

2019 年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

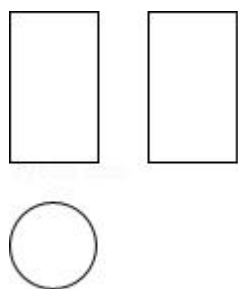
1. (2 分) -3 的相反数是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

2. (2 分) 若代数式 $\frac{x+1}{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是 ()

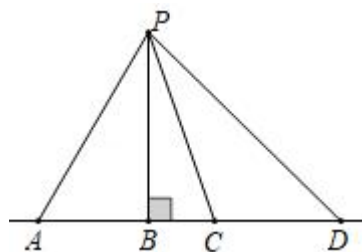
- A. $x = -1$ B. $x = 3$ C. $x \neq -1$ D. $x \neq 3$

3. (2 分) 如图是某几何体的三视图，该几何体是 ()



- A. 圆柱 B. 正方体 C. 圆锥 D. 球

4. (2 分) 如图，在线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 中，长度最小的是 ()



- A. 线段 PA B. 线段 PB C. 线段 PC D. 线段 PD

5. (2 分) 若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $1:2$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长的比为 ()

- A. $2:1$ B. $1:2$ C. $4:1$ D. $1:4$

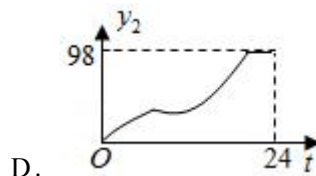
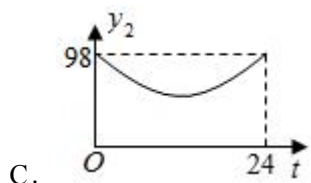
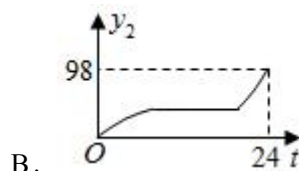
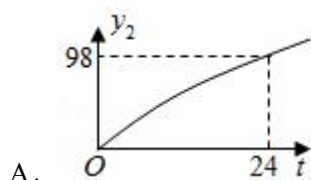
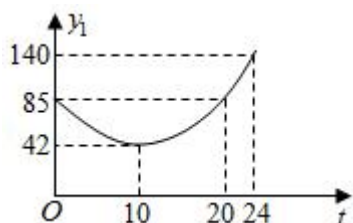
6. (2 分) 下列各数中与 $2+\sqrt{3}$ 的积是有理数的是 ()

- A. $2+\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2-\sqrt{3}$

7. (2 分) 判断命题“如果 $n < 1$ ，那么 $n^2 - 1 < 0$ ”是假命题，只需举出一个反例。反例中的 n 可以为 ()

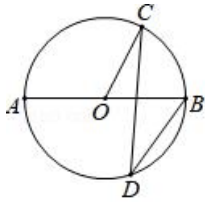
- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

8. (2分) 随着时代的进步, 人们对 $PM_{2.5}$ (空气中直径小于等于 2.5 微米的颗粒) 的关注日益密切. 某市一天中 $PM_{2.5}$ 的值 y_1 (ug/m^3) 随时间 t (h) 的变化如图所示, 设 y_2 表示 0 时到 t 时 $PM_{2.5}$ 的值的极差 (即 0 时到 t 时 $PM_{2.5}$ 的最大值与最小值的差), 则 y_2 与 t 的函数关系大致是 ()

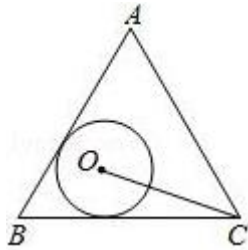


二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

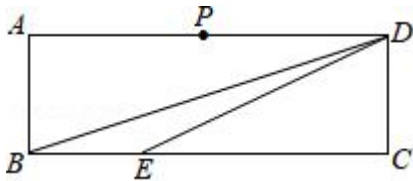
9. (2分) 计算: $a^3 \div a = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. (2分) 4 的算术平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. (2分) 分解因式: $ax^2 - 4a = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. (2分) 如果 $\angle a = 35^\circ$, 那么 $\angle a$ 的余角等于 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.
13. (2分) 如果 $a - b - 2 = 0$, 那么代数式 $1 + 2a - 2b$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. (2分) 平面直角坐标系中, 点 $P(-3, 4)$ 到原点的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. (2分) 若 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 是关于 x, y 的二元一次方程 $ax + y = 3$ 的解, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. (2分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C, D 是 $\odot O$ 上的两点, $\angle AOC = 120^\circ$, 则 $\angle CDB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



17. (2分) 如图, 半径为 $\sqrt{3}$ 的 $\odot O$ 与边长为8的等边三角形 ABC 的两边 AB 、 BC 都相切, 连接 OC , 则 $\tan \angle OCB =$ _____.



18. (2分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 3AB = 3\sqrt{10}$, 点 P 是 AD 的中点, 点 E 在 BC 上, $CE = 2BE$, 点 M 、 N 在线段 BD 上. 若 $\triangle PMN$ 是等腰三角形且底角与 $\angle DEC$ 相等, 则 $MN =$ _____.



三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 84 分。请在答题卡指定区域内作答, 如无特殊说明, 解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程)

19. (8分) 计算:

$$(1) \pi^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\sqrt{3})^2;$$

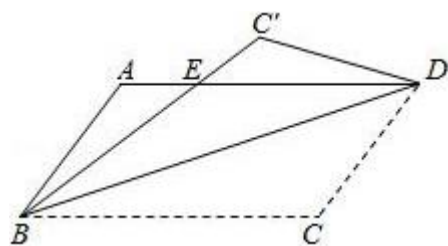
$$(2) (x-1)(x+1) - x(x-1).$$

20. (6分) 解不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 3x-8 \leq -x, \end{cases}$ 并把解集在数轴上表示出来.

21. (8分) 如图, 把平行四边形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠, 点 C 落在点 C' 处, BC' 与 AD 相交于点 E .

(1) 连接 AC' , 则 AC' 与 BD 的位置关系是_____;

(2) EB 与 ED 相等吗? 证明你的结论.

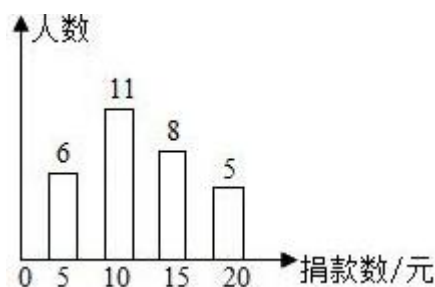


22. (8分) 在“慈善一日捐”活动中, 为了解某校学生的捐款情况, 抽样调查了该校部分学生的捐款数 (单位: 元), 并绘制成下面的统计图.

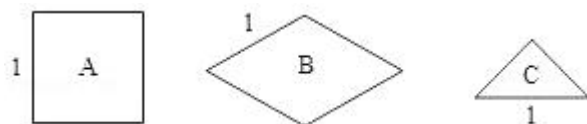
(1) 本次调查的样本容量是_____, 这组数据的众数为_____元;

(2) 求这组数据的平均数;

(3) 该校共有 600 名学生参与捐款, 请你估计该校学生的捐款总数.



