

淮安市 2023 年中考数学试卷

(考试时间: 120 分钟 满分: 150 分)

第 I 卷 (选择题 共 24 分)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分, 在每小题给出的四个选项中, 恰有一项符合题目要求)

1. 下列实数中, 属于无理数的是 ()

- A. -2 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 无理数是指无限不循环小数, 根据定义逐个判断即可.

【详解】 解: -2 、 0 、 5 是有理数, $\sqrt{2}$ 是无理数.

故选: C.

【点睛】 本题考查了对无理数定义的应用, 能理解无理数的定义是解此题的关键.

2. 剪纸是中国优秀的传统文化. 下列剪纸图案中, 是轴对称图形的是 ().



【答案】 B

【解析】

【分析】 根据轴对称图形的概念逐项分析判断即可, 轴对称图形的概念: 平面内, 一个图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够完全重合的图形.

【详解】 解: 选项 A、C、D 均不能找到这样的一条直线, 使直线两旁的部分能够完全重合的图形, 所以不是轴对称图形;

选项 B 能找到这样的一条直线, 使直线两旁的部分能够完全重合的图形, 所以是轴对称图形;

故选: B.

【点睛】 本题考查了轴对称图形的概念, 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合.

3. 健康成年人的心脏每分钟流过的血液约 4900mL. 数据 4900 用科学记数法表示为 ().

- A. 0.49×10^4 B. 4.9×10^4 C. 4.9×10^3 D. 49×10^2

【答案】C

【解析】

【分析】将 4900 写成 $a \times 10^n$ 的形式即可, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为正整数.

【详解】解: 4900 的小数点向左移动 3 位得 4.9,

因此 $4900 = 4.9 \times 10^3$,

故选 C.

【点睛】本题考查科学记数法, 解题的关键是确定 $a \times 10^n$ 中 a 和 n 的值.

4. 下列计算正确的是 ().

- A. $2a - a = 2$ B. $(a^2)^3 = a^5$ C. $a^3 \div a = a^3$ D. $a^2 \cdot a^4 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项, 幂的乘方, 同底数幂的乘除法, 逐一进行计算后判断即可.

【详解】解: A、 $2a - a = a$, 故 A 错误;

B、 $(a^2)^3 = a^6$, 故 B 错误;

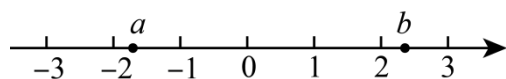
C、 $a^3 \div a = a^2$, 故 C 错误;

D、 $a^2 \cdot a^4 = a^6$, 故 D 正确;

故选 D.

【点睛】本题考查合并同类项, 幂的乘方, 同底数幂的乘除, 熟练掌握相关运算法则, 是解题的关键.

5. 实数 a 、 b 在数轴上的对应点的位置如图所示, 下列结论正确的是 ().



- A. $a < -2$ B. $b < 2$ C. $a > b$ D. $-a < b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据实数在数轴上的位置, 判断实数的大小关系, 即可得出结论.

【详解】解: 由图可知, $-2 < a < 0 < 2 < b < 3$, $|a| = -a < 2 < b$,

A、 $a < -2$, 错误;

B、 $b < 2$ ，错误；

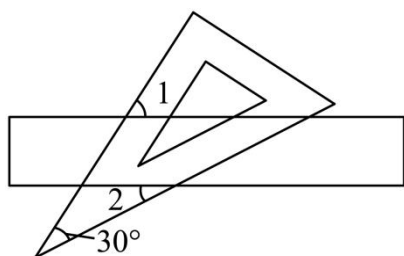
C、 $a > b$ ，错误；

D、 $-a < b$ ，正确；

故选 D.

【点睛】本题考查利用数轴比较实数的大小关系. 正确的识图，掌握数轴上的数从左到右依次增大，是解题的关键.

6. 将直角三角板和直尺按照如图位置摆放，若 $\angle 1 = 56^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ().



A. 26°

B. 30°

C. 36°

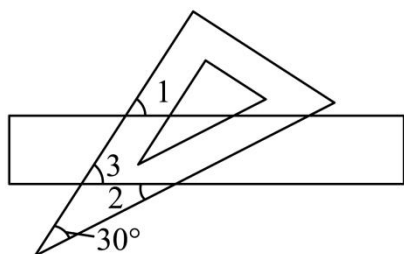
D. 56°

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle 3 = \angle 1 = 56^\circ$ ，进而根据三角形的外角的性质，即可求解.

【详解】解：如图所示，



$\because$ 直尺的两边平行，

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 56^\circ$ ，

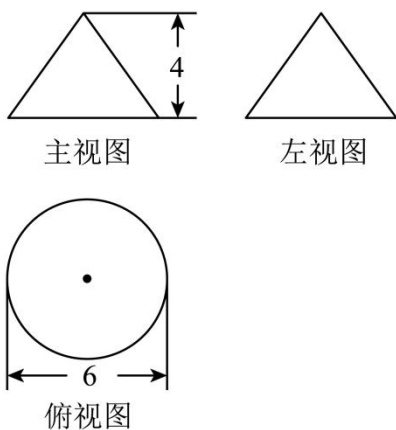
又 $\because \angle 3 = 30^\circ + \angle 2$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 3 - 30^\circ = 56^\circ - 30^\circ = 26^\circ$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形的外角的性质，熟练掌握三角形的外角的性质是解题的关键.

7. 如图是一个几何体的三视图，则该几何体的侧面积是 ().



A. 12π

B. 15π

C. 18π

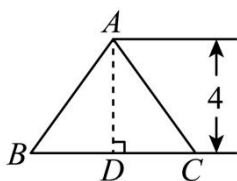
D. 24π

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得这个几何体为圆锥，然后求出圆锥的母线长为5，再根据圆锥的侧面（扇形）面积公式，即可求解.

