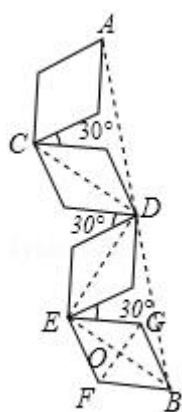


图2

【点评】此题考查了解直角三角形的应用, 菱形的性质和平行线的判定, 主要是三角函数的基本概念及运算, 关键是运用数学知识解决实际问题.

五、(本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

22. (9 分) 如图 1, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 AB 的延长线上, $AB=4$, $BC=2$,

P 是 $\odot O$ 上半部分的一个动点，连接 OP，CP.

- (1) 求 $\triangle OPC$ 的最大面积；
- (2) 求 $\angle OCP$ 的最大度数；
- (3) 如图 2，延长 PO 交 $\odot O$ 于点 D，连接 DB，当 $CP=DB$ 时，求证：CP 是 $\odot O$ 的切线.

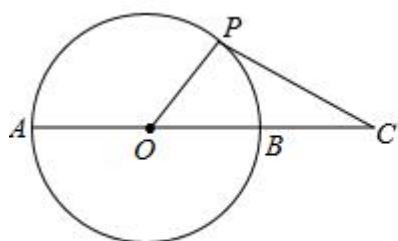


图1

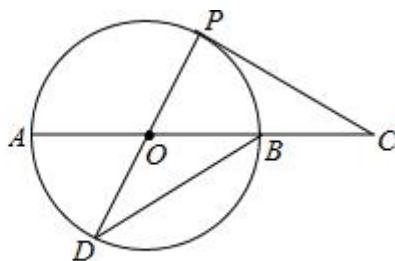


图2

【考点】ME：切线的判定与性质.

- 【分析】** (1) 在 $\triangle OPC$ 中，底边 OC 长度固定，因此只要 OC 边上高最大，则 $\triangle OPC$ 的面积最大；观察图形，当 $OP \perp OC$ 时满足要求；
- (2) PC 与 $\odot O$ 相切时， $\angle OCP$ 的度数最大，根据切线的性质即可求得；
- (3) 连接 AP，BP 通过 $\triangle ODB \cong \triangle BPC$ 可求得 $DP \perp PC$ ，从而求得 PC 是 $\odot O$ 的切线.

【解答】 (1) 解： $\because AB=4$,

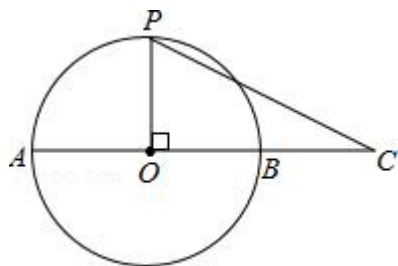
$$\therefore OB=2, OC=OB+BC=4.$$

在 $\triangle OPC$ 中，设 OC 边上的高为 h,

$$\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OC \cdot h = 2h,$$

$\therefore$ 当 h 最大时， $S_{\triangle OPC}$ 取得最大值.

观察图形，当 $OP \perp OC$ 时，h 最大，如答图 1 所示：

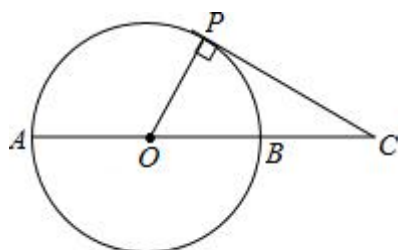


答图1

此时 $h = \text{半径} = 2$, $S_{\triangle OPC} = 2 \times 2 = 4$.

$\therefore \triangle OPC$ 的最大面积为 4.

(2) 解: 当 PC 与 $\odot O$ 相切时, $\angle OCP$ 最大. 如答图 2 所示:



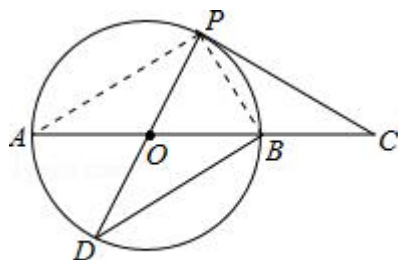
答图2

$$\therefore \sin \angle OCP = \frac{OP}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle OCP = 30^\circ$$

$\therefore \angle OCP$ 的最大度数为 30° .

(3) 证明: 如答图 3, 连接 AP , BP .



