

2018 年江苏省扬州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. (3 分) -5 的倒数是 ()

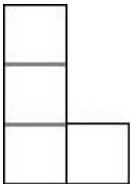
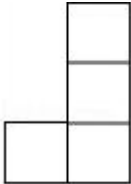
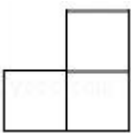
- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. 5 D. -5

2. (3 分) 使 $\sqrt{x-3}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 3$ B. $x < 3$ C. $x \geq 3$ D. $x \neq 3$

3. (3 分) 如图所示的几何体的主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

4. (3 分) 下列说法正确的是 ()

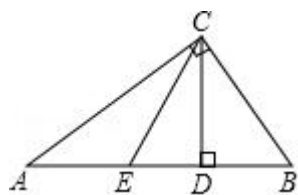
- A. 一组数据 2, 2, 3, 4, 这组数据的中位数是 2
- B. 了解一批灯泡的使用寿命的情况, 适合抽样调查
- C. 小明的三次数学成绩是 126 分, 130 分, 136 分, 则小明这三次成绩的平均数是 131 分
- D. 某日最高气温是 7°C , 最低气温是 -2°C , 则改日气温的极差是 5°C
5. (3 分) 已知点 A (x_1 , 3), B (x_2 , 6) 都在反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象上, 则下列关系式一定正确的是 ()

- A. $x_1 < x_2 < 0$ B. $x_1 < 0 < x_2$ C. $x_2 < x_1 < 0$ D. $x_2 < 0 < x_1$

6. (3分) 在平面直角坐标系的第二象限内有一点M, 点M到x轴的距离为3, 到y轴的距离为4, 则点M的坐标是 ()

- A. (3, -4) B. (4, -3) C. (-4, 3) D. (-3, 4)

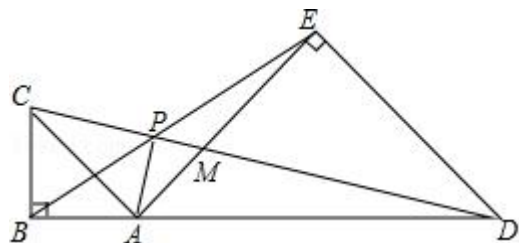
7. (3分) 在Rt△ABC中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$ 于D, CE平分 $\angle ACD$ 交AB于E, 则下列结论一定成立的是 ()



- A. $BC=EC$ B. $EC=BE$ C. $BC=BE$ D. $AE=EC$

8. (3分) 如图, 点A在线段BD上, 在BD的同侧做等腰Rt△ABC和等腰Rt△ADE, CD与BE、AE分别交于点P, M. 对于下列结论:

① $\triangle BAE \sim \triangle CAD$; ② $MP \cdot MD = MA \cdot ME$; ③ $2CB^2 = CP \cdot CM$. 其中正确的是 ()



- A. ①②③ B. ① C. ①② D. ②③

二、填空题 (本大题共有 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. (3分) 在人体血液中, 红细胞直径约为 0.00077cm, 数据 0.00077 用科学记数法表示为_____.

10. (3分) 因式分解: $18 - 2x^2 =$ _____.

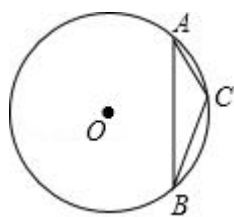
11. (3分) 有4根细木棒, 长度分别为2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 从中任选3根, 恰好能搭成一个三角形的概率是_____.

12. (3分) 若 m 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根, 则 $6m^2 - 9m + 2015$ 的值为_____.

13. (3分) 用半径为10cm, 圆心角为 120° 的扇形纸片围成一个圆锥的侧面, 则这个圆锥的底面圆半径为_____cm.

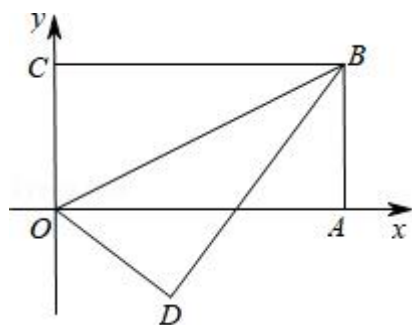
14. (3分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+1 \geq 5x \\ \frac{x-1}{2} > -2 \end{cases}$ 的解集为_____.

15. (3分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为2, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 135^\circ$, 则 $AB =$ _____.

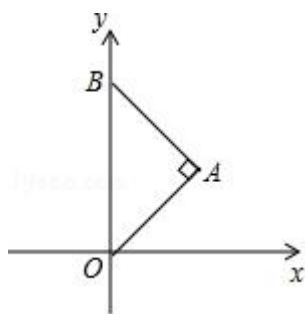


16. (3分) 关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

17. (3分) 如图, 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 A 的坐标为 $(8, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 4)$, 把矩形 $OABC$ 沿 OB 折叠, 点 C 落在点 D 处, 则点 D 的坐标为_____.



18. (3分) 如图, 在等腰 $Rt\triangle ABO$, $\angle A = 90^\circ$, 点 B 的坐标为 $(0, 2)$, 若直线 $l: y = mx + m$ ($m \neq 0$) 把 $\triangle ABO$ 分成面积相等的两部分, 则 m 的值为_____.



三、解答题（本大题共有 10 小题，共 96 分.请在答题卡指定区域内作答，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19.（8 分）计算或化简

(1) $(\frac{1}{2})^{-1} + |\sqrt{3} - 2| + \tan 60^\circ$

(2) $(2x+3)^2 - (2x+3)(2x-3)$

20.（8 分）对于任意实数 a , b , 定义关于“ $\otimes$ ”的一种运算如下: $a \otimes b = 2a + b$. 例如 $3 \otimes 4 = 2 \times 3 + 4 = 10$.

(1) 求 $2 \otimes (-5)$ 的值;

(2) 若 $x \otimes (-y) = 2$, 且 $2y \otimes x = -1$, 求 $x+y$ 的值.

21.（8 分）江苏省第十九届运动会将于 2018 年 9 月在扬州举行开幕式，某校为了了解学生“最喜爱的省运动会项目”的情况，随机抽取了部分学生进行问卷调查，规定每人从“篮球”、“羽毛球”、“自行车”、“游泳”和“其他”五个选项中必须选择且只能选择一个，并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图表.

最喜爱的省运会项目的人数调查统计表

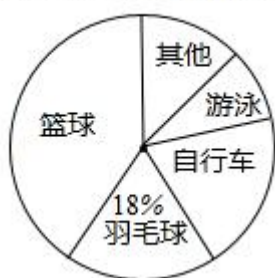
最喜爱的项目	人数
篮球	20
羽毛球	9
自行车	10
游泳	a

其他	b
合计	

根据以上信息，请回答下列问题：

- (1) 这次调查的样本容量是_____， $a+b$ _____.
- (2) 扇形统计图中“自行车”对应的扇形的圆心角为_____.
- (3) 若该校有 1200 名学生，估计该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数.

最喜爱的省运会项目的人数分布扇形统计图



22. (8 分) 4 张相同的卡片分别写着数字 -1、-3、4、6，将卡片的背面朝上，并洗匀.

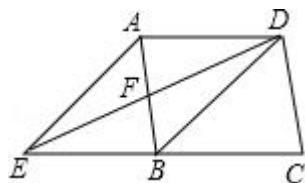
- (1) 从中任意抽取 1 张，抽到的数字是奇数的概率是_____；
- (2) 从中任意抽取 1 张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 k ；再从余下的卡片中任意抽取 1 张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 b . 利用画树状图或列表的方法，求这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率.

