

江西省 2013 年中等学校招生考试数学试卷解析

说明：1. 本卷共有七个大题，24 个小题，全卷满分 120 分，考试时间 120 分钟。

2. 本卷分为试题卷和答题卷，答案要求写在答题卷上，不得在试题卷上作答，否则不给分。

一、选择题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）每小题只有一个正确选项.

1. -1 的倒数是 (). [来源:Zxxk.Com]

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 0

【答案】 B.

【考点解剖】 本题考查了实数的运算性质，要知道什么是倒数.

【解题思路】 根据倒数的定义，求一个数的倒数，就是用 1 除以这个数，所以 -1 的倒数为 $1 \div (-1) = -1$ ，选 B.

【解答过程】 $\because 1 \div (-1) = -1$ ， $\therefore$ 选 B.

【方法规律】 根据定义直接计算.

【关键词】 实数 倒数

2. 下列计算正确的是 ().

- A. $a^3 + a^2 = a^5$ B. $(3a - b)^2 = 9a^2 - b^2$ C. $a^6 b \div a^2 = a^3 b$ D. $(-ab^3)^2 = a^2 b^6$

【答案】 D.

【考点解剖】 本题考查了代数式的有关运算，涉及单项式的加法、除法、完全平方公式、幂的运算性质中的同底数幂相除、积的乘方和幂的乘方等运算性质，正确掌握相关运算性质、法则是解题的前提.

【解题思路】 根据法则直接计算.

【解答过程】 A. a^3 与 a^2 不是同类项，不能相加（合并）， a^3 与 a^2 相乘才得 a^5 ；B. 是完全平方公式的应用，结果应含有三项，这里结果只有两项，一看便知是错的，正确为 $(3a - b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$ ；C. 两个单项式相除，系数与系数相除，相同的字母相除（同

底数幂相除，底数不变，指数相减），正确的结果为 $a^6 b \div a^2 = a^4 b$ ；D. 考查幂的运算性质

（积的乘方等于把积中的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，幂的乘方，底数不变，指数相乘），正确，选 D.

【方法规律】 熟记法则，依法操作.

【关键词】 单项式 多项式 幂的运算

3. 下列数据是 2013 年 3 月 7 日 6 点公布的中国六大城市的空气污染指数情况：

城市	北京	合肥	南京	哈尔滨	成都	南昌
污染指数	342	163	165	45	227	163

则这组数据的中位数和众数分别是 ().

- A. 164 和 163 B. 105 和 163 C. 105 和 164 D. 163 和 164

【答案】 A.

【考点解剖】 本题考查的是统计初步中的基本概念——中位数、众数，要知道什么是中位数、众数.

【解题思路】 根据中位数、众数的定义直接计算.

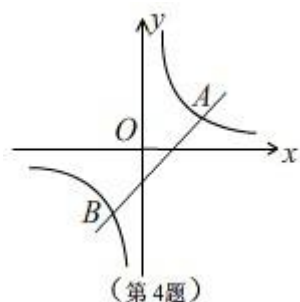
【解答过程】 根据中位数的定义——将一组数据从小到大或从大到小排序，处于中间（数据个数为奇数时）的数或中间两个数的平均数（数据为偶数个时）就是这组数据的中位数；众数是指一组数据中出现次数最多的那个数，所以 342、163、165、45、227、163 的中位数是 163 和 165 的平均数 164，众数为 163，选 A.

【方法规律】 熟知基本概念，直接计算.

【关键词】 统计初步 中位数 众数

4. 如图，直线 $y=x+a-2$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于 A, B 两点，则当线段 AB 的长度取最小值时， a 的值为 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 5



【答案】 C.

【考点解剖】 本题以反比例函数与一次函数为背景考查了反比例函数的性质、待定系数法，以及考生的直觉判断能力.

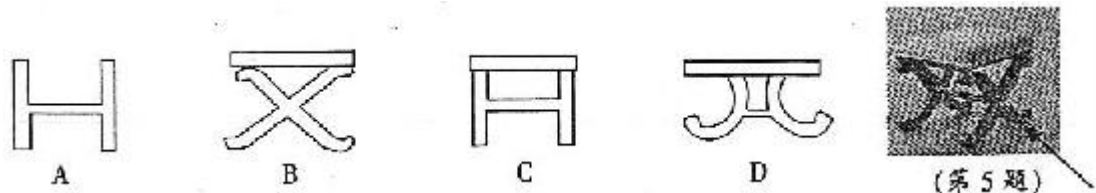
【解题思路】 反比例函数图象既是轴对称图形又是中心对称图形，只有当 A, B, O 三点共线时，才会有线段 AB 的长度最小 $OA + OB = AB$ ，（当直线 AB 的表达式中的比例系数不为 1 时，也有同样的结论）.

【解答过程】 把原点 $(0, 0)$ 代入 $y = x + a - 2$ 中，得 $a = 2$. 选 C..

【方法规律】 要求 a 的值，必须知道 x, y 的值（即一点的坐标）由图形的对称性可直观判断出直线 AB 过原点 $(0, 0)$ 时，线段 AB 才最小，把原点的坐标代入解析式中即可求出 a 的值.

【关键词】 反比例函数 一次函数 双曲线 线段最小

5. 一张坐凳的形状如图所示，以箭头所指的方向为主视方向，则他的左视图可以是 ().



【答案】 C.

【考点解剖】 本题考查的投影与视图中的画已知物体的三视图，要正确掌握画三视图的有关法则.

【解题思路】 可用排除法，B、D 两选项有迷惑性，B 是主视图，D 不是什么视图，A 少了上面的一部分，正确答案为 C.

【解答过程】 略.

【方法规律】 先要搞准观看的方向，三视图是正投影与平行投影的产物，反映物体的轮廓线，看得到的画成实线，遮挡部分画成虚线.

【关键词】 三视图 坐凳

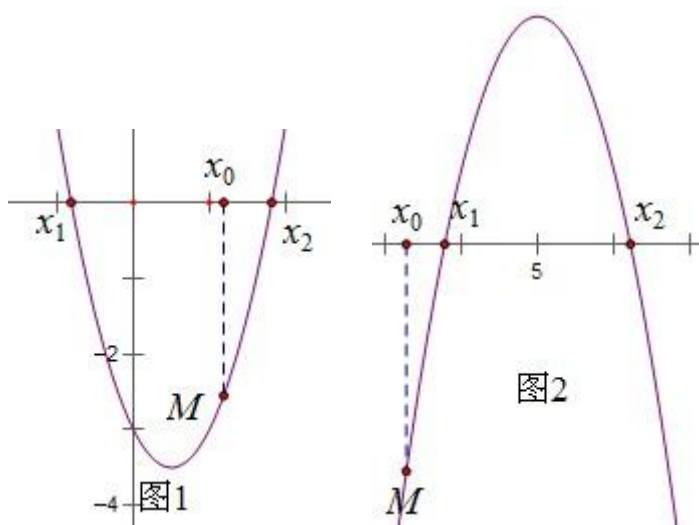
6. 若二次函数 $y=ax+bx+c(a \neq 0)$ 的图象与 x 轴有两个交点，坐标分别为 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，图象上有一点 $M(x_0, y_0)$ 在 x 轴下方，则下列判断正确的是 ().

- A. $a > 0$ B. $b^2 - 4ac \geq 0$ C. $x_1 < x_0 < x_2$ D. $a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$

【答案】 D.

【考点解剖】 本题考查的是二次函数的性质，要求对二次函数的性质有比较深刻地理解，并能熟练地画函数草图作出分析.