23. (8分) 将图中的 A 型 (正方形)、 B 型 (菱形)、 C 型 (等腰直角三角形) 纸片分别放在 3 个盒子中, 盒子的形状、大小、质地都相同, 再将这 3 个盒子装入一只不透明的袋子中.



(1) 搅匀后从中摸出 1 个盒子, 盒中的纸片既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是_____;

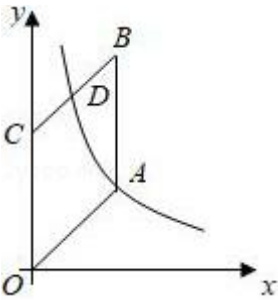
(2) 搅匀后先从中摸出 1 个盒子 (不放回), 再从余下的 2 个盒子中摸出 1 个盒子, 把

摸出的 2 个盒中的纸片长度相等的边拼在一起，求拼成的图形是轴对称图形的概率.（不重叠无缝隙拼接）

24.（8 分）甲、乙两人每小时共做 30 个零件，甲做 180 个零件所用的时间与乙做 120 个零件所用的时间相等. 甲、乙两人每小时各做多少个零件？

25.（8 分）如图，在 $\square OABC$ 中， $OA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOC = 45^\circ$ ，点 C 在 y 轴上，点 D 是 BC 的中点，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A 、 D .

- （1）求 k 的值；
- （2）求点 D 的坐标.



26. (10 分)【阅读】

数学中，常对同一个量（图形的面积、点的个数、三角形的内角和等）用两种不同的方法计算，从而建立相等关系，我们把这一思想称为“算两次”．“算两次”也称做富比尼原理，是一种重要的数学思想．

【理解】

(1) 如图 1，两个边长分别为 a 、 b 、 c 的直角三角形和一个两条直角边都是 c 的直角三角形拼成一个梯形．用两种不同的方法计算梯形的面积，并写出你发现的结论；

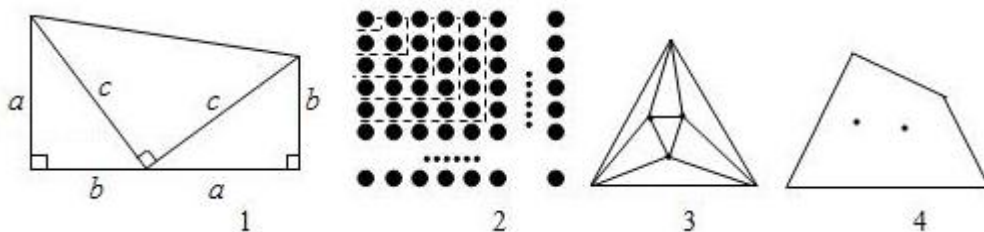
(2) 如图 2， n 行 n 列的棋子排成一个正方形，用两种不同的方法计算棋子的个数，可得等式： $n^2 =$ _____；

【运用】

(3) n 边形有 n 个顶点，在它的内部再画 m 个点，以 $(m+n)$ 个点为顶点，把 n 边形剪成若干个三角形，设最多可以剪得 y 个这样的三角形．当 $n=3$ ， $m=3$ 时，如图 3，最多可以剪得 7 个这样的三角形，所以 $y=7$ ．

①当 $n=4$ ， $m=2$ 时，如图 4， $y=$ _____；当 $n=5$ ， $m=$ _____ 时， $y=9$ ；

②对于一般的情形，在 n 边形内画 m 个点，通过归纳猜想，可得 $y=$ _____（用含 m 、 n 的代数式表示）．请对同一个量用算两次的方法说明你的猜想成立．

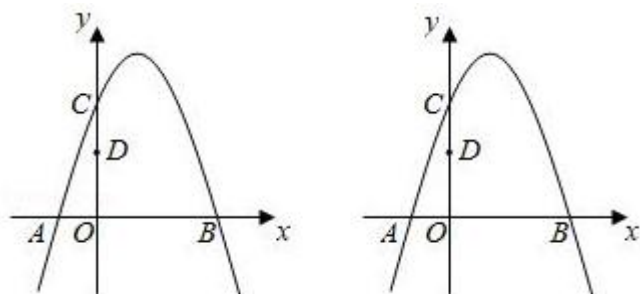


27. (10分) 如图, 二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B , 与 y 轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 D 为 OC 的中点, 点 P 在抛物线上.

(1) $b =$ _____;

(2) 若点 P 在第一象限, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H , PH 与 BC 、 BD 分别交于点 M 、 N . 是否存在这样的点 P , 使得 $PM = MN = NH$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若点 P 的横坐标小于 3, 过点 P 作 $PQ \perp BD$, 垂足为 Q , 直线 PQ 与 x 轴交于点 R , 且 $S_{\triangle PQB} = 2S_{\triangle QRB}$, 求点 P 的坐标.



(备用图)

28. (10分) 已知平面图形 S , 点 P 、 Q 是 S 上任意两点, 我们把线段 PQ 的长度的最大值称为平面图形 S 的“宽距”. 例如, 正方形的宽距等于它的对角线的长度.

(1) 写出下列图形的宽距:

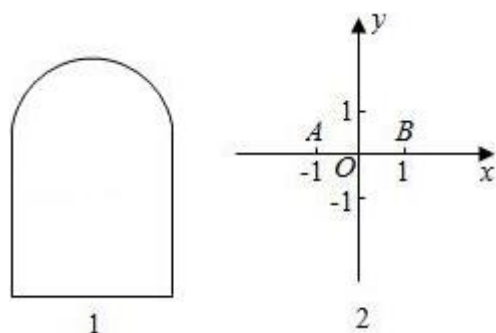
① 半径为 1 的圆: _____;

② 如图 1, 上方是半径为 1 的半圆, 下方是正方形的三条边的“窗户形”: _____;

(2) 如图 2, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$, C 是坐标平面内的点, 连接 AB 、 BC 、 CA 所形成的图形为 S , 记 S 的宽距为 d .

① 若 $d=2$, 用直尺和圆规画出点 C 所在的区域并求它的面积 (所在区域用阴影表示);

② 若点 C 在 $\odot M$ 上运动, $\odot M$ 的半径为 1, 圆心 M 在过点 $(0, 2)$ 且与 y 轴垂直的直线上. 对于 $\odot M$ 上任意点 C , 都有 $5 \leq d \leq 8$, 直接写出圆心 M 的横坐标 x 的取值范围.