23. (10 分) 京沪铁路是我国东部沿海地区纵贯南北的交通大动脉，全长 1462km，是我国最繁忙的铁路干线之一. 如果从北京到上海的客车速度是货车速度的 2 倍，客车比货车少用 6h，那么货车的速度是多少？（精确到 0.1km/h）

24. (10 分) 如图，在平行四边形 ABCD 中， $DB=DA$ ，点 F 是 AB 的中点，连接 DF 并延长，交 CB 的延长线于点 E，连接 AE.

- (1) 求证：四边形 AEBD 是菱形；

(2) 若 $DC=\sqrt{10}$, $\tan \angle DCB=3$, 求菱形 $AEBD$ 的面积.

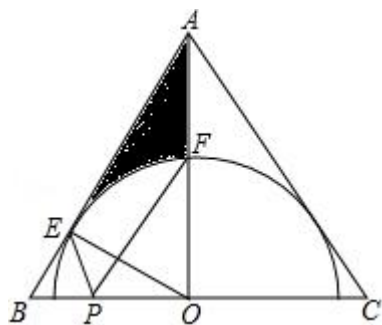


25. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AO \perp BC$ 于点 O , $OE \perp AB$ 于点 E , 以点 O 为圆心, OE 为半径作半圆, 交 AO 于点 F .

(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若点 F 是 A 的中点, $OE=3$, 求图中阴影部分的面积;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 P 是 BC 边上的动点, 当 $PE+PF$ 取最小值时, 直接写出 BP 的长.

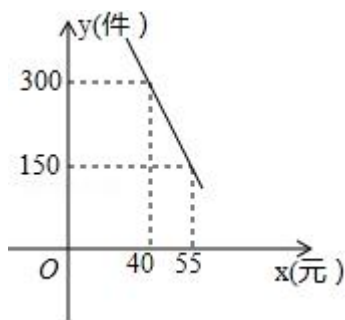


26. (10 分) “扬州漆器”名扬天下, 某网店专门销售某种品牌的漆器笔筒, 成本为 30 元/件, 每天销售 y (件) 与销售单价 x (元) 之间存在一次函数关系, 如图所示.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 如果规定每天漆器笔筒的销售量不低于 240 件, 当销售单价为多少元时, 每天获取的利润最大, 最大利润是多少?

(3) 该网店店主热心公益事业, 决定从每天的销售利润中捐出 150 元给希望工程, 为了保证捐款后每天剩余利润不低于 3600 元, 试确定该漆器笔筒销售单价的范围.



27. (12 分) 问题呈现

如图 1，在边长为 1 的正方形网格中，连接格点 D，N 和 E，C，DN 和 EC 相交于点 P，求 $\tan \angle CPN$ 的值.

方法归纳

求一个锐角的三角函数值，我们往往需要找出（或构造出）一个直角三角形. 观察发现问题中 $\angle CPN$ 不在直角三角形中，我们常常利用网格画平行线等方法解决此类问题，比如连接格点 M，N，可得 $MN \parallel EC$ ，则 $\angle DNM = \angle CPN$ ，连接 DM，那么 $\angle CPN$ 就变换到 $Rt\triangle DMN$ 中.

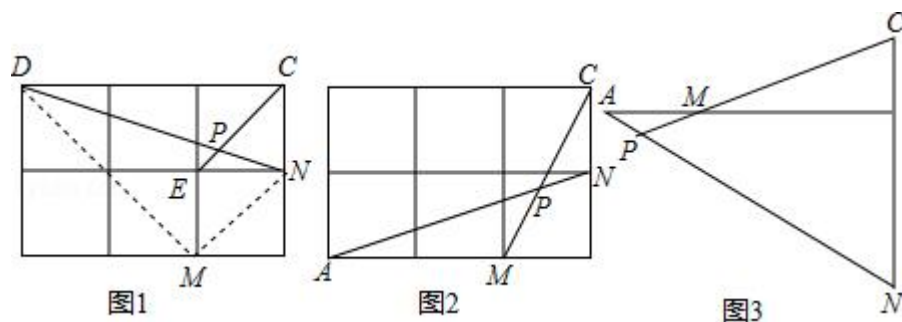
问题解决

(1) 直接写出图 1 中 $\tan \angle CPN$ 的值为_____；

(2) 如图 2，在边长为 1 的正方形网格中，AN 与 CM 相交于点 P，求 $\cos \angle CPN$ 的值；

思维拓展

(3) 如图 3， $AB \perp BC$ ， $AB = 4BC$ ，点 M 在 AB 上，且 $AM = BC$ ，延长 CB 到 N，使 $BN = 2BC$ ，连接 AN 交 CM 的延长线于点 P，用上述方法构造网格求 $\angle CPN$ 的度数.



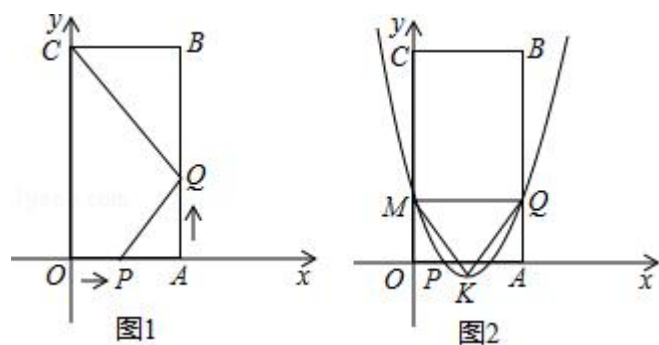
28. (12 分) 如图 1, 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 6)$, 点 P 从点 O 出发, 沿 OA 以每秒 1 个单位长度的速度向点 A 出发, 同时点 Q 从点 A 出发, 沿 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动, 当点 P 与点 A 重合时运动停止. 设运动时间为 t 秒.

(1) 当 $t=2$ 时, 线段 PQ 的中点坐标为_____;

(2) 当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时, 求 t 的值;

(3) 当 $t=1$ 时, 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 P, Q 两点, 与 y 轴交于点 M , 抛物线的顶点为 K , 如图 2 所示, 问该抛物线上是否存在点 D , 使 $\angle MQD=\frac{1}{2}\angle MKQ$?

若存在, 求出所有满足条件的 D 的坐标; 若不存在, 说明理由.



2018 年江苏省扬州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. (3 分) -5 的倒数是 ()

A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. 5 D. -5

【分析】依据倒数的定义求解即可.

【解答】解: -5 的倒数 $-\frac{1}{5}$.

故选: A.

【点评】本题主要考查的是倒数的定义, 掌握倒数的定义是解题的关键.

2. (3 分) 使 $\sqrt{x-3}$ 有意义的 x 的取值范围是 ()

A. $x > 3$ B. $x < 3$ C. $x \geq 3$ D. $x \neq 3$

【分析】根据被开方数是非负数, 可得答案.

【解答】解: 由题意, 得

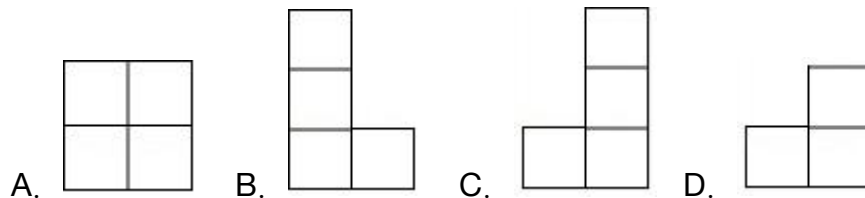
$$x - 3 \geq 0,$$

$$\text{解得 } x \geq 3,$$

故选: C.