【解题思路】 抛物线与 x 轴有不同的两个交点，则 $b^2 - 4ac > 0$ ，与 B 矛盾，可排除 B 选项；剩下 A、C、D 不能直接作出正误判断，我们分 $a > 0, a < 0$ 两种情况画出两个草图来分析（见下图）.



由图可知 a 的符号不能确定（可正可负，即抛物线的开口可向上，也可向下），所以 x_0, x_1, x_2 的大小就无法确定；在图 1 中，

$a > 0$ 且有 $x_1 < x_0 < x_2$ ，则 $a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ 的值为负；在图 2 中， $a < 0$ 且有 $x_1 < x_0 < x_2$ ，则 $a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ 的值也为负. 所以正确选项为 D.

【解答过程】 略.

【方法规律】 先排除错误的，剩下的再画图分析（数形结合）

【关键词】 二次函数 结论正误判断

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

7. 分解因式 $x^2 - 4 =$ _____.

【答案】 $(x+2)(x-2)$.

【考点解剖】 本题的考点是因式分解，因式分解一般就考提取公因式法和公式法（完全平方公式和平方差公式），而十字相乘法、分组分解等方法通常是不会考的.

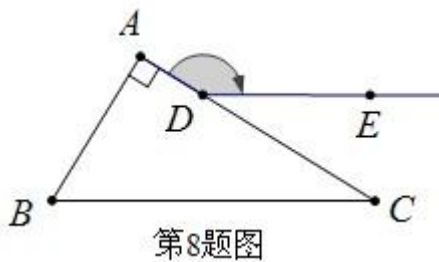
【解题思路】 直接套用公式即.

【解答过程】 $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

【方法规律】 先观察式子的特点，正确选用恰当的分解方法.

【关键词】 平方差公式 因式分解

8. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$ 点 D 在 AC 边上, $DE\parallel BC$, 若 $\angle 1=155^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数为_____.



【答案】 65° .

【考点解剖】 本题考查了平行线的性质、邻补角、直角三角形两锐角互余等知识, 题目较为简单, 但有些考生很简单的计算都会出错, 如犯 $180^\circ - 155^\circ = 35^\circ$ 之类的错误.

【解题思路】 由 $\angle 1 = 155^\circ$, 可求得 $\angle BCD = \angle CDE = 25^\circ$, 最后求 $\angle B = 65^\circ$.

【解答过程】 $\because \angle ADE = 155^\circ$, $\therefore \angle EDC = 25^\circ$.

又 $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle C = \angle EDC = 25^\circ$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle B = 65^\circ$.

【方法规律】 一般求角的大小要搞清楚所求角与已知角之间的等量关系, 本题涉及三角形内角和定理、两直线平行, 内错角相等, 等量代换等知识和方法.

【关键词】 邻补角 内错角 互余 互补

9. 某单位组织 34 人分别到井冈山和瑞金进行革命传统教育, 到井冈山的人数是到瑞金的人数的 2 倍多 1 人, 求到两地的人数各是多少? 设到井冈山的人数为 x 人, 到瑞金的人数为 y 人, 请列出满足题意的方程组是_____.

【答案】
$$\begin{cases} x + y = 34, \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

【考点解剖】 本题考查的是列二元一次方程组解应用题 (不要求求出方程组的解), 准确找出数量之间的相等关系并能用代数式表示.

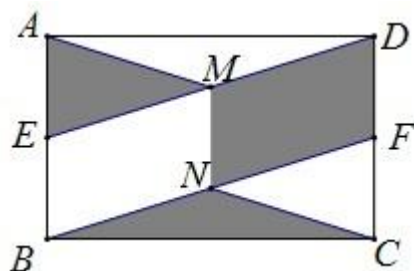
【解题思路】 这里有两个等量关系: 井冈山人数+瑞金人数=34, 井冈山人数=瑞金人数 $\times 2 + 1$. 所以所列方程组为
$$\begin{cases} x + y = 34, \\ x = 2y + 1. \end{cases}$$

【解答过程】 略.

【方法规律】 抓住关键词, 找出等量关系

【关键词】 列二元一次方程组

10. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点, 连接 DE 和 BF , 分别取 DE 、 BF 的中点 M 、 N , 连接 AM , CN , MN , 若 $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2\sqrt{3}$, 则图中阴影部分的面积为_____.



【答案】 $2\sqrt{6}$.

【考点解剖】 本题考查了阴影部分面积的求法, 涉及矩形的中心对称性、面积割补法、矩形的面积计算公式等知识, 解题思路方法多样, 计算也并不复杂, 若分别计算再相加, 则耗时耗力, 仔细观察不难发现阴影部分的面积其实就是原矩形面积的一半 (即 $2\sqrt{6}$), 这种“整体思想”事半功倍, 所以平时要加强数学思想、方法的学习与积累.

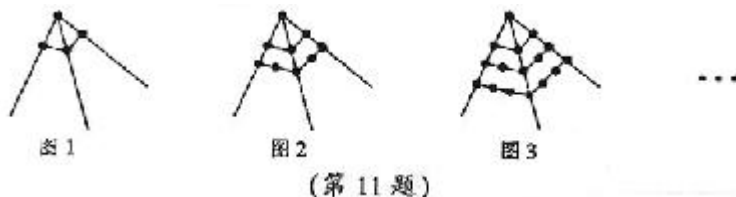
【解题思路】 $\triangle BCN$ 与 $\triangle ADM$ 全等, 面积也相等, $\square DFMN$ 与 $\square BEMN$ 的面积也相等, 所以阴影部分的面积其实就是原矩形面积的一半.

【解答过程】 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$, 即阴影部分的面积为 $2\sqrt{6}$.

【方法规律】 仔细观察图形特点, 搞清部分与整体的关系, 把不规则的图形转化为规则的来计算.

【关键词】 矩形的面积 二次根式的运算 整体思想

11. 观察下列图形中点的个数, 若按其规律再画下去, 可以得到第 n 个图形中所有的个数为 (用含 n 的代数式表示).



【答案】 $(n+1)^2$.

【考点解剖】 本题考查学生的观察概括能力, 发现规律, 列代数式.

【解题思路】 找出点数的变化规律, 先用具体的数字等式表示, 再用含字母的式子表示.

$$\begin{array}{ll} 1 & 1+3=4 \\ 2 & 1+3+5=9 \\ 3 & 1+3+5+7=16 \\ 4 & 1+3+5+7+9=25 \\ n & 1+3+5+7+\dots+(2n+1)=(n+1)^2 \end{array}$$

【解答过程】 略.

【方法规律】 由图形的变化转化为数学式子的变化，加数为连续奇数，结果为加数个数的平方.

【关键词】 找规律 连续奇数的和

12. 若一个一元二次方程的两个根分别是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边长，且 $S_{\triangle ABC}=3$ ，请写出一个符合题意的一元二次方程_____.

【答案】 $x^2 - 5x + 6 = 0$.

【考点解剖】 本题是道结论开放的题（答案不唯一），已知直角三角形的面积为 3（直角边长未定），要写一个两根为直角边长的一元二次方程，我们尽量写边长为整数的情况（即保证方程的根为整数），如直角边长分别为 2、3 的直角三角形的面积就是 3，以 2、3 为根

的一元二次方程为 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ；也可以以 1、6 为直角边长，得方程为 $x^2 - 7x + 6 = 0$.

（求作一元二次方程，属“一元二次方程根与系数的关系”知识范畴，这种题型在以前相对考得较少，有点偏了.）

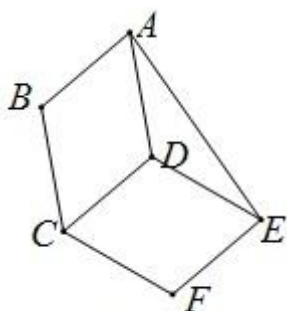
【解题思路】 先确定两条符合条件的边长，再以它为根求作一元二次方程.