2019 年江苏省常州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

1.（2 分）-3 的相反数是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. -3

【分析】根据相反数的定义：只有符号不同的两个数称互为相反数计算即可．

【解答】解：（-3）+3=0．

故选：C．

【点评】本题主要考查了相反数的定义，根据相反数的定义做出判断，属于基础题，比较简单．

2.（2 分）若代数式 $\frac{x+1}{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是（ ）

- A. $x = -1$ B. $x = 3$ C. $x \neq -1$ D. $x \neq 3$

【分析】分式有意义的条件是分母不为 0．

【解答】解： $\because$ 代数式 $\frac{x+1}{x-3}$ 有意义，

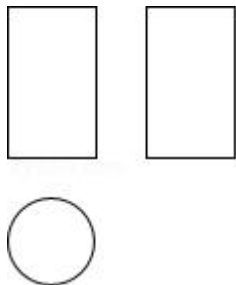
$$\therefore x - 3 \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 3.$$

故选：D．

【点评】本题运用了分式有意义的条件知识点，关键要知道分母不为 0 是分式有意义的条件．

3.（2 分）如图是某几何体的三视图，该几何体是（ ）



- A. 圆柱 B. 正方体 C. 圆锥 D. 球

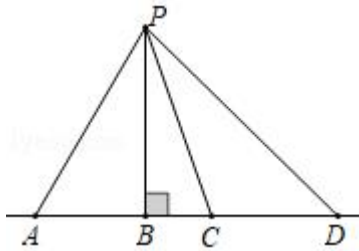
【分析】通过俯视图为圆得到几何体为圆柱或球，然后通过主视图和左视图可判断几何体为圆锥．

【解答】解：该几何体是圆柱．

故选：A．

【点评】本题考查了由三视图判断几何体：由三视图想象几何体的形状，首先，应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状，然后综合起来考虑整体形状．熟记一些简单的几何体的三视图对复杂几何体的想象会有帮助．

4. (2分) 如图，在线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 中，长度最小的是 ()



- A. 线段 PA B. 线段 PB C. 线段 PC D. 线段 PD

【分析】由垂线段最短可解．

【解答】解：由直线外一点到直线上所有点的连线中，垂线段最短，可知答案为 B ．

故选：B．

【点评】本题考查的是直线外一点到直线上所有点的连线中，垂线段最短，这属于基本的性质定理，属于简单题．

5. (2分) 若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $1:2$ ，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长的比为 ()

- A. $2:1$ B. $1:2$ C. $4:1$ D. $1:4$

【分析】直接利用相似三角形的性质求解．

【解答】解： $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，相似比为 $1:2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长的比为 $1:2$ ．

故选：B．

【点评】本题考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应角相等，对应边的比相等．相似三角形（多边形）的周长的比等于相似比；相似三角形的对应线段（对应中线、对应角平分线、对应边上的高）的比也等于相似比．相似三角形的面积的比等于相似比的平方．

6. (2分) 下列各数中与 $2+\sqrt{3}$ 的积是有理数的是 ()

- A. $2+\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2-\sqrt{3}$

【分析】利用平方差公式可知与 $2+\sqrt{3}$ 的积是有理数的为 $2-\sqrt{3}$;

【解答】解： $\because (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$;

故选：D.

【点评】本题考查二次根式的混合运算；熟练掌握运算规律是解题的关键.

7. (2分) 判断命题“如果 $n < 1$ ，那么 $n^2 - 1 < 0$ ”是假命题，只需举出一个反例. 反例中的 n 可以为 ()

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

【分析】反例中的 n 满足 $n < 1$ ，使 $n^2 - 1 \geq 0$ ，从而对各选项进行判断.

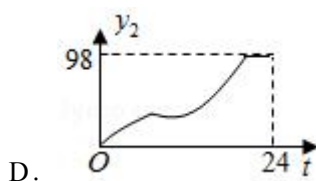
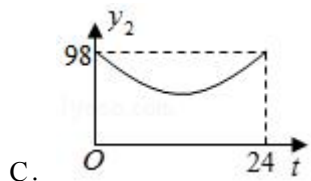
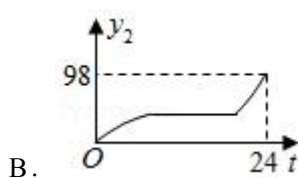
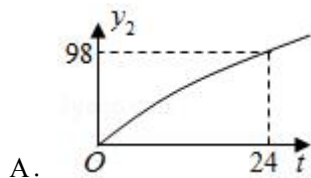
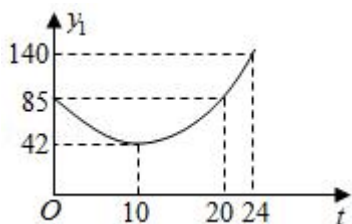
【解答】解：当 $n = -2$ 时，满足 $n < 1$ ，但 $n^2 - 1 = 3 > 0$ ，

所以判断命题“如果 $n < 1$ ，那么 $n^2 - 1 < 0$ ”是假命题，举出 $n = -2$.

故选：A.

【点评】本题考查了命题与定理：命题的“真”“假”是就命题的内容而言. 任何一个命题非真即假. 要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

8. (2分) 随着时代的进步，人们对 $PM_{2.5}$ (空气中直径小于等于 2.5 微米的颗粒) 的关注日益密切. 某市一天中 $PM_{2.5}$ 的值 y_1 (ug/m^3) 随时间 t (h) 的变化如图所示，设 y_2 表示 0 时到 t 时 $PM_{2.5}$ 的值的极差 (即 0 时到 t 时 $PM_{2.5}$ 的最大值与最小值的差)，则 y_2 与 t 的函数关系大致是 ()



【分析】根据极差的定义，分别从 $t=0$ 、 $0 < t \leq 10$ 、 $10 < t \leq 20$ 及 $20 < t \leq 24$ 时，极差 y_2

随 t 的变化而变化的情况，从而得出答案.

【解答】解：当 $t = 0$ 时，极差 $y_2 = 85 - 85 = 0$,

当 $0 < t \leq 10$ 时，极差 y_2 随 t 的增大而增大，最大值为 43；

当 $10 < t \leq 20$ 时，极差 y_2 随 t 的增大保持 43 不变；

当 $20 < t \leq 24$ 时，极差 y_2 随 t 的增大而增大，最大值为 98；

故选：B.

【点评】本题主要考查极差，解题的关键是掌握极差的定义及函数图象定义与画法.

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上）

9. (2 分) 计算： $a^3 \div a = \underline{a^2}$.

【分析】直接利用同底数幂的除法运算法则计算得出答案.

【解答】解： $a^3 \div a = a^2$.

故答案为： a^2 .

【点评】此题主要考查了同底数幂的除法运算，正确掌握运算法则是解题关键.

10. (2 分) 4 的算术平方根是 2.

【分析】根据算术平方根的含义和求法，求出 4 的算术平方根是多少即可.

【解答】解：4 的算术平方根是 2.

故答案为：2.

【点评】此题主要考查了算术平方根的性质和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①被开方数 a 是非负数；②算术平方根 a 本身是非负数. 求一个非负数的算术平方根与求一个数的平方互为逆运算，在求一个非负数的算术平方根时，可以借助乘方运算来寻找.

11. (2 分) 分解因式： $ax^2 - 4a = \underline{a(x+2)(x-2)}$.

【分析】先提取公因式 a ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】解： $ax^2 - 4a$,

$$= a(x^2 - 4),$$

$$= a(x+2)(x-2).$$

【点评】本题考查用提公因式法和公式法进行因式分解的能力，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

12. (2分) 如果 $\angle \alpha = 35^\circ$, 那么 $\angle \alpha$ 的余角等于 55 $^\circ$.

【分析】若两角互余, 则两角和为 90° , 从而可知 $\angle \alpha$ 的余角为 90° 减去 $\angle \alpha$, 从而可解.

【解答】解: $\because \angle \alpha = 35^\circ$,

$$\therefore \angle \alpha \text{ 的余角等于 } 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

故答案为: 55.

【点评】本题考查的两角互余的基本概念, 题目属于基础概念题, 比较简单.

