

2016 年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分）

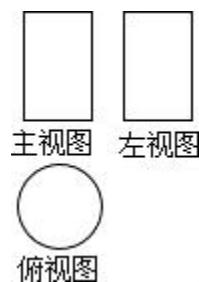
1. -2 的绝对值是（ ）.

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 计算 $3 - (-1)$ 的结果是（ ）

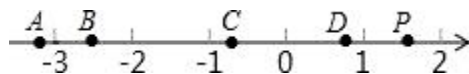
- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

3. 如图所示是一个几何体的三视图，这个几何体的名称是（ ）



- A. 圆柱体 B. 三棱锥 C. 球体 D. 圆锥体

4. 如图，数轴上点 P 对应的数为 p ，则数轴上与数 $-\frac{p}{2}$ 对应的点是（ ）



- A. 点 A B. 点 B C. 点 C D. 点 D

5. 如图，把直角三角板的直角顶点 O 放在破损玻璃镜的圆周上，两直角边与圆弧分别交于点 M、N，量得 $OM=8\text{cm}$ ， $ON=6\text{cm}$ ，则该圆玻璃镜的半径是（ ）



- A. $\sqrt{10}\text{ cm}$ B. 5cm C. 6cm D. 10cm

6. 若 $x > y$ ，则下列不等式中不一定成立的是（ ）

- A. $x+1 > y+1$ B. $2x > 2y$ C. $\frac{x}{2} > \frac{y}{2}$ D. $x^2 > y^2$

7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $BC=6$ ， $AC=3$ ， $CP \perp AB$ ，垂足为 P，则 CP 的长可能是（ ）

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 7

8. 已知一次函数 $y_1=kx+m$ ($k \neq 0$) 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的自变量和对应函数值如表：

x	...	-1	0	2	4	...
y ₁	...	0	1	3	5	...

x	...	-1	1	3	4	...
y ₂	...	0	-4	0	5	...

当 $y_2 > y_1$ 时，自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x < -1$ B. $x > 4$ C. $-1 < x < 4$ D. $x < -1$ 或 $x > 4$

二、填空题 (共 10 小题, 每小题 2 分, 满分 20 分)

9. 化简: $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 分解因式: $x^3 - 2x^2 + x = \underline{\hspace{2cm}}$.

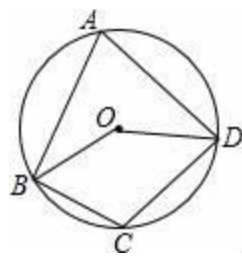
12. 一个多边形的每个外角都是 60° , 则这个多边形边数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若代数式 $x - 5$ 与 $2x - 1$ 的值相等, 则 x 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在比例尺为 1: 40000 的地图上, 某条道路的长为 7cm, 则该道路的实际长度是 $\underline{\hspace{2cm}}$ km.

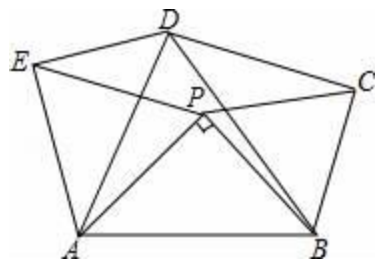
15. 已知正比例函数 $y = ax$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象的一个交点坐标为 $(-1, -1)$, 则另一个交点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如图, 在 $\odot O$ 的内接四边形 ABCD 中, $\angle A = 70^\circ$, $\angle OBC = 60^\circ$, 则 $\angle ODC = \underline{\hspace{2cm}}$.



17. 已知 x, y 满足 $2^x \cdot 4^y = 8$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, y 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

18. 如图, $\triangle APB$ 中, $AB = 2$, $\angle APB = 90^\circ$, 在 AB 的同侧作正 $\triangle ABD$ 、正 $\triangle APE$ 和正 $\triangle BPC$, 则四边形 PCDE 面积的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题（共 10 小题，满分 84 分）

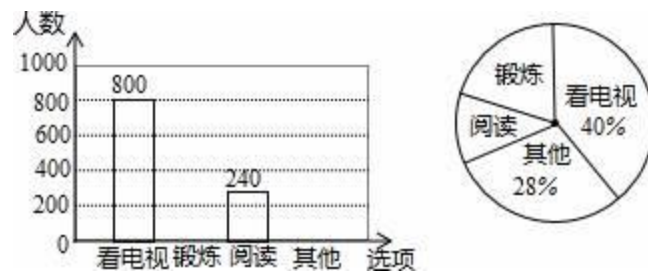
19. 先化简，再求值 $(x-1)(x-2) - (x+1)^2$ ，其中 $x = \frac{1}{2}$.

20. 解方程和不等式组：

(1) $\frac{x}{2x-5} + \frac{5}{5-2x} = 1$

(2) $\begin{cases} 5x - 10 \leq 0 \\ x + 3 > -2x \end{cases}$

21. 为了解某市市民晚饭后 1 小时内的生活方式，调查小组设计了“阅读”、“锻炼”、“看电视”和“其它”四个选项，用随机抽样的方法调查了该市部分市民，并根据调查结果绘制成如下统计图.



根据统计图所提供的信息，解答下列问题：

- (1) 本次共调查了_____名市民；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 该市共有 480 万市民，估计该市市民晚饭后 1 小时内锻炼的人数.

22. 一只不透明的袋子中装有 1 个红球、1 个黄球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同

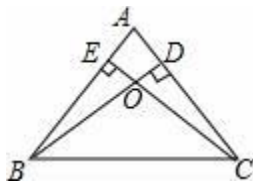
(1) 搅匀后从袋子中任意摸出 1 个球，求摸到红球的概率；

(2) 搅匀后从袋子中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球，求两次都摸到红球的概率.

23. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BD 、 CE 是高， BD 与 CE 相交于点 O

(1) 求证： $OB=OC$ ；

(2) 若 $\angle ABC=50^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数.



24. 某超市销售甲、乙两种糖果，购买 3 千克甲种糖果和 1 千克乙种糖果共需 44 元，购买 1 千克甲种糖果和 2 千克乙种糖果共需 38 元.

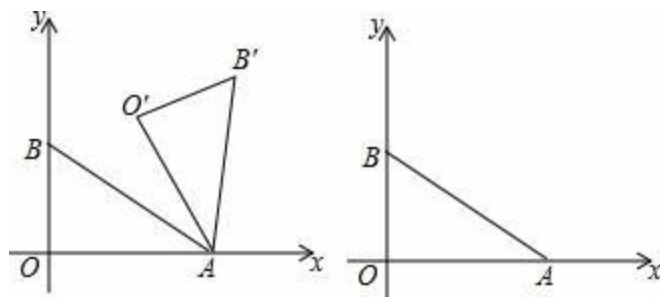
(1) 求甲、乙两种糖果的价格；

(2) 若购买甲、乙两种糖果共 20 千克，且总价不超过 240 元，问甲种糖果最少购买多少千克？

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，把 $Rt\triangle AOB$ 绕点 A 顺时针旋转角 α ($30^\circ < \alpha < 180^\circ$)，得到 $\triangle AO'B'$.

(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，判断点 B 是否在直线 $O'B'$ 上，并说明理由；

(2) 连接 OO' ，设 OO' 与 AB 交于点 D ，当 α 为何值时，四边形 $ADO'B'$ 是平行四边形？请说明理由.



