

2015 年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1. -3 的绝对值是

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是

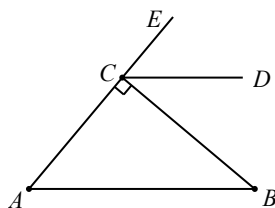
- A. $x > 2$ B. $x < 2$ C. $x \neq -2$ D. $x \neq 2$

3. 下列“慢行通过，注意危险，禁止行人通行，禁止非机动车通行”四个交通标志图（黑白阴影图片）中为轴对称图形的是



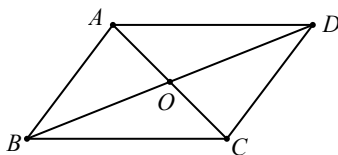
- A. B. C. D.

4. 如图， $BC \perp AE$ 于点 C ， $CD \parallel AB$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle ECD$ 的度数是



- A. 70° B. 60° C. 50° D. 40°

5. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，则下列说法一定正确的是



- A. $AO = OD$ B. $AO \perp OD$ C. $AO = OC$ D. $AO \perp AB$

6. 已知 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $c = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，则下列大小关系正确的是

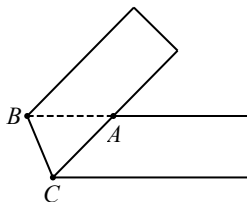
- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

7. 已知二次函数 $y = x^2 + (m-1)x + 1$ ，当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，而 m 的取值范

围是

- A. $m = -1$ B. $m = 3$ C. $m \leq -1$ D. $m \geq -1$

8. 将一张宽为 4cm 的长方形纸片 (足够长) 折叠成如图所示图形, 重叠部分是一个三角形, 则这个三角形面积的最小值是



- A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$ B. 8cm^2 C. $\frac{16}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$ D. 16cm^2

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

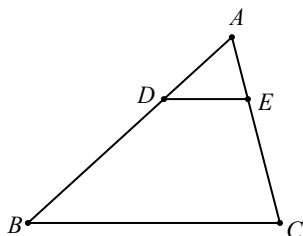
9. 计算 $(\pi - 1)^0 + 2^{-1} =$ _____.

10. 太阳的半径约为 696000km , 把 696000 这个数用科学记数法表示为 _____.

11. 分解因式: $2x^2 - 2y^2 =$ _____.

12. 已知扇形的圆心角为 120° , 弧长为 6π , 则扇形的面积是 _____.

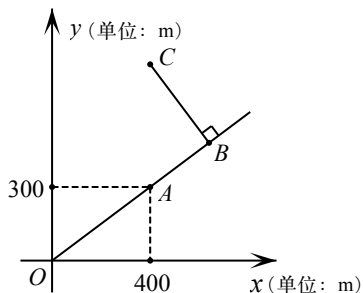
13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $AD:DB = 1:2$, $DE = 2$, 则 BC 的长是 _____.



14. 已知 $x = 2$ 是关于 x 的方程 $a(x+1) = \frac{1}{2}a + x$ 的解, 则 a 的值是 _____.

15. 二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$ 图像的顶点坐标是 _____.

16. 如图是根据某公园的平面示意图建立的平面直角坐标系, 公园的入口位于坐标原点 O , 古塔位于点 $A(400, 300)$, 从古塔出发沿射线 OA 方向前行 300m 是盆景园 B , 从盆景园 B 向左转 90° 后直行 400m 到达梅花阁 C , 则点 C 的坐标是 _____.

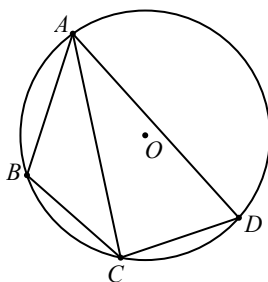


17. 数学家歌德巴赫通过研究下面一系列等式, 作出了一个著名的猜想.

$$\begin{array}{ll} 4 = 2 + 2; & 12 = 5 + 7; \\ 6 = 3 + 3; & 14 = 3 + 11 = 7 + 7; \\ 8 = 3 + 5; & 16 = 3 + 13 = 5 + 11; \\ 10 = 3 + 7 = 5 + 5 & 18 = 5 + 13 = 7 + 11; \\ & \dots \end{array}$$

通过这组等式, 你发现的规律是_____ (请用文字语言表达).

18. 如图, 在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$, 点 C 为弧 BD 的中点, 则 AC 的长是_____.