【详解】解：根据题意得：这个几何体为圆锥，
如图，过点A作 $AD \perp BC$ 于点D，



根据题意得： $AB = AC$ ， $AD = 4$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5,$$

即圆锥的母线长为5，

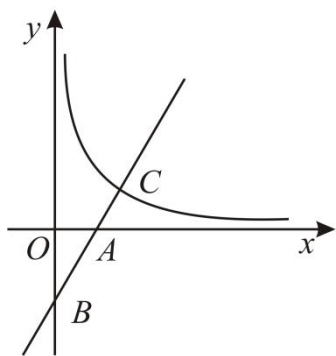
$$\therefore \text{这个几何体的侧面积是 } \frac{1}{2}\pi \times 6 \times 5 = 15\pi.$$

故选：B

【点睛】本题主要考查了简单几何体的三视图，求圆锥的侧面积，根据题意得到这个几何体为圆锥是解题的关键.

8. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = \sqrt{3}x + b$ 的图象分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点，且与反比例

函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 C . 若点 A 坐标为 $(2, 0)$, $\frac{CA}{AB} = \frac{1}{2}$, 则 k 的值是 ().



A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

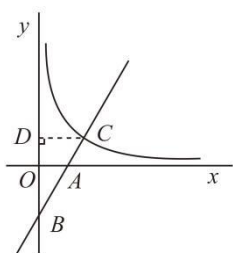
D. $4\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，则 $CD \parallel OA$ ，可得 $\triangle BOA \sim \triangle BDC$ ，进而根据已知条件的 $CD = 3$ ，求得直线 AB 的解析式，将 $x = 3$ 代入，得出点 C 的坐标，代入反比例函数解析式，即可求解。

【详解】解：如图所示，过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，则 $CD \parallel OA$



$$\therefore \triangle BOA \sim \triangle BDC$$

$$\therefore \frac{CD}{AO} = \frac{BC}{BA}$$

$$\therefore \frac{CA}{AB} = \frac{1}{2}, A(2, 0)$$

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{CD}{2} = \frac{3}{2}$$

解得： $CD = 3$

$$\therefore \text{点 } A(2, 0) \text{ 在 } y = \sqrt{3}x + b \text{ 上,}$$

$$\therefore 2\sqrt{3} + b = 0$$

解得： $b = -2\sqrt{3}$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

当 $x = 3$ 时， $y = \sqrt{3}$

即 $C(3, \sqrt{3})$

又反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象交于点 C

$$\therefore k = 3\sqrt{3},$$

故选: C.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质, 待定系数法求一次函数解析式, 相似三角形的性质与判定, 求得点 C 的坐标是解题的关键.

第 II 卷 (非选择 题共 126 分)

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

9. 若式子 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 5$

【解析】

【分析】先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式, 求出 x 的取值范围即可.

【详解】 $\because \sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore x-5 \geq 0, \text{ 解得 } x \geq 5.$$

故答案为: $x \geq 5$

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件, 二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义的条件是被开方数 $a \geq 0$, 同时也考查了解一元一次不等式.

10. 方程 $\frac{x-1}{2x+1} = 1$ 的解是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】将分式方程转化为整式方程, 求解即可.

【详解】解: 由 $\frac{x-1}{2x+1} = 1$ 可得: $x-1 = 2x+1$

$$\text{解得 } x = -2$$

经检验 $x = -2$ 是原分式方程的解,

故答案为: $x = -2$

【点睛】此题考查了分式方程的求解, 解题的关键是掌握分式方程的求解方法.

11. 若等腰三角形的周长是 20cm, 一腰长为 7cm, 则这个三角形的底边长是_____ cm.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的性质求解即可.

【详解】 解: 三角形的底边长为 $20 - 7 \times 2 = 6\text{cm}$

故答案为: 6

【点睛】 此题考查了等腰三角形的性质, 解题的关键是掌握等腰三角形腰长相等.

12. 若 $a + 2b - 1 = 0$, 则 $3a + 6b$ 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据已知得到 $a + 2b = 1$, 再代值求解即可.

【详解】 解: $\because a + 2b - 1 = 0$,

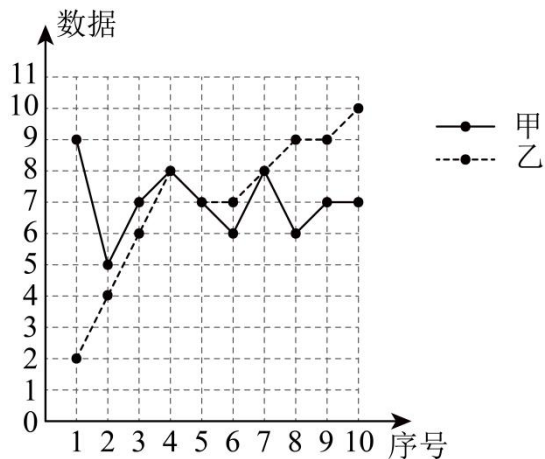
$$\therefore a + 2b = 1,$$

$$\therefore 3a + 6b = 3(a + 2b) = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查代数式求值, 利用整体思想求解是解答的关键.

13. 将甲、乙两组各 10 个数据绘制成折线统计图(如图), 两组数据的平均数都是 7, 设甲、乙两组数据的方差分别为 $s_{\text{甲}}^2$ 、 $s_{\text{乙}}^2$, 则 $s_{\text{甲}}^2$ _____ $s_{\text{乙}}^2$ (填 “>” “=” 或 “<”).



【答案】 <

【解析】

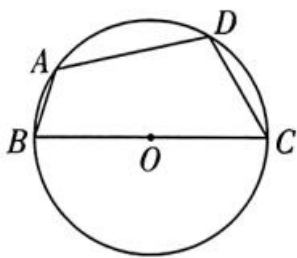
【分析】 根据折线统计图可得甲的数据波动较小, 进而根据方差的意义即可求解.

【详解】 解: 由折线统计图可得, 甲的数据波动较小, 则 $s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$,

故答案为: <.

【点睛】本题考查了折线统计图，方差的意义，理解数据波动小的方差小是解题的关键.

14. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， BC 是 $\odot O$ 的直径， $BC = 2CD$ ，则 $\angle BAD$ 的度数是 _____ $^{\circ}$.