13. (2分) 如果 $a - b - 2 = 0$, 那么代数式 $1 + 2a - 2b$ 的值是 5 .

【分析】将所求式子化简后再将已知条件中 $a - b = 2$ 整体代入即可求值;

【解答】解: $\because a - b - 2 = 0$,

$$\therefore a - b = 2,$$

$$\therefore 1 + 2a - 2b = 1 + 2(a - b) = 1 + 4 = 5;$$

故答案为 5.

【点评】本题考查代数式求值; 熟练掌握整体代入法求代数式的值是解题的关键.

14. (2分) 平面直角坐标系中, 点 $P(-3, 4)$ 到原点的距离是 5 .

【分析】作 $PA \perp x$ 轴于 A , 则 $PA = 4$, $OA = 3$, 再根据勾股定理求解.

【解答】解: 作 $PA \perp x$ 轴于 A , 则 $PA = 4$, $OA = 3$.

则根据勾股定理, 得 $OP = 5$.

故答案为 5.

【点评】此题考查了点的坐标的知识以及勾股定理的运用. 点到 x 轴的距离即为点的纵坐标的绝对值.

15. (2分) 若 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程 $ax + y = 3$ 的解, 则 $a =$ 1 .

【分析】把 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入二元一次方程 $ax + y = 3$ 中即可求 a 的值.

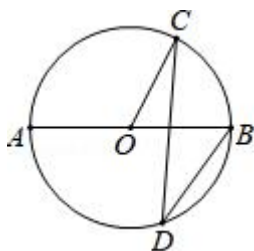
【解答】解: 把 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入二元一次方程 $ax + y = 3$ 中,

$$a + 2 = 3, \text{ 解得 } a = 1.$$

故答案是: 1.

【点评】本题运用了二元一次方程的解的知识点, 运算准确是解决此题的关键.

16. (2分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 、 D 是 $\odot O$ 上的两点, $\angle AOC = 120^\circ$, 则 $\angle CDB =$ 30 $^\circ$.



【分析】先利用邻补角计算出 $\angle BOC$ ，然后根据圆周角定理得到 $\angle CDB$ 的度数．

【解答】解： $\because \angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

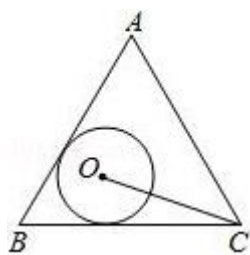
$$\therefore \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BOC = 30^\circ .$$

故答案为 30．

【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

17. (2 分) 如图，半径为 $\sqrt{3}$ 的 $\odot O$ 与边长为 8 的等边三角形 ABC 的两边 AB 、 BC 都相切，

连接 OC ，则 $\tan \angle OCB = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ．



【分析】根据切线长定理得出 $\angle OBC = \angle OBA = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$ ，解直角三角形求得 BD ，

即可求得 CD ，然后解直角三角形 OCD 即可求得 $\tan \angle OCB$ 的值．

【解答】解：连接 OB ，作 $OD \perp BC$ 于 D ，

$\because \odot O$ 与等边三角形 ABC 的两边 AB 、 BC 都相切，

$$\therefore \angle OBC = \angle OBA = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ ,$$

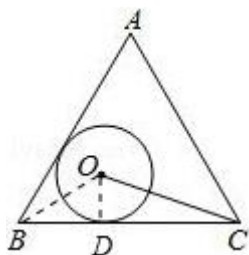
$$\therefore \tan \angle OBC = \frac{OD}{BD},$$

$$\therefore BD = \frac{OD}{\tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 8 - 3 = 5,$$

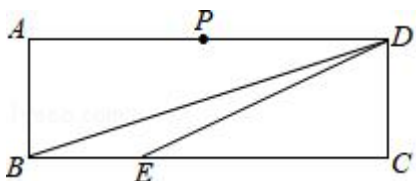
$$\therefore \tan \angle OCB = \frac{OD}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ．



【点评】本题考查了切线的性质，等边三角形的性质，解直角三角形等，作出辅助线构建直角三角形是解题的关键．

18. (2分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 3AB = 3\sqrt{10}$ ，点 P 是 AD 的中点，点 E 在 BC 上， $CE = 2BE$ ，点 M 、 N 在线段 BD 上．若 $\triangle PMN$ 是等腰三角形且底角与 $\angle DEC$ 相等，则 $MN = \underline{6 \text{ 或 } \frac{15}{8}}$ ．



【分析】分两种情况：① MN 为等腰 $\triangle PMN$ 的底边时，作 $PF \perp MN$ 于 F ，则 $\angle PFM = \angle PFN = 90^\circ$ ，由矩形的性质得出 $AB = CD$ ， $BC = AD = 3AB = 3\sqrt{10}$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，得出 $AB = CD = \sqrt{10}$ ， $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ ，证明 $\triangle PDF \sim \triangle BDA$ ，得出 $\frac{PF}{AB} = \frac{PD}{BD}$ ，求出 $PF = \frac{3}{2}$ ，证出 $CE = 2CD$ ，由等腰三角形的性质得出 $MF = NF$ ， $\angle PNF = \angle DEC$ ，证出 $\triangle PNF \sim \triangle DEC$ ，得出 $\frac{NF}{PF} = \frac{CE}{CD} = 2$ ，求出 $NF = 2PF = 3$ ，即可得出答案；

② MN 为等腰 $\triangle PMN$ 的腰时，作 $PF \perp BD$ 于 F ，由①得： $PF = \frac{3}{2}$ ， $MF = 3$ ，设 $MN = PN = x$ ，则 $FN = 3 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle PNF$ 中，由勾股定理得出方程，解方程即可．

【解答】解：分两种情况：

① MN 为等腰 $\triangle PMN$ 的底边时，作 $PF \perp MN$ 于 F ，如图 1 所示：

则 $\angle PFM = \angle PFN = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD$ ， $BC = AD = 3AB = 3\sqrt{10}$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore AB = CD = \sqrt{10}$ ， $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ ，

$\because$ 点 P 是 AD 的中点，

$$\therefore PD = \frac{1}{2}AD = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

$$\because \angle PDF = \angle BDA,$$

$$\therefore \triangle PDF \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{PF}{AB} = \frac{PD}{BD}, \text{ 即 } \frac{PF}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{10},$$

$$\text{解得: } PF = \frac{3}{2},$$

$$\because CE = 2BE,$$

$$\therefore BC = AD = 3BE,$$

$$\therefore BE = CD,$$

$$\therefore CE = 2CD,$$

$$\because \triangle PMN \text{ 是等腰三角形且底角与 } \angle DEC \text{ 相等, } PF \perp MN,$$

$$\therefore MF = NF, \angle PNF = \angle DEC,$$

$$\because \angle PFN = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PNF \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{NF}{PF} = \frac{CE}{CD} = 2,$$

$$\therefore MF = NF = 2PF = 3,$$

$$\therefore MN = 2NF = 6;$$

② MN 为等腰 $\triangle PMN$ 的腰时, 作 $PF \perp BD$ 于 F , 如图 2 所示:

$$\text{由①得: } PF = \frac{3}{2}, MF = 3,$$

$$\text{设 } MN = PN = x, \text{ 则 } FN = 3 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PNF \text{ 中, } \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (3 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{15}{8}, \text{ 即 } MN = \frac{15}{8};$$

$$\text{综上所述, } MN \text{ 的长为 } 6 \text{ 或 } \frac{15}{8};$$

$$\text{故答案为: } 6 \text{ 或 } \frac{15}{8}.$$

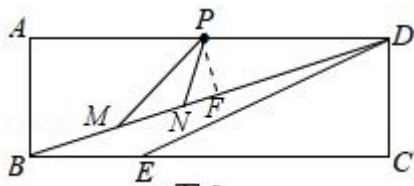


图 2

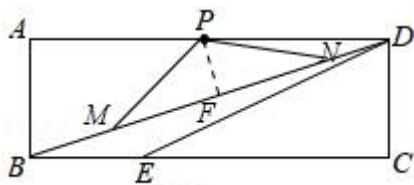


图 1

【点评】本题考查了矩形的性质、等腰三角形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识；熟练掌握矩形的性质和等腰三角形的性质，证明三角形相似是解题的关键。