26. (1) 阅读材料:

教材中的问题, 如图 1, 把 5 个边长为 1 的小正方形组成的十字形纸板剪开, 使剪成的若干块能够拼成一个大正方形, 小明的思考: 因为剪拼前后的图形面积相等, 且 5 个小正方形的总面积为 5, 所以拼成的大正方形边长为_____, 故沿虚线 AB 剪开可拼成大正方形的一边, 请在图 1 中用虚线补全剪拼示意图.

(2) 类比解决:

如图 2, 已知边长为 2 的正三角形纸板 ABC, 沿中位线 DE 剪掉 $\triangle ADE$, 请把纸板剩下的部分 DBCE 剪开, 使剪成的若干块能够拼成一个新的正三角形.

①拼成的正三角形边长为_____;

②在图 2 中用虚线画出一一种剪拼示意图.

(3) 灵活运用:

如图 3, 把一边长为 60cm 的正方形彩纸剪开, 用剪成的若干块拼成一个轴对称的风筝, 其中 $\angle BCD=90^\circ$, 延长 DC、BC 分别与 AB、AD 交于点 E、F, 点 E、F 分别为 AB、AD 的中点, 在线段 AC 和 EF 处用轻质钢丝做成十字形风筝龙骨, 在图 3 的正方形中画出一一种剪拼示意图, 并求出相应轻质钢丝的总长度. (说明: 题中的拼接都是不重叠无缝隙无剩余)

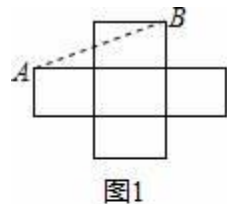


图1

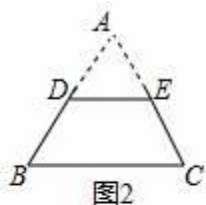


图2

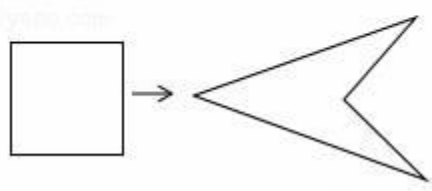
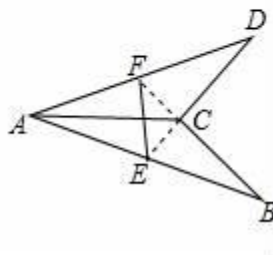


图3



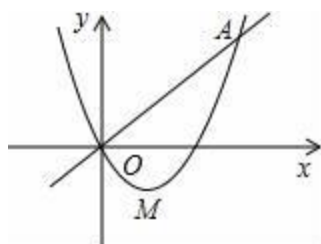
27. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=x$ 与二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象相交于 O 、 A 两点，点 A $(3, 3)$ ，点 M 为抛物线的顶点.

(1) 求二次函数的表达式；

(2) 长度为 $2\sqrt{2}$ 的线段 PQ 在线段 OA （不包括端点）上滑动，分别过点 P 、 Q 作 x 轴的垂线交抛物线于点 P_1 、 Q_1 ，求四边形 PQQ_1P_1 面积的最大值；

(3) 直线 OA 上是否存在点 E ，使得点 E 关于直线 MA 的对称点 F 满足 $S_{\triangle AOF}=S_{\triangle AOM}$ ？

若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.



28. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 P 在射线 BC 上（异于点 B 、 C ），直线 AP 与对角线 BD 及射线 DC 分别交于点 F 、 Q

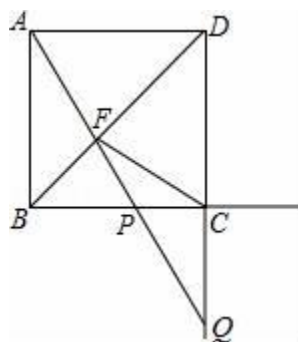
(1) 若 $BP = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求 $\angle BAP$ 的度数；

(2) 若点 P 在线段 BC 上，过点 F 作 $FG \perp CD$ ，垂足为 G ，当 $\triangle FGC \cong \triangle QCP$ 时，求 PC 的长；

(3) 以 PQ 为直径作 $\odot M$.

①判断 FC 和 $\odot M$ 的位置关系，并说明理由；

②当直线 BD 与 $\odot M$ 相切时，直接写出 PC 的长.



2016 年江苏省常州市中考数学试卷

参考答案及试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分）

1. -2 的绝对值是（ ）

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】绝对值.

【分析】根据绝对值的定义，可直接得出 -2 的绝对值.

【解答】解： $|-2|=2$.

故选 B.

【点评】本题考查了绝对值的定义，关键是利用了绝对值的性质.

2. 计算 $3 - (-1)$ 的结果是（ ）

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

【考点】有理数的减法.

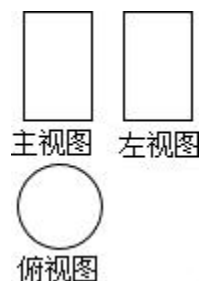
【分析】减去一个数等于加上这个数的相反数，所以 $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$.

【解答】解： $3 - (-1) = 4$,

故答案为：D.

【点评】本题考查了有理数的减法，属于基础题，比较简单；熟练掌握减法法则是做好本题的关键.

3. 如图所示是一个几何体的三视图，这个几何体的名称是（ ）



- A. 圆柱体 B. 三棱锥 C. 球体 D. 圆锥体

【考点】由三视图判断几何体.

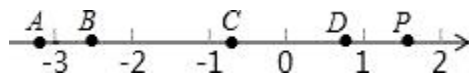
【分析】主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

【解答】解：由于主视图和左视图为长方形可得此几何体为柱体，
由俯视图为圆可得为圆柱体.

故选 A.

【点评】本题考查了由三视图来判断几何体，还考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力.

4. 如图，数轴上点 P 对应的数为 p ，则数轴上与数 $-\frac{p}{2}$ 对应的点是（ ）



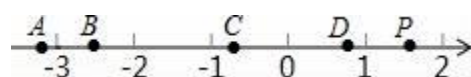
A. 点 A B. 点 B C. 点 C D. 点 D

【考点】数轴.

【分析】根据图示得到点 P 所表示的数，然后求得 $-\frac{p}{2}$ 的值即可.

【解答】解：如图所示，点 P 表示的数是 1.5，则 $-\frac{p}{2}=0.75 > -1$ ，则数轴上与数 $-\frac{p}{2}$ 对应的点是 C.

故选：C.



【点评】本题考查了数轴，根据图示得到点 P 所表示的数是解题的关键.

5. 如图，把直角三角板的直角顶点 O 放在破损玻璃镜的圆周上，两直角边与圆弧分别交于点 M、N，量得 OM=8cm，ON=6cm，则该圆玻璃镜的半径是（ ）



A. $\sqrt{10}$ cm B. 5cm C. 6cm D. 10cm

【考点】圆周角定理；勾股定理.

【分析】如图，连接 MN，根据圆周角定理可以判定 MN 是直径，所以根据勾股定理求得直径，然后再来求半径即可.

【解答】解：如图，连接 MN，

$\because \angle O=90^\circ$,

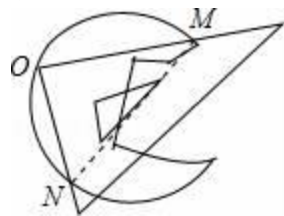
$\therefore$ MN 是直径,

又 OM=8cm, ON=6cm,

$$\therefore MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)} .$$

$\therefore$ 该圆玻璃镜的半径是: $\frac{1}{2} MN=5\text{cm}$.

故选：B.



【点评】本题考查了圆周角定理和勾股定理，半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径.

