

常州市二〇二〇年初中学业水平考试

数学试题

注意事项:

1. 本试卷共 6 页. 全卷满分 120 分. 考试时间为 120 分钟. 考生应将答案全部填写在答题卡相应位置上, 写在本试卷上无效. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 考试时不允许使用计算器.

2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考试证号填写在试卷上, 并填写好答题卡上的考生信息.

3. 作图必须用 2B 铅笔作答, 并请加黑加粗, 描写清楚.

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是正确的)

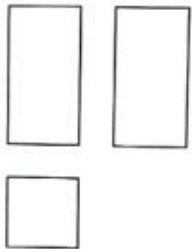
1. 2 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

2. 计算 $m^6 \div m^2$ 的结果是 ()

- A. m^3 B. m^4 C. m^8 D. m^{12}

3. 如图是某几何体的三视图, 该几何体是 ()



- A. 圆柱 B. 三棱柱 C. 四棱柱 D. 四棱锥

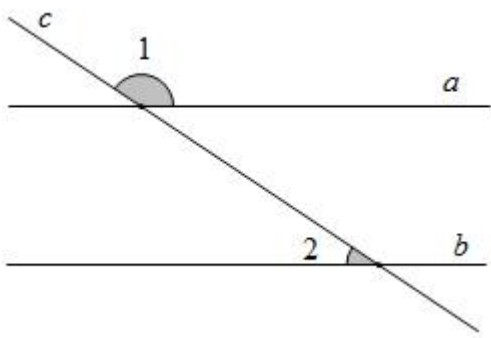
4. 8 的立方根是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. ± 2 C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. 2

5. 如果 $x < y$, 那么下列不等式正确的是 ()

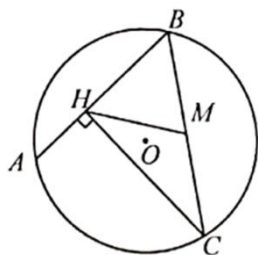
- A. $2x < 2y$ B. $-2x < -2y$ C. $x-1 > y-1$ D. $x+1 > y+1$

6. 如图, 直线 a 、 b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = 140^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



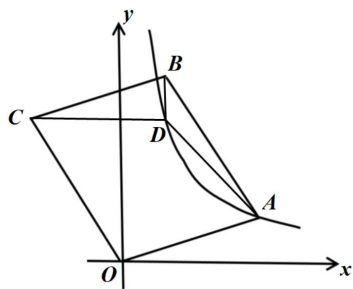
- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

7.如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 C 是优弧 AB 上的动点 (C 不与 A 、 B 重合), $CH \perp AB$, 垂足为 H , 点 M 是 BC 的中点. 若 $\odot O$ 的半径是 3, 则 MH 长的最大值是 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8.如图, 点 D 是 $\square OABC$ 内一点, CD 与 x 轴平行, BD 与 y 轴平行, $BD = \sqrt{2}$, $\angle ADB = 135^\circ$, $S_{\triangle ABD} = 2$. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过 A 、 D 两点, 则 k 的值是 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. 6

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9.计算: $|-2| + (\pi - 1)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

10.若代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

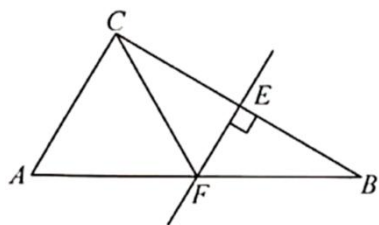
11.地球半径大约是 6400km, 将 6400 用科学记数法表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12.分解因式: $x^3 - x = \underline{\hspace{2cm}}$.

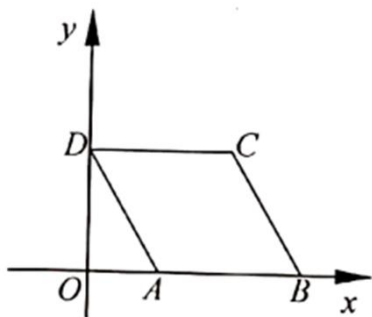
13. 若一次函数 $y = kx + 2$ 的函数值 y 随自变量 x 增大而增大，则实数 k 的取值范围是_____.

14. 若关于 x 的方程 $x^2 + ax - 2 = 0$ 有一个根是 1，则 $a =$ _____.

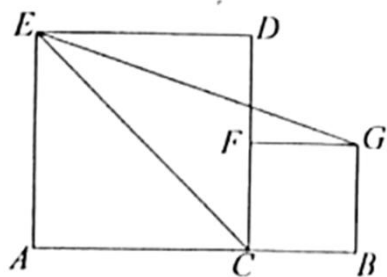
15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BC 的垂直平分线分别交 BC 、 AB 于点 E 、 F 。若 $\triangle AFC$ 是等边三角形，则 $\angle B =$ _____°.



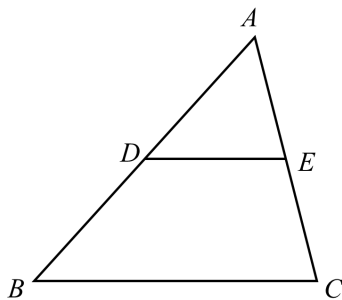
16. 数学家笛卡尔在《几何》一书中阐述了坐标几何的思想，主张取代数和几何中最好的东西，互相以长补短。在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 2$, $\angle DAB = 120^\circ$ 。如图，建立平面直角坐标系 xOy ，使得边 AB 在 x 轴正半轴上，点 D 在 y 轴正半轴上，则点 C 的坐标是_____.



17. 如图，点 C 在线段 AB 上，且 $AC = 2BC$ ，分别以 AC 、 BC 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 、 $BCFG$ ，连接 EC 、 EG ，则 $\tan \angle CEG =$ _____.



18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$, $AB = 6\sqrt{2}$ ， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，连接 DE ，在直线 DE 和直线 BC 上分别取点 F 、 G ，连接 BF 、 DG 。若 $BF = 3DG$ ，且直线 BF 与直线 DG 互相垂直，则 BG 的长为_____.



三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分，请在答题卡指定区域内作答，如无特殊说明，解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

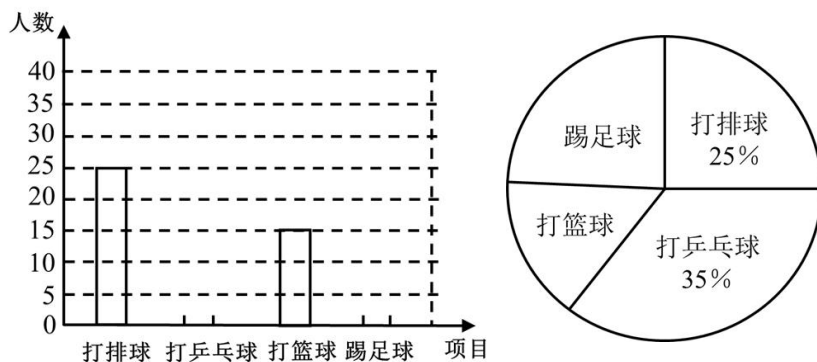
19.先化简，再求值： $(x+1)^2 - x(x+1)$ ，其中 $x = 2$.

20.解方程和不等式组：

(1) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{1-x} = 2$;

(2) $\begin{cases} 2x-6 < 0, \\ -3x \leq 6. \end{cases}$

21.为了解某校学生对球类运动的喜爱情况，调查小组就打排球、打乒乓球、打篮球、踢足球四项球类运动对该校学生进行了“你最喜爱的球类运动”的抽样调查，并根据调查结果绘制成如下统计图.



(1) 本次抽样调查的样本容量是_____；

(2) 补全条形统计图；

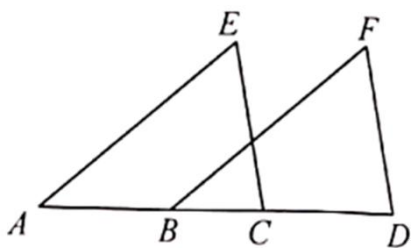
(3) 该校共有 2000 名学生，请你估计该校最喜爱“打篮球”的学生人数.

22.在 3 张相同的小纸条上分别标上 1、2、3 这 3 个号码，做成 3 支签，放在一个不透明的盒子中.

(1) 搅匀后从中随机抽出 1 支签，抽到 1 号签的概率是_____；

(2) 搅匀后先从中随机抽出 1 支签（不放回），再从余下的 2 支签中随机抽出 1 支签，求抽到的 2 支签上签号的和为奇数的概率.

23.已知：如图，点 A 、 B 、 C 、 D 在一条直线上， $EA \parallel FB$, $EA = FB$, $AB = CD$.



(1) 求证: $\angle E = \angle F$;

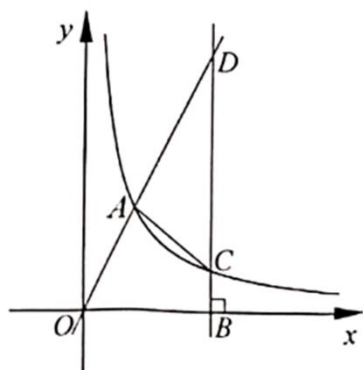
(2) 若 $\angle A = 40^\circ, \angle D = 80^\circ$, 求 $\angle E$ 的度数.

24. 某水果店销售苹果和梨, 购买 1 千克苹果和 3 千克梨共需 26 元, 购买 2 千克苹果和 1 千克梨共需 22 元.

(1) 求每千克苹果和每千克梨的售价;

(2) 如果购买苹果和梨共 15 千克, 且总价不超过 100 元, 那么最多购买多少千克苹果?