答图3

$$\therefore \angle A = \angle D = \angle APD = \angle ABD,$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{PB},$$

$$\therefore \widehat{AP} = \widehat{BD},$$

$$\therefore AP=BD,$$

$$\therefore CP=DB,$$

$$\therefore AP=CP,$$

$$\therefore \angle A=\angle C$$

$$\therefore \angle A=\angle D=\angle APD=\angle ABD=\angle C,$$

在 $\triangle ODB$ 与 $\triangle BPC$ 中

$$\begin{cases} BC=OB=2 \\ \angle C=\angle OBD, \\ CP=BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ODB \cong \triangle BPC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle D=\angle BPC,$$

$\therefore PD$ 是直径,

$$\therefore \angle DBP=90^\circ,$$

$$\therefore \angle D+\angle BPD=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC+\angle BPD=90^\circ,$$

$$\therefore DP \perp PC,$$

$\therefore DP$ 经过圆心,

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.

【点评】 本题考查了全等三角形的判定和性质，切线的判定和性质，作出辅助线构建直角三角形是解题的关键.

23. (9分) 如图1，边长为4的正方形ABCD中，点E在AB边上（不与点A，B重合），点F在BC边上（不与点B、C重合）.

第一次操作：将线段EF绕点F顺时针旋转，当点E落在正方形上时，记为点G；

第二次操作：将线段FG绕点G顺时针旋转，当点F落在正方形上时，记为点H；

依此操作下去...

(1) 图 2 中的 $\triangle EFD$ 是经过两次操作后得到的，其形状为 等边三角形，求此时线段 EF 的长；

(2) 若经过三次操作可得到四边形 $EFGH$ 。

①请判断四边形 $EFGH$ 的形状为 正方形，此时 AE 与 BF 的数量关系是 $AE=BF$ ；

②以①中的结论为前提，设 AE 的长为 x ，四边形 $EFGH$ 的面积为 y ，求 y 与 x 的函数关系式及面积 y 的取值范围。

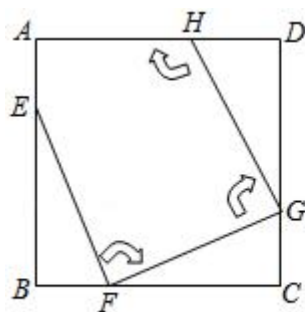


图 1

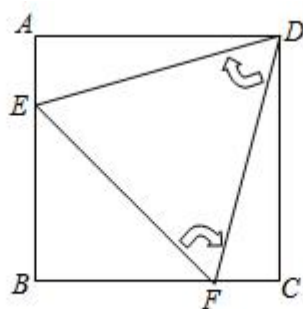
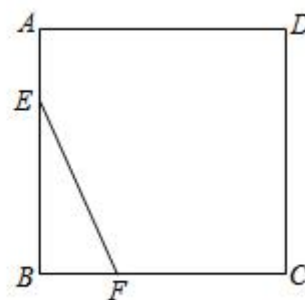


图 2



备用图

【考点】 RB: 几何变换综合题.

【分析】 (1) 由旋转性质，易得 $\triangle EFD$ 是等边三角形；利用等边三角形的性质、勾股定理求出 EF 的长；

(2) ①四边形 $EFGH$ 是正方形；利用三角形全等证明 $AE=BF$ ；

②求面积 y 的表达式，这是一个二次函数，利用二次函数性质求出最值及 y 的取值范围。

【解答】 解：(1) 如题图 2，由旋转性质可知 $EF=DF=DE$ ，则 $\triangle DEF$ 为等边三角形。

在 $Rt\triangle ADE$ 与 $Rt\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AD=CD \\ DE=DF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CDF \quad (\text{HL})$$

$$\therefore AE = CF.$$

设 $AE = CF = x$, 则 $BE = BF = 4 - x$

$\therefore \triangle BEF$ 为等腰直角三角形.

$$\therefore EF = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}(4 - x).$$

$$\therefore DE = DF = EF = \sqrt{2}(4 - x).$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理得: $AE^2 + AD^2 = DE^2$, 即: $x^2 + 4^2 = [\sqrt{2}(4 - x)]^2$,

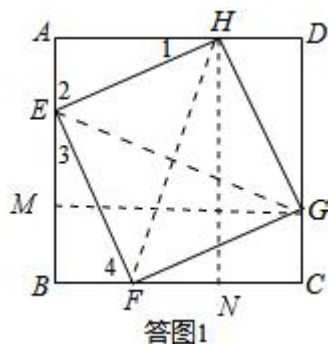
解得: $x_1 = 8 - 4\sqrt{3}$, $x_2 = 8 + 4\sqrt{3}$ (舍去)

$$\therefore EF = \sqrt{2}(4 - x) = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}.$$

DEF 的形状为等边三角形, EF 的长为 $4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$.