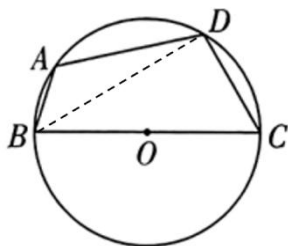


【答案】 120

【解析】

【分析】解：如图，连接 BD ，由 BC 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\angle BDC = 90^{\circ}$ ，由 $BC = 2CD$ ，可得 $\angle CBD = 30^{\circ}$ ， $\angle C = 60^{\circ}$ ，根据 $\angle BAD = 180^{\circ} - \angle C$ ，计算求解即可.

【详解】解：如图，连接 BD ，



$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BDC = 90^{\circ}$,

$\because BC = 2CD$,

$\therefore \angle CBD = 30^{\circ}$,

$\therefore \angle C = 60^{\circ}$,

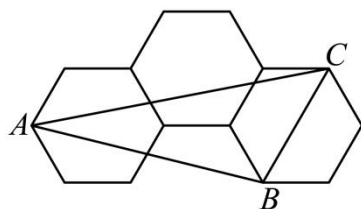
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle BAD = 180^{\circ} - \angle C = 120^{\circ}$,

故答案为：120.

【点睛】本题考查了直径所对的圆周角为直角，含 30° 的直角三角形，圆内接四边形的性质. 解题的关键在于明确角度之间的数量关系.

15. 如图，3 个大小完全相同的正六边形无缝隙、不重叠的拼在一起，连接正六边形的三个顶点得到 $\triangle ABC$ ，则 $\tan \angle ACB$ 的值是_____.

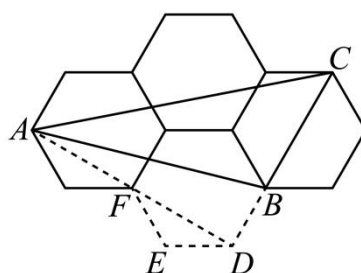


【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

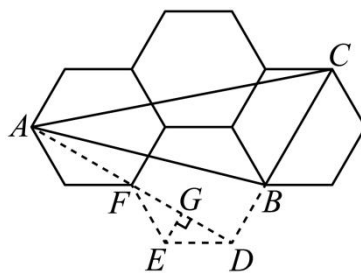
【分析】 如图所示，补充一个与已知相同的正六边形，根据正六边形的内角为 120° ，设正六边形的边长为 1，求得 CD, AD ，根据正切的定义，即可求解.

【详解】 解： 如图所示，补充一个与已知相同的正六边形，



$\because$ 正六边形对边互相平行，且内角为 120° ，

$$\therefore \angle EDF = 30^\circ, \angle ADB = 90^\circ$$



过点 E 作 $EG \perp FD$ 于 G ，

$$\therefore FD = 2FG = 2EF \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

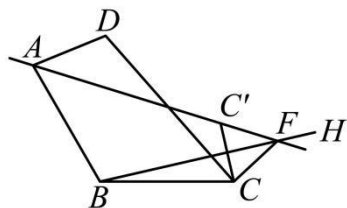
设正六边形的边长为 1，则 $CD = 3$ ， $AD = 2FD = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AD}{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题考查了正六边形的性质，解直角三角形，熟练掌握正六边形的性质是解题的关键.

16. 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2, \angle ABC = 120^\circ$, BH 为 $\angle ABC$ 内部的任一条射线 ($\angle CBH$ 不等于 60°), 点 C 关于 BH 的对称点为 C' , 直线 AC' 与 BH 交于点 F , 连接 CC' 、 CF , 则 $\triangle CC'F$ 面积的最大值是_____.

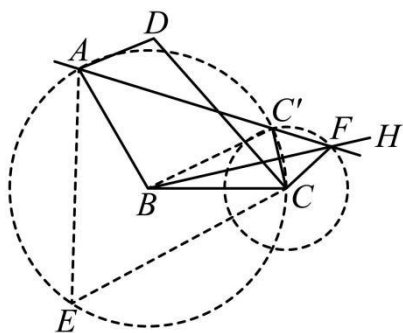


【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 BC' , 根据轴对称的性质可得 $CB = C'B, CF = C'F$, 进而可得 A, C, C' 在半径为 2 的 $\odot B$ 上, 证明 $\triangle CC'F$ 是等边三角形, 当 CC' 取得最大值时, $\triangle CC'F$ 面积最大, 根据圆的直径最大, 进而得出 CC' 最大值为 4, 即可求解.

【详解】解: 如图所示, 连接 BC' ,



$\because$ 点 C 关于 BH 的对称点为 C' ,

$\therefore CB = C'B, CF = C'F$,

$\because AB = BC = 2$,

$\therefore A, C, C'$ 在半径为 2 的 $\odot B$ 上,

在优弧 $\widehat{AC}$ 上任取一点 E , 连接 AE, EC ,

则 $\angle AEC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$,

$\because \angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore \angle AC'C = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore \angle CC'F = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CC'F$ 是等边三角形,

当 CC' 取得最大值时, $\triangle CC'F$ 面积最大,

$\because C'$ 在 $\odot B$ 上运动, 则 CC' 最大值为 4,

则 $\triangle CC'F$ 面积的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$.

故答案为: $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了轴对称的性质, 圆周角定理, 圆内接四边形对角互补, 等边三角形的性质, 得出 CC' 最大值为 4 是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 102 分, 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (1) 计算: $|-2| + (1 + \sqrt{3})^0 - \sqrt{9}$;

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x+1 > 3(x-1), \\ x + \frac{x-1}{3} < 1. \end{cases}$$

【答案】(1) 0; (2) $x < 1$

【解析】

【分析】(1) 根据化简绝对值, 零指数幂, 求一个数的算术平方根, 进行计算即可求解;

(2) 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】解: (1) $|-2| + (1 + \sqrt{3})^0 - \sqrt{9}$
 $= 2 + 1 - 3$
 $= 0$;

(2)
$$\begin{cases} 2x+1 > 3(x-1) \text{ ①} \\ x + \frac{x-1}{3} < 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①得: $x < 4$,

解不等式②得: $x < 1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为: $x < 1$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算, 零指数幂, 解一元一次不等式组, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

18. 先化简, 再求值: $\frac{a}{a^2 - 2a + 1} \div \left(1 + \frac{1}{a-1}\right)$, 其中 $a = \sqrt{5} + 1$.