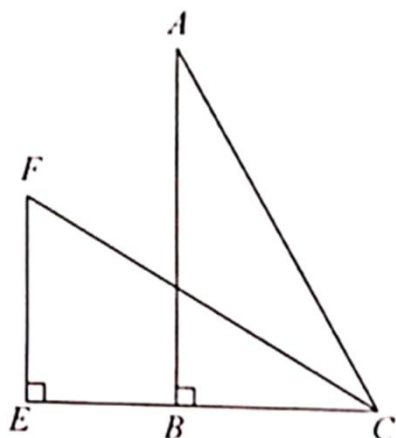
25. 如图, 正比例函数 $y = kx$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 $A(a, 4)$. 点 B 为 x 轴正半轴上一点, 过 B 作 x 轴的垂线交反比例函数的图像于点 C , 交正比例函数的图像于点 D .



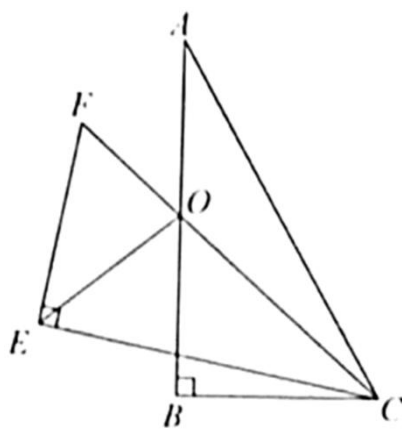
(1) 求 a 的值及正比例函数 $y = kx$ 的表达式;

(2) 若 $BD = 10$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

26. 如图 1, 点 B 在线段 CE 上, $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle CEF$, $\angle ABC = \angle CEF = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 1$.



(图 1)



(图 2)

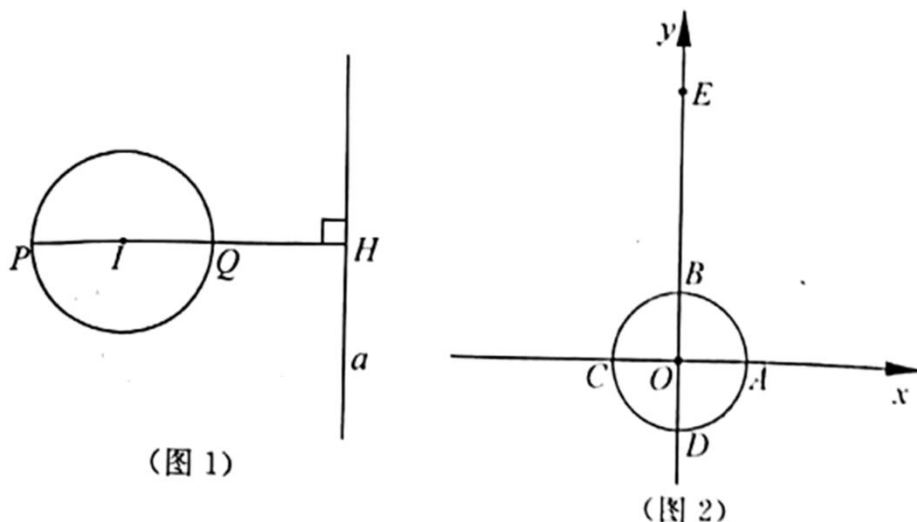
(1) 点 F 到直线 CA 的距离是_____;

(2) 固定 $\triangle ABC$, 将 $\triangle CEF$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 30° , 使得 CF 与 CA 重合, 并停止旋转.

①请在图 1 中用直尺和圆规画出线段 EF 经旋转运动所形成的平面图形（用阴影表示，保留画图痕迹，不要求写画法）该图形的面积为_____；

②如图 2，在旋转过程中，线段 CF 与 AB 交于点 O ，当 $OE = OB$ 时，求 OF 的长.

27.如图 1， $\odot I$ 与直线 a 相离，过圆心 I 作直线 a 的垂线，垂足为 H ，且交 $\odot I$ 于 P 、 Q 两点（ Q 在 P 、 H 之间）. 我们把点 P 称为 $\odot I$ 关于直线 a 的“远点”，把 $PQ \cdot PH$ 的值称为 $\odot I$ 关于直线 a 的“特征数”.



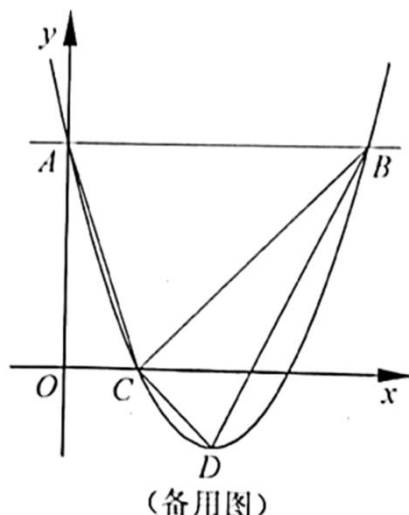
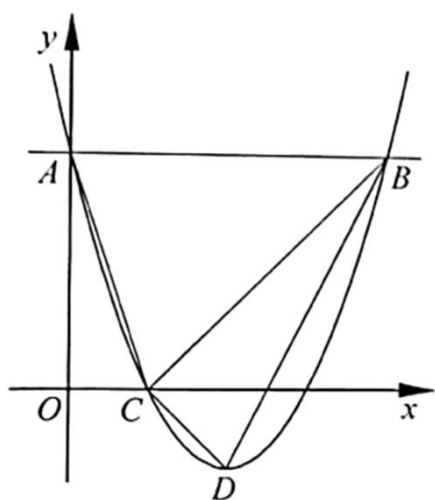
(1) 如图 2，在平面直角坐标系 xOy 中，点 E 的坐标为 $(0,4)$ ，半径为 1 的 $\odot O$ 与两坐标轴交于点 A 、 B 、 C 、 D .

①过点 E 画垂直于 y 轴的直线 m ，则 $\odot O$ 关于直线 m 的“远点”是点_____（填“ A ”、“ B ”、“ C ”或“ D ”）， $\odot O$ 关于直线 m 的“特征数”为_____；

②若直线 n 的函数表达式为 $y = \sqrt{3}x + 4$ ，求 $\odot O$ 关于直线 n 的“特征数”；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 经过点 $M(1,4)$ ，点 F 是坐标平面内一点，以 F 为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径作 $\odot F$. 若 $\odot F$ 与直线 l 相离，点 $N(-1,0)$ 是 $\odot F$ 关于直线 l 的“远点”，且 $\odot F$ 关于直线 l 的“特征数”是 $4\sqrt{5}$ ，求直线 l 的函数表达式.

28.如图，二次函数 $y = x^2 + bx + 3$ 的图像与 y 轴交于点 A ，过点 A 作 x 轴的平行线交抛物线于另一点 B ，抛物线过点 $C(1,0)$ ，且顶点为 D ，连接 AC 、 BC 、 BD 、 CD .



- (1) 填空: $b =$ _____;
- (2) 点 P 是抛物线上一点, 点 P 的横坐标大于 1, 直线 PC 交直线 BD 于点 Q . 若 $\angle CQD = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;
- (3) 点 E 在直线 AC 上, 点 E 关于直线 BD 对称的点为 F , 点 F 关于直线 BC 对称的点为 G , 连接 AG . 当点 F 在 x 轴上时, 直接写出 AG 的长.

常州市二〇二〇年初中学业水平考试

数学试题

注意事项:

1. 本试卷共 6 页. 全卷满分 120 分. 考试时间为 120 分钟. 考生应将答案全部填写在答题卡相应位置上, 写在本试卷上无效. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 考试时不允许使用计算器.
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考试证号填写在试卷上, 并填写好答题卡上的考生信息.
3. 作图必须用 2B 铅笔作答, 并请加黑加粗, 描写清楚.

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是正确的)

1. 2 的相反数是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

【答案】D

【解析】

【分析】

根据相反数的概念解答即可.

【详解】2 的相反数是-2,

故选 D.

2. 计算 $m^6 \div m^2$ 的结果是 ()

A. m^3

B. m^4

C. m^8

D. m^{12}

【答案】B

【解析】

【分析】

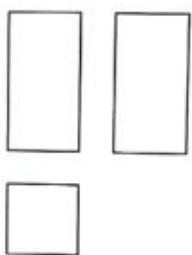
直接利用同底数幂除法的运算法则解答即可.

【详解】解: $m^6 \div m^2 = m^{6-2} = m^4$.

故选: B.

【点睛】本题考查了同底数幂除法, 掌握公式 $m^m \div m^n = m^{m-n}$ 是解答本题的关键.

3. 如图是某几何体的三视图, 该几何体是 ()



A. 圆柱

B. 三棱柱

C. 四棱柱

D. 四棱锥

【答案】C

【解析】

【分析】

通过俯视图为圆得到几何体为柱体, 然后通过主视图和左视图可判断几何体为四棱柱.

【详解】解: 由图可知:

该几何体是四棱柱.

故选: C.

【点睛】本题考查了由三视图判断几何体: 由三视图想象几何体的形状, 首先, 应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状, 然后综合起来考虑整体形状. 熟记一些简单的几何

体的三视图对复杂几何体的想象会有帮助.

4.8 的立方根是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. ± 2 C. $\pm 2\sqrt{2}$ D. 2

【答案】 D

【解析】

【详解】解：根据立方根的定义，由 $2^3=8$ ，可得 8 的立方根是 2

故选： D.

【点睛】 本题考查立方根.

5.如果 $x < y$ ，那么下列不等式正确的是 ()

- A. $2x < 2y$ B. $-2x < -2y$ C. $x-1 > y-1$ D. $x+1 > y+1$

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据不等式的性质对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】解： A、由 $x < y$ 可得： $2x < 2y$ ，故选项成立；

B、由 $x < y$ 可得： $-2x > -2y$ ，故选项不成立；

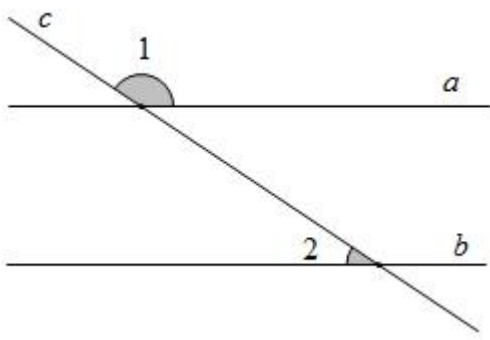
C、由 $x < y$ 可得： $x-1 < y-1$ ，故选项不成立；

D、由 $x < y$ 可得： $x+1 < y+1$ ，故选项不成立；

故选 A.