【点评】本题考查了二次根式有意义的条件, 利用得出不等式是解题关键.

3. (3 分) 如图所示的几何体的主视图是 ()



【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案.

【解答】解：从正面看第一层是两个小正方形，第二层左边一个小正方形，第三层左边一个小正方形，

故选：B.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图.

4. (3 分) 下列说法正确的是 ()

- A. 一组数据 2, 2, 3, 4, 这组数据的中位数是 2
- B. 了解一批灯泡的使用寿命的情况, 适合抽样调查
- C. 小明的三次数学成绩是 126 分, 130 分, 136 分, 则小明这三次成绩的平均数是 131 分
- D. 某日最高气温是 7°C , 最低气温是 -2°C , 则改日气温的极差是 5°C

【分析】直接利用中位数的定义以及抽样调查的意义和平均数的求法、极差的定义分别分析得出答案.

【解答】解：A、一组数据 2, 2, 3, 4, 这组数据的中位数是 2.5, 故此选项错误;

B、了解一批灯泡的使用寿命的情况, 适合抽样调查, 正确;

C、小明的三次数学成绩是 126 分, 130 分, 136 分, 则小明这三次成绩的平均数是 $130\frac{2}{3}$ 分, 故此选项错误;

D、某日最高气温是 7°C ，最低气温是 -2°C ，则改日气温的极差是 $7 - (-2) = 9^{\circ}\text{C}$ ，故此选项错误；

故选：B.

【点评】此题主要考查了中位数、抽样调查的意义和平均数的求法、极差，正确把握相关定义是解题关键.

5. (3 分) 已知点 A $(x_1, 3)$ ，B $(x_2, 6)$ 都在反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象上，则下列关系式一定正确的是 ()

A. $x_1 < x_2 < 0$ B. $x_1 < 0 < x_2$ C. $x_2 < x_1 < 0$ D. $x_2 < 0 < x_1$

【分析】根据反比例函数的性质，可得答案.

【解答】解：由题意，得

$k = -3$ ，图象位于第二象限，或第四象限，

在每一象限内， y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore 3 < 6,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0,$$

故选：A.

【点评】本题考查了反比例函数，利用反比例函数的性质是解题关键.

6. (3 分) 在平面直角坐标系的第二象限内有一点 M，点 M 到 x 轴的距离为 3，到 y 轴的距离为 4，则点 M 的坐标是 ()

A. $(3, -4)$ B. $(4, -3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(-3, 4)$

【分析】根据地二象限内点的坐标特征，可得答案.

【解答】解：由题意，得

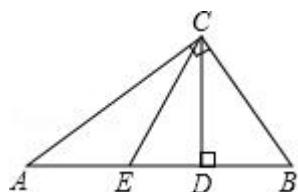
$$x = -4, y = 3,$$

即 M 点的坐标是 $(-4, 3)$,

故选：C.

【点评】本题考查了点的坐标，熟记点的坐标特征是解题关键.

7. (3分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD\perp AB$ 于 D ， CE 平分 $\angle ACD$ 交 AB 于 E ，则下列结论一定成立的是 ()



A. $BC=EC$ B. $EC=BE$ C. $BC=BE$ D. $AE=EC$

【分析】根据同角的余角相等可得出 $\angle BCD=\angle A$ ，根据角平分线的定义可得出 $\angle ACE=\angle DCE$ ，再结合 $\angle BEC=\angle A+\angle ACE$ 、 $\angle BCE=\angle BCD+\angle DCE$ 即可得出 $\angle BEC=\angle BCE$ ，利用等角对等边即可得出 $BC=BE$ ，此题得解.

【解答】解： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $CD\perp AB$ ，

$\therefore \angle ACD+\angle BCD=90^\circ$ ， $\angle ACD+\angle A=90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD=\angle A$.

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$ ，

$\therefore \angle ACE=\angle DCE$.

又 $\because \angle BEC=\angle A+\angle ACE$ ， $\angle BCE=\angle BCD+\angle DCE$ ，

$\therefore \angle BEC=\angle BCE$ ，

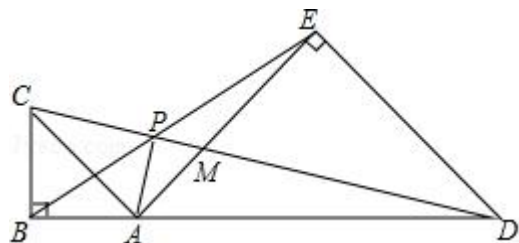
$\therefore BC=BE$.

故选：C.

【点评】本题考查了直角三角形的性质、三角形外角的性质、余角、角平分线的定义以及等腰三角形的判定，通过角的计算找出 $\angle BEC=\angle BCE$ 是解题的关键.

8. (3分) 如图, 点 A 在线段 BD 上, 在 BD 的同侧做等腰 Rt $\triangle ABC$ 和等腰 Rt $\triangle ADE$, CD 与 BE、AE 分别交于点 P, M. 对于下列结论:

① $\triangle BAE \sim \triangle CAD$; ② $MP \cdot MD = MA \cdot ME$; ③ $2CB^2 = CP \cdot CM$. 其中正确的是 ()



A. ①②③ B. ① C. ①② D. ②③

【分析】 (1) 由等腰 Rt $\triangle ABC$ 和等腰 Rt $\triangle ADE$ 三边份数关系可证;

(2) 通过等积式倒推可知, 证明 $\triangle PAM \sim \triangle EMD$ 即可;

(3) $2CB^2$ 转化为 AC^2 , 证明 $\triangle ACP \sim \triangle MCA$, 问题可证.

【解答】 解: 由已知: $AC = \sqrt{2}AB$, $AD = \sqrt{2}AE$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAD$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAD$$

所以①正确

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAD$$

$$\therefore \angle BEA = \angle CDA$$

$$\therefore \angle PME = \angle AMD$$

$$\therefore \triangle PME \sim \triangle AMD$$

$$\therefore \frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MD}$$

$$\therefore MP \cdot MD = MA \cdot ME$$

所以②正确

$$\therefore \angle BEA = \angle CDA$$

$$\angle PME = \angle AMD$$

$\therefore$ P、E、D、A 四点共圆

$$\therefore \angle APD = \angle EAD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CAE = 180^\circ - \angle BAC - \angle EAD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle CAP \sim \triangle CMA$$

$$\therefore AC^2 = CP \cdot CM$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}AB$$

$$\therefore 2CB^2 = CP \cdot CM$$

所以③正确

故选：A.

【点评】 本题考查了相似三角形的性质和判断. 在等积式和比例式的证明中应注意应用倒推的方法寻找相似三角形进行证明, 进而得到答案.

二、填空题 (本大题共有 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. (3 分) 在人体血液中, 红细胞直径约为 0.00077cm, 数据 0.00077 用科学记数法表示为 7.7×10^{-4} .

【分析】 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】 解: $0.00077 = 7.7 \times 10^{-4}$,

故答案为: 7.7×10^{-4} .

【点评】 本题主要考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

10. (3 分) 因式分解: $18 - 2x^2 = \underline{2(x+3)(3-x)}$.

【分析】 原式提取 2，再利用平方差公式分解即可.

【解答】 解：原式 $= 2(9 - x^2) = 2(x+3)(3-x)$,

故答案为: $2(x+3)(3-x)$

【点评】 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

11. (3 分) 有 4 根细木棒，长度分别为 2cm，3cm，4cm，5cm，从中任选 3 根，恰好能搭成一个三角形的概率是 $\underline{\frac{3}{4}}$.