【答案】 $\frac{1}{a-1}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 先将括号内式子通分，变分式除法为乘法，约分化简，再将 $a = \sqrt{5} + 1$ 代入求值.

【详解】 解: $\frac{a}{a^2 - 2a + 1} \div \left(1 + \frac{1}{a-1}\right)$

$$= \frac{a}{(a-1)^2} \div \frac{a}{a-1}$$

$$= \frac{a}{(a-1)^2} \cdot \frac{a-1}{a}$$

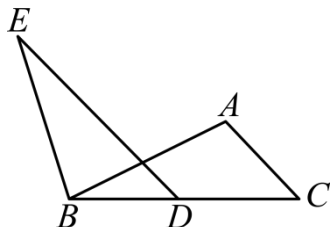
$$= \frac{1}{a-1},$$

将 $a = \sqrt{5} + 1$ 代入，得:

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1 - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题考查分式的化简求值，分母有理化，解题的关键是掌握分式的运算法则.

19. 已知: 如图, 点 D 为线段 BC 上一点, $BD = AC$, $\angle E = \angle ABC$, $DE \parallel AC$. 求证: $DE = BC$.



【答案】 证明见详解;

【解析】

【分析】 根据 $DE \parallel AC$ 得到 $\angle EDB = \angle C$, 结合 $BD = AC$, $\angle E = \angle ABC$, 即可得到 $\triangle BED \cong \triangle ABC$ 即可得到证明.

【详解】 证明: $\because DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle EDB = \angle C,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle EDB = \angle C \\ \angle E = \angle ABC, \\ BD = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle ABC (\text{AAS}),$$

$\therefore DE = BC$.

【点睛】 本题考查三角形全等的判定与性质，解题的关键是根据平行线得到三角形全等判定的条件.

20. 小华、小玲一起到淮安西游乐园游玩，他们决定在三个热门项目（ A ：智取芭蕉扇、 B ：三打白骨精、 C ：盘丝洞）中各自随机选择一个项目游玩.

- (1) 小华选择 C 项目的概率是_____;
- (2) 用画树状图或列表等方法求小华、小玲选择不同游玩项目的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

- 【分析】 (1) 直接由概率公式求解即可;
- (2) 列表法求概率即可求解.

【小问 1 详解】

解：共有三个热门项目，小华选择 C 项目的概率是 $\frac{1}{3}$;

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【小问 2 详解】

解：列表法如图,

小华 \ 小丽	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BC	BB	BC
C	CA	CB	CC

共有 9 种等可能结果，其中小华、小玲选择不同游玩项目，有 6 种，

$\therefore$ 小华、小玲选择不同游玩项目的概率 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查的是根据概率公式求概率，用树状图法求概率. 树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验. 用到的知识点为： 概率=所求情况数与总情况数之比.

21. 为了调动员工的积极性，商场家电部经理决定确定一个适当的月销售目标，对完成目标的员工进行奖励. 家电部对 20 名员工当月的销售额进行统计和分析.

数据收集 (单位: 万元):

5.0 9.9 6.0 5.2 8.2 6.2 7.6 9.4 8.2 7.8

5.1 7.5 6.1 6.3 6.7 7.9 8.2 8.5 9.2 9.8

数据整理:

销售额/万元	$5 \leq x < 6$	$6 \leq x < 7$	$7 \leq x < 8$	$8 \leq x < 9$	$9 \leq x < 10$
频数	3	5	a	4	4

数据分析:

平均数	众数	中位数
7.44	8.	b

问题解决:

(1) 填空: $a =$ _____, $b =$ _____.

(2) 若将月销售额不低于 7 万元确定为销售目标, 则有 _____ 名员工获得奖励.

(3) 经理对数据分析以后, 最终对一半的员工进行了奖励. 员工甲找到经理说: “我这个月的销售额是 7.5 万元, 比平均数 7.44 万元高, 所以我的销售额超过一半员工, 为什么我没拿到奖励?” 假如你是经理, 请你给出合理解释.

【答案】 (1) 4, 7.7

(2) 12 (3) 7.5 万元小于中位数 7.7 万元, 有一半多的员工销售额比 7.5 万元高, 故员工甲没拿到奖励

【解析】

【分析】 (1) 根据所给数据及中位数的定义求解;

(2) 根据频数分布表求解;

(3) 利用中位数进行决策.

【小问 1 详解】

解: 该组数据中有 4 个数在 7 与 8 之间, 故 $a = 4$,

将 20 个数据按从小到大顺序排列, 第 10 位和第 11 位分别是 7.6, 7.8, 故中位数 $b = \frac{7.6+7.8}{2} = 7.7$,

故答案为: 4, 7.7;

【小问 2 详解】

解: 月销售额不低于 7 万元的有: $4 + 4 + 4 = 12$ (人),

故答案为：12；

【小问3详解】

解：7.5万元小于中位数7.7万元，有一半多的员工销售额比7.5万元高，故员工甲没拿到奖励.

【点睛】本题考查频数分布表，中位数，利用中位数做决策等，解题的关键是掌握中位数的求法及意义.

22. 为了便于劳动课程的开展，学校打算建一个矩形生态园 $ABCD$ （如图），生态园一面靠墙（墙足够长），另外三面用18m的篱笆围成. 生态园的面积能否为 40m^2 ？如果能，请求出 AB 的长；如果不能，请说明理由.



【答案】 AB 的长为8米或10米

【解析】

【分析】 设 $AB = x$ 米，则 $AD = BC = \frac{1}{2}(18 - x)$ 米，根据矩形生态园 $ABCD$ 面积为 40m^2 ，建立方程，解方程，即可求解.