三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分。请在答题卡指定区域内作答，如无特殊说明，解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

19.（8 分）计算：

$$(1) \pi^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\sqrt{3})^2;$$

$$(2) (x-1)(x+1) - x(x-1).$$

【分析】根据零指数幂，负指数幂，多项式乘以多项式（单项式）的运算法则准确计算即可；

$$\text{【解答】解：}(1) \pi^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\sqrt{3})^2 = 1 + 2 - 3 = 0;$$

$$(2) (x-1)(x+1) - x(x-1) = x^2 - 1 - x^2 + x = x - 1;$$

【点评】本题考查实数的运算，整式的运算；熟练掌握零指数幂，负指数幂，多项式乘以多项式（单项式）的运算法则是解题的关键。

20.（6 分）解不等式组 $\begin{cases} x+1>0, \\ 3x-8\leq-x, \end{cases}$ 并把解集在数轴上表示出来。

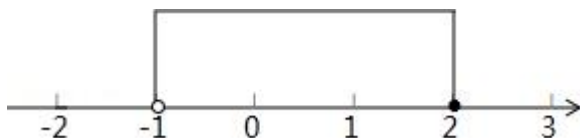
【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集。

【解答】解：解不等式 $x+1>0$ ，得： $x>-1$ ，

解不等式 $3x-8\leq-x$ ，得： $x\leq 2$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1<x\leq 2$ ，

将解集表示在数轴上如下：

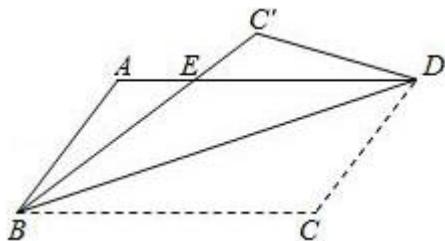


【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组和在数轴上表示不等式的解集，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

21. (8分) 如图，把平行四边形纸片 $ABCD$ 沿 BD 折叠，点 C 落在点 C' 处， BC' 与 AD 相交于点 E .

(1) 连接 AC' ，则 AC' 与 BD 的位置关系是 $AC' \parallel BD$ ；

(2) EB 与 ED 相等吗？证明你的结论．



【分析】(1) 根据 $AD = C'B$ ， $ED = EB$ ，即可得到 $AE = CE$ ，再根据三角形内角和定理，即可得到 $\angle EAC' = \angle ECA = \angle EBD = \angle EDB$ ，进而得出 $AC' \parallel BD$ ；

(2) 依据平行线的性质以及折叠的性质，即可得到 $\angle EDB = \angle EBD$ ，进而得出 $BE = DE$ ．

【解答】解：(1) 连接 AC' ，则 AC' 与 BD 的位置关系是 $AC' \parallel BD$ ，

故答案为： $AC' \parallel BD$ ；

(2) EB 与 ED 相等．

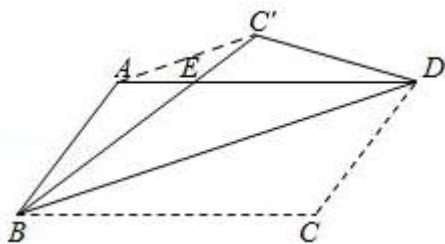
由折叠可得， $\angle CBD = \angle C'BD$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle CBD$ ，

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$ ，

$\therefore BE = DE$ ．



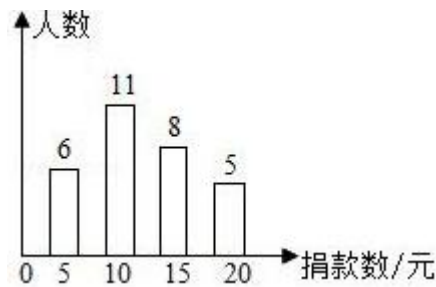
【点评】本题主要考查了折叠问题以及平行四边形的性质，折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．

22.（8分）在“慈善一日捐”活动中，为了解某校学生的捐款情况，抽样调查了该校部分学生的捐款数（单位：元），并绘制成下面的统计图．

（1）本次调查的样本容量是 30，这组数据的众数为 10 元；

（2）求这组数据的平均数；

（3）该校共有 600 名学生参与捐款，请你估计该校学生的捐款总数．



【分析】（1）由题意得出本次调查的样本容量是 $6+11+8+5=30$ ，由众数的定义即可得出结果；

（2）由加权平均数公式即可得出结果；

（3）由总人数乘以平均数即可得出答案．

【解答】解：（1）本次调查的样本容量是 $6+11+8+5=30$ ，这组数据的众数为 10 元；

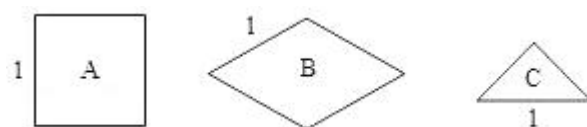
故答案为：30，10；

（2）这组数据的平均数为 $\frac{6 \times 5 + 11 \times 10 + 8 \times 15 + 5 \times 20}{30} = 12$ （元）；

（3）估计该校学生的捐款总数为 $600 \times 12 = 7200$ （元）．

【点评】此题考查的是条形统计图的综合运用．读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据．本题也考查了平均数、中位数、众数的定义以及利用样本估计总体的思想．

23.（8分）将图中的 A 型（正方形）、B 型（菱形）、C 型（等腰直角三角形）纸片分别放在 3 个盒子中，盒子的形状、大小、质地都相同，再将这 3 个盒子装入一只不透明的袋子中．



（1）搅匀后从中摸出 1 个盒子，盒中的纸片既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是

$$\frac{2}{3};$$

(2) 搅匀后先从中摸出 1 个盒子 (不放回), 再从余下的 2 个盒子中摸出 1 个盒子, 把摸出的 2 个盒中的纸片长度相等的边拼在一起, 求拼成的图形是轴对称图形的概率. (不重叠无缝隙拼接)

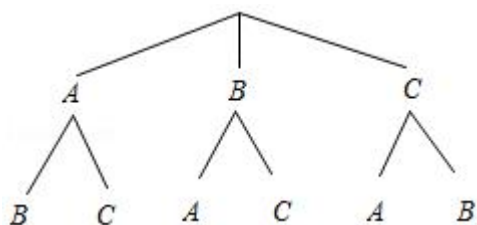
【分析】(1) 依据搅匀后从中摸出 1 个盒子, 可能为 A 型 (正方形)、 B 型 (菱形) 或 C 型 (等腰直角三角形) 这 3 种情况, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的有 2 种, 即可得到盒中的纸片既是轴对称图形又是中心对称图形的概率;

(2) 依据共有 6 种等可能的情况, 其中拼成的图形是轴对称图形的情况有 2 种: A 和 C , C 和 A , 即可得到拼成的图形是轴对称图形的概率.