(2) ① 四边形 $EFGH$ 的形状为正方形, 此时 $AE = BF$. 理由如下:

依题意画出图形, 如答图 1 所示: 连接 EG 、 FH , 作 $HN \perp BC$ 于 N , $GM \perp AB$ 于 M .



由旋转性质可知, $EF = FG = GH = HE$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

由 $\triangle EGM \cong \triangle FHN$, 可知 $EG = FH$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的形状为正方形.

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ$$

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \quad \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\because \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ, \quad \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 4.$$

在 $\triangle AEH$ 与 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ EH = EF \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \quad (\text{ASA})$$

$$\therefore AE = BF.$$

②利用①中结论, 易证 $\triangle AEH$ 、 $\triangle BFE$ 、 $\triangle CGF$ 、 $\triangle DHG$ 均为全等三角形,

$$\therefore BF = CG = DH = AE = x, \quad AH = BE = CF = DG = 4 - x.$$

$$\therefore y = S_{\text{正方形 } ABCD} - 4S_{\triangle AEH} = 4 \times 4 - 4 \times \frac{1}{2}x(4 - x) = 2x^2 - 8x + 16.$$

$$\therefore y = 2x^2 - 8x + 16 \quad (0 < x < 4)$$

$$\therefore y = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8,$$

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } y \text{ 取得最小值 } 8; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = 16,$$

$$\therefore y \text{ 的取值范围为: } 8 \leq y < 16.$$

【点评】本题是几何变换综合题, 以旋转变换为背景考查了正方形、全等三角形、等边三角形、等腰直角三角形、勾股定理、二次函数等知识点. 本题难度不大, 着重对于几何基础知识的考查, 是一道好题.

六 (本大题共 12 分)

24. (12 分) 如图 1, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的顶点为 M , 直线 $y = m$ 与 x 轴平行, 且与抛物线交于点 A , B , 若 $\triangle AMB$ 为等腰直角三角形, 我们把抛

物线上 A, B 两点之间的部分与线段 AB 围成的图形称为该抛物线对应的准蝶形, 线段 AB 称为碟宽, 顶点 M 称为碟顶, 点 M 到线段 AB 的距离称为碟高.

(1) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 对应的碟宽为 4; 抛物线 $y=4x^2$ 对应的碟宽为 $\frac{1}{2}$; 抛物线 $y=ax^2$ ($a>0$) 对应的碟宽为 $\frac{2}{a}$; 抛物线 $y=a(x-2)^2+3$ ($a>0$) 对应的碟宽为 $\frac{2}{a}$;

(2) 抛物线 $y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}$ ($a>0$) 对应的碟宽为 6, 且在 x 轴上, 求 a 的值;

(3) 将抛物线 $y=a_nx^2+b_nx+c_n$ ($a_n>0$) 的对应准蝶形记为 F_n ($n=1, 2, 3, \dots$), 定义 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 为相似准蝶形, 相应的碟宽之比即为相似比. 若 F_n 与 F_{n-1} 的相似比为 $\frac{1}{2}$, 且 F_n 的碟顶是 F_{n-1} 的碟宽的中点, 现将 (2) 中求得的抛物线记为 y_1 , 其对应的准蝶形记为 F_1 .

①求抛物线 y_2 的表达式;

②若 F_1 的碟高为 h_1 , F_2 的碟高为 h_2 , ... F_n 的碟高为 h_n , 则 $h_n=\frac{3}{2^{n-1}}$, F_n 的

碟宽右端点横坐标为 $2+\frac{3}{2^{n-1}}$; $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的碟宽右端点是否在一条

直线上? 若是, 直接写出该直线的表达式; 若不是, 请说明理由.

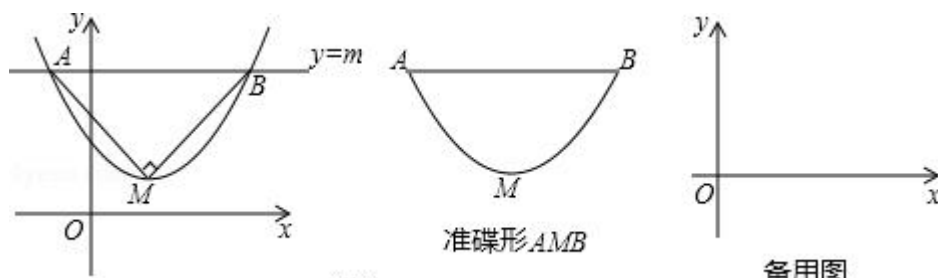


图1

【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】16: 压轴题.