【详解】 解： 设 $AB = x$ 米，则 $AD = BC = \frac{1}{2}(18 - x)$ 米，根据题意得，

$$\frac{1}{2}x(18 - x) = 40,$$

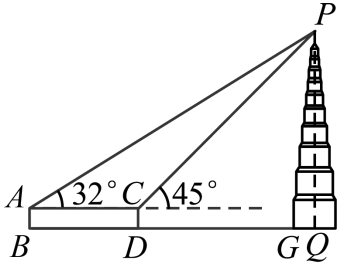
解得： $x_1 = 8, x_2 = 10$,

答： AB 的长为8米或10米.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

23. 根据以下材料，完成项目任务，

项目	测量古塔的高度及古塔底面圆的半径
测量工具	测角仪、皮尺等

测量	 说明：点 Q 为古塔底面圆圆心，测角仪高度 $AB = CD = 1.5\text{m}$，在 B, D 处分别测得古塔顶端的仰角为 $32^\circ, 45^\circ$, $BD = 9\text{m}$，测角仪 CD 所在位置与古塔底部边缘距离 $DG = 12.9\text{m}$．点 B, D, G, Q 在同一条直线上．
参 考 数据	$\sin 32^\circ \approx 0.530, \cos 32^\circ \approx 0.848, \tan 32^\circ \approx 0.625$
项目任务	
(1)	求出古塔的高度．
(2)	求出古塔底面圆的半径．

【答案】(1) 古塔的高度为 16.5m ；(2) 古塔底面圆的半径为 2.1m ．

【解析】

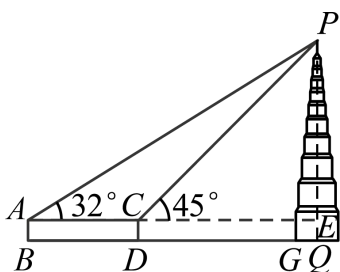
【分析】(1) 延长 AC 交 PQ 于点 E ，则四边形 $CDQE$ 是矩形，设 $PE = x\text{ m}$ ，则 $CE = x\text{ m}$ ，根据

$$\tan \angle PAE = \frac{PE}{AE} = \frac{x}{x+9} = \tan 32^\circ \approx 0.625, \text{ 解方程，即可求古塔的高度；}$$

(2) 根据 $DQ = CE = 15\text{ m}$ ， $DG = 12.9\text{m}$ ，即可求得古塔底面圆的半径．

【详解】解：(1) 如图所示，延长 AC 交 PQ 于点 E ，则四边形 $CDQE$ 是矩形，

$$\therefore QE = CD,$$



依题意， $\angle PCE = 45^\circ$ ， $\angle PAE = 32^\circ$ ， $AB = CD = QE = 1.5\text{m}$ ，

$$\text{设 } PE = x\text{ m}, \text{ 则 } CE = \frac{PE}{\tan \angle PCE} = x,$$

在 $\text{Rt}\triangle PAE$ 中, $\tan \angle PAE = \frac{PE}{AE} = \frac{x}{x+9} = \tan 32^\circ \approx 0.625$,

解得: $x = 15$,

$\therefore$ 古塔的高度为 $PE + QE = 15 + 1.5 = 16.5(\text{m})$.

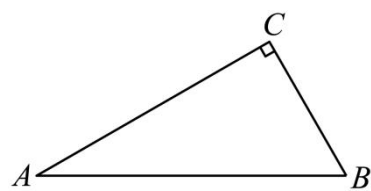
(2) $DQ = CE = 15 \text{ m}$, $DG = 12.9 \text{ m}$,

$\therefore GQ = 15 - 12.9 = 2.1(\text{m})$.

答: 古塔的高度为 16.5 m , 古塔底面圆的半径为 2.1 m .

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用—俯角仰角问题, 熟练掌握三角函数的定义是解题的关键.

24. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.



(1) 尺规作图: 作 $\odot O$, 使得圆心 O 在边 AB 上, $\odot O$ 过点 B 且与边 AC 相切于点 D (请保留作图痕迹, 标明相应的字母, 不写作法);

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4$, 求 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{16}{27}\pi + \frac{4\sqrt{3}}{9}$

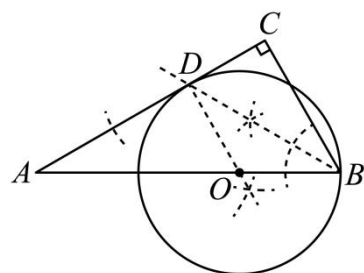
【解析】

【分析】 (1) 作 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D , 过点 D 作 $DO \perp AC$, 交 AB 于点 O , 以 O 为圆心, OB 为半径作 $\odot O$, 即可;

(2) 根据含 30° 度角的直角三角形的性质, 求得圆的半径, 设 $\odot O$ 交 BC 于点 E , 连接 OE , 可得 $\triangle OBE$ 是等边三角形, 进而根据 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积等于扇形面积与等边三角形的面积和, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, $\odot O$ 即为所求;



【小问 2 详解】

解: $\because \angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4$, OD 是 $\odot O$ 的切线,

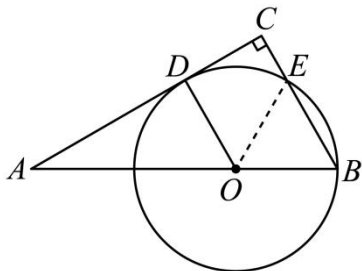
$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore DO = OB = \frac{1}{2}AO,$$

$$\text{则 } AO + OB = 3OB = 4,$$

$$\text{解得: } OB = \frac{4}{3},$$

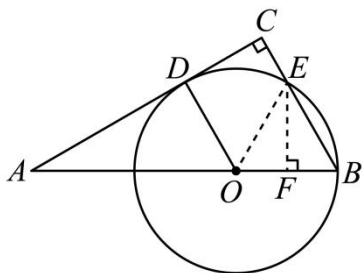
如图所示, 设 $\odot O$ 交 BC 于点 E , 连接 OE ,



$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, OB = OE,$$

$$\therefore \triangle OBE \text{ 是等边三角形,}$$

如图所示, 过点 E 作 $EF \perp BO$ 于点 F ,



$$\therefore \angle OEF = 30^\circ$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

$$\text{在 Rt}\triangle OEF \text{ 中, } EF = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OEB} = \frac{1}{2} \times OB \times EF = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

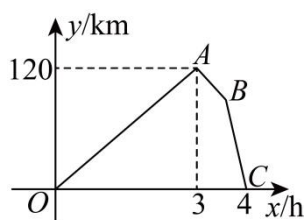
$$\therefore \angle BOE = 60^\circ, \text{ 则 } \angle AOE = 120^\circ,$$

$$\therefore \odot O \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 重叠部分的面积为 } \frac{120}{360} \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{27} \pi + \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

【点睛】 本题考查了基本作图, 切线的性质, 求扇形面积, 熟练掌握基本作图与切线的性质是解题的关键.