【解答】解: (1) 搅匀后从中摸出 1 个盒子, 可能为 A 型 (正方形)、 B 型 (菱形) 或 C 型 (等腰直角三角形) 这 3 种情况, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的有 2 种, $\therefore$ 盒中的纸片既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{3}$;

故答案为: $\frac{2}{3}$;

(2) 画树状图为:



共有 6 种等可能的情况, 其中拼成的图形是轴对称图形的情况有 2 种: A 和 C , C 和 A ,

$\therefore$ 拼成的图形是轴对称图形的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【点评】本题主要考查了概率公式, 列举法 (树形图法) 求概率的关键在于列举出所有可能的结果, 列表法是一种, 但当一个事件涉及三个或更多元素时, 为不重不漏地列出所有可能的结果, 通常采用树形图.

24. (8 分) 甲、乙两人每小时共做 30 个零件, 甲做 180 个零件所用的时间与乙做 120 个零件所用的时间相等. 甲、乙两人每小时各做多少个零件?

【分析】设甲每小时做 x 个零件, 则乙每小时做 $(30 - x)$ 个零件, 根据关键语句 “甲做 180 个零件所用的时间与乙做 120 个零件所用的时间相等” 列出方程, 再求解即可.

【解答】解: 设甲每小时做 x 个零件, 则乙每小时做 $(30 - x)$ 个零件,

由题意得： $\frac{180}{x} = \frac{120}{30-x}$,

解得： $x = 18$,

经检验： $x = 18$ 是原分式方程的解，

则 $30 - 18 = 12$ (个)。

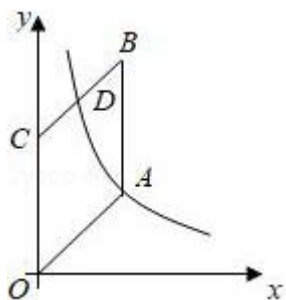
答：甲每小时做 18 个零件，则乙每小时做 12 个零件。

【点评】此题主要考查了分式方程的应用，关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，列出方程，注意检验。

25. (8 分) 如图，在 $\square OABC$ 中， $OA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOC = 45^\circ$ ，点 C 在 y 轴上，点 D 是 BC 的中点，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A 、 D 。

(1) 求 k 的值；

(2) 求点 D 的坐标。



【分析】(1) 根据已知条件求出 A 点坐标即可；

(2) 四边形 $OABC$ 是平行四边形 $OABC$ ，则有 $AB \perp x$ 轴，可知 B 的横纵标为 2， D 点的横坐标为 1，结合解析式即可求解；

【解答】解：(1) $\because OA = 2\sqrt{2}$ ， $\angle AOC = 45^\circ$ ，

$$\therefore A(2, 2),$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore y = \frac{4}{x};$$

(2) 四边形 $OABC$ 是平行四边形 $OABC$ ，

$$\therefore AB \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore B \text{ 的横纵标为 } 2,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore D \text{ 点的横坐标为 } 1,$$

$\therefore D(1, 4)$;

【点评】 本题考查反比例函数的图象及性质，平行四边形的性质；利用平行四边形的性质确定点 B 的横坐标是解题的关键．

26. (10 分) 【阅读】

数学中，常对同一个量（图形的面积、点的个数、三角形的内角和等）用两种不同的方法计算，从而建立相等关系，我们把这一思想称为“算两次”．“算两次”也称做富比尼原理，是一种重要的数学思想．

【理解】

(1) 如图 1，两个边长分别为 a 、 b 、 c 的直角三角形和一个两条直角边都是 c 的直角三角形拼成一个梯形．用两种不同的方法计算梯形的面积，并写出你发现的结论；

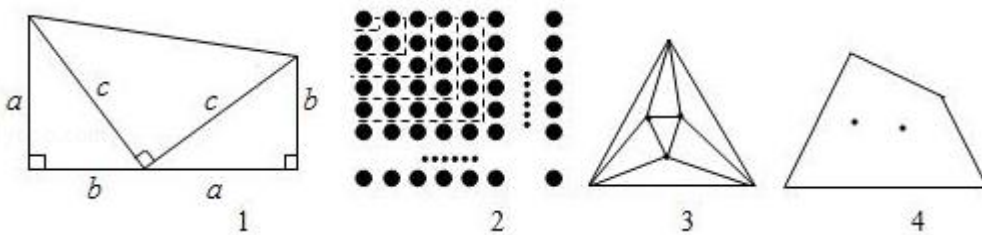
(2) 如图 2， n 行 n 列的棋子排成一个正方形，用两种不同的方法计算棋子的个数，可得等式： $n^2 = \underline{1+3+5+7+\cdots+2n-1}$ ；

【运用】

(3) n 边形有 n 个顶点，在它的内部再画 m 个点，以 $(m+n)$ 个点为顶点，把 n 边形剪成若干个三角形，设最多可以剪得 y 个这样的三角形．当 $n=3$ ， $m=3$ 时，如图 3，最多可以剪得 7 个这样的三角形，所以 $y=7$ ．

①当 $n=4$ ， $m=2$ 时，如图 4， $y = \underline{6}$ ；当 $n=5$ ， $m = \underline{3}$ 时， $y = 9$ ；

②对于一般的情形，在 n 边形内画 m 个点，通过归纳猜想，可得 $y = \underline{n+2(m-1)}$ （用含 m 、 n 的代数式表示）．请对同一个量用算两次的方法说明你的猜想成立．



【分析】(1) 此等腰梯形的面积有三部分组成，利用等腰梯形的面积等于三个直角三角形的面积之和列出方程并整理．

(2) 由图可知 n 行 n 列的棋子排成一个正方形棋子个数为 n^2 ，每层棋子分别为 1, 3, 5, 7, $\cdots$, $2n-1$ ．故可得用两种不同的方法计算棋子的个数，即可解答．

(3) 根据探画出图形究不难发现，三角形内部每增加一个点，分割部分增加 2 部分，即可得出结论．

【解答】解：（1）有三个 Rt△ 其面积分别为 ab , $\frac{1}{2}ab$ 和 $\frac{1}{2}c^2$.

直角梯形的面积为 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$.

由图形可知： $\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$

整理得 $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, $a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$,

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$.