6. 若 $x > y$ ，则下列不等式中不一定成立的是（ ）

A. $x+1 > y+1$ B. $2x > 2y$ C. $\frac{x}{2} > \frac{y}{2}$ D. $x^2 > y^2$

【考点】不等式的性质.

【分析】根据不等式的基本性质进行判断，不等式的两边加上同一个数，不等号的方向不变；不等式的两边乘以（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。

【解答】解：（A）在不等式 $x > y$ 两边都加上 1，不等号的方向不变，故（A）正确；

（B）在不等式 $x > y$ 两边都乘上 2，不等号的方向不变，故（B）正确；

（C）在不等式 $x > y$ 两边都除以 2，不等号的方向不变，故（C）正确；

（D）当 $x=1$ ， $y=-2$ 时， $x > y$ ，但 $x^2 < y^2$ ，故（D）错误。

故选（D）

【点评】本题主要考查了不等式的性质，应用不等式的性质应注意的问题：在不等式的两边都乘以（或除以）同一个负数时，一定要改变不等号的方向。

7. 已知 $\triangle ABC$ 中， $BC=6$ ， $AC=3$ ， $CP \perp AB$ ，垂足为 P ，则 CP 的长可能是（ ）

A. 2 B. 4 C. 5 D. 7

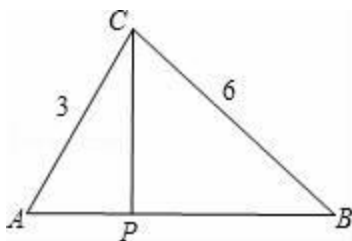
【考点】垂线段最短。

【分析】根据垂线段最短得出结论。

【解答】解：如图，根据垂线段最短可知： $PC < 3$ ，

$\therefore CP$ 的长可能是 2，

故选 A。



【点评】本题考查了垂线段最短的性质，正确理解此性质，垂线段最短，指的是从直线外一点到这条直线所作的垂线段最短；本题是指点 C 到直线 AB 连接的所有线段中， CP 是垂线段，所以最短；在实际问题中涉及线路最短问题时，其理论依据应从“两点之间，线段最短”和“垂线段最短”这两个中去选择。

8. 已知一次函数 $y_1=kx+m$ ($k \neq 0$) 和二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的自变量和对应函数值如表：

x	...	-1	0	2	4	...
y_1	...	0	1	3	5	...

x	...	-1	1	3	4	...
y_2	...	0	-4	0	5	...

当 $y_2 > y_1$ 时，自变量 x 的取值范围是（ ）

A. $x < -1$ B. $x > 4$ C. $-1 < x < 4$ D. $x < -1$ 或 $x > 4$

【考点】二次函数与不等式（组）。

【分析】先在表格中找出点，用待定系数法求出直线和抛物线的解析式，用 $y_2 > y_1$ 建立不等式，求解不等式即可。

【解答】解：由表可知， $(-1, 0)$ ， $(0, 1)$ 在直线一次函数 $y_1=kx+m$ 的图象上，

$$\therefore \begin{cases} -k+m=0 \\ m=1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=1 \\ m=1 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数 $y_1=x+1$,

由表可知, $(-1, 0)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$ 在二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=-4, \\ 9a+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数 $y_2=x^2-2x-3$

当 $y_2 > y_1$ 时, $\therefore x^2-2x-3 > x+1$,

$\therefore (x-4)(x+1) > 0$,

$\therefore x > 4$ 或 $x < -1$,

故选 D

【点评】 此题是二次函数和不等式题目, 主要考查了待定系数法, 解不等式, 解本题的关键是求出直线和抛物线的解析式.

二、填空题 (共 10 小题, 每小题 2 分, 满分 20 分)

9. 化简: $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\underline{\sqrt{2}}$.

【考点】 二次根式的加减法.

【分析】 先把各根式化为最简二次根式, 再根据二次根式的减法进行计算即可.

【解答】 解: 原式 $=2\sqrt{2}-\sqrt{2}$
 $=\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点评】 本题考查的是二次根式的加减法, 熟知二次根式相加减, 先把各个二次根式化成最简二次根式, 再把被开方数相同的二次根式进行合并, 合并方法为系数相加减, 根式不变是解答此题的关键.

10. 若分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 $\underline{x \neq -1}$.

【考点】 分式有意义的条件.

【分析】 根据分式有意义的条件列出关于 x 的不等式, 求出 x 的取值范围即可.

【解答】 解: $\because$ 分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义,

$\therefore x+1 \neq 0$, 即 $x \neq -1$

故答案为: $x \neq -1$.

【点评】 本题考查的是分式有意义的条件, 熟知分式有意义的条件是分母不等于零是解答此题的关键.

11. 分解因式: $x^3-2x^2+x=\underline{x(x-1)^2}$.

【考点】 提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】首先提取公因式 x ，进而利用完全平方公式分解因式即可.

【解答】解： $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$.

故答案为： $x(x - 1)^2$.

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，熟练应用完全平方公式是解题关键.

12. 一个多边形的每个外角都是 60° ，则这个多边形边数为 6.

【考点】多边形内角与外角.

【分析】利用外角和除以外角的度数即可得到边数.

【解答】解： $360 \div 60 = 6$.

故这个多边形边数为 6.

故答案为：6.

【点评】此题主要考查了多边形的外角和，关键是掌握任何多边形的外角和都 360° .

13. 若代数式 $x - 5$ 与 $2x - 1$ 的值相等，则 x 的值是 -4.

【考点】解一元一次方程.

【分析】根据题意列出方程，求出方程的解即可得到 x 的值.

【解答】解：根据题意得： $x - 5 = 2x - 1$,

解得： $x = -4$,

故答案为：-4

【点评】此题考查了解一元一次方程，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

14. 在比例尺为 1:40000 的地图上，某条道路的长为 7cm，则该道路的实际长度是 2.8 km.

【考点】比例线段.

【分析】根据比例尺=图上距离：实际距离，依题意列比例式直接求解即可.

【解答】解：设这条道路的实际长度为 x ，则：

$$\frac{1}{40000} = \frac{7}{x},$$

解得 $x = 280000\text{cm} = 2.8\text{km}$.

$\therefore$ 这条道路的实际长度为 2.8km.

故答案为：2.8

【点评】此题考查比例线段问题，能够根据比例尺正确进行计算，注意单位的转换.

15. 已知正比例函数 $y = ax$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象的一个交点坐标为 $(-1, -1)$ ，则另一个交点坐标是 $(1, 1)$.

【考点】反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】反比例函数的图象是中心对称图形，则经过原点的直线的两个交点一定关于原点对称.

【解答】解： $\because$ 反比例函数的图象与经过原点的直线的两个交点一定关于原点对称，

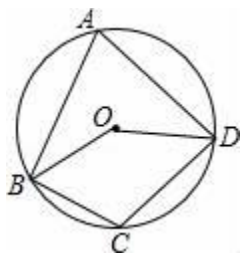
$\therefore$ 另一个交点的坐标与点 $(-1, -1)$ 关于原点对称，

$\therefore$ 该点的坐标为 $(1, 1)$.

故答案为： $(1, 1)$.

【点评】本题主要考查了反比例函数图象的中心对称性，要求同学们要熟练掌握关于原点对称的两个点的坐标的横、纵坐标都互为相反数.

16. 如图，在 $\odot O$ 的内接四边形ABCD中， $\angle A=70^\circ$ ， $\angle OBC=60^\circ$ ，则 $\angle ODC=$ 50° .



【考点】圆内接四边形的性质.