25. 快车和慢车同时从甲地出发, 以各自的速度匀速向乙地行驶, 快车到达乙地卸装货物用时 30min, 结束后, 立即按原路以另一速度匀速返回, 直至与慢车相遇, 已知慢车的速度为 70km/h. 两车之间的距离

$y(\text{km})$ 与慢车行驶的时间 $x(\text{h})$ 的函数图像如图所示.



- (1) 请解释图中点 A 的实际意义;
- (2) 求出图中线段 AB 所表示的函数表达式;
- (3) 两车相遇后, 如果快车以返回的速度继续向甲地行驶, 求到达甲地还需多长时间.

【答案】 (1) 快车到达乙地时, 慢车距离乙地还有 120km

(2) $y = -70x + 330$

(3) 2.8 小时

【解析】

【分析】 (1) 根据点 A 的纵坐标最大, 可得两车相距最远, 结合题意, 即可求解;

(2) 根据题意得出 $B(3.5, 85)$, 进而待定系数法求解析式, 即可求解;

(3) 先求得快车的速度进而得出总路程, 再求得快车返回的速度, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 根据函数图象, 可得点 A 的实际意义为: 快车到达乙地时, 慢车距离乙地还有 120km

【小问 2 详解】

解: 依题意, 快车到达乙地卸装货物用时 30min, 则点 B 的横坐标为 $3 + \frac{1}{2} = 3.5$,

此时慢车继续行驶 $\frac{1}{2}$ 小时, 则快车与慢车的距离为 $120 - 70 \times \frac{1}{2} = 120 - 35 = 85$,

$\therefore B(3.5, 85)$

设直线 AB 的表达式为 $y = kx + b$

$$\therefore \begin{cases} 85 = 3.5k + b \\ 120 = 3k + b \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} k = -70 \\ b = 330 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = -70x + 330$

【小问 3 详解】

解：设快车去乙地的速度为 a 千米/小时，则 $3(a-70)=120$ ，

解得： $a=110$

$\therefore$ 甲乙两地的距离为 $110 \times 3 = 330$ 千米，

设快车返回的速度为 v 千米/小时，根据题意，

$$\frac{1}{2} \times (v+70) = 330 - \left(3 + \frac{1}{2}\right) \times 70$$

解得： $v=100$ ，

$\therefore$ 两车相遇后，如果快车以返回的速度继续向甲地行驶，求到达甲地还需 $\frac{330 - \frac{1}{2} \times 100}{100} = 2.8$ (小时)

【点睛】 本题考查了一次函数的应用，一元一次方程，根据函数图象获取信息是解题的关键.

26. 已知二次函数 $y=x^2+bx-3$ (b 为常数).

(1) 该函数图像与 x 轴交于 A, B 两点，若点 A 坐标为 $(3, 0)$ ，

①则 b 的值是_____，点 B 的坐标是_____；

②当 $0 < y < 5$ 时，借助图像，求自变量 x 的取值范围；

(2) 对于一切实数 x ，若函数值 $y > t$ 总成立，求 t 的取值范围 (用含 b 的式子表示)；

(3) 当 $m < y < n$ 时 (其中 m, n 为实数， $m < n$)，自变量 x 的取值范围是 $1 < x < 2$ ，求 n 和 b 的值以及 m 的取值范围.

【答案】 (1) ① $-2, (-1, 0)$ ② $-2 < x < -1$ 或 $3 < x < 4$

$$(2) t < -3 - \frac{b^2}{4}$$

$$(3) b = -3, n = -5, m < -\frac{21}{4}$$

【解析】

【分析】 (1) ①待定系数法求出函数解析式，令 $y=0$ ，求出点 B 的坐标即可；②画出函数图像，图像法求出 x 的取值范围即可；

(2) 求出二次函数的最小值，即可得解；

(3) 根据当 $m < y < n$ 时 (其中 m, n 为实数， $m < n$)，自变量 x 的取值范围是 $1 < x < 2$ ，得到 $x=1$ 和 $x=2$ 关于对称轴对称，进而求出 b 的值，得到 n 为 $x=1$ 的函数值，求出 n ，推出直线 $y=m$ 过抛物线顶点或在抛物线的下方，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：① $\because$ 函数图像与 x 轴交于 A, B 两点，点 A 坐标为 $(3, 0)$ ，

$$\therefore 0 = 3^2 + 3b - 3,$$

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3,$$

$$\therefore \text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标是 } (-1, 0);$$