【解答过程】 略.

【方法规律】 求作方程可以用根与系数的关系，也可由因式分解法解一元二次方程.

【关键词】 直角三角形 根 求作方程

13. 如图， $\square ABCD$ 与 $\square DCFE$ 的周长相等，且 $\angle BAD=60^\circ$ ， $\angle F=110^\circ$ ，则 $\angle DAE$ 的度数为_____.



【答案】 25° .

【考点解剖】 本题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的判定与性质.

【解题思路】 已知两个平行四边形的周长相等，且有公共边 CD ，则有 $AD=DE$ ，即 $\triangle ADE$ 为等腰三角形，顶角 $\angle ADE = \angle BCF = 60^\circ + 70^\circ = 130^\circ$ ， $\therefore \angle DAE = 25^\circ$.

【解答过程】 $\because \square ABCD$ 与 $\square DCFE$ 的周长相等，且有公共边 CD ，
 $\therefore AD=DE$ ， $\angle ADE = \angle BCF = 60^\circ + 70^\circ = 130^\circ$.

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE) = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ.$$

【方法规律】 先要明确 $\angle DAE$ 的身份（为等腰三角形的底角），要求底角必须知道另一角的度数，分别将 $\angle BAD=130^\circ$ 转化为 $\angle BCD=130^\circ$ ， $\angle F=110^\circ$ 转化为 $\angle DCF=70^\circ$ ，从而求得 $\angle ADE = \angle BCF = 130^\circ$.

【关键词】 平行四边形 等腰三角形 周长 求角度

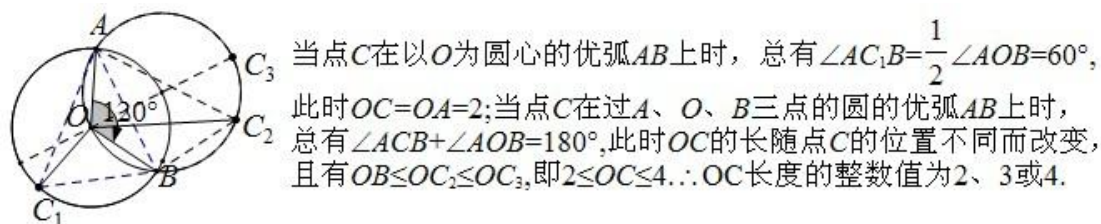
14. 平面内有四个点 A 、 O 、 B 、 C ，其中 $\angle AOB=120^\circ$ ， $\angle ACB=60^\circ$ ， $AO=BO=2$ ，则满足题意的 OC 长度为整数的值可以是_____.

【答案】 2, 3, 4.

【考点解剖】 本题主要考查学生阅读理解能力、作图能力、联想力与思维的严谨性、周密性，所涉及知识点有等腰三角形、圆的有关知识，分类讨论思想，不等式组的整数解，在运动变化中抓住不变量的探究能力.

【解题思路】 由 $\angle AOB=120^\circ$ ， $AO=BO=2$ 画出一个顶角为 120° 、腰长为 2 的等腰三角形，由 60° 与 120° 互补， 60° 是 120° 的一半，点 C 是动点想到构造圆来解决此题.

【解答过程】



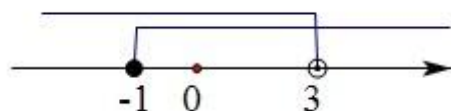
【方法规律】 构造恰当的图形是解决此类问题的关键.

【关键词】 圆 整数值

三、(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

15. 解不等式组 $\begin{cases} x+2 \geq 1, \\ 2(x+3)-3 > 3x, \end{cases}$ 并将解集在数轴上表示出来.

【答案】 解：由 $x+2 \geq 1$ 得 $x \geq -1$ ，
由 $2x+6-3 > 3x$ 得 $x < 3$ ，∴ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$.
解集在数轴上表示如下：



【考点解剖】 本题考查不等式组的解法，以及解集在数轴上的表示方法.

【解题思路】 分别把两个不等式解出来，再取它们解集的公共部分得到不等式组的解集，最后画出数轴表示出公共部分（不等式组的解集），注意空心点与实心点的区别.

【解答过程】

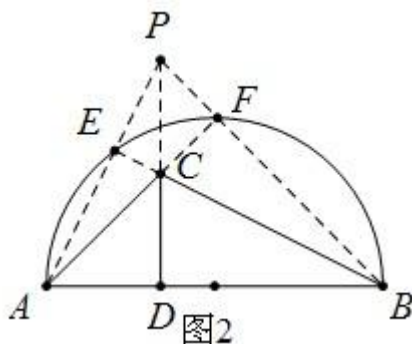
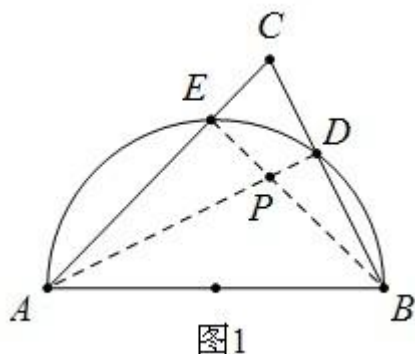
【方法规律】 要保证运算的准确度与速度，注意细节（不要搞错符号）.

【关键词】 不等式组 数轴

16. 如图 AB 是半圆的直径，图 1 中，点 C 在半圆外；图 2 中，点 C 在半圆内，请仅用无刻度的直尺按要求画图.

- (1) 在图 1 中，画出 $\triangle ABC$ 的三条高的交点；
- (2) 在图 2 中，画出 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高.

【答案】 (1) 如图 1，点 P 就是所求作的点；
(2) 如图 2， CD 为 AB 边上的高.



【考点解剖】 本题属创新作图题，是江西近年热点题型之一.考查考生对圆的性质的理解、读图能力，题（1）是要作点，题（2）是要作高，都是要解决直角问题，用到的知识就是“直径所对的圆周角为直角”.

【解题思路】 图1点C在圆外，要画三角形的高，就是要过点B作AC的垂线，过点A作BC的垂线，但题目限制了作图的工具（无刻度的直尺，只能作直线或连接线段），说明必须用所给图形本身的性质来画图（这就是创新作图的魅力所在），作高就是要构造90度角，显然由圆的直径就应联想到“直径所对的圆周角为90度”.设AC与圆的交点为E，连接BE,就得到AC边上的高BE；同理设BC与圆的交点为D，连接AD,就得到BC边上的高AD，则BE与AD的交点就是 $\triangle ABC$ 的三条高的交点；题（2）是题（1）的拓展、升华，三角形的三条高相交于一点，受题（1）的启发，我们能够作出 $\triangle ABC$ 的三条高的交点P，再作射线PC与AB交于点D，则CD就是所求作的AB边上的高.

【解答过程】 略.

【方法规律】 认真分析揣摩所给图形的信息，结合题目要求思考.

【关键词】 创新作图 圆 三角形的高

四、(本大题共2小题，每小题6分，共12分)

17. 先化简，再求值： $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x} \div \frac{x^2 - 2x}{x^2} + 1$ ，在0，1，2，三个数中选一个合适的，代入求值.

【答案】 解：原式 $= \frac{(x-2)^2}{2x} \cdot \frac{x^2}{x(x-2)} + 1$
 $= \frac{x-2}{2} + 1$
 $= \frac{x}{2}.$
 当 $x=1$ 时，原式 $= \frac{1}{2}.$

【考点解剖】 本题考查的是分式的化简求值，涉及因式分解，约分等运算知识，要求考生具有比较娴熟的运算技能，化简后要从三个数中选一个数代入求值，又考查了考生的细心答题的态度，这个陷阱隐蔽但不刁钻，看到分式，必然要注意分式成立的条件.