【分析】 根据题意，使用列举法可得从有 4 根细木棒中任取 3 根的总共情况数目以及能搭成一个三角形的情况数目，根据概率的计算方法，计算可得答案.

【解答】 解：根据题意，从有 4 根细木棒中任取 3 根，有 2、3、4；3、4、5；2、3、5；2、4、5，共 4 种取法，

而能搭成一个三角形的有 2、3、4；3、4、5；2、4、5，3 种；

故其概率为: $\frac{3}{4}$.

【点评】 本题考查概率的计算方法，使用列举法解题时，注意按一定顺序，做到不重不漏. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

12. (3 分) 若 m 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根，则 $6m^2 - 9m + 2015$ 的值为 $\underline{2018}$.

【分析】 根据一元二次方程的解的定义即可求出答案.

【解答】解：由题意可知： $2m^2 - 3m - 1 = 0$,

$$\therefore 2m^2 - 3m = 1$$

$$\therefore \text{原式} = 3(2m^2 - 3m) + 2015 = 2018$$

故答案为：2018

【点评】本题考查一元二次方程的解，解题的关键是正确理解一元二次方程的解的定义，本题属于基础题型.

13. (3分) 用半径为 10cm，圆心角为 120° 的扇形纸片围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆半径为 $\frac{10}{3}$ cm.

【分析】圆锥的底面圆半径为 r ，根据圆锥的底面圆周长=扇形的弧长，列方程求解.

【解答】解：设圆锥的底面圆半径为 r ，依题意，得

$$2\pi r = \frac{120\pi \times 10}{180},$$

$$\text{解得 } r = \frac{10}{3} \text{ cm.}$$

$$\text{故选: } \frac{10}{3}.$$

【点评】本题考查了圆锥的计算. 圆锥的侧面展开图为扇形，计算要体现两个转化：1、圆锥的母线长为扇形的半径，2、圆锥的底面圆周长为扇形的弧长.

14. (3分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+1 \geq 5x \\ \frac{x-1}{2} > -2 \end{cases}$ 的解集为 $-3 < x \leq \frac{1}{2}$.

【分析】先求出每个不等式的解集，再根据口诀求出不等式组的解集即可.

【解答】解：解不等式 $3x+1 \geq 5x$ ，得： $x \leq \frac{1}{2}$,

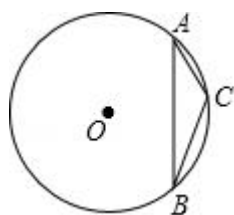
解不等式 $\frac{x-1}{2} > -2$ ，得： $x > -3$,

则不等式组的解集为 $-3 < x \leq \frac{1}{2}$,

故答案为: $-3 < x \leq \frac{1}{2}$.

【点评】此题考查了一元一次不等式组的求法, 其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解).

15. (3分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为2, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB=135^\circ$, 则 $AB=2\sqrt{2}$.



【分析】根据圆内接四边形对边互补和同弧所对的圆心角是圆周角的二倍, 可以求得 $\angle AOB$ 的度数, 然后根据勾股定理即可求得 AB 的长.

【解答】解: 连接 AD 、 AE 、 OA 、 OB ,

$\because \odot O$ 的半径为2, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB=135^\circ$,

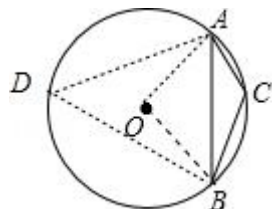
$\therefore \angle ADB=45^\circ$,

$\therefore \angle AOB=90^\circ$,

$\because OA=OB=2$,

$\therefore AB=2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.



【点评】本题考查三角形的外接圆和外心, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用数形结合的思想解答.

16. (3分) 关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 m 的取值范围是 $m < \frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$.

【分析】根据一元二次方程的定义以及根的判别式的意义可得 $\Delta = 4 - 12m > 0$ 且 $m \neq 0$, 求出 m 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 一元二次方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta > 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

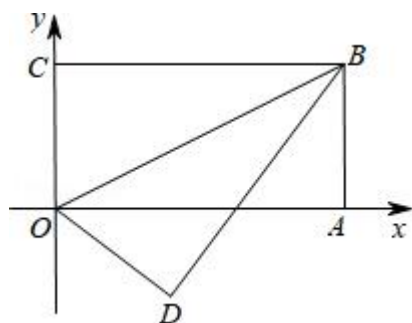
$$\therefore 4 - 12m > 0 \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\therefore m < \frac{1}{3} \text{ 且 } m \neq 0,$$

故答案为: $m < \frac{1}{3}$ 且 $m \neq 0$.

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义.

17. (3分) 如图, 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 A 的坐标为 $(8, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 4)$, 把矩形 $OABC$ 沿 OB 折叠, 点 C 落在点 D 处, 则点 D 的坐标为 $(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5})$.



【分析】由折叠的性质得到一对角相等, 再由矩形对边平行得到一对内错角相等, 等量代换及等角对等边得到 $BE = OE$, 利用 AAS 得到三角形 OED 与三角形 BEA 全等, 由全等三角形对应边相等得到 $DE = AE$, 过 D 作 DF 垂直于 OE , 利用勾股

定理及面积法求出 DF 与 OF 的长，即可确定出 D 坐标.

【解答】解：由折叠得： $\angle CBO = \angle DBO$,

$\therefore$ 矩形 ABCO,

$\therefore BC \parallel OA$,

$\therefore \angle CBO = \angle BOA$,

$\therefore \angle DBO = \angle BOA$,

$\therefore BE = OE$,

在 $\triangle ODE$ 和 $\triangle BAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle BAO = 90^\circ \\ \angle OED = \angle BEA \\ OE = BE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle BAE$ (AAS),

$\therefore AE = DE$,

设 $DE = AE = x$, 则有 $OE = BE = 8 - x$,

在 $Rt\triangle ODE$ 中, 根据勾股定理得: $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$,

解得: $x = 5$, 即 $OE = 5$, $DE = 3$,

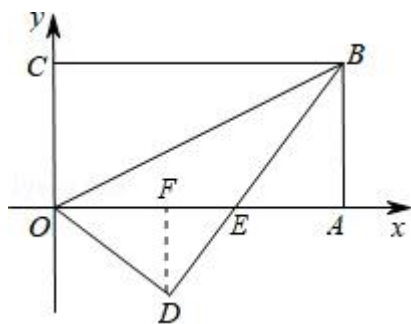
过 D 作 $DF \perp OA$,

$$\therefore S_{\triangle OED} = \frac{1}{2} OD \cdot DE = \frac{1}{2} OE \cdot DF,$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5}, \quad OF = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5},$$

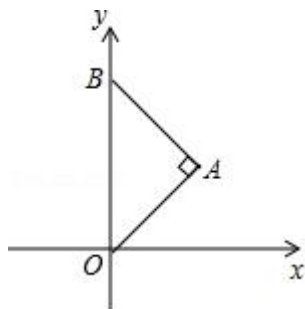
则 D $\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

故答案为: $\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$



【点评】此题考查了翻折变化（折叠问题），坐标与图形变换，以及矩形的性质，熟练掌握折叠的性质是解本题的关键.

18. (3分) 如图，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABO$ ， $\angle A=90^\circ$ ，点 B 的坐标为 $(0, 2)$ ，若直线 $l: y=mx+m (m \neq 0)$ 把 $\triangle ABO$ 分成面积相等的两部分，则 m 的值为 $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$.



【分析】根据题意作出合适的辅助线，然后根据题意即可列出相应的方程，从而可以求得 m 的值.