【分析】根据圆内接四边形的对角互补求得 $\angle C$ 的度数，利用圆周角定理求出 $\angle BOD$ 的度数，再根据四边形内角和为 360 度即可求出 $\angle ODC$ 的度数.

【解答】解： $\because \angle A=70^\circ$

$$\therefore \angle C=180^\circ - \angle A=110^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD=2\angle A=140^\circ,$$

$$\because \angle OBC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC=360^\circ - 110^\circ - 140^\circ - 60^\circ=50^\circ,$$

故答案为： 50° .

【点评】本题考查的是圆内接四边形的性质，熟知圆内接四边形的对角互补以及圆周角定理是解答此题的关键.

17. 已知 x 、 y 满足 $2^x \cdot 4^y=8$ ，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， y 的取值范围是 $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$.

【考点】解一元一次不等式组；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

【分析】首先把已知得到式子的两边化成以 2 为底数的幂的形式，然后得到 x 和 y 的关系，根据 x 的范围求得 y 的范围.

【解答】解： $\because 2^x \cdot 4^y=8$,

$$\therefore 2^x \cdot 2^{2y}=2^3, \text{ 即 } 2^{x+2y}=2^3,$$

$$\therefore x+2y=3.$$

$$\therefore y=\frac{3-x}{2},$$

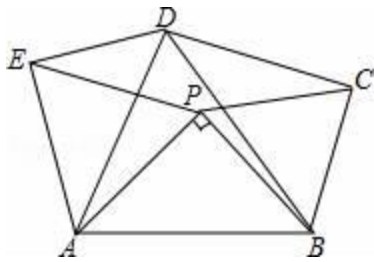
$$\because 0 \leq x \leq 1,$$

$$\therefore 1 \leq y \leq \frac{3}{2}.$$

故答案是： $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了幂的乘方和同底数的幂的乘法法则，理解幂的运算法则得到 x 和 y 的关系是关键.

18. 如图， $\triangle APB$ 中， $AB=2$ ， $\angle APB=90^\circ$ ，在 AB 的同侧作正 $\triangle ABD$ 、正 $\triangle APE$ 和正 $\triangle BPC$ ，则四边形PCDE面积的最大值是 1 .



【考点】平行四边形的判定与性质；全等三角形的判定与性质；等边三角形的性质.

【分析】先延长 EP 交 BC 于点 F，得出 $PF \perp BC$ ，再判定四边形 CDEP 为平行四边形，根据平行四边形的性质得出：四边形 CDEP 的面积 $= EP \times CF = a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}ab$ ，最后根据 $a^2 + b^2 = 4$ ，

判断 $\frac{1}{2}ab$ 的最大值即可.

【解答】解：延长 EP 交 BC 于点 F，

$\because \angle APB = 90^\circ$ ， $\angle AOE = \angle BPC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EPC = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle CPF = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore PF$ 平分 $\angle BPC$ ，

又 $\because PB = PC$ ，

$\therefore PF \perp BC$ ，

设 $Rt\triangle ABP$ 中， $AP = a$ ， $BP = b$ ，则

$CF = \frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}b$ ， $a^2 + b^2 = 2^2 = 4$ ，

$\because \triangle APE$ 和 $\triangle ABD$ 都是等边三角形，

$\therefore AE = AP$ ， $AD = AB$ ， $\angle EAP = \angle DAB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle PAB$ ，

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle PAB$ (SAS)，

$\therefore ED = PB = CP$ ，

同理可得： $\triangle APB \cong \triangle DCB$ (SAS)，

$\therefore EP = AP = CP$ ，

$\therefore$ 四边形 CDEP 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 CDEP 的面积 $= EP \times CF = a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}ab$ ，

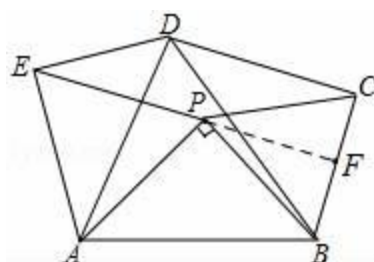
又 $\because (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ，

$\therefore 2ab \leq a^2 + b^2 = 4$ ，

$\therefore \frac{1}{2}ab \leq 1$ ，

即四边形 PCDE 面积的最大值为 1.

故答案为：1



【点评】本题主要考查了等边三角形的性质、平行四边形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质，解决问题的关键是作辅助线构造平行四边形的高线.

三、解答题 (共 10 小题, 满分 84 分)

19. 先化简, 再求值 $(x-1)(x-2) - (x+1)^2$, 其中 $x = \frac{1}{2}$.

【考点】多项式乘多项式.

【分析】根据多项式乘以多项式先化简, 再代入求值, 即可解答.

【解答】解: $(x-1)(x-2) - (x+1)^2$,
 $= x^2 - 2x - x + 2 - x^2 - 2x - 1$
 $= -5x + 1$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时,

原式 $= -5 \times \frac{1}{2} + 1$
 $= -\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了多项式乘以多项式, 解决本题的关键是熟记多项式乘以多项式.

20. 解方程和不等式组:

$$(1) \frac{x}{2x-5} + \frac{5}{5-2x} = 1$$

$$(2) \begin{cases} 5x - 10 \leq 0 \\ x + 3 > -2x \end{cases}$$

【考点】解分式方程; 解一元一次不等式组.

【分析】(1) 先把分式方程化为整式方程求出 x 的值, 再代入最简公分母进行检验即可;

(2) 分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集即可.

【解答】解: (1) 原方程可化为 $x - 5 = 5 - 2x$, 解得 $x = \frac{10}{3}$,

把 $x = \frac{10}{3}$ 代入 $2x - 5$ 得, $2x - 5 = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3} \neq 0$,

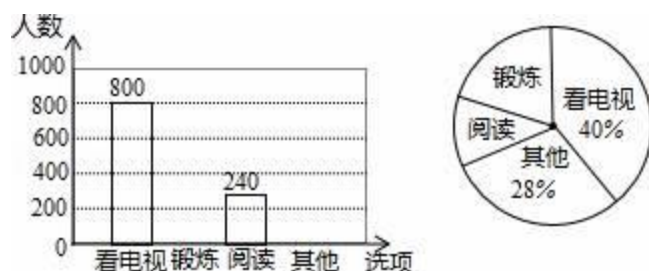
故 $x = \frac{10}{3}$ 是原分式方程的解;

$$(2) \begin{cases} 5x - 10 \leq 0 \textcircled{1} \\ x + 3 > -2x \textcircled{2} \end{cases}, \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 得, } x \leq 2, \text{ 由 } \textcircled{2} \text{ 得, } x > -1,$$

故不等式组的解为: $-1 < x \leq 2$.

【点评】本题考查的是解分式方程, 在解答此类题目时要注意验根.

21. 为了解某市市民晚饭后 1 小时内的生活方式, 调查小组设计了“阅读”、“锻炼”、“看电视”和“其它”四个选项, 用随机抽样的方法调查了该市部分市民, 并根据调查结果绘制成如下统计图.