【点睛】 本题考查了不等式的性质： (1) 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子)，不等号的方向不变. (2) 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数，不等号的方向不变. (3) 不等式两边乘 (或除以) 同一个负数，不等号的方向改变.

6.如图，直线 a 、 b 被直线 c 所截， $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 140^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】

先根据邻补角相等求得 $\angle 3$ ，然后再根据两直线平行、内错角相等即可解答.

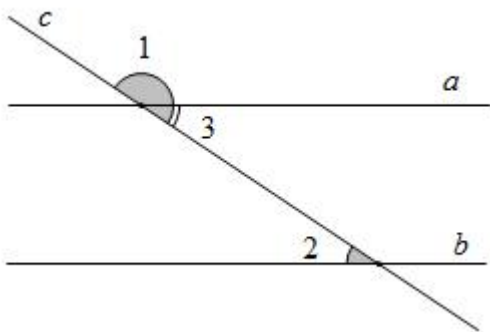
【详解】解： $\because \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 1 = 140^\circ$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\because a \parallel b$$

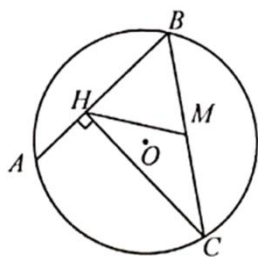
$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 40^\circ.$$

故答案为 B.



【点睛】本题考查了平行线的性质，掌握“两直线平行、内错角相等”是解答本题的关键.

7.如图， AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 是优弧 AB 上的动点 (C 不与 A 、 B 重合)， $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，点 M 是 BC 的中点. 若 $\odot O$ 的半径是 3，则 MH 长的最大值是 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】

根据直角三角形斜边中线定理，斜边上的中线等于斜边的一半可知 $MH = \frac{1}{2} BC$ ，当 BC 为直径时长度最大，即可求解.

【详解】解： $\because CH \perp AB$

$\therefore \angle BHC = 90^\circ$

$\because$ 在 $Rt\triangle BHC$ 中，点 M 是 BC 的中点

$\therefore MH = \frac{1}{2} BC$

$\because BC$ 为 $\odot O$ 的弦

$\therefore$ 当 BC 为直径时， MH 最大

$\because \odot O$ 的半径是 3

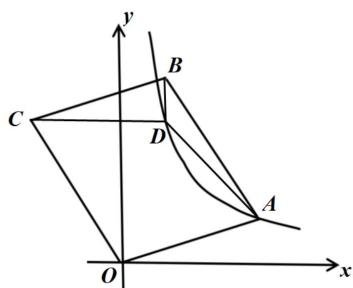
$\therefore MH$ 最大为 3.

故选：A.

【点睛】本题考查了直角三角形斜边中线定理，数形结合是解题关键.

8.如图，点 D 是 $\square OABC$ 内一点， CD 与 x 轴平行， BD 与 y 轴平行， $BD = \sqrt{2}$ ， $\angle ADB = 135^\circ$ ， $S_{\triangle ABD} = 2$. 若

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过 A 、 D 两点，则 k 的值是 ()



A. $2\sqrt{2}$

B. 4

C. $3\sqrt{2}$

D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】

作 $AE \perp BD$ 交 BD 的延长线于点 E ，作 $AF \perp x$ 轴于点 F ，计算出 AE 长度，证明 $\triangle BCD \cong \triangle AOF$ ，得出 AF 长度，设出点 A 的坐标，表示出点 D 的坐标，使用 $x_D y_D = x_A y_A$ ，可计算出 k 值.

【详解】作 $AE \perp BD$ 交 BD 的延长线于点 E ，作 $AF \perp x$ 轴于点 F

$$\because \angle ADB = 135^\circ$$

$$\therefore \angle ADE = 45^\circ$$

$\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形

$$\because BD = \sqrt{2}, S_{\triangle ABD} = 2$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AE = 2, \text{ 即 } AE = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore DE = AE = 2\sqrt{2}$$

$\because BC = AO$, 且 $BC \parallel AO$, $CD \parallel OF$

$$\therefore \angle BCD = \angle AOF$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle AOF$$

$$\therefore AF = BD = \sqrt{2}$$

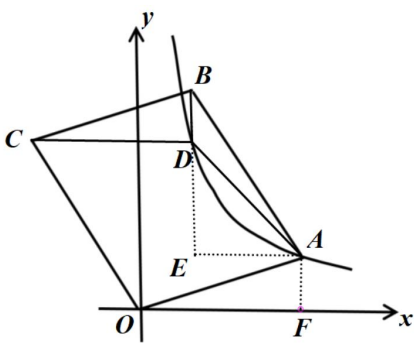
$$\therefore y_D = 3\sqrt{2}$$

设点 $A(m, \sqrt{2})$, $D(m - 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

$$\therefore \sqrt{2}m = (m - 2\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2}$$

解得: $m = 3\sqrt{2}$

$$\therefore k = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$$



故选: D.

【点睛】本题考查了反比例函数与几何图形的综合, 利用点 A 和点 D 表示出 k 的计算是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. 计算: $|-2| + (\pi - 1)^0 = \underline{\quad\quad\quad}$.

【答案】3

【解析】

【分析】

根据绝对值和0次幂的性质求解即可.

【详解】原式 $=2+1=3$.

故答案为: 3.

【点睛】本题考查了绝对值和0次幂的性质.

10.若代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】

分式有意义时, 分母 $x-1 \neq 0$, 据此求得 x 的取值范围.

【详解】解: 依题意得: $x-1 \neq 0$,

解得 $x \neq 1$,

故答案为: $x \neq 1$.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件. (1) 分式有意义的条件是分母不等于零. (2) 分式无意义的条件是分母等于零.

11.地球半径大约是6400km, 将6400用科学记数法表示为_____.

【答案】 6.4×10^3

【解析】

【分析】

对于一个绝对值较大的数, 用科学记数法写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是比原整数位数少1的数.

【详解】 $6400 = 6.4 \times 10^3$.

故答案为: 6.4×10^3 .

【点睛】此题考查了科学记数法的表示方法, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12.分解因式: $x^3 - x =$ _____.

【答案】 $x(x+1)(x-1)$

【解析】

解：原式 $= x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$.

13. 若一次函数 $y = kx + 2$ 的函数值 y 随自变量 x 增大而增大，则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 0$

【解析】

【分析】

直角利用一次函数增减性与系数的关系解答即可.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = kx + 2$ 的函数值 y 随自变量 x 增大而增大

$\therefore k > 0$.

故答案为 $k > 0$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数增减性与系数的关系，当一次函数的一次项系数大于零时，一次函数的函数值随着自变量 x 的增大而增大.

14. 若关于 x 的方程 $x^2 + ax - 2 = 0$ 有一个根是 1，则 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】

根据一元二次方程的解的定义，把 $x=1$ 代入方程得到关于 a 的一次方程，然后解此一次方程即可.

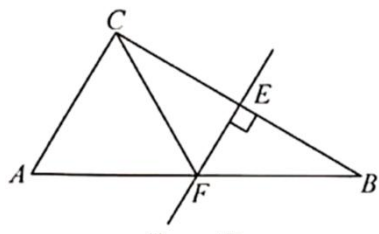
【详解】解：把 $x=1$ 代入方程 $x^2 + ax - 2 = 0$ 得 $1+a-2=0$,

解得 $a=1$.

故答案是：1.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BC 的垂直平分线分别交 BC 、 AB 于点 E 、 F . 若 $\triangle AFC$ 是等边三角形，则 $\angle B =$ _____°.



【答案】 30

【解析】

【分析】

根据垂直平分线的性质得到 $\angle B = \angle BCF$ ，再利用等边三角形的性质得到 $\angle AFC = 60^\circ$ ，从而可得 $\angle B$ 。

【详解】解： $\because EF$ 垂直平分 BC ，

$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF,$$

$\because \triangle ACF$ 为等边三角形，

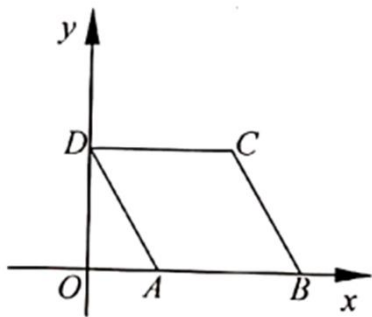
$$\therefore \angle AFC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF = 30^\circ.$$

故答案为： 30.

【点睛】 本题考查了垂直平分线的性质，等边三角形的性质，外角的性质，解题的关键是利用垂直平分线的性质得到 $\angle B = \angle BCF$ 。

16. 数学家笛卡尔在《几何》一书中阐述了坐标几何的思想，主张取代数和几何中最好的东西，互相以长补短。在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 2, \angle DAB = 120^\circ$ 。如图，建立平面直角坐标系 xOy ，使得边 AB 在 x 轴正半轴上，点 D 在 y 轴正半轴上，则点 C 的坐标是_____。



【答案】 $(2, \sqrt{3})$

【解析】

【分析】

根据菱形的性质可知 $AD = AB = CD = 2$ ， $\angle OAD = 60^\circ$ ，由三角函数即可求出线段 OD 的长度，即可得到答案。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $AB = 2$

$$\therefore AD = AB = CD = 2, AB \parallel CD$$

$$\because \angle DAB = 120^\circ$$

$$\therefore \angle DAO = 60^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle DOA$ 中, $\sin 60^\circ = \frac{OD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

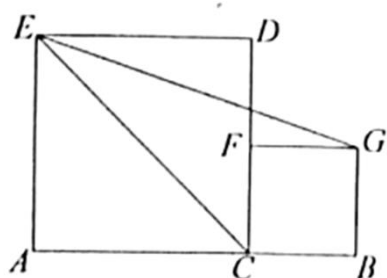
$$\therefore OD = \sqrt{3}$$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(2, \sqrt{3})$.