【解题思路】 先将分式的分子分母因式分解，再将除法运算转化为乘法运算，约分后得到 $\frac{x-2}{2} + 1$ ，可通分得 $\frac{x-2}{2} + 1 = \frac{x-2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{x}{2}$ ，也可将 $\frac{x-2}{2}$ 化为 $\frac{x}{2} - 1$ 求解.

【解答过程】 略.

【方法规律】 根据式子的特点选用恰当的解题顺序和解题方法.

【关键词】 分式 化简求值

18. 甲、乙、丙 3 人聚会, 每人带了一件从外盒包装上看完全相同的礼物 (里面的东西只有颜色不同), 将 3 件礼物放在一起, 每人从中随机抽取一件.

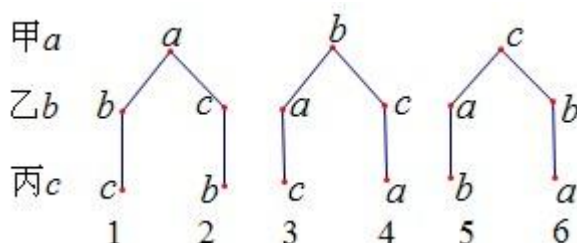
(1) 下列事件是必然事件的是 ().

- A. 乙抽到一件礼物
- B. 乙恰好抽到自己带来的礼物
- C. 乙没有抽到自己带来的礼物
- D. 只有乙抽到自己带来的礼物[来源:学.科.网]

(2) 甲、乙、丙 3 人抽到的都不是自己带来的礼物 (记为事件 A), 请列出事件 A 的所有可能的结果, 并求事件 A 的概率.

【答案】 (1) A.

(2) 依题意画树状图如下:



从上图可知, 所有等可能结果共有 6 种, 其中第 4、5 种结果符合, $\therefore P_{(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【考点解剖】 本题为概率题, 考查了对“随机事件”、“必然事件”两个概念的理解, 画树形图或表格列举所有等可能结果的方法.

【解题思路】 (1) 是选择题, 根据必然事件的定义可知选 A; (2) 三个人抽取三件礼物, 恰好每人一件, 所有可能结果如上图所示为 6 种, 其中只有第 4、5 种结果符合, $\therefore$

$P_{(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; 也可以用直接列举法: 甲从三个礼物中抽到的礼物恰好不是自己的只有两种, 要么是乙的要么是丙的, 若甲抽到乙的, 乙必须抽到丙的才符合题意; 若甲抽到的是丙的, 乙必须抽到甲的才符合题意, $\therefore P_{(A)} = \frac{1}{3}$.

【解答过程】 略.

【方法规律】 要正确理解题意, 画树形图列举所有可能结果, 本质就是一种分类, 首先要明确分类的对象, 再要确定分类的标准和顺序, 实现不重不漏.

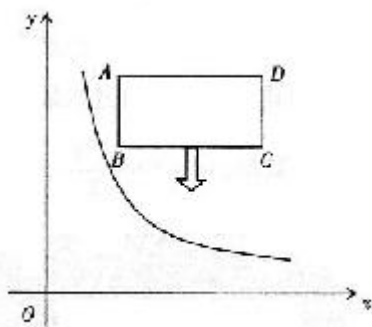
【关键词】 必然事件 概率 抽取礼物

五、(本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. 如图, 在平面直角坐标系中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象和矩形 ABCD 的第一象限, AD 平行于 x 轴, 且 $AB=2$, $AD=4$, 点 A 的坐标为 (2, 6).

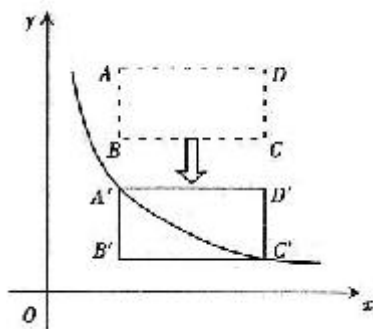
(1) 直接写出 B、C、D 三点的坐标;

(2) 若将矩形向下平移, 矩形的两个顶点恰好同时落在反比例函数的图象上, 猜想这是哪两个点, 并求矩形的平移距离和反比例函数的解析式.



【答案】 (1) $B(2, 4)$, $C(6, 4)$, $D(6, 6)$.

(2) 如图, 矩形 $ABCD$ 向下平移后得到矩形 $A'B'C'D'$,



设平移距离为 a , 则 $A'(2, 6-a)$, $C'(6, 4-a)$

$\because$ 点 A' , 点 C' 在 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore 2(6-a)=6(4-a),$$

解得 $a=3$,

$\therefore$ 点 $A'(2, 3)$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$.

【考点解剖】 本题以矩形为背景考查用待定系数法求反比例函数的解析式.

【解题思路】 先根据矩形的对边平行且相等的性质得到 B 、 C 、 D 三点的坐标, 再从矩形的平移过程发现只有 A 、 C 两点能同时在双曲线上 (这是种合情推理, 不必证明), 把 A 、

C 两点坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 中, 得到关于 a 、 k 的方程组从而求得 k 的值.

【解答过程】 略.

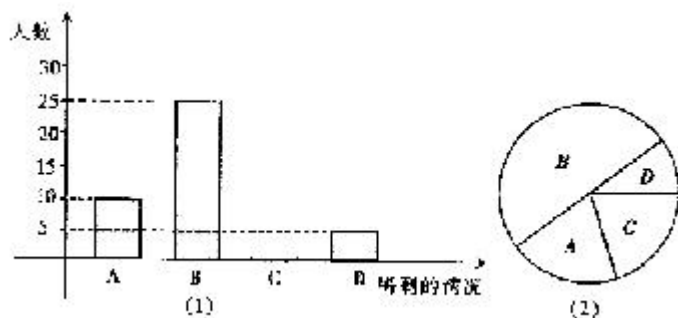
【方法规律】 把线段的长转化为点的坐标, 在求 k 的值的时候, 由于 k 的值等于点的横坐标与纵坐标之积, 所以直接可得方程 $2(6-a)=6(4-a)$, 求出 a 后再由坐标求 k , 实际上也可

把 A 、 C 两点坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 中, 得到关于 a 、 k 的方程组从而直接求得 k 的值.

【关键词】 矩形 反比例函数 待定系数法

20. 生活中很多矿泉水没有喝完便被扔掉, 造成极大的浪费, 为此数学兴趣小组的同学对某单位的某次会议所用矿泉水的浪费情况进行调查, 为期半天的会议中, 每人发一瓶 500ml 的矿泉水, 会后对所发矿泉水喝的情况进行统计, 大致可分为四种: A. 全部喝完; B. 喝

剩约 $\frac{1}{3}$ ；C. 喝剩约一半；D. 开瓶但基本未喝。同学们根据统计结果绘制如下两个统计图，根据统计图提供的信息，解答下列问题：



(1) 参加这次会议的有多少人？在图 (2) 中 D 所在扇形的圆心角是多少度？并补全条形统计图；(计算结果请保留整数)。

(2) 若开瓶但基本未喝算全部浪费，试计算这次会议平均每人浪费的矿泉水约多少毫升？

(3) 据不完全统计，该单位每年约有此类会议 60 次，每次会议人数约在 40 至 60 人之间，请用 (2) 中计算的结果，估计该单位一年中因此类会议浪费的矿泉水 (500ml/瓶) 约有多少瓶？(可使用科学计算器)