根据统计图所提供的信息，解答下列问题：

- (1) 本次共调查了 2000 名市民；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 该市共有 480 万市民，估计该市市民晚饭后 1 小时内锻炼的人数。

【考点】 条形统计图；总体、个体、样本、样本容量；用样本估计总体；扇形统计图。

【分析】 (1) 根据“总人数=看电视人数÷看电视人数所占比例”即可算出本次共调查了多少名市民；

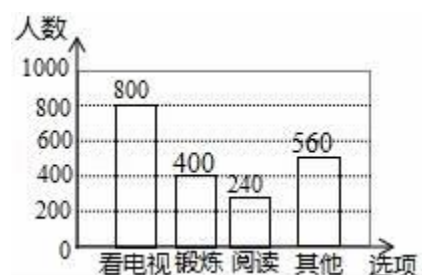
(2) 根据“其它人数=总人数×其它人数所占比例”即可算出晚饭后选择其它的市民数，再用“锻炼人数=总人数－看电视人数－阅读人数－其它人数”即可算出晚饭后选择锻炼的人数，依此补充完整条形统计图即可；

(3) 根据“本市选择锻炼人数=本市总人数×锻炼人数所占比例”即可得出结论。

【解答】 解：(1) 本次共调查的人数为： $800 \div 40\% = 2000$ ，
故答案为：2000。

(2) 晚饭后选择其它的人数为： $2000 \times 28\% = 560$ ，
晚饭后选择锻炼的人数为： $2000 - 800 - 240 - 560 = 400$ 。
将条形统计图补充完整，如图所示。

(3) 晚饭后选择锻炼的人数所占的比例为： $400 \div 2000 = 20\%$ ，
该市民晚饭后 1 小时内锻炼的人数为： $480 \times 20\% = 96$ （万）。
答：该市共有 480 万市民，估计该市市民晚饭后 1 小时内锻炼的人数为 96 万。



【点评】 本题考查了条形统计图、扇形统计图以及用样本估计总体，解题的关键是：(1) 根据数量关系算出样本容量；(2) 求出选择其它和锻炼的人数；(3) 根据比例关系估算出本市晚饭后 1 小时内锻炼的人数。本题属于中档题，难度不大，解决该题型题目时，熟练掌握各统计图的有关知识是关键。

22. 一只不透明的袋子中装有 1 个红球、1 个黄球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同

- (1) 搅匀后从袋子中任意摸出 1 个球，求摸到红球的概率；
- (2) 搅匀后从袋子中任意摸出 1 个球，记录颜色后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球，求两次都摸到红球的概率。

【考点】 列表法与树状图法；概率公式。

【专题】 计算题。

【分析】(1) 直接利用概率公式求解；

(2) 先利用画树状图展示所有 9 种等可能的结果数，再找出两次都摸到红球的结果数，然后根据概率公式求解.

【解答】解：(1) 摸到红球的概率= $\frac{1}{3}$ ；

(2) 画树状图为：



共有 9 种等可能的结果数，其中两次都摸到红球的结果数为 1，

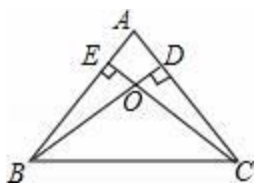
所以两次都摸到红球的概率= $\frac{1}{9}$.

【点评】本题考查了列表法与树状图法：通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率.

23. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，BD、CE 是高，BD 与 CE 相交于点 O

(1) 求证： $OB=OC$ ；

(2) 若 $\angle ABC=50^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数.



【考点】等腰三角形的性质.

【分析】(1) 首先根据等腰三角形的性质得到 $\angle ABC=\angle ACB$ ，然后利用高线的定义得到 $\angle ECB=\angle DBC$ ，从而得证；

(2) 首先求出 $\angle A$ 的度数，进而求出 $\angle BOC$ 的度数.

【解答】(1) 证明： $\because AB=AC$ ，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$ ，

$\because BD$ 、 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高线，

$\therefore \angle DBC=\angle ECB$ ，

$\therefore OB=OC$ ；

(2) $\because \angle ABC=50^\circ$ ， $AB=AC$ ，

$\therefore \angle A=180^\circ-2\times 50^\circ=80^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC=180^\circ-80^\circ=100^\circ$.

【点评】本题考查了等腰三角形的性质及三角形的内角和定理；关键是掌握等腰三角形等角对等边.

24. 某超市销售甲、乙两种糖果，购买 3 千克甲种糖果和 1 千克乙种糖果共需 44 元，购买 1 千克甲种糖果和 2 千克乙种糖果共需 38 元.

(1) 求甲、乙两种糖果的价格；

(2) 若购买甲、乙两种糖果共 20 千克，且总价不超过 240 元，问甲种糖果最少购买多少千克？

【考点】一元一次不等式的应用；二元一次方程组的应用.

【分析】 (1) 设超市甲种糖果每千克需 x 元, 乙种糖果每千克需 y 元. 根据“3 千克甲种糖果和 1 千克乙种糖果共需 44 元, 购买 1 千克甲种糖果和 2 千克乙种糖果共需 38 元”列出方程组并解答;

(2) 设购买甲种糖果 a 千克, 则购买乙种糖果 $(20 - a)$ 千克, 结合“总价不超过 240 元”列出不等式, 并解答.

【解答】 解: (1) 设超市甲种糖果每千克需 x 元, 乙种糖果每千克需 y 元,

依题意得:
$$\begin{cases} 3x+y=44 \\ x+2y=38 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=10 \\ y=14 \end{cases}$$
.

答: 超市甲种糖果每千克需 10 元, 乙种糖果每千克需 14 元;

(2) 设购买甲种糖果 a 千克, 则购买乙种糖果 $(20 - a)$ 千克,

依题意得: $10a+14(20 - a) \leq 240$,

解得 $a \geq 10$,

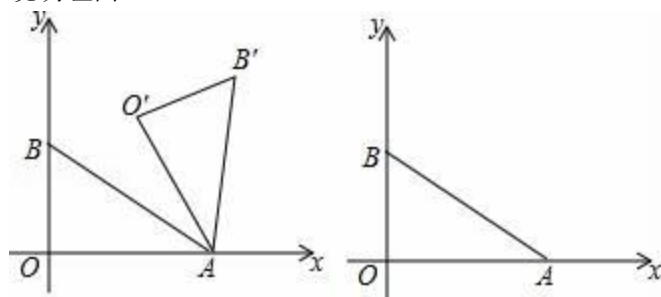
即 $a_{\text{最小值}}=10$.

答: 该顾客混合的糖果中甲种糖果最少 10 千克.

【点评】 本题考查了一元一次不等式和二元一次方程组的应用. 解决问题的关键是读懂题意, 找到关键描述语, 找到所求的量的数量关系.

25. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 把 $Rt\triangle AOB$ 绕点 A 顺时针旋转角 α ($30^\circ < \alpha < 180^\circ$), 得到 $\triangle AO'B'$.

(1) 当 $\alpha=60^\circ$ 时, 判断点 B 是否在直线 $O'B'$ 上, 并说明理由;
(2) 连接 OO' , 设 OO' 与 AB 交于点 D , 当 α 为何值时, 四边形 $ADO'B'$ 是平行四边形? 请说明理由.



【考点】 一次函数图象上点的坐标特征; 平行四边形的判定; 坐标与图形变化-旋转.

【分析】 (1) 首先证明 $\angle BAO=30^\circ$, 再求出直线 $O'B'$ 的解析式即可解决问题.

(2) 如图 2 中, 当 $\alpha=120^\circ$ 时, 四边形 $ADO'B'$ 是平行四边形. 只要证明 $\angle DAO'=\angle AO'B'=90^\circ$, $\angle O'AO=\angle O'AB'=30^\circ$, 即可解决问题.