【解答】解： $\because y=mx+m=m(x+1)$,

$\therefore$ 函数 $y=mx+m$ 一定过点 $(-1, 0)$,

当 $x=0$ 时， $y=m$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, m)$,

由题意可得，直线 AB 的解析式为 $y=-x+2$,

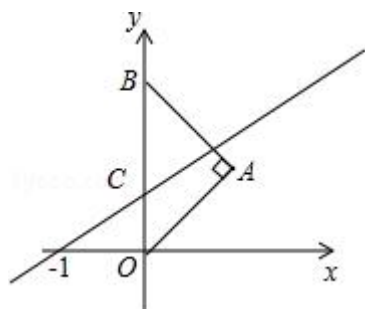
$$\begin{cases} y=-x+2 \\ y=mx+m \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{2-m}{m+1} \\ y=\frac{3m}{m+1} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $l: y=mx+m (m \neq 0)$ 把 $\triangle ABO$ 分成面积相等的两部分，

$$\therefore \frac{(2-m) \cdot \frac{2-m}{m+1}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{1}{2},$$

解得, $m = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $m = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ (舍去),

故答案为: $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$.



【点评】 本题考查一次函数图象上点的坐标特征、等腰直角三角形，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答.

三、解答题 (本大题共有 10 小题, 共 96 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (8 分) 计算或化简

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |\sqrt{3}-2| + \tan 60^\circ$$

$$(2) (2x+3)^2 - (2x+3)(2x-3)$$

【分析】 (1) 根据负整数幂、绝对值的运算法则和特殊三角函数值即可化简求值.

(2) 利用完全平方公式和平方差公式即可.

【解答】 解: (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |\sqrt{3}-2| + \tan 60^\circ$

$$= 2 + (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$$

$$= 2 + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 4$$

$$(2) (2x+3)^2 - (2x+3)(2x-3)$$

$$= (2x)^2 + 12x + 9 - [(2x^2) - 9]$$

$$= (2x)^2 + 12x + 9 - (2x)^2 + 9$$

$$= 12x + 18$$

【点评】 本题考查实数的混合运算和乘法公式，负整数指数幂的运算和相反数容易混淆，运用平方差公式计算时，关键要找相同项和相反项，其结果是相同项的平方减去相反项的平方.

20. (8分) 对于任意实数 a, b ，定义关于“ $\otimes$ ”的一种运算如下： $a \otimes b = 2a + b$. 例如 $3 \otimes 4 = 2 \times 3 + 4 = 10$.

(1) 求 $2 \otimes (-5)$ 的值；

(2) 若 $x \otimes (-y) = 2$ ，且 $2y \otimes x = -1$ ，求 $x + y$ 的值.

【分析】 (1) 依据关于“ $\otimes$ ”的一种运算： $a \otimes b = 2a + b$ ，即可得到 $2 \otimes (-5)$ 的值；

(2) 依据 $x \otimes (-y) = 2$ ，且 $2y \otimes x = -1$ ，可得方程组 $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4y + x = -1 \end{cases}$ ，即可得到 $x + y$ 的值.

【解答】 解：(1) $\because a \otimes b = 2a + b$,

$$\therefore 2 \otimes (-5) = 2 \times 2 + (-5) = 4 - 5 = -1;$$

(2) $\because x \otimes (-y) = 2$ ，且 $2y \otimes x = -1$,

$$\therefore \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4y + x = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{7}{9} \\ y = -\frac{4}{9} \end{cases},$$

$$\therefore x + y = \frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{3}.$$

【点评】 本题主要考查解一元一次方程组以及有理数的混合运算的运用，根据题意列出方程组是解题的关键.

21. (8分) 江苏省第十九届运动会将于2018年9月在扬州举行开幕式，某校为了了解学生“最喜爱的省运动会项目”的情况，随机抽取了部分学生进行问卷调查，规定每人从“篮球”、“羽毛球”、“自行车”、“游泳”和“其他”五个选项中必须选择且只能选择一个，并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图表.

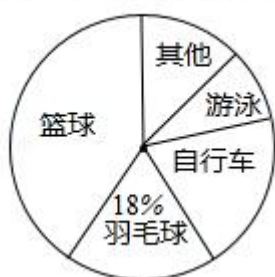
最喜爱的省运会项目的人数调查统计表

最喜爱的项目	人数
篮球	20
羽毛球	9
自行车	10
游泳	a
其他	b
合计	

根据以上信息，请回答下列问题：

- (1) 这次调查的样本容量是 50， $a+b$ 11.
- (2) 扇形统计图中“自行车”对应的扇形的圆心角为 72° .
- (3) 若该校有1200名学生，估计该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数.

最喜爱的省运会项目的人数分布扇形统计图



- 【分析】**
- (1) 依据 $9 \div 18\%$ ，即可得到样本容量，进而得到 $a+b$ 的值；
 - (2) 利用圆心角计算公式，即可得到“自行车”对应的扇形的圆心角；
 - (3) 依据最喜爱的省运会项目是篮球的学生所占的比例，即可估计该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数.

【解答】 解：(1) 样本容量是 $9 \div 18\% = 50$,

$$a+b=50-20-9-10=11,$$

故答案为：50，11；

$$(2) \text{ “自行车”对应的扇形的圆心角} = \frac{10}{50} \times 360^\circ = 72^\circ,$$

故答案为：72°；

$$(3) \text{ 该校最喜爱的省运会项目是篮球的学生人数为：} 1200 \times \frac{20}{50} = 480 \text{ (人).}$$

【点评】 本题考查的是统计表和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图，从不同的统计表和统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

22. (8分) 4张相同的卡片分别写着数字-1、-3、4、6，将卡片的背面朝上，并洗匀.

$$(1) \text{ 从中任意抽取1张，抽到的数字是奇数的概率是 } \frac{1}{2};$$

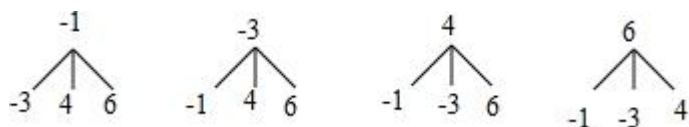
(2) 从中任意抽取1张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 k ；再从余下的卡片中任意抽取1张，并将所取卡片上的数字记作一次函数 $y=kx+b$ 中的 b . 利用画树状图或列表的方法，求这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率.

【分析】 (1) 直接利用概率公式求解；

(2) 画树状图展示所有12种等可能的结果数，利用一次函数的性质，找出 $k < 0$ ， $b > 0$ 的结果数，然后根据概率公式求解.

【解答】 解：(1) 从中任意抽取1张，抽到的数字是奇数的概率 $= \frac{1}{2}$ ；
故答案为 $\frac{1}{2}$ ；

(2) 画树状图为：



共有 12 种等可能的结果数，其中 $k < 0$ ， $b > 0$ 有 4 种结果，

所以这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率 $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

【点评】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率. 也考查了一次函数的性质.

23. (10 分) 京沪铁路是我国东部沿海地区纵贯南北的交通大动脉，全长 1462km，是我国最繁忙的铁路干线之一. 如果从北京到上海的客车速度是货车速度的 2 倍，客车比货车少用 6h，那么货车的速度是多少？（精确到 0.1km/h）

【分析】 设货车的速度是 x 千米/小时，则客车的速度是 $2x$ 千米/小时，根据时间=路程÷速度结合客车比货车少用 6 小时，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论.

【解答】 解：设货车的速度是 x 千米/小时，则客车的速度是 $2x$ 千米/小时，

根据题意得： $\frac{1462}{x} - \frac{1462}{2x} = 6$,

解得： $x = 121\frac{5}{6} \approx 121.8$.