三、解答题 (共 10 小题, 共 84 分)

19. (6 分) 先化简, 再求值: $(x+1)^2 - x(2-x)$, 其中 $x = 2$.

20. (8 分) 解方程和不等式组:

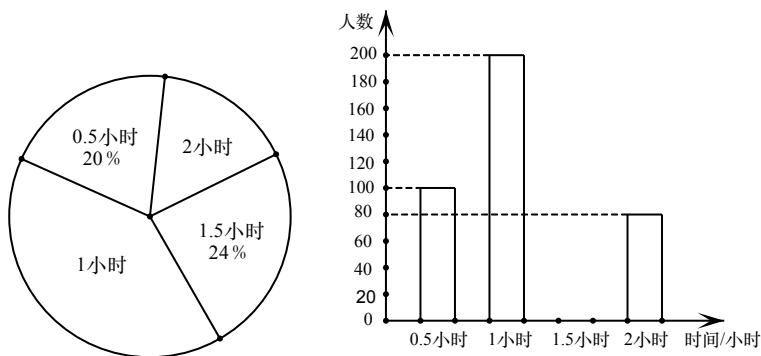
$$(1) \frac{x}{3x-1} = 2 - \frac{1}{1-3x}; \quad (2) \begin{cases} 2x+4 > 0, \\ 1-2x > -5. \end{cases}$$

21. (8 分) 某调查小组采用简单随机抽样方法, 对某市部分中小學生一天中阳光体育运动时间进行了抽样调查, 并把所得数据整理后绘制成如下的统计图:

(1) 该调查小组抽取的样本容量是多少?

(2) 求样本学生中阳光体育运动时间为 1.5 小时的人数, 并补全频数分布直方图;

(3) 请估计该市中小學生一天中阳光体育运动的平均时间.



22. (8 分) 甲, 乙, 丙三位学生进入了“校园朗诵比赛”冠军、亚军和季军的决赛, 他们将通过抽签来决定比赛的出场顺序.

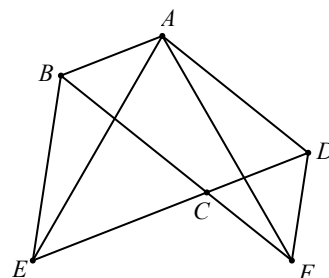
(1) 求甲第一个出场的概率;

(2) 求甲比乙先出场的概率.

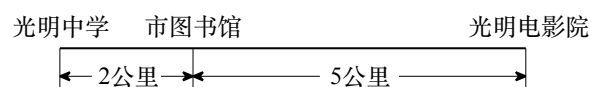
23. (8 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BCD = 120^\circ$, 分别延长 DC 、 BC 到点 E , F , 使得 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 都是正三角形.

(1) 求证: $AE = AF$;

(2) 求 $\angle EAF$ 的度数.



24. (8 分) 已知某市的光明中学、市图书馆和光明电影院在同一直线上, 它们之间的距离如图所示. 小张星期天上午带了 75 元现金先从光明中学乘出租车去了市图书馆, 付费 9 元; 中午再从市图书馆乘出租车去了光明电影院, 付费 12.6 元. 若该市出租车的收费标准是: 不超过 3 公里计费为 m 元, 3 公里后按 n 元/公里计费.



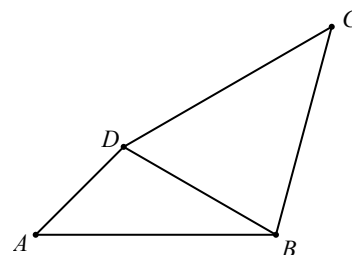
(1) 求 m , n 的值, 并直接写出车费 y (元) 与路程 x (公里) ($x > 3$) 之间的函数关系式;

(2) 如果小张这天外出的消费还包括: 中午吃饭花费 15 元, 在光明电影院看电影花费 25 元. 问小张剩下的现金够不够乘出租车从光明电影院返回光明中学? 为什么?

25. (8 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle ADB = \angle ABC = 105^\circ$.

(1) 若 $AD = 2$, 求 AB ;

(2) 若 $AB + CD = 2\sqrt{3} + 2$, 求 AB .



26. (10 分) 设 ω 是一个平面图形, 如果用直尺和圆规经过有限步作图 (简称尺规作图), 画出一个正方形与 ω 的面积相等 (简称等积), 那么这样的等积转化称为 ω 的“化方”.