【解答】 解: (1) 如图 1 中,

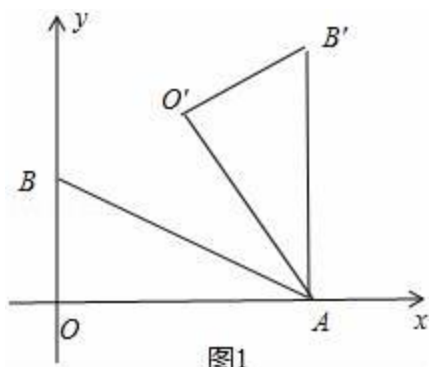


图1

$\therefore$ 一次函数 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$\therefore A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 1)$,

$\therefore \tan \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle BAO = 30^\circ$, $AB = 2OB = 2$,

$\therefore$ 旋转角为 60° ,

$\therefore B'(\sqrt{3}, 2)$, $O'(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$,

设直线 $O'B'$ 解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore \begin{cases} \sqrt{3}k + b = 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}k + b = \frac{3}{2} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 1 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 $O'B'$ 的解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$,

$\therefore x = 0$ 时, $y = 1$,

$\therefore$ 点 $B(0, 1)$ 在直线 $O'B'$ 上.

(2) 如图 2 中, 当 $\alpha = 120^\circ$ 时, 四边形 $ADO'B'$ 是平行四边形.

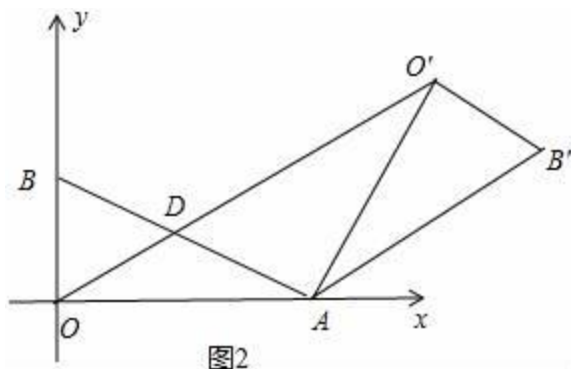


图2

理由: $\because AO = AO'$, $\angle OAO' = 120^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAO' = \angle AO'B' = 90^\circ$, $\angle O'AO = \angle O'AB' = 30^\circ$,

$\therefore AD \parallel O'B'$, $DO' \parallel AB'$,

$\therefore$ 四边形 $ADO'B'$ 是平行四边形.

【点评】 本题考查一次函数图象上的点的特征、平行四边形的性质和判定、旋转变换等知识, 解题的关键是利用性质不变性解决问题, 属于中考常考题型.

26. (1) 阅读材料:

教材中的问题, 如图 1, 把 5 个边长为 1 的小正方形组成的十字形纸板剪开, 使剪成的若干块能够拼成一个大正方形, 小明的思考: 因为剪拼前后的图形面积相等, 且 5 个小正方形的总面积为 5, 所以拼成的大正方形边长为 $\sqrt{5}$, 故沿虚线 AB 剪开可拼成大正方形的一边, 请在图 1 中用虚线补全剪拼示意图.

(2) 类比解决:

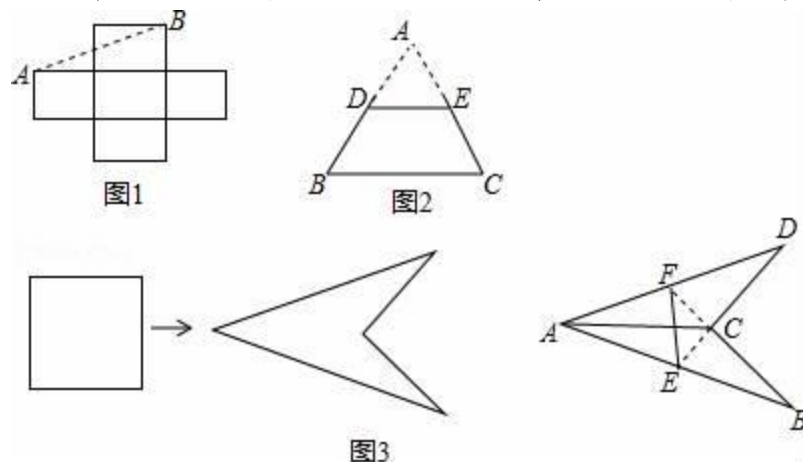
如图 2, 已知边长为 2 的正三角形纸板 ABC, 沿中位线 DE 剪掉 $\triangle ADE$, 请把纸板剩下的部分 DBCE 剪开, 使剪成的若干块能够拼成一个新的正三角形.

①拼成的正三角形边长为 $\sqrt{3}$;

②在图 2 中用虚线画出一一种剪拼示意图.

(3) 灵活运用:

如图 3, 把一边长为 60cm 的正方形彩纸剪开, 用剪成的若干块拼成一个轴对称的风筝, 其中 $\angle BCD=90^\circ$, 延长 DC、BC 分别与 AB、AD 交于点 E、F, 点 E、F 分别为 AB、AD 的中点, 在线段 AC 和 EF 处用轻质钢丝做成十字形风筝龙骨, 在图 3 的正方形中画出一一种剪拼示意图, 并求出相应轻质钢丝的总长度. (说明: 题中的拼接都是不重叠无缝隙无剩余)



【考点】四边形综合题.

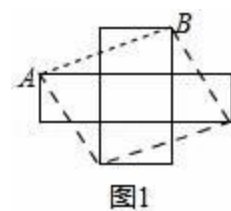
【分析】(1) 依题意补全图形如图 1, 利用剪拼前后的图形面积相等, 得出大正方形的面积即可;

(2) ①先求出梯形 EDBC 的面积, 利用剪拼前后的图形面积相等, 结合等边三角形的面积公式即可;

②依题意补全图形如图 3 所示;

(3) 依题意补全图形如图 4, 根据剪拼的特点, 得出 AC 是正方形的对角线, 点 E, F 是正方形两邻边的中点, 构成等腰直角三角形, 即可.

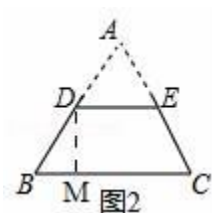
【解答】解: (1) 补全图形如图 1 所示,



由剪拼可知, 5 个小正方形的面积之和等于拼成的一个大正方形的面积,
 $\therefore$ 5 个小正方形的总面积为 5

$\therefore$ 大正方形的面积为 5,
 $\therefore$ 大正方形的边长为 $\sqrt{5}$,
 故答案为: $\sqrt{5}$;

(2) ①如图 2,



$\therefore$ 边长为 2 的正三角形纸板 ABC, 沿中位线 DE 剪掉 $\triangle ADE$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 1, \quad BD = CE = 1$$

过点 D 作 $DM \perp BC$,

$$\therefore \angle DBM = 60^\circ$$

$$\therefore DM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\text{梯形 EDBC}} = \frac{1}{2} (DE + BC) \times DM = \frac{1}{2} (1 + 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

由剪拼可知, 梯形 EDBC 的面积等于新拼成的等边三角形的面积,
 设新等边三角形的边长为 a,

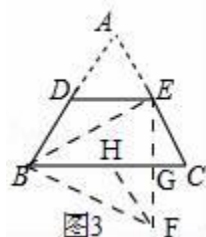
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \text{ 或 } a = -\sqrt{3} \text{ (舍)},$$

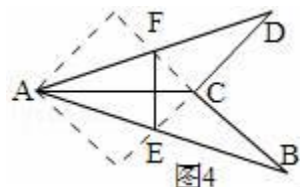
$$\therefore \text{新等边三角形的边长为 } \sqrt{3},$$

故答案为: $\sqrt{3}$;

②剪拼示意图如图 3 所示,



(3) 剪拼示意图如图 4 所示,



$\therefore$ 正方形的边长为 60cm,

由剪拼可知, AC 是正方形的对角线,

$$\therefore AC = 60\sqrt{2} \text{ cm},$$

由剪拼可知, 点 E, F 分别是正方形的两邻边的中点,

$$\therefore CE = CF = 30 \text{ cm},$$

$\therefore \angle ECF=90^\circ$,

根据勾股定理得, $EF=30\sqrt{2}\text{cm}$;

$\therefore$ 轻质钢丝的总长度为 $AC+EF=60\sqrt{2}+30\sqrt{2}=90\sqrt{2}\text{cm}$.