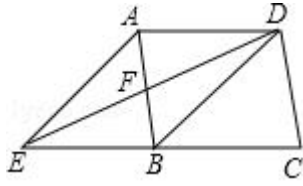
答：货车的速度约是 121.8 千米/小时.

【点评】 本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

24. (10 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $DB=DA$ ，点 F 是 AB 的中点，连接 DF 并延长，交 CB 的延长线于点 E ，连接 AE .

(1) 求证：四边形 $AEBD$ 是菱形；

(2) 若 $DC=\sqrt{10}$ ， $\tan \angle DCB=3$ ，求菱形 $AEBD$ 的面积.



【分析】(1) 由 $\triangle AFD \cong \triangle BFE$ ，推出 $AD=BE$ ，可知四边形 $AEBD$ 是平行四边形，再根据 $BD=AD$ 可得结论；

(2) 解直角三角形求出 EF 的长即可解决问题；

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel CE$ ，

$\therefore \angle DAF = \angle EBF$ ，

$\because \angle AFD = \angle EFB$ ， $AF = FB$ ，

$\therefore \triangle AFD \cong \triangle BFE$ ，

$\therefore AD = EB$ ， $\because AD \parallel EB$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形，

$\because BD = AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是菱形.

(2) 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore CD = AB = \sqrt{10}$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle DCB$ ，

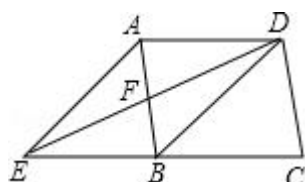
$\therefore \tan \angle ABE = \tan \angle DCB = 3$ ，

$\because$ 四边形 $AEBD$ 是菱形，

$\therefore AB \perp DE$ ， $AF = FB$ ， $EF = DF$ ，

$\therefore \tan \angle ABE = \frac{EF}{BF} = 3$ ，

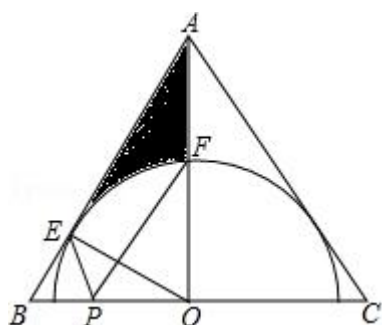
$$\begin{aligned}\therefore BF &= \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ \therefore EF &= \frac{3\sqrt{10}}{2}, \\ \therefore DE &= 3\sqrt{10}, \\ \therefore S_{\text{菱形} AEED} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 15.\end{aligned}$$



【点评】 本题考查平行四边形的判定和性质、菱形的判定和性质、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

25. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AO \perp BC$ 于点 O ， $OE \perp AB$ 于点 E ，以点 O 为圆心， OE 为半径作半圆，交 AO 于点 F .

- (1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若点 F 是 A 的中点， $OE=3$ ，求图中阴影部分的面积；
- (3) 在 (2) 的条件下，点 P 是 BC 边上的动点，当 $PE+PF$ 取最小值时，直接写出 BP 的长.



【分析】 (1) 作 $OH \perp AC$ 于 H ，如图，利用等腰三角形的性质得 AO 平分 $\angle BAC$ ，再根据角平分线性质的得 $OH=OE$ ，然后根据切线的判定定理得到结论；

(2) 先确定 $\angle OAE=30^\circ$ ， $\angle AOE=60^\circ$ ，再计算出 $AE=3\sqrt{3}$ ，然后根据扇形面积

公式，利用图中阴影部分的面积= $S_{\triangle AOE} - S_{\text{扇形 EOF}}$ 进行计算；

(3) 作 F 点关于 BC 的对称点 F'，连接 EF' 交 BC 于 P，如图，利用两点之间线段最短得到此时 EP+FP 最小，通过证明 $\angle F' = \angle EAF'$ 得到 PE+PF 最小值为 $3\sqrt{3}$ ，然后计算出 OP 和 OB 得到此时 PB 的长.

【解答】(1) 证明：作 $OH \perp AC$ 于 H，如图，

$\because AB=AC$ ， $AO \perp BC$ 于点 O，

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\because OE \perp AB$ ， $OH \perp AC$ ，

$\therefore OH=OE$ ，

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 解： $\because$ 点 F 是 AO 的中点，

$\therefore AO=2OF=3$ ，

而 $OE=3$ ，

$\therefore \angle OAE=30^\circ$ ， $\angle AOE=60^\circ$ ，

$\therefore AE=\sqrt{3}OE=3\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 图中阴影部分的面积= $S_{\triangle AOE} - S_{\text{扇形 EOF}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} - \frac{60 \cdot \pi \cdot 3^2}{360} = \frac{9\sqrt{3}-3\pi}{2}$ ；

(3) 解：作 F 点关于 BC 的对称点 F'，连接 EF' 交 BC 于 P，如图，

$\therefore PF=PF'$ ，

$\therefore PE+PF=PE+PF'=EF'$ ，此时 EP+FP 最小，

$\therefore OF'=OF=OE$ ，

$\therefore \angle F' = \angle OEF'$ ，

而 $\angle AOE = \angle F' + \angle OEF' = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle F' = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle F' = \angle EAF',$$

$$\therefore EF' = EA = 3\sqrt{3},$$

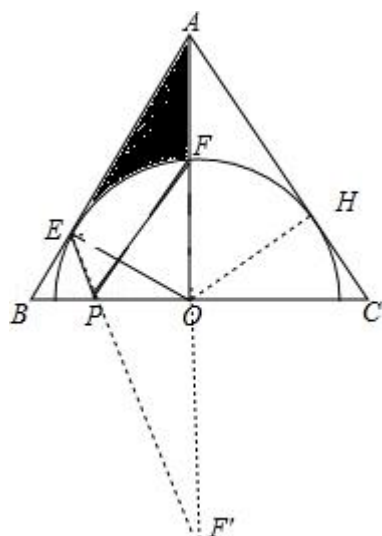
即 $PE + PF$ 最小值为 $3\sqrt{3}$,

$$\text{在 Rt}\triangle OPF' \text{ 中, } OP = \frac{\sqrt{3}}{3} OF' = \sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中, } OB = \frac{\sqrt{3}}{3} OA = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BP = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

即当 $PE + PF$ 取最小值时, BP 的长为 $\sqrt{3}$.



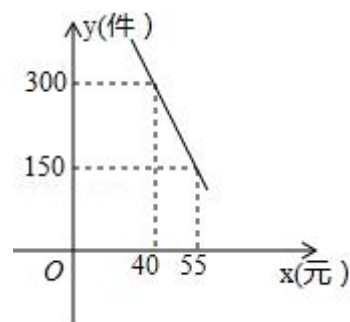
【点评】 本题考查了切线的判定与性质：经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线；圆的切线垂直于经过切点的半径．判定切线时“连圆心和直线与圆的公共点”或“过圆心作这条直线的垂线”．也考查了等腰三角形的性质和最短路径问题．

26. (10 分) “扬州漆器”名扬天下，某网店专门销售某种品牌的漆器笔筒，成本为 30 元/件，每天销售 y (件) 与销售单价 x (元) 之间存在一次函数关系，如图所示．

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 如果规定每天漆器笔筒的销售量不低于 240 件，当销售单价为多少元时，每天获取的利润最大，最大利润是多少？

(3) 该网店店主热心公益事业，决定从每天的销售利润中捐出 150 元给希望工程，为了保证捐款后每天剩余利润不低于 3600 元，试确定该漆器笔筒销售单价的范围。