故答案为: $(2, \sqrt{3})$.

【点睛】 本题考查了平面直角坐标系中直角三角形的计算问题, 以及菱形的性质, 熟练掌握特殊三角函数值是解题关键.

17. 如图, 点 C 在线段 AB 上, 且 $AC = 2BC$, 分别以 AC 、 BC 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 、 $BCFG$, 连接 EC 、 EG , 则 $\tan \angle CEG =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

设 $BC = a$, 则 $AC = 2a$, 然后利用正方形的性质求得 CE 、 CG 的长、 $\angle GCD = \angle ECD = 45^\circ$, 进而说明 $\triangle ECG$ 为直角三角形, 最后运用正切的定义即可解答.

【详解】 解: 设 $BC = a$, 则 $AC = 2a$

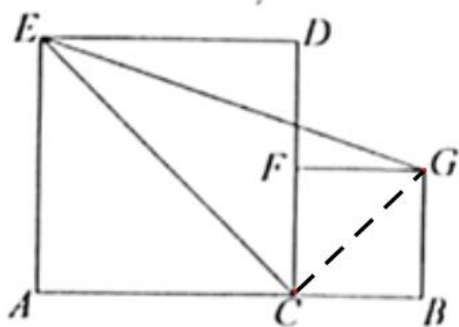
$\therefore$ 正方形 $ACDE$

$$\therefore EC = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a, \quad \angle ECD = \frac{1}{2} \angle ACD = 45^\circ$$

$$\text{同理: } CG = \sqrt{2}a, \quad \angle GCD = \frac{1}{2} \angle BCD = 45^\circ$$

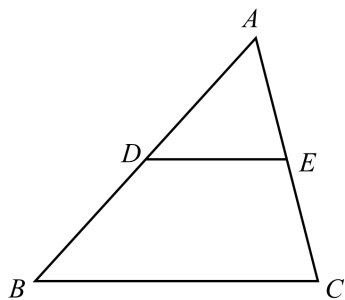
$$\therefore \tan \angle CEG = \frac{CG}{CE} = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.



【点睛】 本题考查了正方形的性质和正切的定义，根据正方形的性质说明 $\triangle ECG$ 是直角三角形是解答本题的关键.

18.如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = 6\sqrt{2}$ ， D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点，连接 DE ，在直线 DE 和直线 BC 上分别取点 F 、 G ，连接 BF 、 DG ．若 $BF = 3DG$ ，且直线 BF 与直线 DG 互相垂直，则 BG 的长为_____.



【答案】 4 或 2

【解析】

【分析】

分当点 F 在点 D 右侧时，当点 F 在点 D 左侧时，两种情况，分别画出图形，结合三角函数，勾股定理以及平行四边形的性质求解即可.

【详解】 解：如图，当点 F 在点 D 右侧时，

过点 F 作 $FM \parallel DG$ ，交直线 BC 于点 M ，过点 B 作 $BN \perp DE$ ，交直线 DE 于点 N ，

$\because D$ 、 E 分别是 AB 和 AC 中点， $AB = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ ， $BD = AD = 3\sqrt{2}$ ， $\angle FBM = \angle BFD$ ，

$\therefore$ 四边形 $DGMF$ 为平行四边形，

则 $DG = FM$ ，

$\because DG \perp BF$ ， $BF = 3DG$ ，

$\therefore \angle BFM = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle FBM = \frac{FM}{BF} = \frac{1}{3} = \tan \angle BFD,$$

$$\therefore \frac{BN}{FN} = \frac{1}{3},$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ = \angle BDN,$$

$\therefore \triangle BDN$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BN = DN = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 3,$$

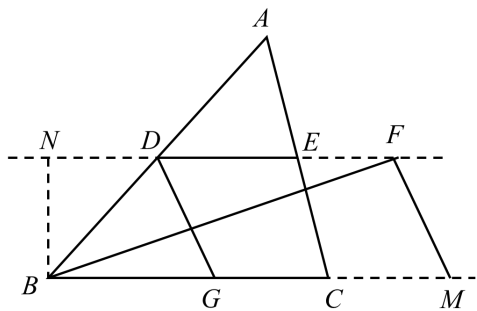
$$\therefore FN = 3BN = 9, \quad DF = GM = 6,$$

$$\because BF = \sqrt{BN^2 + NF^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore FM = \frac{1}{3}BF = \sqrt{10},$$

$$\therefore BM = \sqrt{BF^2 + FM^2} = 10,$$

$$\therefore BG = 10 - 6 = 4;$$



当点 F 在点 D 左侧时, 过点 B 作 $BN \perp DE$, 交直线 DE 于 N, 过点 B 作 $BM \parallel DG$, 交直线 DE 于 M, 延长 FB 和 DG, 交点为 H,

可知: $\angle H = \angle FBM = 90^\circ$, 四边形 BMDG 为平行四边形,

$$\therefore BG = MD, \quad BM = DG,$$

$$\because BF = 3DG,$$

$$\therefore \tan \angle BFD = \frac{BM}{BF} = \frac{DH}{FH} = \frac{BN}{FN} = \frac{1}{3},$$

同理可得: $\triangle BDN$ 为等腰直角三角形, $BN = DN = 3$,

$$\therefore FN = 3BN = 9,$$

$$\therefore BF = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10},$$

设 $MN = x$, 则 $MD = 3 - x$, $FM = 9 + x$,

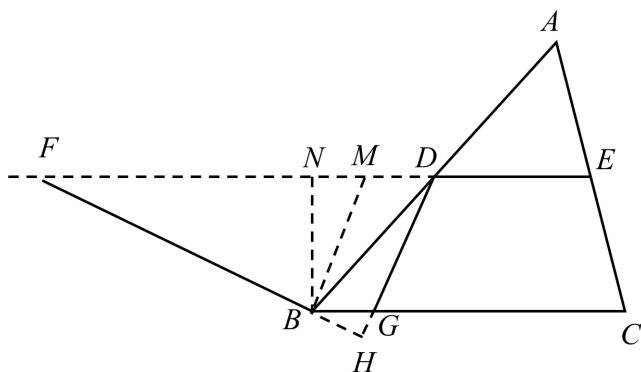
在 $\text{Rt}\triangle BFM$ 和 $\text{Rt}\triangle BMN$ 中,

$$\text{有 } FM^2 - BF^2 = MN^2 + BN^2,$$

$$\text{即 } (9+x)^2 - (3\sqrt{10})^2 = x^2 + 3^2,$$

解得: $x=1$, 即 $MN=1$,

$$\therefore BG=MD=ND-MN=2.$$



综上: BG 的值为 4 或 2.

故答案为: 4 或 2.

【点睛】本题考查了等腰直角三角形的判定和性质, 三角函数, 平行四边形的判定和性质, 勾股定理, 难度较大, 解题的关键是根据题意画出图形, 分清情况.

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 84 分, 请在答题卡指定区域内作答, 如无特殊说明, 解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程)

19. 先化简, 再求值: $(x+1)^2 - x(x+1)$, 其中 $x=2$.

【答案】 $x+1$; 3

【解析】

【分析】

先利用完全平方公式和单项式乘多项式化简, 再代入求值即可.

【详解】解: $(x+1)^2 - x(x+1)$

$$= x^2 + 1 + 2x - x^2 - x$$

$$= x + 1$$

将 $x=2$ 代入,

$$\text{原式} = 3$$

【点睛】本题主要考查了整式的混合运算, 解题的关键是正确的化简.

20. 解方程和不等式组:

$$(1) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{1-x} = 2;$$

$$(2) \begin{cases} 2x-6 < 0, \\ -3x \leq 6. \end{cases}$$

【答案】 (1) $x=0$; (2) $-2 \leq x < 3$

【解析】

【分析】

(1) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解；

(2) 分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的方法部分即可.

【详解】解：(1) $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{1-x} = 2$

去分母得： $x - 2 = 2x - 2$

解得 $x=0$,

经检验 $x=0$ 是分式方程的解；

$$(2) \begin{cases} 2x-6 < 0, & \text{①} \\ -3x \leq 6, & \text{②} \end{cases}$$

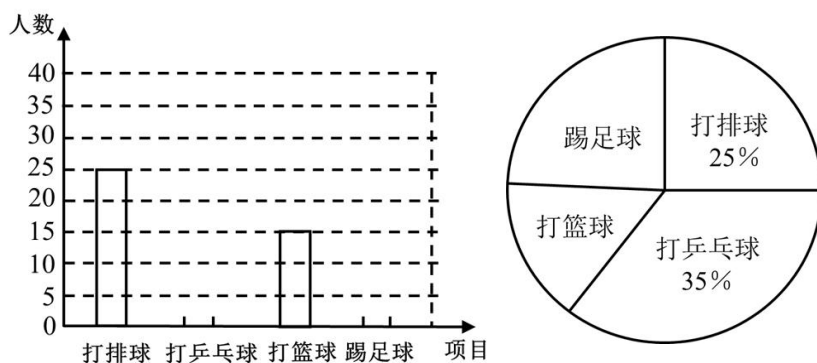
由①得： $x < 3$

由②得： $x \geq -2$

则不等式组的解集为 $-2 \leq x < 3$.

【点睛】本题考查了解分式方程与解不等式组，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解. 解一元一次不等式组要注意不等号的变化.

21. 为了解某校学生对球类运动的喜爱情况，调查小组就打排球、打乒乓球、打篮球、踢足球四项球类运动对该校学生进行了“你最喜爱的球类运动”的抽样调查，并根据调查结果绘制成如下统计图.