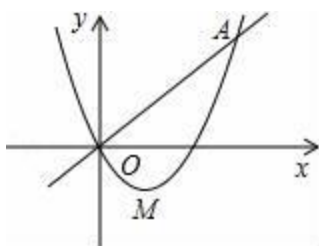
【点评】 此题是四边形综合题, 主要考查了正方形的性质, 等边三角形的性质, 勾股定理, 剪拼的特点, 解本题的关键是根据题意补全图形, 难点是剪拼新正三角形和筝形.

27. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=x$ 与二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象相交于 O 、 A 两点, 点 $A(3, 3)$, 点 M 为抛物线的顶点.

(1) 求二次函数的表达式;

(2) 长度为 $2\sqrt{2}$ 的线段 PQ 在线段 OA (不包括端点) 上滑动, 分别过点 P 、 Q 作 x 轴的垂线交抛物线于点 P_1 、 Q_1 , 求四边形 PQQ_1P_1 面积的最大值;

(3) 直线 OA 上是否存在点 E , 使得点 E 关于直线 MA 的对称点 F 满足 $S_{\triangle AOF}=S_{\triangle AOM}$? 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【考点】 二次函数综合题.

【分析】 (1) 把点 $A(3, 3)$ 代入 $y=x^2+bx$ 中, 即可解决问题.

(2) 设点 P 在点 Q 的左下方, 过点 P 作 $PE \perp QQ_1$ 于点 E , 如图 1 所示. 设点 $P(m, m)$ ($0 < m < 1$), 则 $Q(m+2, m+2)$, $P_1(m, m^2-2m)$, $Q_1(m+2, m^2+2m)$, 构建二次函数, 利用二次函数性质即可解决问题.

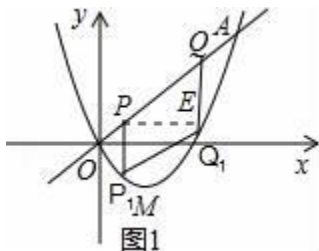
(3) 存在, 首先证明 EF 是线段 AM 的中垂线, 利用方程组求交点 E 坐标即可.

【解答】 解: (1) 把点 $A(3, 3)$ 代入 $y=x^2+bx$ 中,

得: $3=9+3b$, 解得: $b=-2$,

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2-2x$.

(2) 设点 P 在点 Q 的左下方, 过点 P 作 $PE \perp QQ_1$ 于点 E , 如图 1 所示.



$\therefore PE \perp QQ_1$, $QQ_1 \perp x$ 轴,

$\therefore PE \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y=kx$,

$\therefore \angle QPE=45^\circ$,

$\therefore PE=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=2$.

设点 $P(m, m)$ ($0 < m < 1$), 则 $Q(m+2, m+2)$, $P_1(m, m^2-2m)$, $Q_1(m+2, m^2+2m)$,

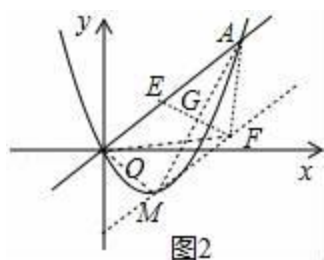
$\therefore PP_1=3m-m^2$, $QQ_1=2-m^2-m$,

$$\therefore S_{\text{梯形}PQ Q_1 P_1} = \frac{1}{2} (PP_1 + QQ_1) \cdot PE = -2m^2 + 2m + 2 = -2 \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\text{梯形}PQ Q_1 P_1}$ 取最大值, 最大值为 $\frac{5}{2}$.

(3) 存在.

如图 2 中, 点 E 的对称点为 F, EF 与 AM 交于点 G, 连接 OM、MF、AF、OF.



$$\because S_{\triangle AOF} = S_{\triangle AOM},$$

$$\therefore MF \parallel OA,$$

$$\because EG = GF, \frac{EG}{FG} = \frac{AG}{GM},$$

$$\therefore AG = GM,$$

$$\because M(1, -1), A(3, 3),$$

$$\therefore \text{点 } G(2, 1),$$

$$\therefore \text{直线 } AM \text{ 解析式为 } y = 2x - 3,$$

$$\therefore \text{线段 } AM \text{ 的中垂线 } EF \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 坐标为 } \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

【点评】 本题考查二次函数综合题、待定系数法、平行线的性质、一次函数、面积问题等知识, 解题的关键是灵活应用待定系数法确定函数解析式, 学会构建二次函数, 利用二次函数性质解决最值问题, 学会利用方程组求两个函数的交点, 属于中考压轴题.

28. 如图, 正方形 ABCD 的边长为 1, 点 P 在射线 BC 上 (异于点 B、C), 直线 AP 与对角线 BD 及射线 DC 分别交于点 F、Q

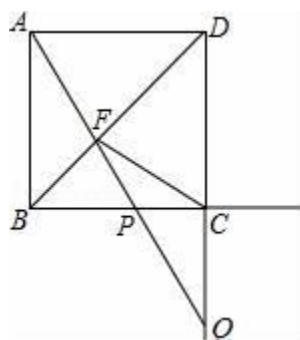
(1) 若 $BP = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\angle BAP$ 的度数;

(2) 若点 P 在线段 BC 上, 过点 F 作 $FG \perp CD$, 垂足为 G, 当 $\triangle FGC \cong \triangle QCP$ 时, 求 PC 的长;

(3) 以 PQ 为直径作 $\odot M$.

①判断 FC 和 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由;

②当直线 BD 与 $\odot M$ 相切时, 直接写出 PC 的长.



【考点】圆的综合题.

【分析】(1) 在直角 $\triangle ABP$ 中, 利用特殊角的三角函数值求 $\angle BAP$ 的度数;

(2) 设 $PC=x$, 根据全等和正方形性质得: $QC=1-x$, $BP=1-x$, 由 $AB \parallel DQ$ 得 $\frac{AB}{CQ} = \frac{BP}{PC}$,

代入列方程求出 x 的值, 因为点 P 在线段 BC 上, 所以 $x < 1$, 写出符合条件的 PC 的长;

(3) ①如图2, 当点 P 在线段 BC 上时, FC 与 $\odot M$ 相切, 只要证明 $FC \perp CM$ 即可, 先根据直角三角形斜边上的中线得 $CM=PM$, 则 $\angle MCP = \angle MPC$, 从而可以得出 $\angle MCP + \angle BAP = 90^\circ$, 再证明 $\triangle ADF \cong \triangle CDF$,

得 $\angle FAD = \angle FCD$, 则 $\angle BAP = \angle BCF$, 所以得出 $\angle MCP + \angle BCF = 90^\circ$, $FC \perp CM$;

如图3, 当点 P 在线段 BC 的延长线上时, FC 与 $\odot M$ 相切, 同理可得 $\angle MCD + \angle FCD = 90^\circ$, 则 $FC \perp CM$, FC 与 $\odot M$ 相切;

②当点 P 在线段 AB 上时, 如图4, 设 $\odot M$ 切 BD 于 E , 连接 EM 、 MC , 设 $\angle Q = x$, 根据平角 BFD 列方程求出 x 的值, 作 AP 的中垂线 HN , 得 $\angle BHP = 30^\circ$, 在 $Rt\triangle BHP$ 中求出 BP 的长, 则得出 $PC = \sqrt{3} - 1$; 当点 P 在点 C 的右侧时 (即在线段 BC 的延长线上), 如图5, 同理可得: $PC = \sqrt{3} + 1$.