(1) 阅读填空

如图①, 已知矩形 $ABCD$, 延长 AD 到 E , 使 $DE = DC$, 以 AE 为直径作半圆. 延长 CD 交半圆于点 H , 以 DH 为边作正方形 $DFGH$, 则正方形 $DFGH$ 与矩形 $ABCD$ 等积.

理由: 连接 AH , EH .

$\because AE$ 为直径 $\therefore \angle AHE = 90^\circ \therefore \angle HAE + \angle HEA = 90^\circ$.

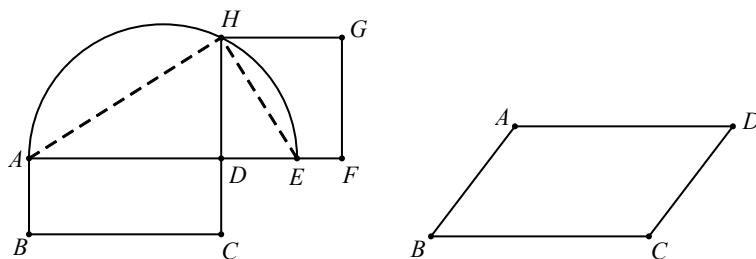
$\because DH \perp AE \therefore \angle ADH = \angle EDH = 90^\circ$

$\therefore \angle HAD + \angle AHD = 90^\circ$

$\therefore \angle AHD = \angle HED \therefore \triangle ADH \sim$ _____.

$\therefore \frac{AD}{DH} = \frac{DH}{DE}$, 即 $DH^2 = AD \times DE$.

又 $\because DE = DC \therefore DH^2 =$ _____, 即正方形 $DFGH$ 与矩形 $ABCD$ 等积.



(2) 操作实践

平行四边形的“化方”思路是, 先把平行四边形转化为等积的矩形, 再把矩形转化为等积的正方形.

如图②, 请用尺规作图作出与 $\square ABCD$ 等积的矩形 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹).

(3) 解决问题

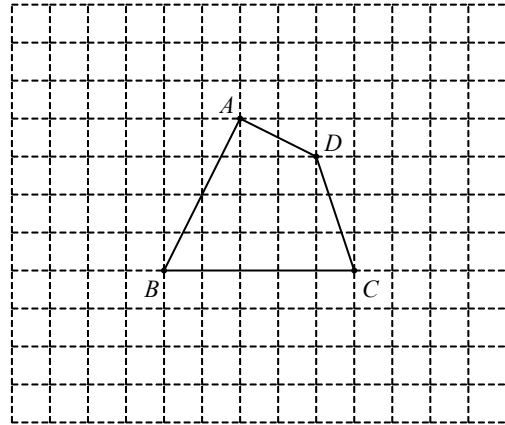
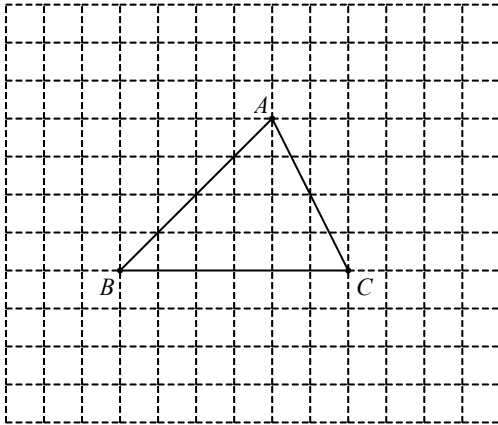
三角形的“化方”思路是: 先把三角形转化为等积的_____ (填写图形名称), 再转化为等积的正方形.

如图③, $\triangle ABC$ 的顶点在正方形网格的格点上, 请作出与 $\triangle ABC$ 等积的正方形的一条边 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹, 不通过计算 $\triangle ABC$ 面积作图).

(4) 拓展探究

n 边形 ($n > 3$) 的“化方”思路之一是: 把 n 边形转化为等积的 $n - 1$ 边形, $\dots$, 直至转化为等积的三角形, 从而可以化方.

如图④, 四边形 $ABCD$ 的顶点在正方形网格的格点上, 请作出与四边形 $ABCD$ 等积的三角形 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹, 不通过计算四边形 $ABCD$ 面积作图).