【分析】 (1) 可用待定系数法来确定 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 根据利润=销售量 $\times$ 单件的利润，然后将 (1) 中的函数式代入其中，求出利润和销售单件之间的关系式，然后根据其性质来判断出最大利润；

(3) 首先得出 w 与 x 的函数关系式，进而利用所获利润等于 3600 元时，对应 x 的值，根据增减性，求出 x 的取值范围。

【解答】 解：(1) 由题意得：
$$\begin{cases} 40k+b=300 \\ 55k+b=150 \end{cases}$$
 解得：
$$\begin{cases} k=-10 \\ b=700 \end{cases}$$

故 y 与 x 之间的函数关系式为： $y = -10x + 700$,

(2) 由题意，得

$$-10x + 700 \geq 240,$$

解得 $x \leq 46$,

设利润为 $w = (x - 30) \cdot y = (x - 30)(-10x + 700)$,

$$w = -10x^2 + 1000x - 21000 = -10(x - 50)^2 + 4000,$$

$$\therefore -10 < 0,$$

$\therefore x < 50$ 时, w 随 x 的增大而增大,

$\therefore x=46$ 时, $w_{\text{大}} = -10(46-50)^2 + 4000 = 3840$,

答: 当销售单价为 46 元时, 每天获取的利润最大, 最大利润是 3840 元;

$$(3) w - 150 = -10x^2 + 1000x - 21000 - 150 = 3600,$$

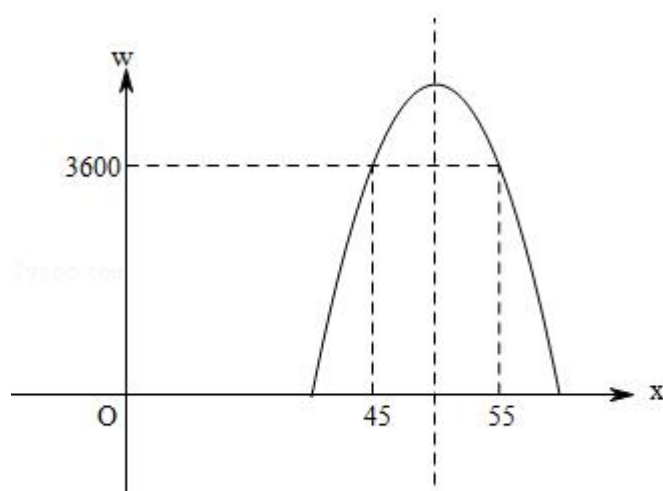
$$-10(x-50)^2 = -250,$$

$$x - 50 = \pm 5,$$

$$x_1 = 55, x_2 = 45,$$

如图所示, 由图象得:

当 $45 \leq x \leq 55$ 时, 捐款后每天剩余利润不低于 3600 元.



【点评】此题主要考查了二次函数的应用、一次函数的应用和一元二次方程的应用, 利用函数增减性得出最值是解题关键, 能从实际问题中抽象出二次函数模型是解答本题的重点和难点.

27. (12 分) 问题呈现

如图 1, 在边长为 1 的正方形网格中, 连接格点 D, N 和 E, C, DN 和 EC 相交于点 P, 求 $\tan \angle CPN$ 的值.

方法归纳

求一个锐角的三角函数值, 我们往往需要找出 (或构造出) 一个直角三角形. 观

察发现问题中 $\angle CPN$ 不在直角三角形中，我们常常利用网格画平行线等方法解决此类问题，比如连接格点 M ， N ，可得 $MN \parallel EC$ ，则 $\angle DNM = \angle CPN$ ，连接 DM ，那么 $\angle CPN$ 就变换到 $Rt\triangle DMN$ 中。

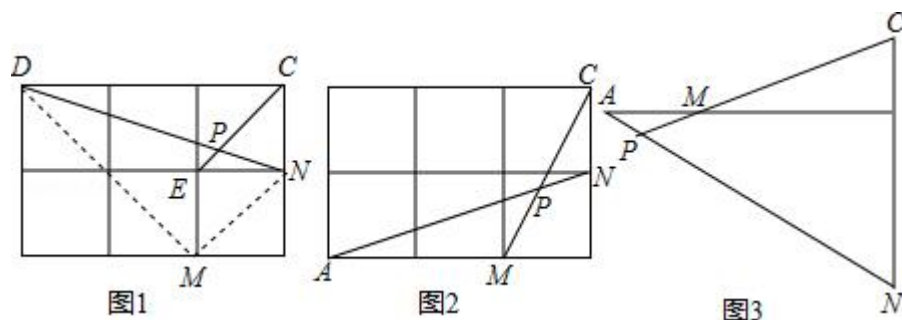
问题解决

(1) 直接写出图 1 中 $\tan \angle CPN$ 的值为 2；

(2) 如图 2，在边长为 1 的正方形网格中， AN 与 CM 相交于点 P ，求 $\cos \angle CPN$ 的值；

思维拓展

(3) 如图 3， $AB \perp BC$ ， $AB = 4BC$ ，点 M 在 AB 上，且 $AM = BC$ ，延长 CB 到 N ，使 $BN = 2BC$ ，连接 AN 交 CM 的延长线于点 P ，用上述方法构造网格求 $\angle CPN$ 的度数。



【分析】 (1) 连接格点 M ， N ，可得 $MN \parallel EC$ ，则 $\angle DNM = \angle CPN$ ，连接 DM ，那么 $\angle CPN$ 就变换到 $Rt\triangle DMN$ 中。

(2) 如图 2 中，取格点 D ，连接 CD ， DM 。那么 $\angle CPN$ 就变换到等腰 $Rt\triangle DMC$ 中。

(3) 利用网格，构造等腰直角三角形解决问题即可；

【解答】 解：(1) 如图 1 中，

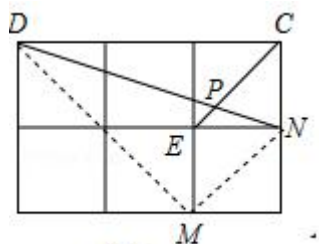


图1

$\therefore EC \parallel MN$,

$\therefore \angle CPN = \angle DNM$,

$\therefore \tan \angle CPN = \tan \angle DNM$,

$\therefore \angle DMN = 90^\circ$,

$\therefore \tan \angle CPN = \tan \angle DNM = \frac{DM}{MN} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$,

故答案为 2.

(2) 如图 2 中, 取格点 D, 连接 CD, DM.

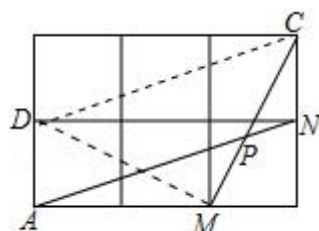


图2

$\therefore CD \parallel AN$,

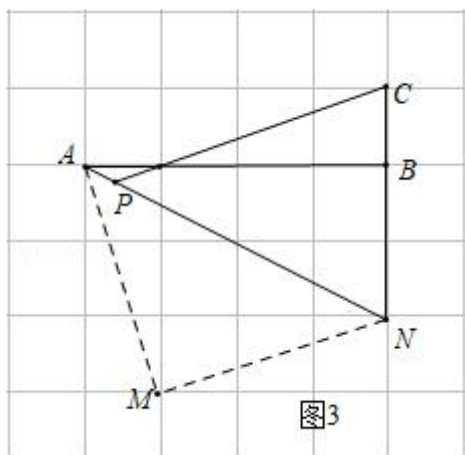
$\therefore \angle CPN = \angle DCM$,

$\therefore \triangle DCM$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DCM = \angle D = 45^\circ$,

$\therefore \cos \angle CPN = \cos \angle DCM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 如图 3 中, 如图取格点 M, 连接 AN、MN.