(1) 本次抽样调查的样本容量是_____；

(2) 补全条形统计图；

(3) 该校共有 2000 名学生，请你估计该校最喜爱“打篮球”的学生人数.

【答案】 (1) 100; (2) 见解析; (3) 300 人.

【解析】

【分析】

(1) 用条形统计图中最喜爱打排球的人数除以扇形统计图中最喜爱打排球的人数所占百分比即可求出本次抽样调查的样本容量;

(2) 用总人数乘以最喜爱打乒乓球的人数所占百分比即可求出最喜爱打乒乓球的人数，用总人数减去最喜爱其它三项运动的人数即得最喜爱踢足球的人数，进而可补全条形统计图;

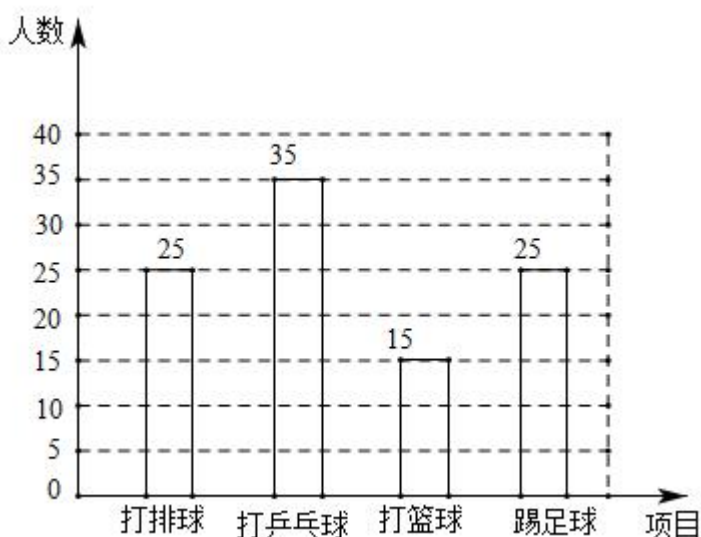
(3) 用最喜爱打篮球的人数除以总人数再乘以 2000 即可求出结果.

【详解】解：(1) 本次抽样调查的样本容量是 $25 \div 25\% = 100$;

故答案为：100;

(2) 打乒乓球的人数为 $100 \times 35\% = 35$ 人，踢足球的人数为 $100 - 25 - 35 - 15 = 25$ 人;

补全条形统计图如图所示:



(3) $2000 \times \frac{15}{100} = 300$ 人;

答：估计该校最喜爱“打篮球”的学生有 300 人.

【点睛】 本题考查了条形统计图、扇形统计图、样本容量以及利用样本估计总体等知识，属于基本题型，熟练掌握上述基本知识是解题关键.

22. 在 3 张相同的小纸条上分别标上 1、2、3 这 3 个号码，做成 3 支签，放在一个不透明的盒子中.

(1) 搅匀后从中随机抽出 1 支签，抽到 1 号签的概率是_____;

(2) 搅匀后先从中随机抽出 1 支签（不放回），再从余下的 2 支签中随机抽出 1 支签，求抽到的 2 支签上签号的和为奇数的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】

(1) 由概率公式即可得出答案;

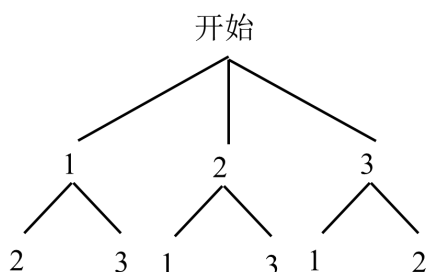
(2) 画出树状图, 得到所有等可能的情况, 再利用概率公式求解即可.

【详解】解: (1) $\because$ 共有 3 个号码,

$\therefore$ 抽到 1 号签的概率是 $\frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$;

(2) 画树状图如下:

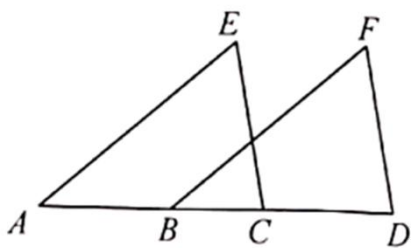


所有等可能的情况有 6 种, 其中抽到的 2 支签上签号的和为奇数的有 4 种,

$\therefore$ 抽到的 2 支签上签号的和为奇数的概率为: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

【点睛】此题考查了列表法与树状图法, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

23. 已知: 如图, 点 A 、 B 、 C 、 D 在一条直线上, $EA \parallel FB$, $EA = FB$, $AB = CD$.



(1) 求证: $\angle E = \angle F$;

(2) 若 $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 80^\circ$, 求 $\angle E$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析; (2) 60°

【解析】

【分析】

(1) 根据已知条件证明 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$, 即可得到结论;

(2) 根据全等三角形的性质得到 $\angle D = \angle ACE = 80^\circ$ ，再利用三角形内角和定理求出结果.

【详解】 解：(1) $\because AE \parallel BF$,

$$\therefore \angle A = \angle DBF,$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore AB + BC = CD + BC, \text{ 即 } AC = BD,$$

$$\text{又 } \because AE = BF,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle E = \angle F;$$

$$(2) \because \triangle ACE \cong \triangle BDF,$$

$$\therefore \angle D = \angle ACE = 80^\circ,$$

$$\because \angle A = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle A - \angle ACE = 60^\circ.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质和三角形内角和，解题的关键是找出三角形全等的条件.

24. 某水果店销售苹果和梨，购买 1 千克苹果和 3 千克梨共需 26 元，购买 2 千克苹果和 1 千克梨共需 22 元.

(1) 求每千克苹果和每千克梨的售价；

(2) 如果购买苹果和梨共 15 千克，且总价不超过 100 元，那么最多购买多少千克苹果？

【答案】 (1) 每千克苹果售价 8 元，每千克梨 6 元；(2) 最多购买 5 千克苹果

【解析】

【分析】

(1) 设每千克苹果售价 x 元，每千克梨 y 元，由题意列出 x 、 y 的方程组，解之即可；

(2) 设购买苹果 a 千克，则购买梨 $(15-a)$ 千克，由题意列出 a 的不等式，解之即可解答.

【详解】 (1) 设每千克苹果售价 x 元，每千克梨 y 元，由题意，

$$\text{得: } \begin{cases} x + 3y = 26 \\ 2x + y = 22 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases},$$

答：每千克苹果售价 8 元，每千克梨 6 元，

(2) 设购买苹果 a 千克，则购买梨 $(15-a)$ 千克，由题意，

$$\text{得: } 8a + 6(15-a) \leq 100,$$

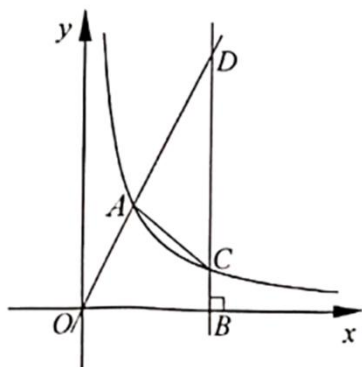
$$\text{解得: } a \leq 5,$$

$$\therefore a \text{ 最大值为 } 5,$$

答：最多购买 5 千克苹果.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用，解答的关键是认真审题，分析相关信息，正确列出方程组和不等式.

25.如图，正比例函数 $y=kx$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$ 的图像交于点 $A(a,4)$. 点 B 为 x 轴正半轴上一点，过 B 作 x 轴的垂线交反比例函数的图像于点 C ，交正比例函数的图像于点 D .



(1) 求 a 的值及正比例函数 $y=kx$ 的表达式;

(2) 若 $BD=10$ ，求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】 (1) $a=2$; $y=2x$; (2) $\frac{63}{5}$

【解析】

【分析】

(1) 已知反比例函数解析式，点 A 在反比例函数图象上，故 a 可求；求出点 A 的坐标后，点 A 同时在正比例函数图象上，将点 A 坐标代入正比例函数解析式中，故正比例函数的解析式可求.

(2) 根据题意以及第一问的求解结果，我们可设 B 点坐标为 $(b, 0)$ ，则 D 点坐标为 $(b, 2b)$ ，根据 $BD=10$ ，可求 b 值，然后确认三角形的底和高，最后根据三角形面积公式即可求解.

【详解】 (1) 已知反比例函数解析式为 $y=\frac{8}{x}$ ，点 $A(a, 4)$ 在反比例函数图象上，将点 A 坐标代入，解得 $a=2$ ，故 A 点坐标为 $(2, 4)$ ，又 $\because A$ 点也在正比例函数图象上，设正比例函数解析为 $y=kx$ ，将点 $A(2, 4)$ 代入正比例函数解析式中，解得 $k=2$ ，则正比例函数解析式为 $y=2x$.

故 $a=2$; $y=2x$.

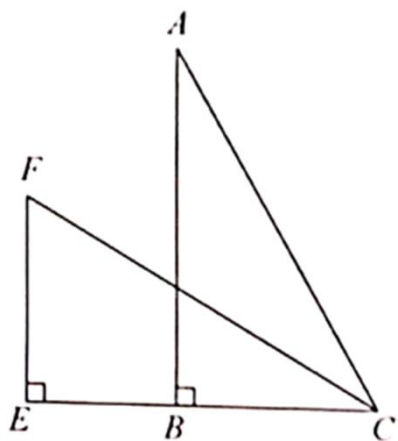
(2) 根据第一问的求解结果，以及 BD 垂直 x 轴，我们可以设 B 点坐标为 $(b, 0)$ ，则 C 点坐标为 $(b, \frac{8}{b})$ 、 D 点坐标为 $(b, 2b)$ ，根据 $BD=10$ ，则 $2b=10$ ，解得 $b=5$ ，故点 B 的坐标为 $(5, 0)$ ， D 点坐标为 $(5, 10)$ ， C 点坐标为 $(5, \frac{8}{5})$ ，则在 $\triangle ACD$ 中， $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \left(10 - \frac{8}{5}\right) \times (5 - 2) = \frac{63}{5}$.