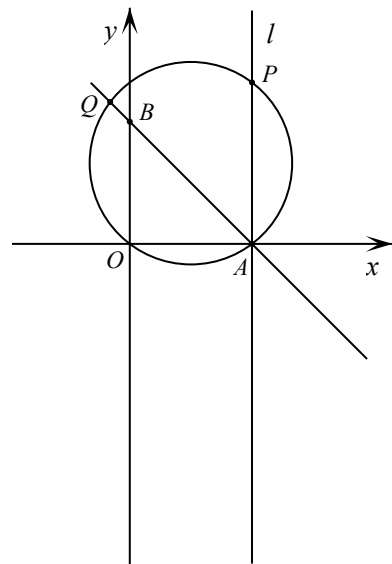
27. (10 分) 如图, 一次函数 $y = -x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B , 过点 A 作 x 轴的垂线 l , 点 P 为直线 l 上的动点, 点 Q 为直线 AB 与 $\triangle OAP$ 外接圆的交点, 点 P 、 Q 与点 A 都不重合.

(1) 写出点 A 的坐标;

(2) 当点 P 在直线 l 上运动时, 是否存在点 P 使得 $\triangle OQB$ 与 $\triangle APQ$ 全等? 如果存在, 求出点 P 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.

(3) 若点 M 在直线 l 上, 且 $\angle POM = 90^\circ$, 记 $\triangle OAP$ 外接圆和 $\triangle OAM$ 外接圆的面积分别是 S_1 、

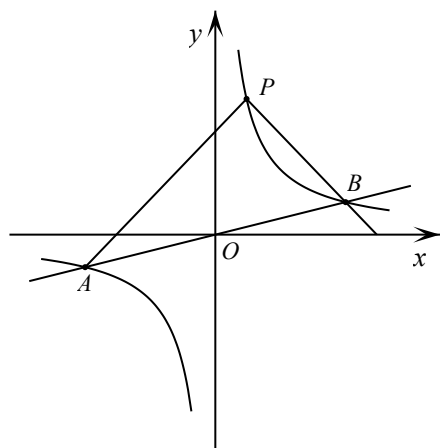
S_2 , 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ 的值.



28. (10 分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像与一次函数 $y = \frac{1}{4}x$ 的图像交于点 A 、 B , 点 B 的横坐标是 4. 点 P 是第一象限内反比例函数图像上的动点, 且在直线 AB 的上方.

(1) 若点 P 的坐标是 $(1, 4)$, 直接写出 k 的值和 $\triangle PAB$ 的面积;

- (2) 设直线 PA 、 PB 与 x 轴分别交于点 M 、 N ，求证： $\triangle PMN$ 是等腰三角形；
- (3) 设点 Q 是反比例函数图像上位于 P 、 B 之间的动点（与点 P 、 B 不重合），连接 AQ 、 BQ ，比较 $\angle PAQ$ 与 $\angle PBQ$ 的大小，并说明理由。



一、选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1. -3 的绝对值是（ ）

A. 3

B. -3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

考点：绝对值.

分析：根据一个负数的绝对值等于它的相反数得出.

解答：解： $|-3| = -(-3) = 3$.

故选：A.

点评：考查绝对值的概念和求法. 绝对值规律总结：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.

2. (2 分) (2015•常州) 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x > 2$

B. $x < 2$

C. $x \neq -2$

D. $x \neq 2$

考点：分式有意义的条件.

专题：计算题.

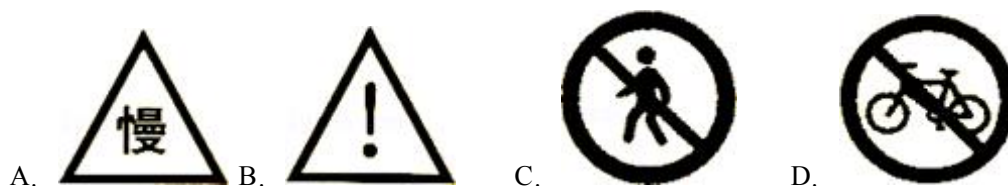
分析：根据分式有意义得到分母不为 0，即可求出 x 的范围.

解答：解：要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义，须有 $x-2 \neq 0$ ，即 $x \neq 2$ ，

故选 D.

点评：此题考查了分式有意义的条件，分式有意义的条件为：分母不为 0.

3. (2分) (2015•常州) 下列“慢行通过，注意危险，禁止行人通行，禁止非机动车通行”四个交通标志图（黑白阴影图片）中为轴对称图形的是（ ）



考点： 轴对称图形.