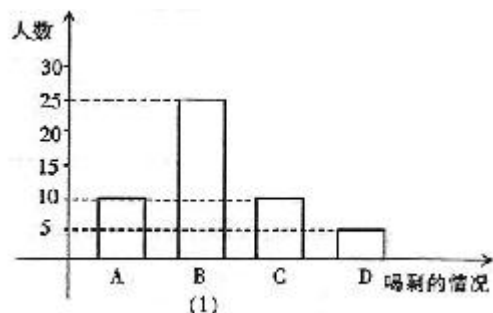
【答案】 (1) 根据所给扇形统计图可知，喝剩约 $\frac{1}{3}$ 的人数是总人数的 50%，

$\therefore 25 \div 50\% = 50$ ，参加这次会议的总人数为 50 人，

$\therefore \frac{5}{50} \times 360^\circ = 36^\circ$ ，

$\therefore$ D 所在扇形圆心角的度数为 36° ，

补全条形统计图如下：



(2) 根据条形统计图可得平均每人浪费矿水量约为：

$$\begin{aligned} & (25 \times \frac{1}{3} \times 500 + 10 \times 500 \times \frac{1}{2} + 5 \times 500) \div 50 \\ &= \frac{27500}{50} \approx 183 \text{ 毫升}； \end{aligned}$$

(3) 该单位每年参加此类会议的总人数约为 24000 人~3600 人，则浪费矿泉水约为 $3000 \times 183 \div 500 = 1098$ 瓶。

【考点解剖】 本题考查的是统计初步知识，条形统计图与扇形统计图信息互补，文字量大，要求考生具有较强的阅读理解能力。本题所设置的问题比较新颖，并不是象传统考试直接叫你求平均数、中位数、众数或方差，而是换一种说法，但考查的本质仍然为求加权平均数、以样本特性估计总体特性。显然这对考生的能力要求是非常高的。

【解题思路】 (1) 由扇形统计图可看出 B 类占了整个圆的一半即 50% (遗憾的是扇形中没有用具体的数字 (百分比) 表示出来, 这是一种很不严谨的命题失误), 从条形统计图又知 B 类共 25 人, 这样已知部分数的百分比就可以求出总人数, 而 D 类有 5 人, 已知部分数和总数可以求出 D 类所占总数百分比, 再由百分比确定所占圆的圆心角的度数; 已知总人数和 A、B、D 类的人数可求出 C 类的人数为 10 人, 将条形统计图中补完整; (2) 用总的浪费量除以总人数 50 就得到平均每人的浪费量; (3) 每年开 60 次会, 每次会议将有 40 至 60 人参加, 这样折中取平均数算一年将有 3000 人参加会议, 用 3000 乘以 (2) 中的结果 (平均每人的浪费量), 得到一年总的浪费量, 再转换成瓶数即可.

【解答过程】 略.

【方法规律】 能从实际问题中抽出数学问题, 从题中抽出关键词即要弄清已知什么, 要求什么 (不要被其它无关信息干扰).

【关键词】 矿泉水 统计初步

六、(本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21. 如图 1, 一辆汽车的背面, 有一种特殊形状的刮雨器, 忽略刮雨器的宽度可抽象为一条折线 OAB , 如图 2 所示, 量得连杆 OA 长为 10cm, 雨刮杆 AB 长为 48cm, $\angle OAB = 120^\circ$. 若启动一次刮雨器, 雨刮杆 AB 正好扫到水平线 CD 的位置, 如图 3 所示.

(1) 求雨刮杆 AB 旋转的最大角度及 O 、 B 两点之间的距离; (结果精确到 0.01)

(2) 求雨刮杆 AB 扫过的最大面积. (结果保留 π 的整数倍)

(参考数据: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sqrt{721} \approx 26.851$, 可使用科学计算器)



图 1

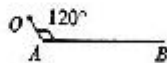


图 2

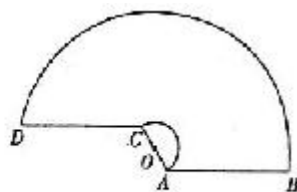


图 3

【答案】 解: (1) 雨刮杆 AB 旋转的最大角度为 180° .

连接 OB , 过 O 点作 AB 的垂线交 BA 的延长线于 E ,

$$\because \angle OAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE = 60^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中,

$$\because \angle OAE = 60^\circ, OA = 10,$$

$$\therefore \sin \angle OAE = \frac{OE}{OA} = \frac{OE}{10},$$

$$\therefore OE = 5\sqrt{3},$$

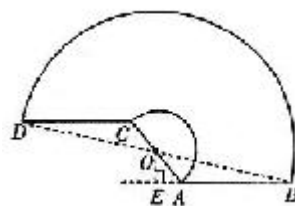
$$\therefore AE = 5.$$

$$\therefore EB = AE + AB = 53,$$

在 $\text{Rt}\triangle OEB$ 中,

$$\therefore OB = 5\sqrt{3}, EB = 53,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \sqrt{2884} = 2\sqrt{721} \approx 53.70;$$



(2) $\because$ 雨刮杆 AB 旋转 180° 得到 CD , 即 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 关于点 O 中心对称,

$\therefore \triangle BAO \cong \triangle OCD$, $\therefore S_{\triangle BAO} = S_{\triangle OCD}$,

$\therefore$ 雨刮杆 AB 扫过的最大面积 $S = \frac{1}{2} \pi (OB^2 - OA^2)$
 $= 1392 \pi$.

【考点解剖】 本题考查的是解直角三角形的应用, 以及扇形面积的求法, 难点是考生缺乏生活经验, 弄不懂题意 (提供的实物图也不够清晰, 人为造成一定的理解困难).

【解题思路】 将实际问题转化为数学问题, (1) AB 旋转的最大角度为 180° ; 在 $\triangle OAB$ 中, 已知两边及其夹角, 可求出另外两角和一边, 只不过它不是直角三角形, 需要转化为直角三角形来求解, 由 $\angle OAB = 120^\circ$ 想到作 AB 边上的高, 得到一个含 60° 角的 $\text{Rt}\triangle OAE$ 和一个非特殊角的 $\text{Rt}\triangle OEB$. 在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中, 已知 $\angle OAE = 60^\circ$, 斜边 $OA = 10$, 可求出 OE 、 AE 的长, 进而求得 $\text{Rt}\triangle OEB$ 中 EB 的长, 再由勾股定理求出斜边 OB 的长; (2) 雨刮杆 AB 扫过的最大面积就是一个半圆环的面积 (以 OB 、 OA 为半径的半圆面积之差).

【解答过程】 略.

【方法规律】 将斜三角形转化为直角三角形求解. 在直角三角形中, 已知两边或一边一角都可求出其余的量.

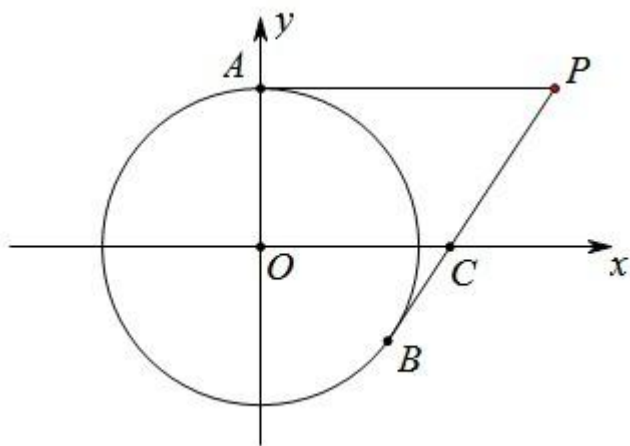
【关键词】 刮雨器 三角函数 解直角三角形 中心对称 扇形的面积

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 以点 O 为圆心, 半径为 2 的圆与 y 轴交于点 A , 点 $P(4, 2)$ 是 $\odot O$ 外一点, 连接 AP , 直线 PB 与 $\odot O$ 相切于点 B , 交 x 轴于点 C .