故 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{63}{5}$.

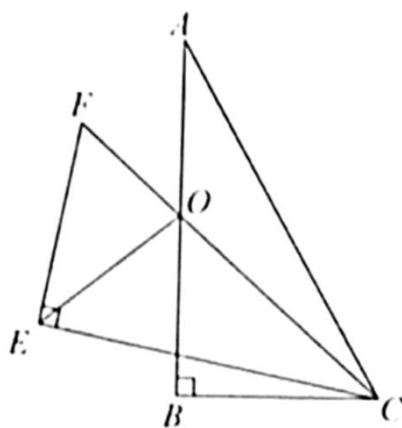
【点睛】(1) 本题主要考查求解正比例函数及反比例函数解析式，掌握求解正比例函数和反比例函数解析式的方法是解答本题的关键.

(2) 本题根据第一问求解的结果以及 BD 垂直 x 轴，利用待定系数法，设 B 、 C 、 D 三点坐标，求出 B 、 C 、 D 三点坐标，是解答本题的关键，同时掌握三角形面积公式，即可求解.

26. 如图 1，点 B 在线段 CE 上， $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle CEF$ ， $\angle ABC = \angle CEF = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $BC = 1$.



(图 1)



(图 2)

(1) 点 F 到直线 CA 的距离是_____；

(2) 固定 $\triangle ABC$ ，将 $\triangle CEF$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 30° ，使得 CF 与 CA 重合，并停止旋转.

①请你在图 1 中用直尺和圆规画出线段 EF 经旋转运动所形成的平面图形（用阴影表示，保留画图痕迹，不要求画法）该图形的面积为_____；

②如图 2，在旋转过程中，线段 CF 与 AB 交于点 O ，当 $OE = OB$ 时，求 OF 的长.

【答案】(1) 1；(2) $\frac{\pi}{12}$ ；(3) $OF = \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】

(1) 根据直角三角形的性质和全等三角形的性质可得 $\angle ACF = \angle ECF = 30^\circ$ ，即 CF 是 $\angle ACB$ 的平分线，然后根据角平分线的性质可得点 F 到直线 CA 的距离即为 EF 的长，于是可得答案；

(2) ①易知 E 点和 F 点的运动轨迹是分别以 CF 和 CE 为半径、圆心角为 30° 的圆弧，据此即可画出旋转后的平面图形；在图 3 中，先解 $\text{Rt}\triangle CEF$ 求出 CF 和 CE 的长，然后根据 $S_{\text{阴影}} = (S_{\triangle CEF} + S_{\text{扇形} ACF}) - (S_{\triangle ACG} + S_{\text{扇形} CEG})$ 即可求出阴影面积；

②作 $EH \perp CF$ 于点 H ，如图 4，先解 $\text{Rt}\triangle EFH$ 求出 FH 和 EH 的长，进而可得 CH 的长，设 $OH = x$ ，则 CO 和 OE^2 都可以用含 x 的代数式表示，然后在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中根据勾股定理即可得出关于 x 的方程，解方程即可求出 x 的值，进一步即可求出结果.

【详解】解：(1) $\because \angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\because \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle CEF,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle BAC = 30^\circ, EF = BC = 1,$$

$$\therefore \angle ACF = 30^\circ, \therefore \angle ACF = \angle ECF = 30^\circ,$$

$\therefore CF$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore$ 点 F 到直线 CA 的距离 $= EF = 1$;

故答案为: 1;

(2) ① 线段 EF 经旋转运动所形成的平面图形如图 3 中的阴影所示:

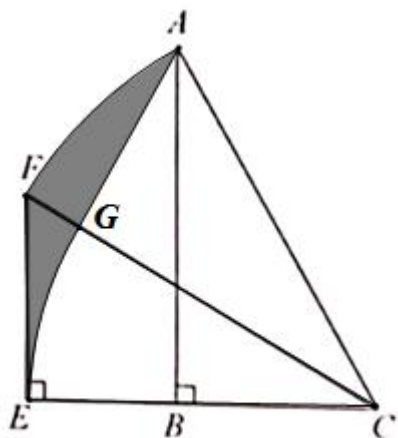


图3

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, $\because \angle ECF = 30^\circ, EF = 1$,

$$\therefore CF = 2, CE = \sqrt{3},$$

由旋转的性质可得: $CF = CA = 2, CE = CG = \sqrt{3}, \angle ACG = \angle ECF = 30^\circ$,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = (S_{\triangle CEF} + S_{\text{扇形} ACF}) - (S_{\triangle ACG} + S_{\text{扇形} CEG}) = S_{\text{扇形} ACF} - S_{\text{扇形} CEG} = \frac{30\pi \times 2^2}{360} - \frac{30\pi \times (\sqrt{3})^2}{360} = \frac{\pi}{12};$$

故答案为: $\frac{\pi}{12}$;

② 作 $EH \perp CF$ 于点 H , 如图 4,

在 $\text{Rt}\triangle EFH$ 中, $\because \angle F = 60^\circ, EF = 1$,

$$\therefore FH = \frac{1}{2}, EH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore CH = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{设 } OH = x, \text{ 则 } OC = \frac{3}{2} - x, OE^2 = EH^2 + OH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{3}{4} + x^2,$$

$$\because OB=OE, \therefore OB^2 = \frac{3}{4} + x^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中, } \because OB^2 + BC^2 = OC^2, \therefore \frac{3}{4} + x^2 + 1 = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{6},$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

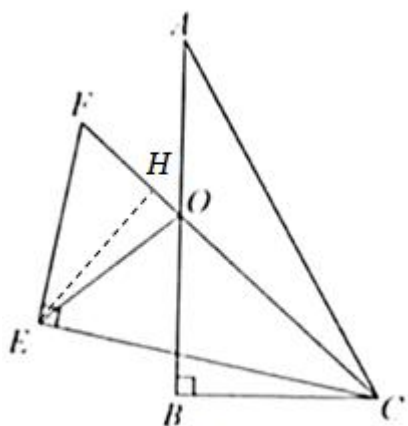
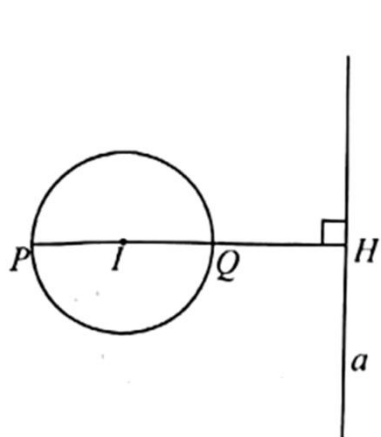


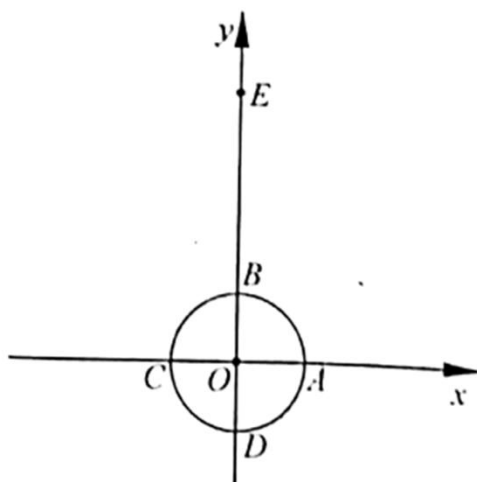
图4

【点睛】本题考查了旋转的性质和旋转作图、全等三角形的性质、角平分线的性质、扇形面积公式、勾股定理和解直角三角形等知识，涉及的知识点多，综合性较强，熟练掌握上述知识、灵活应用整体思想和方程思想是解题的关键。

27.如图1, $\odot I$ 与直线 a 相离, 过圆心 I 作直线 a 的垂线, 垂足为 H , 且交 $\odot I$ 于 P 、 Q 两点 (Q 在 P 、 H 之间). 我们把点 P 称为 $\odot I$ 关于直线 a 的“远点”, 把 $PQ \cdot PH$ 的值称为 $\odot I$ 关于直线 a 的“特征数”.



(图 1)



(图 2)

(1) 如图2, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 E 的坐标为 $(0, 4)$, 半径为 1 的 $\odot O$ 与两坐标轴交于点 A 、 B 、 C 、 D .

①过点 E 画垂直于 y 轴的直线 m , 则 $\odot O$ 关于直线 m 的“远点”是点_____ (填“ A ”、“ B ”、“ C ”或“ D ”),

⊙O 关于直线 m 的“特征数”为_____;

②若直线 n 的函数表达式为 $y = \sqrt{3}x + 4$, 求 ⊙O 关于直线 n 的“特征数”;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 经过点 $M(1, 4)$, 点 F 是坐标平面内一点, 以 F 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径作 ⊙F. 若 ⊙F 与直线 l 相离, 点 $N(-1, 0)$ 是 ⊙F 关于直线 l 的“远点”, 且 ⊙F 关于直线 l 的“特征数”是 $4\sqrt{5}$, 求直线 l 的函数表达式.