分析： 根据轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得出答案.

解答： 解： A、不是轴对称图形，故本选项错误；

B、是轴对称图形，故本选项正确；

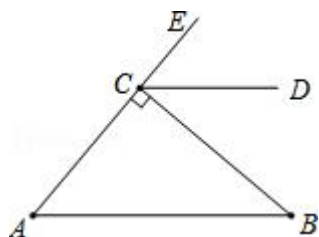
C、不是轴对称图形，故本选项错误；

D、不是轴对称图形，故本选项错误.

故选： B.

点评： 本题考查了轴对称图形，掌握轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合.

4. (2分) (2015•常州) 如图， $BC \perp AE$ 于点 C ， $CD \parallel AB$ ， $\angle B = 40^\circ$ ， 则 $\angle ECD$ 的度数是（ ）



A. 70°

B. 60°

C. 50°

D. 40°

考点： 平行线的性质；垂线.

专题： 计算题.

分析： 由 BC 与 AE 垂直，得到三角形 ABC 为直角三角形，利用直角三角形两锐角互余，求出 $\angle A$ 的度数，再利用两直线平行同位角相等即可求出 $\angle ECD$ 的度数.

解答： 解： $\because BC \perp AE$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B = 40^\circ$,

$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B = 50^\circ$,

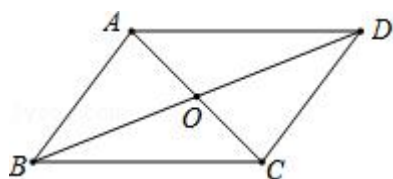
$\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle ECD = \angle A = 50^\circ$,

故选 C.

点评： 此题考查了平行线的性质，以及垂线，熟练掌握平行线的性质是解本题的关键.

5. (2分) (2015•常州) 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， 则下列说法一定正确的是（ ）



- A. $AO=OD$ B. $AO \perp OD$ C. $AO=OC$ D. $AO \perp AB$

考点： 平行四边形的性质.

分析： 根据平行四边形的性质：对边平行且相等，对角线互相平分进行判断即可.

解答： 解：对角线不一定相等，A 错误；

对角线不一定互相垂直，B 错误；

对角线互相平分，C 正确；

对角线与边不一定垂直，D 错误.

故选：C.

点评： 本题考查度数平行四边形的性质，掌握平行四边形的对边平行且相等，对角线互相平分是解题的关键.

6. (2 分) (2015•常州) 已知 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则下列大小关系正确的是 ()

- A. $a>b>c$ B. $c>b>a$ C. $b>a>c$ D. $a>c>b$

考点： 实数大小比较.

专题： 计算题.

分析： 将 a , b , c 变形后，根据分母大的反而小比较大小即可.

解答： 解： $\because a=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $c=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, 且 $\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{5}$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$, 即 $a>b>c$,

故选 A.

点评： 此题考查了实数比较大小，将 a , b , c 进行适当的变形是解本题的关键.

7. (2 分) (2015•常州) 已知二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$, 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 而 m 的取值范围是 ()

- A. $m=-1$ B. $m=3$ C. $m \leq -1$ D. $m \geq -1$

考点： 二次函数的性质.

分析： 根据二次函数的性质，利用二次函数的对称轴不大于 1 列式计算即可得解.

解答： 解：抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{m-1}{2}$,

$\because$ 当 $x>1$ 时, y 的值随 x 值的增大而增大,

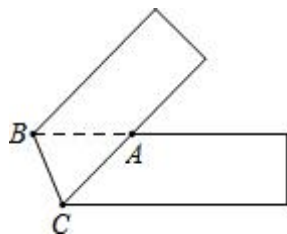
$\therefore -\frac{m-1}{2} \leq 1$,

解得 $m \geq -1$.

故选 D.

点评： 本题考查了二次函数的性质，主要利用了二次函数的增减性，熟记性质并列出不等式是解题的关键.

8. (2 分) (2015•常州) 将一张宽为 4cm 的长方形纸片 (足够长) 折叠成如图所示图形, 重叠部分是一个三角形, 则这个三角形面积的最小值是 ()



- A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$ B. 8cm^2 C. $\frac{16}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$ D. 16cm^2

考点： 翻折变换 (折叠问题).