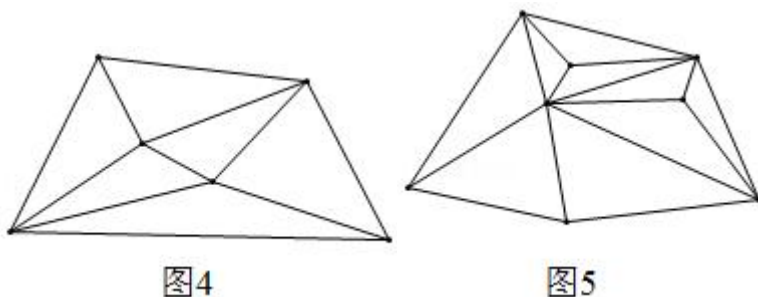
故结论为：直角长分别为 a 、 b 斜边为 c 的直角三角形中 $a^2 + b^2 = c^2$.

（2） n 行 n 列的棋子排成一个正方形棋子个数为 n^2 ，每层棋子分别为 1, 3, 5, 7, $\dots$, $2n - 1$.

由图形可知： $n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1$.

故答案为 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1$.

（3）①如图 4，当 $n = 4$, $m = 2$ 时， $y = 6$,



如图 5，当 $n = 5$, $m = 3$ 时， $y = 9$.

②算法 I： y 个三角形，共 $3y$ 条边，其中 n 边形的每边都只使用一次，其他边都各使用两次，所以 n 边形内部共有 $(3y - n) \div 2$ 条线段；算法 II： n 边形内部有 1 个点时，其内部共有 n 条线段，共分成 n 个三角形，每增加一个点，都必在某个小三角形内，从而增加 3 条线段，所以 n 边形内部有 m 个点时，其内部共有 $n + 3(m - 1)$ 条线段，由 $(3y - n) \div 2 = n + 3(m - 1)$ 化简得： $y = n + 2(m - 1)$.

故答案为：①6, 3；② $n + 2(m - 1)$.

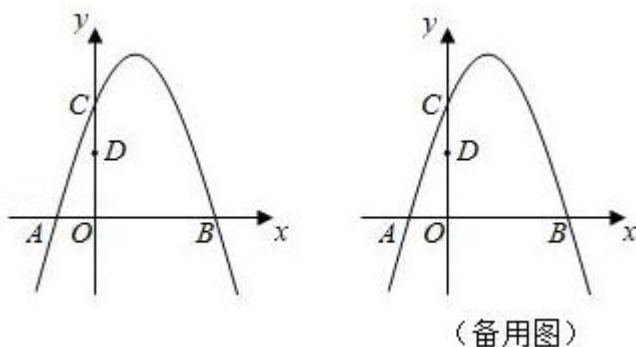
【点评】本题考查了图形的变化规律的问题，读懂题目信息，找到变化规律是解题的关键.

27. (10 分) 如图，二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B ，与 y 轴交于点 C ，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，点 D 为 OC 的中点，点 P 在抛物线上.

(1) $b = \underline{2}$;

(2) 若点 P 在第一象限, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H , PH 与 BC 、 BD 分别交于点 M 、 N . 是否存在这样的点 P , 使得 $PM = MN = NH$? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若点 P 的横坐标小于 3, 过点 P 作 $PQ \perp BD$, 垂足为 Q , 直线 PQ 与 x 轴交于点 R , 且 $S_{\triangle PQB} = 2S_{\triangle QRB}$, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 把点 A 坐标代入二次函数解析式即求得 b 的值.

(2) 求点 B 、 C 、 D 坐标, 求直线 BC 、 BD 解析式. 设点 P 横坐标为 t , 则能用 t 表示点 P 、 M 、 N 、 H 的坐标, 进而用含 t 的式子表示 PM 、 MN 、 NH 的长. 以 $PM = MN$ 为等量关系列得关于 t 的方程, 求得 t 的值合理 (满足 P 在第一象限), 故存在满足条件的点 P , 且求得点 P 坐标.

(3) 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于 F , 交直线 BD 于 E , 根据同角的余角相等易证 $\angle EPQ = \angle OBD$, 所以 $\cos \angle EPQ = \cos \angle OBD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即在 $\text{Rt} \triangle PQE$ 中, $\cos \angle EPQ = \frac{PQ}{PE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 在 $\text{Rt} \triangle PFR$ 中, $\cos \angle RPF = \frac{PF}{PR} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 进而得 $PQ = \frac{2\sqrt{5}}{5}PE$, $PR = \frac{\sqrt{5}}{2}PF$. 设点 P 横坐标为 t , 可用 t 表示 PE 、 PF , 即得到用 t 表示 PQ 、 PR . 又由 $S_{\triangle PQB} = 2S_{\triangle QRB}$ 易得 $PQ = 2QR$. 要对点 P 位置进行分类讨论得到 PQ 与 PR 的关系, 即列得关于 t 的方程. 求得 t 的值要注意是否符合各种情况下 t 的取值范围.

【解答】解: (1) $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$

$$\therefore -1 - b + 3 = 0$$

解得: $b = 2$

故答案为: 2.

(2) 存在满足条件呢的点 P , 使得 $PM = MN = NH$.

$\because$ 二次函数解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$

当 $x=0$ 时 $y=3$,

$$\therefore C(0, 3)$$

当 $y=0$ 时, $-x^2+2x+3=0$

解得: $x_1=-1, x_2=3$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$

$\because$ 点 D 为 OC 的中点,

$$\therefore D(0, \frac{3}{2})$$

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,

设 $P(t, -t^2+2t+3) (0 < t < 3)$, 则 $M(t, -t+3), N(t, -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}), H(t, 0)$

$$\therefore PM = -t^2+2t+3 - (-t+3) = -t^2+3t, MN = -t+3 - (-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}, NH = -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$$

$$\therefore MN = NH$$

$$\because PM = MN$$

$$\therefore -t^2+3t = -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$$

解得: $t_1=\frac{1}{2}, t_2=3$ (舍去)

$$\therefore P(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$$

$\therefore P$ 的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$, 使得 $PM = MN = NH$.

(3) 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于 F , 交直线 BD 于 E

$$\because OB=3, OD=\frac{3}{2}, \angle BOD=90^\circ$$

$$\therefore BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \angle OBD = \frac{OB}{BD} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\because PQ \perp BD$ 于点 $Q, PF \perp x$ 轴于点 F

$$\therefore \angle PQE = \angle BQR = \angle PFR = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PRF + \angle OBD = \angle PRF + \angle EPQ = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EPQ = \angle OBD, \text{ 即 } \cos \angle EPQ = \cos \angle OBD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{在 Rt}\triangle PQE \text{ 中, } \cos \angle EPQ = \frac{PQ}{PE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore PQ = \frac{2\sqrt{5}}{5}PE$$

$$\text{在 Rt}\triangle PFR \text{ 中, } \cos \angle RPF = \frac{PF}{PR} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore PR = \frac{PF}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}PF$$

$$\because S_{\triangle PQB} = 2S_{\triangle QRB}, S_{\triangle PQB} = \frac{1}{2}BQ \cdot PQ, S_{\triangle QRB} = \frac{1}{2}BQ \cdot QR$$

$$\therefore PQ = 2QR$$

设直线 BD 与抛物线交于点 G

$$\therefore -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -x^2 + 2x + 3, \text{ 解得: } x_1 = 3 \text{ (即点 } B \text{ 横坐标)}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 横坐标为 } -\frac{1}{2}$$

$$\text{设 } P(t, -t^2 + 2t + 3) (t < 3), \text{ 则 } E(t, -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})$$

$$\therefore PF = |-t^2 + 2t + 3|, PE = |-t^2 + 2t + 3 - (-\frac{1}{2}t + \frac{3}{2})| = |-t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}|$$

①若 $-\frac{1}{2} < t < 3$, 则点 P 在直线 BD 上方, 如图 2,

$$\therefore PF = -t^2 + 2t + 3, PE = -t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}$$

$$\because PQ = 2QR$$

$$\therefore PQ = \frac{2}{3}PR$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5}PE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}PF, \text{ 即 } 6PE = 5PF$$

$$\therefore 6(-t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}) = 5(-t^2 + 2t + 3)$$

解得: $t_1 = 2, t_2 = 3$ (舍去)

$$\therefore P(2, 3)$$

②若 $-1 < t < -\frac{1}{2}$, 则点 P 在 x 轴上方、直线 BD 下方, 如图 3,

此时, $PQ < QR$, 即 $S_{\triangle PQB} = 2S_{\triangle QRB}$ 不成立.