【分析】(1) 根据定义易算出含具体值的抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$, 抛物线 $y=4x^2$ 的碟宽,

且都利用端点 (第一象限) 横纵坐标的相等. 推广至含字母的抛物线 $y=ax^2$

($a > 0$)，类似. 而抛物线 $y = a(x-2)^2 + 3$ ($a > 0$) 为顶点式，可看成 $y = ax^2$ 平移得到，则发现碟宽只和 a 有关.

(2) 根据 (1) 的结论，根据碟宽易得 a 的值.

(3) ①由 y_1 ，易推 y_2 . ②结合画图，易知 $h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n$ 都在直线 $x=2$ 上，但证明需要有一般推广，可以考虑 $h_n // h_{n-1}$ ，且都过 F_{n-1} 的碟宽中点，进而可得. 另画图时易知碟宽有规律递减，所以推理也可得右端点的特点. 对于“ $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的碟宽右端点是否在一条直线上？”，如果写出所有端点规律似乎很难，找规律更难，所以可以考虑基础的几个图形关系，如果相邻 3 个点构成的两条线段不共线，则结论不成立，反则结论成立. 求直线方程只需考虑特殊点即可.

【解答】 解：(1) $4; \frac{1}{2}; \frac{2}{a}; \frac{2}{a}$.

分析如下：

$\because a > 0$,

$\therefore y = ax^2$ 的图象大致如下：

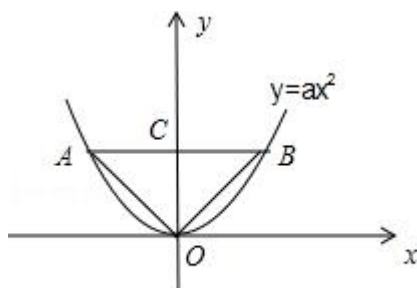


图 1

其必过原点 O ，记 AB 为其碟宽， AB 与 y 轴的交点为 C ，连接 OA, OB .

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形， $AB // x$ 轴，

$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ACO$ 与 $\triangle BCO$ 亦为等腰直角三角形，

$$\therefore AC=OC=BC,$$

$$\therefore x_A=y_A, \quad x_B=y_B, \quad \text{代入 } y=ax^2,$$

$$\therefore A \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right), \quad B \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right), \quad C \left(0, \frac{1}{a}\right),$$

$$\therefore AB=\frac{2}{a}, \quad OC=\frac{1}{a},$$

$$\text{即 } y=ax^2 \text{ 的碟宽为 } \frac{2}{a}.$$

$$\textcircled{1} \text{ 抛物线 } y=\frac{1}{2}x^2 \text{ 对应的 } a=\frac{1}{2}, \text{ 得碟宽 } \frac{2}{a} \text{ 为 } 4;$$

$$\textcircled{2} \text{ 抛物线 } y=4x^2 \text{ 对应的 } a=4, \text{ 得碟宽为 } \frac{2}{a} \text{ 为 } \frac{1}{2};$$

$$\textcircled{3} \text{ 抛物线 } y=ax^2 \quad (a>0), \text{ 碟宽为 } \frac{2}{a};$$

$$\textcircled{4} \text{ 抛物线 } y=a(x-2)^2+3 \quad (a>0) \text{ 可看成 } y=ax^2 \text{ 向右平移 } 2 \text{ 个单位长度, 再向上平移 } 3 \text{ 个单位长度后得到的图形,}$$

$$\therefore \text{ 平移不改变形状、大小、方向,}$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y=a(x-2)^2+3 \quad (a>0) \text{ 的准碟形} \cong \text{ 抛物线 } y=ax^2 \text{ 的准碟,}$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y=ax^2 \quad (a>0), \text{ 碟宽为 } \frac{2}{a},$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y=a(x-2)^2+3 \quad (a>0), \text{ 碟宽为 } \frac{2}{a}.$$

$$(2) \quad \therefore y=ax^2-4ax-\frac{5}{3}=a(x-2)^2-(4a+\frac{5}{3}),$$

$$\therefore \text{ 同 (1), 其碟宽为 } \frac{2}{a},$$

$$\therefore y=ax^2-4ax-\frac{5}{3} \text{ 的碟宽为 } 6,$$

$$\therefore \frac{2}{a}=6,$$

$$\text{解得 } a=\frac{1}{3},$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3.$$