【答案】 (1) ①D; 10; ②⊙O 关于直线 n 的“特征数”为 6; (2) 直线 l 的解析式为 $y = -3x + 7$ 或 $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

【解析】

【分析】

(1) ①根据题干中“远点”及“特征数”的定义直接作答即可; ②过圆心 O 作 $OH \perp$ 直线 n , 垂足为点 H , 交 ⊙O 于点 P 、 Q , 首先判断直线 n 也经过点 $E(0, 4)$, 在 $Rt\triangle EOF$ 中, 利用三角函数求出 $\angle EFO = 60^\circ$, 进而求出 PH 的长, 再根据“特征数”的定义计算即可;

(2) 连接 NF 并延长, 设直线 l 的解析式为 $y = kx + b_1$, 用待定系数法得到 $\begin{cases} 4 = k + b_1 & \text{①} \\ n = mk + b_1 & \text{②} \end{cases}$, 再根据两条直线互相垂直, 两个一次函数解析式的系数 k 互为负倒数的关系可设直线 NF 的解析式为 $y = -\frac{1}{k}x + b_2$, 用待定系

数法同理可得 $\begin{cases} 0 = \frac{1}{k} + b_2 & \text{④} \\ n = -\frac{m}{k} + b_2 & \text{⑤} \end{cases}$, 消去 b_1 和 b_2 , 得到关于 m 、 n 的方程组 $\begin{cases} n - 4 = mk - k \\ -n = \frac{1}{k} + \frac{m}{k} \end{cases}$; 根据 ⊙F 关于

直线 l 的“特征数”是 $4\sqrt{5}$, 得出 $NA = \sqrt{10}$, 再利用两点之间的距离公式列出方程 $(m+1)^2 + n^2 = 10$, 把

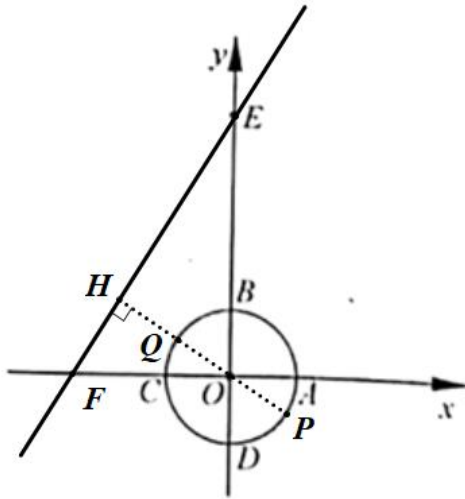
$\begin{cases} m = \frac{k^2 - 4k - 1}{k^2 + 1} \\ n = \frac{4 - 2k}{k^2 + 1} \end{cases}$ 代入, 求出 k 的值, 便得到 m 、 n 的值即点 A 的坐标, 再根据待定系数法求直线 l 的函数

表达式. 注意有两种情况, 不要遗漏.

【详解】 解: (1) ①⊙O 关于直线 m 的“远点”是点 D ,

⊙O 关于直线 m 的“特征数”为 $DB \cdot DE = 2 \times 5 = 10$;

②如下图: 过圆心 O 作 $OH \perp$ 直线 n , 垂足为点 H , 交 ⊙O 于点 P 、 Q ,



∴ 直线 n 的函数表达式为 $y = \sqrt{3}x + 4$,

当 $x=0$ 时, $y=4$; 当 $y=0$ 时, $x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

∴ 直线 n 经过点 $E(0, 4)$, 点 $F(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0)$,

在 $\text{Rt}\triangle EOF$ 中, $\therefore \tan \angle FEO = \frac{FO}{EO} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $\angle FEO = 30^\circ$,

∴ $\angle EFO = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle HOF$ 中, $\therefore \sin \angle HFO = \frac{HO}{FO}$,

∴ $HO = \sin \angle HFO \cdot FO = 2$,

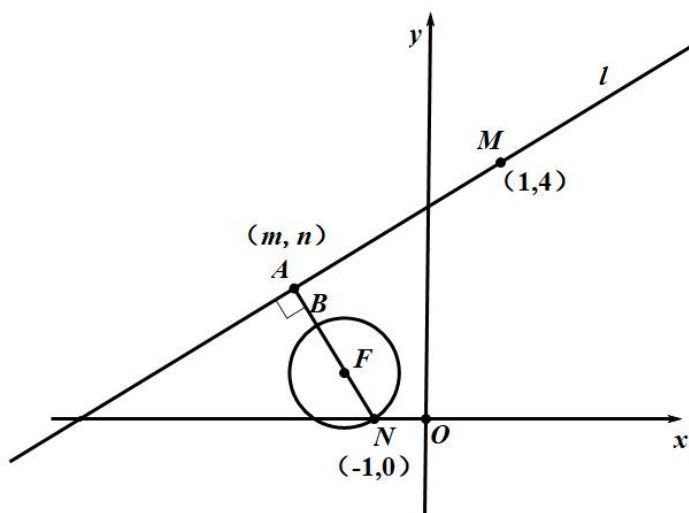
∴ $PH = HO + OP = 3$,

∴ $PQ \cdot PH = 2 \times 3 = 6$,

∴ $\odot O$ 关于直线 n 的“特征数”为 6;

(2) 如下图, $\therefore$ 点 F 是圆心, 点 $N(-1, 0)$ 是“远点”,

∴ 连接 NF 并延长, 则直线 $NF \perp$ 直线 l , 设 NF 与直线 l 的交点为点 $A(m, n)$,



设直线 l 的解析式为 $y=kx+b_1$ ($k \neq 0$) ,

将点 $M(1,4)$ 与 $A(m, n)$ 代入 $y=kx+b_1$ 中,

$$\begin{cases} 4=k+b_1 & \text{①} \\ n=mk+b_1 & \text{②} \end{cases}$$

②-①得: $n-4=mk-k$, ③

又 $\because$ 直线 $NF \perp$ 直线 l ,

$\therefore$ 设直线 NF 的解析式为 $y=-\frac{1}{k}x+b_2$ ($k \neq 0$) ,

将点 $N(-1,0)$ 与 $A(m, n)$ 代入 $y=-\frac{1}{k}x+b_2$ 中,

$$\begin{cases} 0=-\frac{1}{k}+b_2 & \text{④} \\ n=-\frac{m}{k}+b_2 & \text{⑤} \end{cases}$$

④-⑤得: $-n=\frac{1}{k}+\frac{m}{k}$, ⑥

联立方程③与方程⑥, 得:

$$\begin{cases} n-4=mk-k \\ -n=\frac{1}{k}+\frac{m}{k} \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} m=\frac{k^2-4k-1}{k^2+1} \\ n=\frac{4-2k}{k^2+1} \end{cases},$$

∴点 A 的坐标为 $(\frac{k^2-4k-1}{k^2+1}, \frac{4-2k}{k^2+1})$;

又∵⊙F 关于直线 l 的“特征数”是 $4\sqrt{5}$, ⊙F 的半径为 $\sqrt{2}$,

$$\therefore NB \cdot NA = 4\sqrt{5},$$

$$\text{即 } 2\sqrt{2} \cdot NA = 4\sqrt{5},$$

$$\text{解得: } NA = \sqrt{10},$$

$$\therefore [m-(-1)]^2 + (n-0)^2 = (\sqrt{10})^2,$$

$$\text{即 } (m+1)^2 + n^2 = 10,$$

$$\text{把 } \begin{cases} m = \frac{k^2-4k-1}{k^2+1} \\ n = \frac{4-2k}{k^2+1} \end{cases} \text{ 代入, 解得 } k=-3 \text{ 或 } k=\frac{1}{3};$$

当 $k=-3$ 时, $m=2$, $n=1$,

∴点 A 的坐标为 $(2, 1)$,

把点 A $(2, 1)$ 与点 $M(1, 4)$ 代入 $y=kx+b_1$ 中, 解得直线 l 的解析式为 $y=-3x+7$;

当 $k=\frac{1}{3}$ 时, $m=-2$, $n=3$,

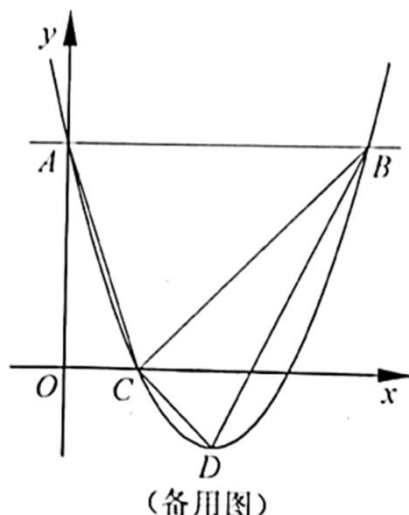
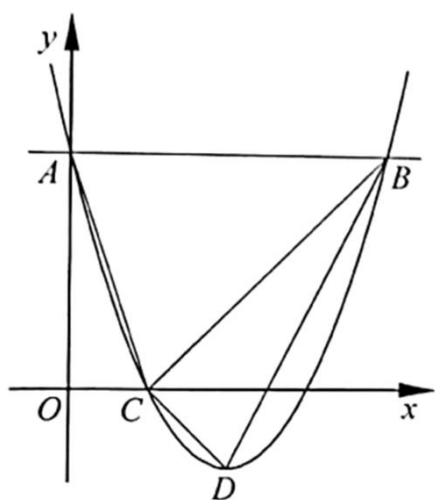
∴点 A 的坐标为 $(-2, 3)$,

把点 A $(-2, 3)$ 与点 $M(1, 4)$ 代入 $y=kx+b_1$ 中, 解得直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

∴直线 l 的解析式为 $y=-3x+7$ 或 $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

【点睛】 本题是一次函数与圆的综合题, 考查了直线与圆的位置关系、一次函数的图象和性质、解直角三角形等, 理解“远点”和“特征数”的意义, 熟练掌握一次函数的图象和性质、两点之间距离公式、两条直线互相垂直的两个一次函数解析式中系数 k 互为负倒数的关系是解题的关键.

28. 如图, 二次函数 $y = x^2 + bx + 3$ 的图像与 y 轴交于点 A, 过点 A 作 x 轴的平行线交抛物线于另一点 B, 抛物线过点 $C(1, 0)$, 且顶点为 D, 连接 AC、BC、BD、CD.



- (1) 填空: $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 点 P 是抛物线上一点, 点 P 的横坐标大于 1, 直线 PC 交直线 BD 于点 Q . 若 $\angle CQD = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;
- (3) 点 E 在直线 AC 上, 点 E 关于直线 BD 对称的点为 F , 点 F 关于直线 BC 对称的点为 G , 连接 AG . 当点 F 在 x 轴上时, 直接写出 AG 的长.