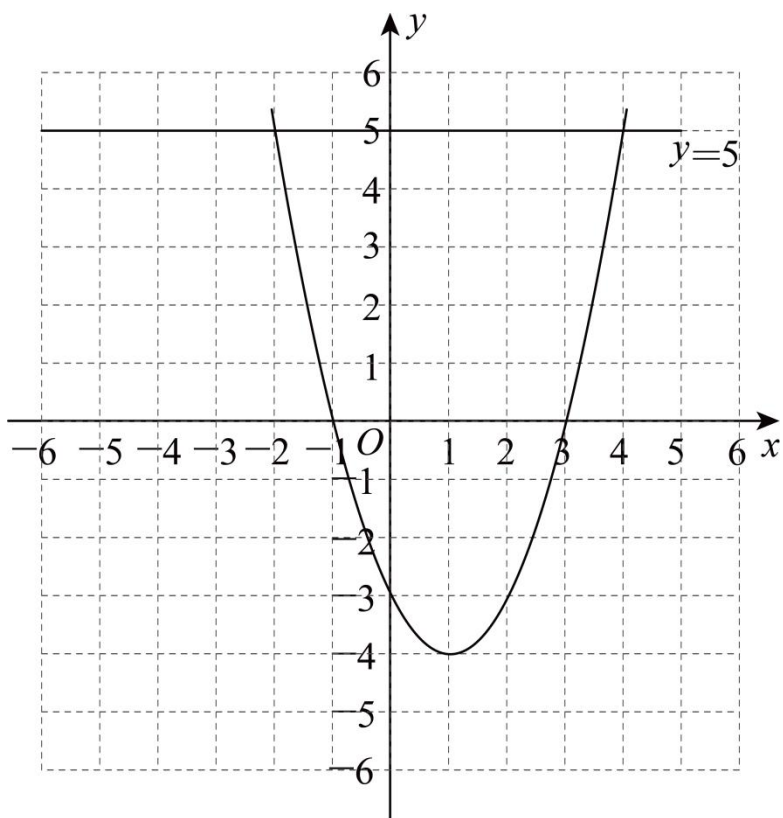
故答案为： $-2, (-1, 0)$ ；

$$\textcircled{2} y = x^2 - 2x - 3,$$

列表如下：

x		-2	-1	1	3	4	
y		5	0	-4	0	5	

画出函数图像如下：



由图可知：当 $0 < y < 5$ 时， $-2 < x < -1$ 或 $3 < x < 4$ ；

【小问 2 详解】

$$\because y = x^2 + bx - 3 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - 3 - \frac{b^2}{4},$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2} \text{ 时, } y \text{ 有最小值为 } -3 - \frac{b^2}{4};$$

$\therefore$ 对于一切实数 x , 若函数值 $y > t$ 总成立,

$$\therefore t < -3 - \frac{b^2}{4};$$

【小问 3 详解】

$$\because y = x^2 + bx - 3 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - 3 - \frac{b^2}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的开口向上, 对称轴为 } x = -\frac{b}{2},$$

又当 $m < y < n$ 时 (其中 m, n 为实数, $m < n$), 自变量 x 的取值范围是 $1 < x < 2$,

$\therefore$ 直线 $y = n$ 与抛物线的两个交点为 $(1, n), (2, n)$, 直线 $y = m$ 过抛物线顶点或在抛物线的下方,

$\therefore (1, n), (2, n)$ 关于对称轴对称,

$$\therefore -\frac{b}{2} = \frac{1+2}{2},$$

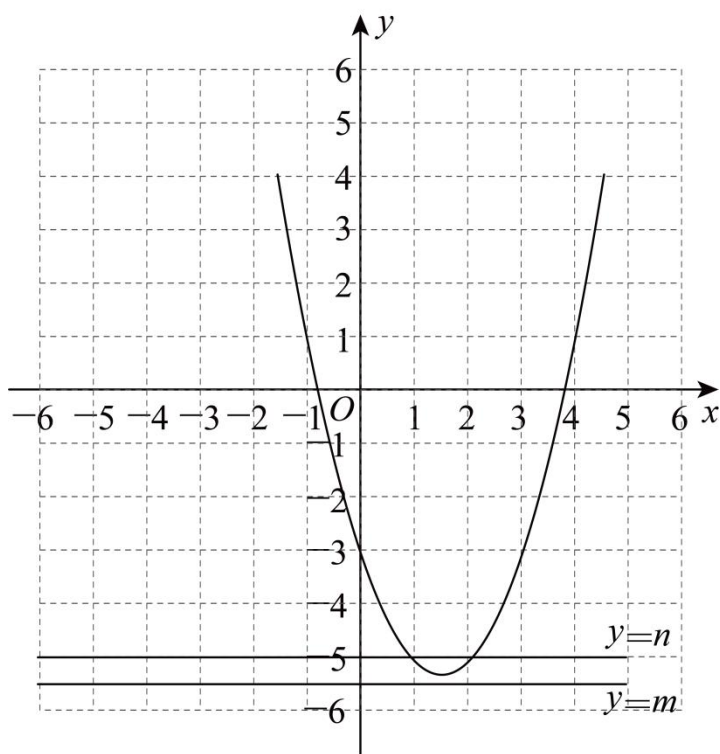
$$\therefore b = -3,$$

$$\therefore y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4},$$

$$\therefore n = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = -5,$$

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y \text{ 有最小值 } -\frac{21}{4},$$

$$\therefore m < -\frac{21}{4}.$$



【点睛】本题考查二次函数的图像和性质，熟

练掌握二次函数的图像和性质，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键。本题的综合性较强，属于中考压轴题。

27. 综合与实践

定义：将宽与长的比值为 $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$ (n 为正整数) 的矩形称为 n 阶奇妙矩形。

(1) 概念理解：

当 $n=1$ 时，这个矩形为 1 阶奇妙矩形，如图 (1)，这就是我们学习过的黄金矩形，它的宽 (AD) 与长 (CD) 的比值是_____。

(2) 操作验证：

用正方形纸片 $ABCD$ 进行如下操作 (如图 (2))：

第一步：对折正方形纸片，展开，折痕为 EF ，连接 CE ；

第二步：折叠纸片使 CD 落在 CE 上，点 D 的对应点为点 H ，展开，折痕为 CG ；

第三步：过点 G 折叠纸片，使得点 A, B 分别落在边 AD, BC 上，展开，折痕为 GK 。

试说明：矩形 $GDCK$ 是 1 阶奇妙矩形。

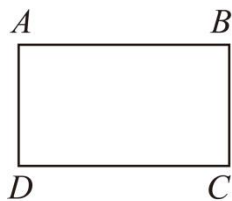


图 (1)

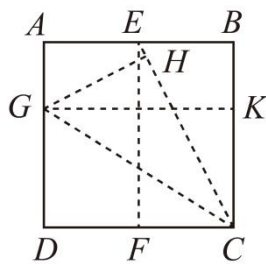


图 (2)

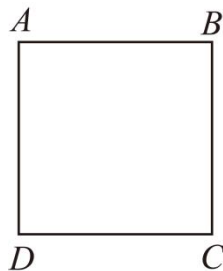


图 (3)

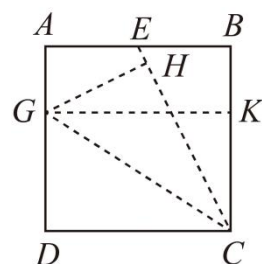


图 (4)

(3) 方法迁移:

用正方形纸片 $ABCD$ 折叠出一个 2 阶奇妙矩形. 要求: 在图 (3) 中画出折叠示意图并作简要标注.