(1) 证明 PA 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求点 B 的坐标;

(3) 求直线 AB 的解析式.



【答案】 (1) 证明: 依题意可知, $A(0, 2)$

$\therefore A(0, 2), P(4, 2)$,

$\therefore AP \parallel x$ 轴.

$\therefore \angle OAP = 90^\circ$, 且点 A 在 $\odot O$ 上,

$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解法一: 连接 OP, OB , 作 $PE \perp x$ 轴于点 $E, BD \perp x$ 轴于点 D ,

$\therefore PB$ 切 $\odot O$ 于点 B ,

$\therefore \angle OBP = 90^\circ$, 即 $\angle OBP = \angle PEC$,

又 $\because OB = PE = 2, \angle OCB = \angle PEC$.

$\therefore \triangle OBC \cong \triangle PEC$.

$$\therefore OC=PC.$$

(或证 $\text{Rt}\triangle OAP \cong \triangle OBP$, 再得到 $OC=PC$ 也可)

设 $OC=PC=x$,

则有 $OE=AP=4$, $CE=OE-OC=4-x$,

在 $\text{Rt}\triangle PCE$ 中, $\therefore PC^2=CE^2+PE^2$,

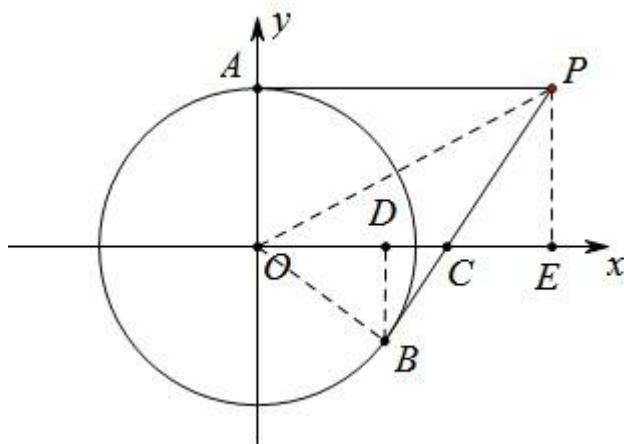
$$\therefore x^2=(4-x)^2+2^2, \text{ 解得 } x=\frac{5}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore BC=CE=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot BC = \frac{1}{2}OC \cdot BD, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times BD, \therefore BD = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{4 - \frac{36}{25}} = \frac{8}{5},$$

由点 B 在第四象限可知 $B\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$;



解法二: 连接 OP , OB , 作 $PE \perp x$ 轴于点 E , $BD \perp y$ 轴于点 D ,

$\therefore PB$ 切 $\odot O$ 于点 B , [来源:学_科_网]

$\therefore \angle OBP=90^\circ$ 即 $\angle OBP=\angle PEC$.

又 $\therefore OB=PE=2$, $\angle OCB=\angle PEC$,

$\therefore \triangle OBC \cong \triangle PEC$.

$\therefore OC=PC$ (或证 $\text{Rt}\triangle OAP \cong \triangle OBP$, 再得到 $OC=PC$ 也可)

设 $OC=PC=x$,

则有 $OE=AP=4$, $CE=OE-OC=4-x$,

在 $\text{Rt}\triangle PCE$ 中, $\therefore PC^2=CE^2+PE^2$,

$$\therefore x^2=(4-x)^2+2^2, \text{ 解得 } x=\frac{5}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore BC=CE=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2},$$

$\therefore BD \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle COB=\angle OBD$,

又 $\therefore \angle OBC=\angle BDO=90^\circ$,

$$\therefore \triangle OBC \sim \triangle BDO, \therefore \frac{OB}{BD} = \frac{CB}{OD} = \frac{OC}{BO},$$

$$\text{即 } \frac{2}{BD} = \frac{\frac{3}{2}}{BD} = \frac{\frac{5}{2}}{2}.$$

$$\therefore BD = \frac{8}{5}, OD = \frac{6}{5}.$$

由点 B 在第四象限可知 $B\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$;

(3) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{由 } A(0, 2), B\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right), \text{ 可得 } \begin{cases} b=2, \\ \frac{8}{5}k+b=-\frac{6}{5}; \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b=2, \\ k=-2, \end{cases} \therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y=-2x+2.$$

【考点解剖】 本题考查了切线的判定、全等、相似、勾股定理、等面积法求边长、点的坐标、待定系数法求函数解析式等.

【解题思路】 (1) 点 A 在圆上, 要证 PA 是圆的切线, 只要证 $PA \perp OA$ ($\angle OAP=90^\circ$) 即可, 由 A, P 两点纵坐标相等可得 $AP \parallel x$ 轴, 所以有 $\angle OAP + \angle AOC = 180^\circ$ 得 $\angle OAP=90^\circ$;

(2) 要求点 B 的坐标, 根据坐标的意义, 就是要求出点 B 到 x 轴、 y 轴的距离, 自然想到构造 $Rt\triangle OBD$, 由 PB 又是 $\odot O$ 的切线, 得 $Rt\triangle OAP \cong \triangle OBP$, 从而得 $\triangle OPC$ 为等腰三角形, 在 $Rt\triangle PCE$ 中, $PE=OA=2, PC+CE=OE=4$, 列出关于 CE 的方程可求出 CE, OC 的长, $\triangle OBC$ 的三边的长知道了, 就可求出高 BD , 再求 OD 即可求得点 B 的坐标; (3) 已知点 A 、点 B 的坐标用待定系数法可求出直线 AB 的解析式.

【解答过程】 略.

【方法规律】 从整体把握图形, 找全等、相似、等腰三角形; 求线段的长要从局部入手, 若是直角三角形则用勾股定理, 若是相似则用比例式求, 要掌握一些求线段长的常用思路和方法.

【关键词】 切线 点的坐标 待定系数法求解析式

七、(本大题共 2 小题, 第 23 题 10 分, 第 24 题 12 分, 共 22 分)

23. 某数学活动小组在作三角形的拓展图形, 研究其性质时, 经历了如下过程:

●操作发现:

在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 分别以 AB 和 AC 为斜边, 向 $\triangle ABC$ 的外侧作等腰直角三角形, 如图 1 所示, 其中 $DF \perp AB$ 于点 F , $EG \perp AC$ 于点 G , M 是 BC 的中点, 连接 MD 和 ME , 则下列结论正确的是_____ (填序号即可)

$$\textcircled{1} AF=AG=\frac{1}{2}AB; \textcircled{2} MD=ME; \textcircled{3} \text{整个图形是轴对称图形}; \textcircled{4} \angle DAB=\angle DMB.$$

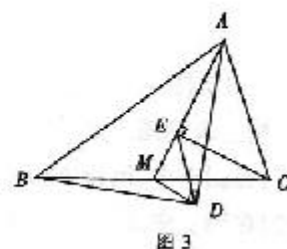
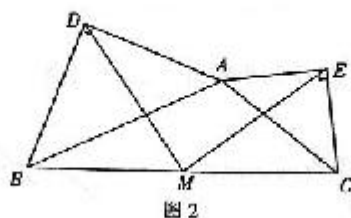
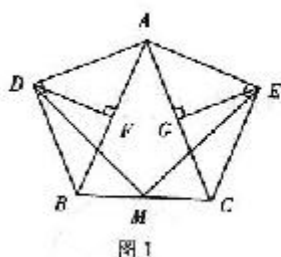
●数学思考:

在任意 $\triangle ABC$ 中, 分别以 AB 和 AC 为斜边, 向 $\triangle ABC$ 的外侧作等腰直角三角形, 如图 2 所示, M 是 BC 的中点, 连接 MD 和 ME , 则 MD 和 ME 具有怎样的数量和位置关系? 请给出证明过程;

●类比探索:

在任意 $\triangle ABC$ 中，仍分别以 AB 和 AC 为斜边，向 $\triangle ABC$ 的内侧作等腰直角三角形，如图3所示， M 是 BC 的中点，连接 MD 和 ME ，试判断 $\triangle MED$ 的形状。

答：_____。



【答案】解：

●操作发现：①②③④

●数学思考：

答： $MD=ME$ ， $MD \perp ME$ ，

1、 $MD=ME$ ；

如图2，分别取 AB ， AC 的中点 F ， G ，连接 DF ， MF ， MG ， EG ，

$\because M$ 是 BC 的中点，

$$\therefore MF \parallel AC, MF = \frac{1}{2}AC.$$

又 $\because EG$ 是等腰 $\text{Rt}\triangle AEC$ 斜边上的中线，

$$\therefore EG \perp AC \text{ 且 } EG = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore MF = EG.$$

同理可证 $DF = MG$ 。

$$\therefore MF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle MFA + \angle BAC = 180^\circ.$$

同理可得 $\angle MGA + \angle BAC = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle MFA = \angle MGA.$$

$$\text{又} \because EG \perp AC, \therefore \angle EGA = 90^\circ.$$

$$\text{同理可得} \angle DFA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MFA + \angle DFA = \angle MGA = \angle EGA,$$

$$\text{即} \angle DFM = \angle MEG, \text{又} MF = EG, DF = MG,$$

$$\therefore \triangle DFM \cong \triangle MGE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore MD = ME.$$

2、 $MD \perp ME$ ；

证法一： $\because MG \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle MFA + \angle FMG = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \triangle DFM \cong \triangle MGE, \therefore \angle MEG = \angle MDF.$$

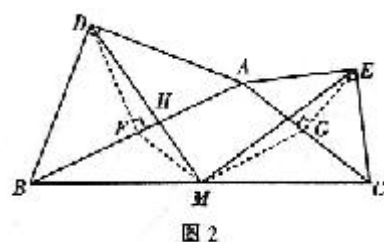
$$\therefore \angle MFA + \angle FMD + \angle DME + \angle MDF = 180^\circ,$$

$$\text{其中} \angle MFA + \angle FMD + \angle MDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DME = 90^\circ.$$

即 $MD \perp ME$ ；

证法二：如图2， MD 与 AB 交于点 H ，



$\therefore AB \parallel MG$,
 $\therefore \angle DHA = \angle DMG$,
 又 $\therefore \angle DHA = \angle FDM + \angle DFH$,
 即 $\angle DHA = \angle FDM + 90^\circ$,
 $\therefore \angle DMG = \angle DME + \angle GME$,
 $\therefore \angle DME = 90^\circ$
 即 $MD \perp ME$;

● 类比探究

答：等腰直角三解形

【考点解剖】 本题考查了轴对称、三角形中位线、平行四边形、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、全等、角的转化等知识，能力要求很高。

【解题思路】 (1) 由图形的对称性易知①、②、③都正确，④ $\angle DAB = \angle DMB = 45^\circ$ 也正确；(2) 直觉告诉我们 MD 和 ME 是垂直且相等的关系，一般由全等证线段相等，受图 1 $\triangle DFM \cong \triangle MGE$ 的启发，应想到取中点构造全等来证 $MD = ME$ ，证 $MD \perp ME$ 就是要证 $\angle DME = 90^\circ$ ，由 $\triangle DFM \cong \triangle MGE$ 得 $\angle EMG = \angle MDF$ ， $\triangle DFM$ 中四个角相加为 180° ， $\angle FMG$ 可看成三个角的和，通过变形计算可得 $\angle DME = 90^\circ$ 。(3) 只要结论，不要过程，在 (2) 的基础易知为等腰直角三解形。

【解答过程】 略。

【方法规律】 由特殊到一般，形变但本质不变（仍然全等）

【关键词】 课题学习 全等 开放探究

24. 已知抛物线 $y_n = -(x - a_n)^2 + a_n$ (n 为正整数，且 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$) 与 x 轴的交点为 $A_{n-1}(b_{n-1}, 0)$ 和 $A_n(b_n, 0)$ ，当 $n=1$ 时，第 1 条抛物线 $y_1 = -(x - a_1)^2 + a_1$ 与 x 轴的交点为 $A_0(0, 0)$ 和 $A_1(b_1, 0)$ ，其他依此类推。

(1) 求 a_1, b_1 的值及抛物线 y_2 的解析式；

(2) 抛物线 y_3 的顶点坐标为 (_____, _____)；

依此类推第 n 条抛物线 y_n 的顶点坐标为 (_____, _____)；

所有抛物线的顶点坐标满足的函数关系是_____；

(3) 探究下列结论：

①若用 $A_{n-1}A_n$ 表示第 n 条抛物线被 x 轴截得得线段长，直接写出 A_0A_1 的值，并求出 $A_{n-1}A_n$ ；

②是否存在经过点 $A(2, 0)$ 的直线和所有抛物线都相交，且被每一条抛物线截得得线段的长度都相等？若存在，直接写出直线的表达式；若不存在，请说明理由。

【答案】 解：(1) $\because y_1 = -(x - a_1)^2 + a_1$ 与 x 轴交于点 $A_0(0, 0)$ ，

$\therefore -a_1^2 + a_1 = 0$ ， $\therefore a_1 = 0$ 或 1 。

由已知可知 $a_1 > 0$ ，

$\therefore a_1 = 1$ 。

即 $y_1 = -(x - 1)^2 + 1$

方法一：令 $y_1 = 0$ 代入得： $-(x - 1)^2 + 1 = 0$ ，

$\therefore x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ ，

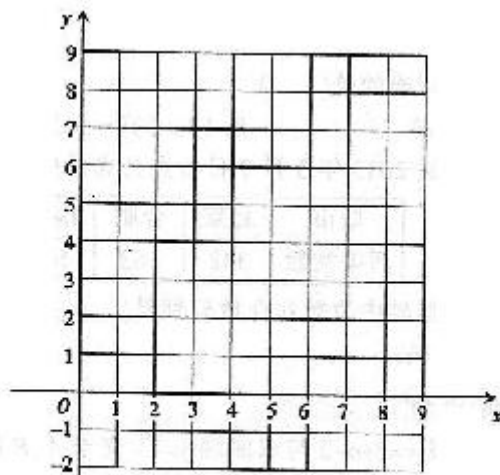
$\therefore y_1$ 与 x 轴交于 $A_0(0, 0)$ ， $A_1(2, 0)$

$\therefore b_1 = 2$ ，

方法二： $\because y_1 = -(x - a_1)^2 + a_1$ 与 x 轴交于点 $A_0(0, 0)$ ，

$\therefore -(b_1 - 1)^2 + 1 = 0$ ， $b_1 = 2$ 或 0 ， $b_1 = 0$ (舍去)。

$\therefore b_1 = 2$ 。



(仅供草稿使用)

又 $\because$ 抛物线 $y_2 = -(x-a_2)^2 + a_2$ 与 x 轴交于点 $A_1 (2, 0)$,

$$\therefore -(2-a_2)^2 + a_2 = 0,$$

$\therefore a_2 = 1$ 或 4 , $\because a_2 > a_1$, $\therefore a_2 = 1$ (舍去).