$\therefore PC \parallel MN$,

$\therefore \angle CPN = \angle ANM$,

$\therefore AM = MN$, $\angle AMN = 90^\circ$,

$\therefore \angle ANM = \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle CPN = 45^\circ$.

【点评】 本题考查三角形综合题、平行线的性质、勾股定理、直角三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题，学会用转化的思想思考问题，属于中考压轴题.

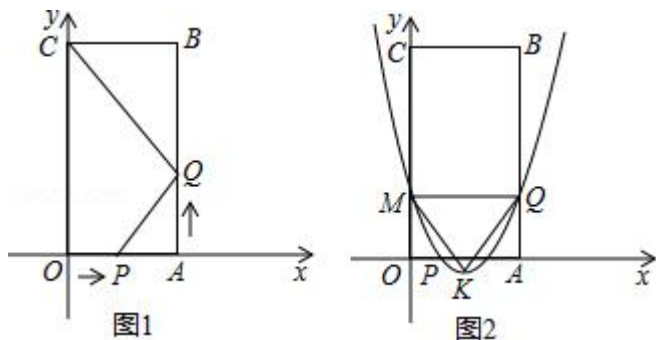
28. (12 分) 如图 1，四边形 $OABC$ 是矩形，点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, 6)$ ，点 P 从点 O 出发，沿 OA 以每秒 1 个单位长度的速度向点 A 出发，同时点 Q 从点 A 出发，沿 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，当点 P 与点 A 重合时运动停止. 设运动时间为 t 秒.

(1) 当 $t=2$ 时，线段 PQ 的中点坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$;

(2) 当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，求 t 的值;

(3) 当 $t=1$ 时，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 P , Q 两点，与 y 轴交于点 M ，抛物线的顶点为 K ，如图 2 所示，问该抛物线上是否存在点 D ，使 $\angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ$?

若存在，求出所有满足条件的 D 的坐标；若不存在，说明理由.



【分析】(1) 先根据时间 $t=2$ ，和速度可得动点 P 和 Q 的路程 OP 和 AQ 的长，再根据中点坐标公式可得结论；

(2) 根据矩形的性质得： $\angle B = \angle PAQ = 90^\circ$ ，所以当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，存在两种情况：

①当 $\triangle PAQ \sim \triangle QBC$ 时， $\frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC}$ ，②当 $\triangle PAQ \sim \triangle CBQ$ 时， $\frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ}$ ，分别列方程可得 t 的值；

(3) 根据 $t=1$ 求抛物线的解析式，根据 $Q(3, 2)$ ， $M(0, 2)$ ，可得 $MQ \parallel x$ 轴， $\therefore KM = KQ$ ， $KE \perp MQ$ ，画出符合条件的点 D ，证明 $\triangle KEQ \sim \triangle QMH$ ，列比例式可得点 D 的坐标，同理根据对称可得另一个点 D 。

【解答】解：(1) 如图 1， $\because$ 点 A 的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore OA=3$ ，

当 $t=2$ 时， $OP=t=2$ ， $AQ=2t=4$ ，

$\therefore P(2, 0)$ ， $Q(3, 4)$ ，

$\therefore$ 线段 PQ 的中点坐标为： $(\frac{2+3}{2}, \frac{0+4}{2})$ ，即 $(\frac{5}{2}, 2)$ ；

故答案为： $(\frac{5}{2}, 2)$ ；

(2) 如图 1， $\because$ 当点 P 与点 A 重合时运动停止，且 $\triangle PAQ$ 可以构成三角形，

$\therefore 0 < t < 3$ ，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$$\therefore \angle B = \angle PAQ = 90^\circ$$

$\therefore$ 当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时，存在两种情况：

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle QBC \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{QB}{BC},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{6-2t}{3},$$

$$4t^2 - 15t + 9 = 0,$$

$$(t-3) \left(t - \frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$t_1 = 3 \text{ (舍)}, t_2 = \frac{3}{4},$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle PAQ \sim \triangle CBQ \text{ 时, } \frac{PA}{AQ} = \frac{BC}{BQ},$$

$$\therefore \frac{3-t}{2t} = \frac{3}{6-2t},$$

$$t^2 - 9t + 9 = 0,$$

$$t = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{9+3\sqrt{5}}{2} > 7,$$

$$\therefore x = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \text{ 不符合题意, 舍去,}$$

综上所述，当 $\triangle CBQ$ 与 $\triangle PAQ$ 相似时， t 的值是 $\frac{3}{4}$ 或 $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ；

(3) 当 $t=1$ 时， $P(1, 0)$ ， $Q(3, 2)$ ，

把 $P(1, 0)$ ， $Q(3, 2)$ 代入抛物线 $y=x^2+bx+c$ 中得：

$$\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 9+3b+c=2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b=-3 \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{ 抛物线: } y=x^2-3x+2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{ 顶点 } k \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right),$$

$$\therefore Q(3, 2), M(0, 2),$$

$$\therefore MQ \parallel x \text{ 轴,}$$

作抛物线对称轴，交 MQ 于 E ，

$$\therefore KM=KQ, KE \perp MQ,$$

$$\therefore \angle MKE = \angle QKE = \frac{1}{2} \angle MKQ,$$

$$\text{如图 2, } \angle MQD = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE,$$

设 DQ 交 y 轴于 H,

$$\therefore \angle HMQ = \angle QEK = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle KEQ \sim \triangle QMH,$$

$$\therefore \frac{KE}{EQ} = \frac{MQ}{MH},$$

$$\therefore \frac{2+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{MH},$$

$$\therefore MH=2,$$

$$\therefore H(0, 4),$$

$$\text{易得 HQ 的解析式为: } y = -\frac{2}{3}x + 4,$$

$$\text{则} \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

$$x^2 - 3x + 2 = -\frac{2}{3}x + 4,$$

$$\text{解得: } x_1 = 3 \text{ (舍), } x_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore D\left(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9}\right);$$

$$\text{同理, 在 M 的下方, y 轴上存在点 H, 如图 3, 使 } \angle HQM = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle QKE,$$

$$\text{由对称性得: } H(0, 0),$$

$$\text{易得 OQ 的解析式: } y = \frac{2}{3}x,$$

$$\text{则} \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{2}{3}x,$$

解得: $x_1=3$ (舍), $x_2=\frac{2}{3}$,

$\therefore D(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$;

综上所述, 点 D 的坐标为: $D(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9})$ 或 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

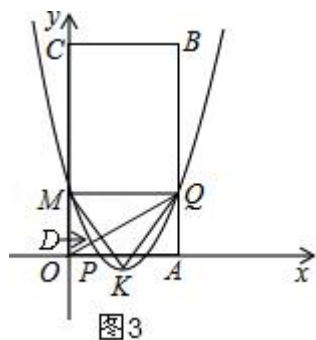


图3

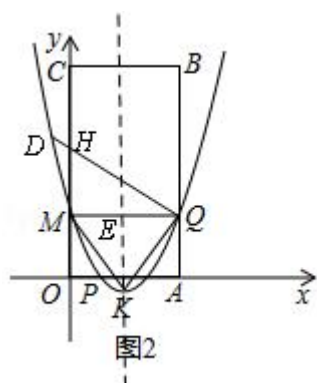


图2

【点评】 本题是二次函数与三角形相似的综合问题, 主要考查相似三角形的判定和性质的综合应用, 三角形和四边形的面积, 二次函数的最值问题的应用, 函数的交点等知识, 本题比较复杂, 注意用 t 表示出线段长度, 再利用相似即可找到线段之间的关系, 代入可解决问题.