【解答】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ABP = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle BAP = \frac{BP}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \angle BAP = 30^\circ$;

(2) 如图1, 设 $PC=x$, 则 $BP=1-x$,

$\therefore \triangle FGC \cong \triangle QCP$,

$\therefore GC=PC=x$, $DG=1-x$,

$\therefore \angle BDC = 45^\circ$, $\angle FGD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FGD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore FG=DG=CQ=1-x$,

$\therefore AB \parallel DQ$,

$$\therefore \frac{AB}{CQ} = \frac{BP}{PC},$$

$$\therefore \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x},$$

$$\therefore x = (1-x)^2,$$

解得: $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ (舍去), $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore PC = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

(3) ①如图 2, 当点 P 在线段 BC 上时, FC 与 $\odot M$ 相切, 理由是:

取 PQ 的中点 M, 以 M 为圆心, 以 PQ 为直径画圆, 连接 CM,

$\because \angle PCQ = 90^\circ$, PQ 为直径,

$\therefore$ 点 C 是圆 M 上,

$\because \triangle PCQ$ 为直角三角形,

$\therefore MC = PM$,

$\therefore \angle MCP = \angle MPC$,

$\because \angle APB = \angle MPC$,

$\therefore \angle MCP = \angle APB$,

$\because \angle APB + \angle BAP = 90^\circ$,

$\therefore \angle MCP + \angle BAP = 90^\circ$,

$\because AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$, $FD = FD$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDF$,

$\therefore \angle FAD = \angle FCD$,

$\because \angle BAP + \angle FAD = \angle BCF + \angle FCD$,

$\therefore \angle BAP = \angle BCF$,

$\therefore \angle MCP + \angle BCF = 90^\circ$,

$\therefore FC \perp CM$,

$\therefore FC$ 与 $\odot M$ 相切;

如图 3, 当点 P 在线段 BC 的延长线上时, FC 与 $\odot M$ 也相切, 理由是:

取 PQ 的中点 M, 以 M 为圆心, 以 PQ 为直径画圆, 连接 CM,

同理得 $\angle AQD = \angle MCQ$, 点 C 是圆 M 上,

$\because AD = DC$, $\angle BDA = \angle CDB = 45^\circ$, $DF = DF$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDF$,

$\therefore \angle FAD = \angle FCD$,

$\because \angle AQD + \angle FAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle MCD + \angle FCD = 90^\circ$,

$\therefore FC \perp MC$,

$\therefore FC$ 与 $\odot M$ 相切;

②当点 P 在线段 AB 上时, 如图 4,

设 $\odot M$ 切 BD 于 E, 连接 EM、MC,

$\therefore \angle MEF = \angle MCF = 90^\circ$,

$\because ME = MC$, $MF = MF$,

$\therefore \triangle MEF \cong \triangle MCF$,

$\therefore \angle QFC = \angle QFE$,

$\because \angle BAP = \angle Q = \angle BCF$,

设 $\angle Q = x$, 则 $\angle BAP = \angle BCF = x$, $\angle QFE = \angle QFC = 45^\circ + x$, $\angle DFC = 45^\circ + x$,

$\because \angle QFE + \angle QFC + \angle DFC = 180^\circ$,

$\therefore 3(45^\circ + x) = 180^\circ$,

$x = 15^\circ$,

$$\therefore \angle Q = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = 15^\circ,$$

作 AP 的中垂线 HN，交 AB 于 H，交 AP 于 N，

$$\therefore AH = AP,$$

$$\therefore \angle BHP = 30^\circ,$$

$$\text{设 } BP = x, \text{ 则 } HP = 2x, HB = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore 2x + \sqrt{3}x = 1,$$

$$x = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore PC = BC - BP = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1;$$

当点 P 在点 C 的右侧时（即在线段 BC 的延长线上），如图 5，

$$\text{同理可得：} PC = \sqrt{3} + 1;$$

综上所述：PC = $\sqrt{3} - 1$ 或 $\sqrt{3} + 1$.

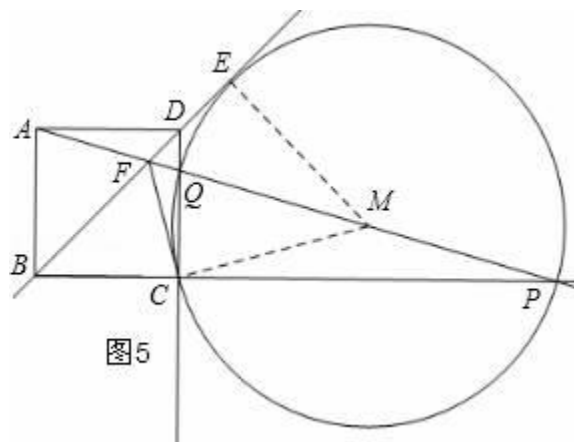


图5

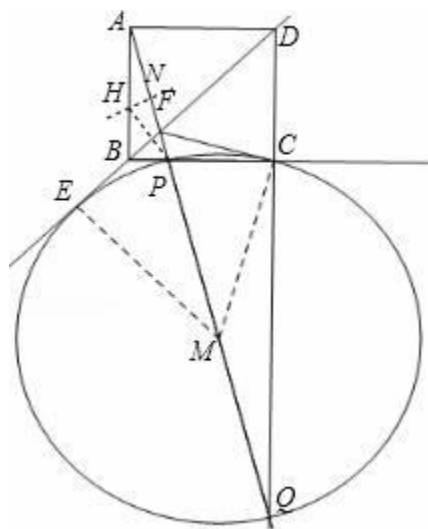


图4

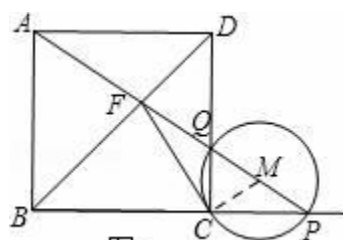
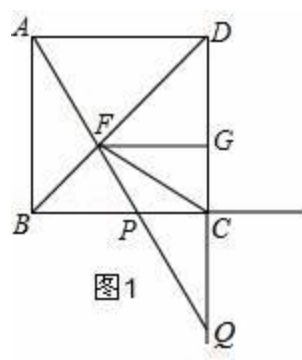
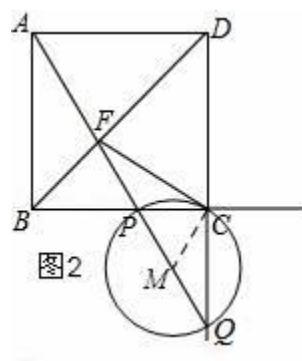


图3



【点评】 本题是圆的综合题，综合考查了正方形、圆及切线、全等三角形的性质及判定；同时利用特殊的三角函数值求角的度数，本题还是动点问题，难度较大，尤其是第（3）问，因为不确定点 P 是在线段 BC 上还是在延长线上，有此情况存在，所以都要分情况进行讨论，从而分别证出结论或求出 PC 的长.