$$(3) \quad \textcircled{1} \therefore F_1 \text{ 的碟宽: } F_2 \text{ 的碟宽}=2: 1,$$

$$\therefore \frac{2}{a_1} = \frac{4}{a_2},$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore a_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore y = \frac{1}{3} (x-2)^2 - 3 \text{ 的碟宽 AB 在 x 轴上 (A 在 B 左边),}$$

$$\therefore A(-1, 0), B(5, 0),$$

$$\therefore F_2 \text{ 的碟顶坐标为 } (2, 0),$$

$$\therefore y_2 = \frac{2}{3} (x-2)^2.$$

② $\because F_n$ 的准碟形为等腰直角三角形,

$$\therefore F_n \text{ 的碟宽为 } 2h_n,$$

$$\therefore 2h_n : 2h_{n-1} = 1 : 2,$$

$$\therefore h_n = \frac{1}{2} h_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 h_{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 h_{n-3} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} h_1,$$

$$\therefore h_1 = 3,$$

$$\therefore h_n = \frac{3}{2^{n-1}}.$$

$$\therefore h_n // h_{n-1}, \text{ 且都过 } F_{n-1} \text{ 的碟宽中点,}$$

$$\therefore h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n \text{ 都在一条直线上,}$$

$$\therefore h_1 \text{ 在直线 } x=2 \text{ 上,}$$

$$\therefore h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, h_n \text{ 都在直线 } x=2 \text{ 上,}$$

$$\therefore F_n \text{ 的碟宽右端点横坐标为 } 2 + \frac{3}{2^{n-1}}.$$

另, $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的碟宽右端点在一条直线上, 直线为 $y = -x + 5$.

分析如下:

考虑 F_{n-2}, F_{n-1}, F_n 情形, 关系如图 2,

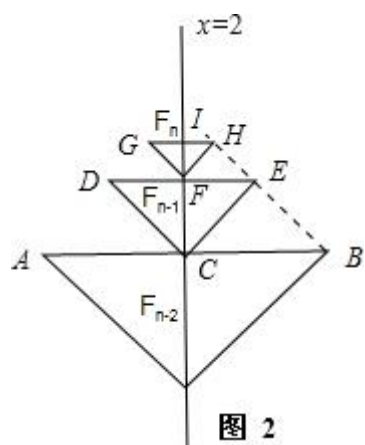


图 2

F_{n-2} , F_{n-1} , F_n 的碟宽分别为 AB , DE , GH ; C , F , I 分别为其碟宽的中点, 都

在直线 $x=2$ 上, 连接右端点, BE , EH .

$\therefore AB \parallel x$ 轴, $DE \parallel x$ 轴, $GH \parallel x$ 轴,

$\therefore AB \parallel DE \parallel GH$,

$\therefore GH$ 平行相等于 FE , DE 平行相等于 CB ,

$\therefore$ 四边形 $GFEH$, 四边形 $DCBE$ 都为平行四边形,

$\therefore HE \parallel GF$, $EB \parallel DC$,

$\therefore \angle GFI = \frac{1}{2} \cdot \angle GFH = \frac{1}{2} \cdot \angle DCE = \angle DCF$,

$\therefore GF \parallel DC$,

$\therefore HE \parallel EB$,

$\therefore HE$, EB 都过 E 点,

$\therefore HE$, EB 在一条直线上,

$\therefore F_{n-2}$, F_{n-1} , F_n 的碟宽的右端点是在一条直线,

$\therefore F_1$, F_2 , ..., F_n 的碟宽的右端点是在一条直线.

$\therefore F_1$: $y_1 = \frac{1}{3} (x-2)^2 - 3$ 准碟形右端点坐标为 $(5, 0)$,

F_2 : $y_2 = \frac{2}{3} (x-2)^2$ 准碟形右端点坐标为 $(2 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

$\therefore$ 待定系数可得过两点的直线为 $y = -x + 5$,

$\therefore F_1, F_2, \dots, F_n$ 的碟宽的右端点是在直线 $y = -x + 5$ 上.

【点评】 本题考查学生对新知识的学习、理解与应用能力. 题目中主要涉及特殊直角三角形, 二次函数解析式与图象性质, 多点共线证明等知识, 综合难度较高, 学生清晰理解有一定困难.