【答案】 (1) -4; (2) $(3, 0)$ 或 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{9})$; (3) $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】

- (1) 根据待定系数法求解即可;
- (2) 分点 Q 在 CD 上方和点 Q 在 CD 下方时, 两种情况, 结合三角函数, 勾股定理等知识求解;
- (3) 设点 C 关于 BD 的对称点为 C' , BD 中点为点 R , 直线 AC 与直线 BD 交于 N' , 设 $C'(p, q)$, 利用点 R 到点 C 和点 C' 的距离相等以及点 N' 到点 C 和点 C' 的距离相等, 求出点 C' 的坐标, 从而得到 $C'N'$ 直线的解析式, 从而求出点 F 坐标, 再利用点 F 和点 G 关于直线 BC 对称, 结合 BC 的表达式可求出点 G 坐标, 最后得到 AG 的长.

【详解】 解: (1) $\because$ 抛物线过点 $C(1, 0)$,
 $\therefore$ 将 $C(1, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + 3$ 得 $0 = 1 + b + 3$,
 解得 $b = -4$,
 故答案为: -4;

(2) 由 (1) 可得抛物线解析式为: $y = x^2 - 4x + 3$,
 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,
 $\therefore A$ 的坐标为 $(0, 3)$,

当 $y=3$ 时得 $3 = x^2 - 4x + 3$,

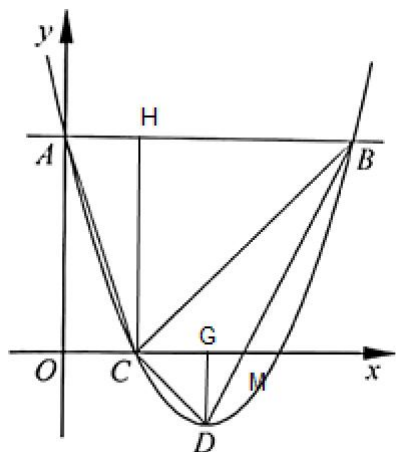
解得 $x_1=0$, $x_2=4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4, 3)$,

$\because y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$,

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(2, -1)$,

设 BD 与 x 轴的交点为 M, 作 $CH \perp AB$ 于 H, $DG \perp CM$ 于 G,



$\therefore \tan \angle ACH = \tan \angle OAC = \frac{1}{3}$,

根据勾股定理可得 $BC=3\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{2}$, $BD=2\sqrt{5}$,

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \tan \angle CBD = \frac{1}{3}$,

$\therefore \angle ACH = \angle CBM$,

$\because \angle HCB = \angle BCM = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACH + \angle HCB = \angle CBM + \angle MCB$,

即 $\angle ACB = \angle CMD$,

Q 在 CD 上方时: 若 $\angle CQD = \angle ACB$, 则 Q 与 M 点重合,

$\because y = x^2 - 4x + 3$ 中, 令 $y=0$, 解得: $x=1$ 或 3 ,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(3, 0)$,

即此时 P 的坐标为 $(3, 0)$;

Q 在 CD 下方时: 过点 Q 作 $QK \perp x$ 轴, 过点 C 作 $CL \perp QM$ 于点 L, 过点 A 作 $AN \perp BC$ 于点 N,

可得: $AB=4$, $BC=3\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{10}$, 设 $CN=x$, 则 $BN=3\sqrt{2}-x$,

在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2 - CN^2 = AB^2 - BN^2$,

即 $(\sqrt{10})^2 - x^2 = 4^2 - (3\sqrt{2} - x)^2$, 解得: $x=\sqrt{2}$,

$$\therefore \cos \angle ACN = \frac{CN}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

设直线 BD 的表达式为: $y=mx+n$, 将 B, D 代入得:

$$\begin{cases} 3 = 4m + n \\ -1 = 2m + n \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m = 2 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BD 的表达式为 $y=2m-5$,

令 $y=0$, 则 $x=\frac{5}{2}$, 即点 M $(\frac{5}{2}, 0)$,

设点 Q 坐标为 $(a, 2a-5)$,

$$\text{则 } QK=5-2a, \quad CM=\frac{3}{2}, \quad QM=\sqrt{\left(a-\frac{5}{2}\right)^2 + (2a-5)^2},$$

$\because \angle ACB = \angle CMD, \quad \angle ACB = \angle CQD$,

$\therefore \angle CMD = \angle CQD$, 即 $CQ=CM=\frac{3}{2}$,

$$\therefore \cos \angle CQD = \cos \angle ACB = \frac{QL}{CQ} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore QL = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \quad QM = \frac{3\sqrt{5}}{5}, \quad CL = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

在 $\triangle CQM$ 中, $\frac{1}{2}CM \cdot KQ = \frac{1}{2}QM \cdot CL$,

$$\text{即 } \frac{3}{2} \cdot KQ = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得: } KQ = \frac{6}{5},$$

$$\therefore CK = \sqrt{CQ^2 - KQ^2} = \frac{9}{10},$$

$$\therefore Q \left(\frac{19}{10}, -\frac{6}{5} \right),$$

设直线 CQ 表达式为: $y=sx+t$, 将点 C 和点 Q 代入,

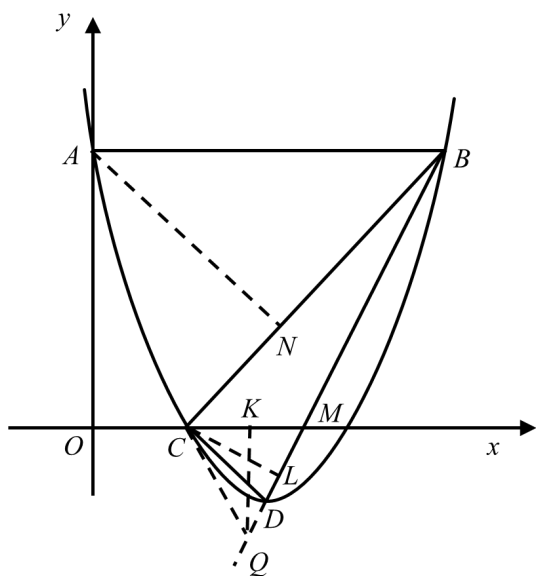
$$\begin{cases} 0 = s + t \\ -\frac{6}{5} = \frac{19}{10}s + t \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} s = -\frac{4}{3} \\ t = \frac{4}{3} \end{cases},$$

则 CQ 表达式为: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$, 联立:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{8}{9} \end{cases},$$

即点 P 坐标为 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{9})$,

综上: 点 P 的坐标为 (3, 0) 或 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{9})$;



(3) 设点 C 关于 BD 的对称点为 C', BD 中点为点 R, 直线 AC 与直线 BD 交于 N',

$\therefore R(3, 1)$, 设 $C'(p, q)$,

由题意可求得: 直线 AC 表达式为: $y = -3x + 3$,

直线 BD 表达式为: $y = 2x - 5$,

直线 BC 的表达式为: $y = x - 1$,

令 $-3x + 3 = 2x - 5$, 解得: $x = \frac{8}{5}$, 则 $y = -\frac{9}{5}$,

$\therefore$ 点 $N'(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5})$,

$\therefore$ 点 C 和 C' 关于直线 BD 对称,

$$\therefore CR = C'R = \frac{1}{2} BD = \sqrt{5}, \quad CN' = C'N' = \sqrt{\left(1 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{则有 } (p-3)^2 + (q-1)^2 = (\sqrt{5})^2, \quad \left(p - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(q + \frac{9}{5}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2,$$

$$\text{即} \begin{cases} p^2 - 6p + q^2 - 2q + 5 = 0 \text{①} \\ p^2 - \frac{16}{5}p + q^2 + \frac{18}{5}q + \frac{11}{5} = 0 \text{②} \end{cases},$$

①-②得: $p = 1 - 2q$ ③, 代入①,

解得: $q = -\frac{6}{5}$ 或 0 (舍), 代入③中, 得: $p = \frac{17}{5}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} p = \frac{17}{5} \\ q = -\frac{6}{5} \end{cases}, \text{ 即点 } C' \left(\frac{17}{5}, -\frac{6}{5} \right),$$

$$\therefore N' \left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5} \right),$$

求得直线 $C'N'$ 的表达式为: $y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$,

$\therefore$ 点 F 在 x 轴上, 令 $y=0$, 则 $x=7$,

$\therefore$ 点 $F(7, 0)$,

又 $\because$ 点 F 和点 G 关于直线 BC 对称, $BC: y=x-1$, 连接 CG ,

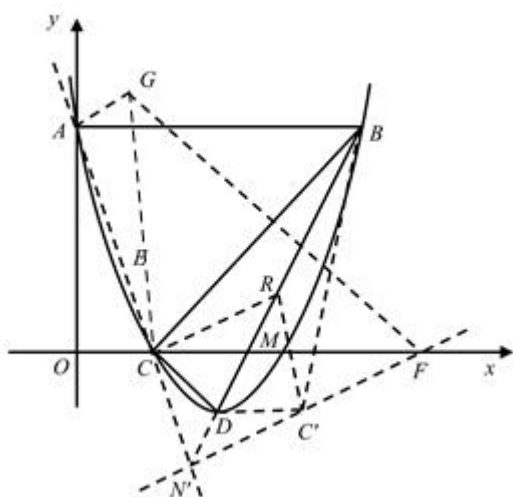
可得 $\angle BCF = 45^\circ = \angle BCG$,

$\therefore \angle FCG = 90^\circ$,

$\therefore CG = CF = 6$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(1, 6)$, 又 $A(0, 3)$,

$\therefore AG$ 的长为 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.



【点睛】 本题是二次函数综合题, 考查了二次函数解析式, 一次函数, 三角函数, 面积法, 对称的性质, 知识点较多, 难度较大, 解题时要注意分类讨论, 画图相应图形, 利用数形结合思想解答.