$\therefore$ 取 $a_2 = 4$, 抛物线 $y_2 = -(x-4)^2 + 4$.

(2) $(9, 9)$;

$$(n^2, n^2)$$

$$y=x.$$

详解如下:

$\because$ 抛物线 $y_2 = -(x-4)^2 + 4$ 令 $y_2 = 0$ 代入得: $-(x-4)^2 + 4 = 0$,

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = 6.$$

$\therefore y_2$ 与 x 轴交于点 $A_1 (2, 0)$, $A_2 (6, 0)$.

又 $\because$ 抛物线 $y_3 = -(x-a_3)^2 + a_3$ 与 x 轴交于 $A_2 (6, 0)$,

$$\therefore -(6-a_3)^2 + a_3 = 0$$

$\therefore a_3 = 4$ 或 9 , $\because a_3 > a_2$, $\therefore a_3 = 4$ (舍去),

即 $a_3 = 9$, $\therefore$ 抛物线 y_3 的顶点坐标为 $(9, 9)$.

由抛物线 y_1 的顶点坐标为 $(1, 1)$, y_2 的顶点坐标为 $(4, 4)$, y_3 的顶点坐标为 $(9, 9)$,
依次类推抛物线 y_n 的顶点坐标为 (n^2, n^2) .

$\therefore$ 所有抛物线的顶点的横坐标等于纵坐标,

$\therefore$ 顶点坐标满足的函数关系式是: $y = x$;

③ $\because A_0 (0, 0)$, $A_1 (2, 0)$,

$$\therefore A_0 A_1 = 2.$$

又 $\because y_n = -(x-n^2)^2 + n^2$,

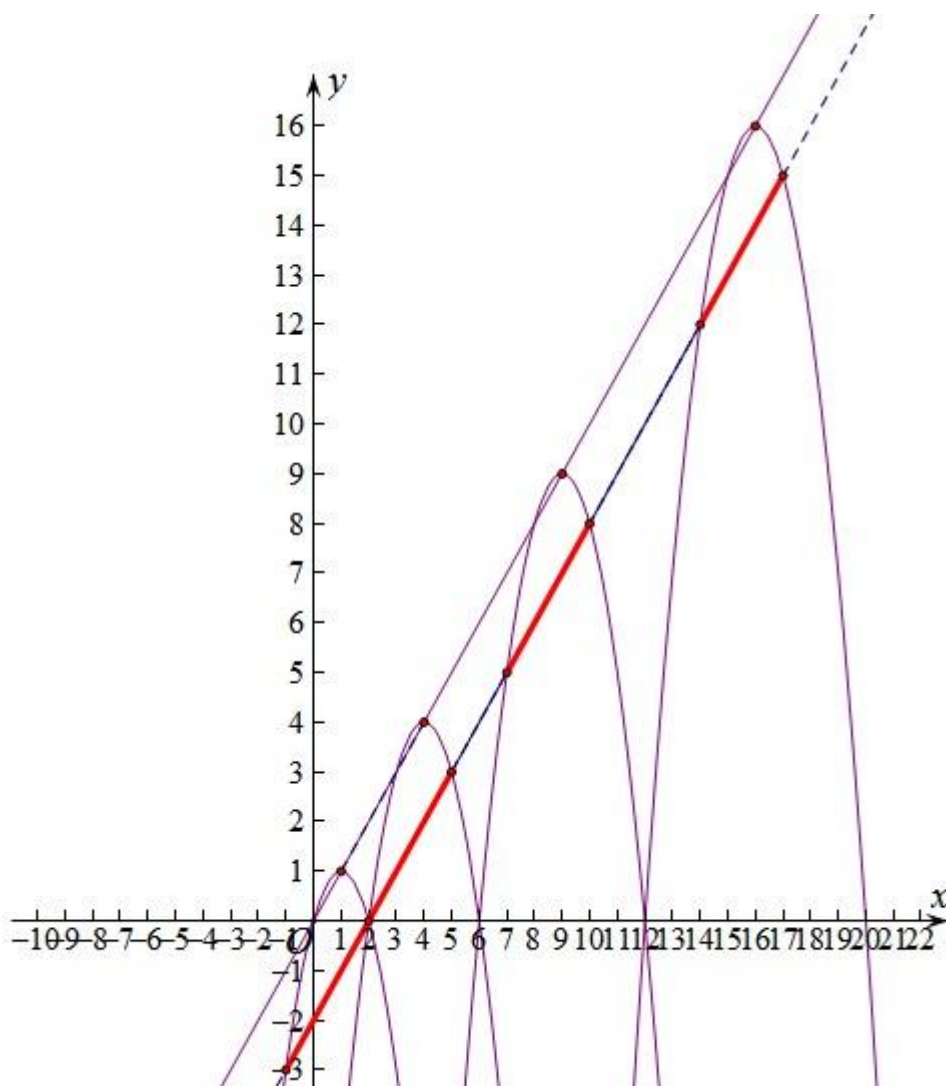
令 $y_n = 0$,

$$\therefore -(x-n^2)^2 + n^2 = 0,$$

即 $x_1 = n^2 + n$, $x_2 = n^2 - n$,

$\therefore A_{n-1}(n^2 - n, 0)$, $A_n(n^2 + n, 0)$, 即 $A_{n-1} A_n = (n^2 + n) - (n^2 - n) = 2n$.

④ 存在. 是平行于直线 $y = x$ 且过 $A_1 (2, 0)$ 的直线, 其表达式为 $y = x - 2$.



【考点解剖】 本题考查了二次函数的一般知识，求字母系数、解析式、顶点坐标；字母表示数（符号意识），数形结合思想，规律探究，合情推理，解题方法的灵活性等等，更重要的是一种胆识和魄力，敢不敢动手，会不会从简单，从特殊值入手去探究一般规律，画一画图帮助思考，所有这些都是做学问所必需的品质和素养，也是新课程改革所倡导的精神和最高境界。

【解题思路】 (1) 将 A_0 坐标代入 y_1 的解析式可求得 a_1 的值； a_1 的值知道了 y_1 的解析式也就确定了，已知抛物线就可求出 b_1 的值，又把 $(b_1, 0)$ 代入 y_2 ，可求出 a_2 ，即得 y_2 的解析式；(2) 用同样的方法可求得 a_3 、 a_4 、 a_5 ……由此得到规律 $a_n = n^2$ ，所以顶点坐

标满足的函数关系式是： $y=x$ ；(3) 由 (2) 可知 $A_0A_1 = 2, A_1A_2 = 4, A_2A_3 = 6$ 得 $A_{n-1}A_n = 2n$ ；

最后一问我们会猜测这是与直线 $y=x$ 平行且过 $A(2, 0)$ 的一条直线，用特殊值法取

$$\begin{cases} y = -(x-4)^2 + 4, \\ y = x-2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 3 \end{cases}, \text{ 得所截得的线段长度为 } 3\sqrt{2}, \text{ 换一组抛物线}$$

试试，求出的值也为 $3\sqrt{2}$ （当然用字母来运算就是解 $\begin{cases} y = -(x-n^2)^2 + n^2, \\ y = x - 2 \end{cases}$ ，得

$\begin{cases} x_1 = n^2 + 1, \\ y_1 = n^2 - 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_2 = n^2 - 2, \\ y_2 = n^2 - 4 \end{cases}$ ，求得所截得的线段长度也为 $3\sqrt{2}$ ）。

【解答过程】 略.

【方法规律】 掌握基础（知识），灵活运用（方法），敢于动手，不畏艰难.

【关键词】 二次函数 抛物线 规律探究