(4) 探究发现:

小明操作发现任一个 n 阶奇妙矩形都可以通过折纸得到. 他还发现: 如图 (4), 点 E 为正方形 $ABCD$ 边 AB 上 (不与端点重合) 任意一点, 连接 CE , 继续 (2) 中操作的第二步、第三步, 四边形 $AGHE$ 的周长与矩形 $GDCK$ 的周长比值总是定值. 请写出这个定值, 并说明理由.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; (2) 见解析; (3) $\frac{1}{2}$, 理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 将 $n=1$ 代入 $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$, 即可求解.

(2) 设正方形的边长为 2, 根据折叠的性质, 可得 $AE = EB = 1$, 设 $DG = x$, 则 $AG = 2-x$, 在 $\text{Rt}\triangle AEG, \text{Rt}\triangle GHE$ 中, 勾股定理建立方程, 解方程, 即可求解;

(3) 仿照 (2) 的方法得出 2 阶奇妙矩形.

(4) 根据 (2) 的方法, 分别求得四边形 $AGHE$ 的周长与矩形 $GDCK$ 的周长, 即可求解.

【详解】 解: (1) 当 $n=1$ 时, $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) 如图 (2), 连接 EG ,

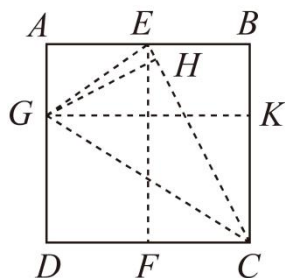


图 (2)

设正方形的边长为 2，根据折叠的性质，可得 $AE = EB = 1$

设 $DG = x$ ，则 $AG = 2 - x$

根据折叠，可得 $GH = GD = x$ ， $CH = CD = 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore EH = \sqrt{5} - 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEG, \text{Rt}\triangle GHE$ 中，

$$AG^2 + AE^2 = GE^2, GH^2 + EH^2 = GE^2$$

$$\therefore (2-x)^2 + 1^2 = (\sqrt{5}-2)^2 + x^2$$

$$\text{解得: } x = \sqrt{5} - 1$$

$$\therefore \frac{GD}{DC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\therefore$ 矩形 $GDCK$ 是 1 阶奇妙矩形.

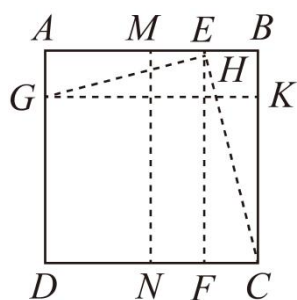
(3) 用正方形纸片 $ABCD$ 进行如下操作 (如图):

第一步: 对折正方形纸片, 展开, 折痕为 MN , 再对折, 折痕为 EF , 连接 CE ;

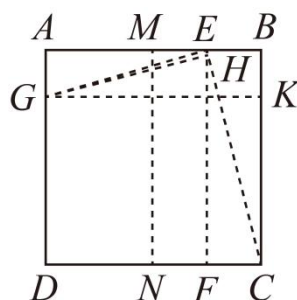
第二步: 折叠纸片使 CD 落在 CE 上, 点 D 的对应点为点 H , 展开, 折痕为 CG ;

第三步: 过点 G 折叠纸片, 使得点 A, B 分别落在边 AD, BC 上, 展开, 折痕为 GK .

矩形 $GDCK$ 是 2 阶奇妙矩形,



理由如下, 连接 GE , 设正方形的边长为 4, 根据折叠可得 $EB = 1$, 则 $AE = 4 - 1 = 3$,



设 $DG = x$ ，则 $AG = 4 - x$

根据折叠，可得 $GH = GD = x$ ， $CH = CD = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ ，

$$\therefore EH = \sqrt{17} - 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEG, \text{Rt}\triangle GHE$ 中，

$$AG^2 + AE^2 = GE^2, GH^2 + EH^2 = GE^2$$

$$\therefore (4-x)^2 + 3^2 = (\sqrt{17}-4)^2 + x^2$$

$$\text{解得: } x = \sqrt{17} - 1$$

$$\therefore \frac{GD}{DC} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n} = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

$\therefore$ 矩形 $GDCK$ 是 2 阶奇妙矩形.

(4) 如图 (4)，连接 GE ，设正方形的边长为 1，设 $EB = m$ ，则 $AE = 1 - m$ ，

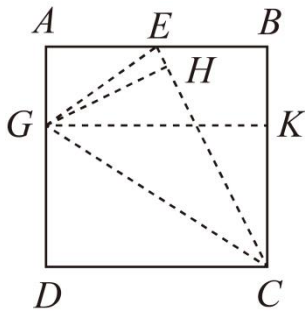


图 (4)

设 $DG = x$ ，则 $AG = 1 - x$

根据折叠，可得 $GH = GD = x$ ， $CH = CD = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = \sqrt{1+m^2}$ ，

$$\therefore EH = \sqrt{1+m^2} - 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEG, \text{Rt}\triangle GHE$ 中，

$$AG^2 + AE^2 = GE^2, GH^2 + EH^2 = GE^2$$

$$\therefore (1-x)^2 + (1-m)^2 = (\sqrt{1+m^2} - 1)^2 + x^2$$

整理得, $x = \sqrt{m^2 + 1} - m$

$$\therefore \text{四边形 } AGHE \text{ 的边长为 } 1-x+x+\sqrt{1+m^2}-1+1-m = \sqrt{1+m^2}-m+1 = x+1$$

矩形 $GDCK$ 的周长为 $2(GD+DC) = 2(x+1)$,

$$\therefore \text{四边形 } AGHE \text{ 的周长与矩形 } GDCK \text{ 的周长比值总是定值 } \frac{1}{2}$$

【点睛】 本题考查了正方形的折叠问题，勾股定理，熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