③若 $t < -1$, 则点 P 在 x 轴下方, 如图 4,

$$\therefore PF = -(-t^2 + 2t + 3) = t^2 - 2t - 3, PE = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} - (-t^2 + 2t + 3) = t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}$$

$$\because PQ = 2QR$$

同角的余角相等，三角函数的应用．第（3）题解题过程容易受第（2）题影响而没有分类讨论点 P 的位置，要通过图象发现每种情况下相同的和不同的解题思路．

28.（10分）已知平面图形 S ，点 P 、 Q 是 S 上任意两点，我们把线段 PQ 的长度的最大值称为平面图形 S 的“宽距”．例如，正方形的宽距等于它的对角线的长度．

（1）写出下列图形的宽距：

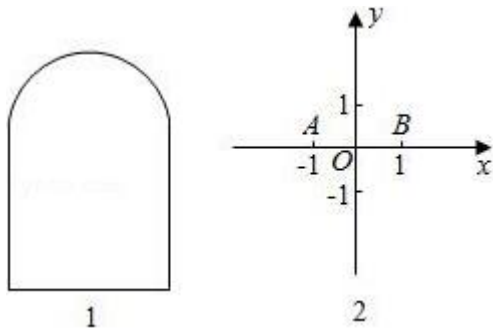
①半径为 1 的圆： 2；

②如图 1，上方是半径为 1 的半圆，下方是正方形的三条边的“窗户形”： $1 + \sqrt{5}$ ；

（2）如图 2，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ， C 是坐标平面内的点，连接 AB 、 BC 、 CA 所形成的图形为 S ，记 S 的宽距为 d ．

①若 $d = 2$ ，用直尺和圆规画出点 C 所在的区域并求它的面积（所在区域用阴影表示）；

②若点 C 在 $\odot M$ 上运动， $\odot M$ 的半径为 1，圆心 M 在过点 $(0, 2)$ 且与 y 轴垂直的直线上．对于 $\odot M$ 上任意点 C ，都有 $5 \leq d \leq 8$ ，直接写出圆心 M 的横坐标 x 的取值范围．



【分析】（1）①平面图形 S 的“宽距”的定义即可解决问题．

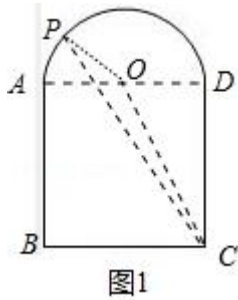
②如图 1，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，设半圆的圆心为 O ，点 P 是 $\odot O$ 上一点，连接 OP ， PC ， OC ．求出 PC 的最大值即可解决问题．

（2）①如图 2 - 1 中，连接 AB 、 BC 、 CA 所形成的图形是图中阴影部分 S_1 和 S_2 ，点 C 所在的区域的面积是 $S_1 + S_2$ ．

②如图 2 - 2 中，当点 M 在 y 轴的右侧时，连接 AM ，作 $MT \perp x$ 轴于 T ．求出 $d = 5$ 或 8 时，点 M 的坐标，即可判断，再根据对称性求出点 M 在 y 轴左侧的情形即可．

【解答】解：（1）①半径为 1 的圆的宽距离为 2，
故答案为 2．

②如图 1，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，设半圆的圆心为 O ，点 P 是 $\odot O$ 上一点，连接 OP ， PC ， OC ．



在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中, $OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

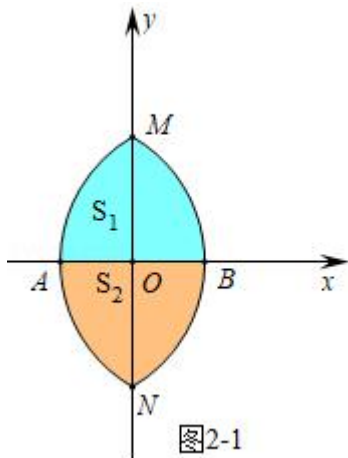
$\therefore OP + OC \geq PC$,

$\therefore PC \leq 1 + \sqrt{5}$,

$\therefore$ 这个“窗户形”的宽距为 $1 + \sqrt{5}$.

故答案为 $1 + \sqrt{5}$.

(2) ①如图 2-1 中, 连接 AB 、 BC 、 CA 所形成的图形是图中阴影部分 S_1 和 S_2 (分别以 A 、 B 为圆心, 以 AB 为半径所作的圆心角为 120° 的两条弧所形成的阴影部分即为点 C 所在的区域).



$\therefore$ 点 C 所在的区域的面积为 $S_1 + S_2 = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$.

②如图 2-2 中, 当点 M 在 y 轴的右侧时, 连接 AM , 作 $MT \perp x$ 轴于 T .

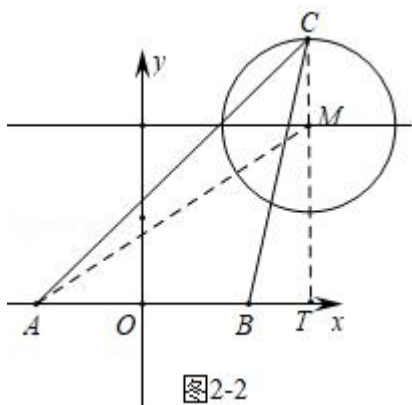


图2-2

$\because AC \leq AM + CM$, 又 $\because 5 \leq d \leq 8$,

$\therefore$ 当 $d = 5$ 时, $AM = 6$,

$\therefore AT = \sqrt{AM^2 - MT^2} = 4\sqrt{2}$, 此时 $M(4\sqrt{2} - 1, 2)$,

当 $d = 8$ 时, $AM = 7$,

$\therefore AT = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$, 此时 $M(3\sqrt{5} - 1, 2)$,

$\therefore$ 满足条件的点 M 的横坐标的范围为 $4\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 3\sqrt{5} - 1$.

当点 M 在 y 轴的左侧时, 满足条件的点 M 的横坐标的范围为 $-3\sqrt{5} + 1 \leq x \leq -4\sqrt{2} + 1$.

【点评】本题属于圆综合题, 考查了平面图形 S 的“宽距”的定义, 正方形的判定和性质, 三角形的三边关系等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题, 学会寻找特殊位置解决问题, 属于中考压轴题.