分析： 当 $AC \perp AB$ 时, 重叠三角形面积最小, 此时 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 面积为 8cm^2 .

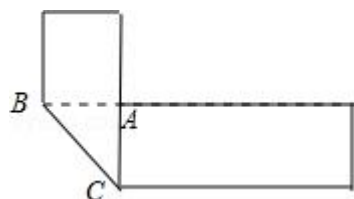
解答： 解：如图, 当 $AC \perp AB$ 时, 三角形面积最小,

$$\because \angle BAC = 90^\circ \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore AB = AC = 4\text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8\text{cm}^2.$$

故选：B.



点评： 本题考查了折叠的性质，发现当 $AC \perp AB$ 时, 重叠三角形的面积最小是解决问题的关键.

二、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

9. (2 分) (2015•常州) 计算 $(\pi - 1)^0 + 2^{-1} = 1\frac{1}{2}$.

考点： 负整数指数幂; 零指数幂.

分析： 分别根据零指数幂, 负整数指数幂的运算法则计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答： 解： $(\pi - 1)^0 + 2^{-1}$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 1\frac{1}{2}.$$

故答案为： $1\frac{1}{2}$.

点评： 本题主要考查了零指数幂，负整数指数幂的运算. 负整数指数为正整数指数的倒数；任何非 0 数的 0 次幂等于 1.

10. (2 分) (2015•常州) 太阳半径约为 696 000 千米，数字 696 000 用科学记数法表示为__ 6.96×10^5 __.

考点： 科学记数法—表示较大的数.

专题： 应用题.

分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 本题中 696 000 有 6 位整数， $n=6-1=5$.

解答： 解： $696\,000=6.96 \times 10^5$.

点评： 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

11. (2 分) (2015•常州) 分解因式： $2x^2 - 2y^2 =$ $2(x+y)(x-y)$.

考点： 提公因式法与公式法的综合运用.

分析： 先提取公因式 2，再根据平方差公式进行二次分解即可求得答案.

解答： 解： $2x^2 - 2y^2 = 2(x^2 - y^2) = 2(x+y)(x-y)$.

故答案为： $2(x+y)(x-y)$.

点评： 本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用平方差公式进行二次分解，注意分解要彻底.

12. (2 分) (2015•常州) 已知扇形的圆心角为 120° ，弧长为 6π ，则扇形的面积是 27π .

考点： 扇形面积的计算.

分析： 利用弧长公式即可求扇形的半径，进而利用扇形的面积公式即可求得扇形的面积.

解答： 解： 设扇形的半径为 r .

$$\text{则 } \frac{120\pi r}{180} = 6\pi,$$

解得 $r=9$,

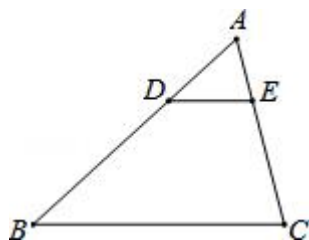
$$\therefore \text{扇形的面积} = \frac{120\pi \times 9^2}{360} = 27\pi.$$

故答案为： 27π .

点评： 此题主要考查了扇形面积求法，用到的知识点为：扇形的弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ ；扇形

的面积公式 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$.

13. (2 分) (2015•常州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD:DB=1:2$ ， $DE=2$ ，则 BC 的长是 6.



考点：相似三角形的判定与性质.

分析：由平行可得对应线段成比例，即 $AD:AB=DE:BC$ ，再把数值代入可求得 BC .

解答：解：∵ $DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

∵ $AD:DB=1:2$, $DE=2$,

$$\therefore \frac{1}{1+2} = \frac{2}{BC},$$

解得 $BC=6$.

故答案为：6.

点评：本题主要考查平行线分线段成比例的性质，掌握平行线分线段成比例中的对应线段是解题的关键.

14. (2分) (2015•常州) 已知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $a(x+1) = \frac{1}{2}a+x$ 的解，则 a 的值是 $-\frac{4}{5}$.

考点：一元一次方程的解.

专题：计算题.

分析：把 $x=2$ 代入方程计算即可求出 a 的值.

解答：解：把 $x=2$ 代入方程得： $3a = \frac{1}{2}a + 2$,

解得： $a = -\frac{4}{5}$.

故答案为： $-\frac{4}{5}$.

点评：此题考查了一元一次方程的解，方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

15. (2分) (2015•常州) 二次函数 $y = -x^2 + 2x - 3$ 图象的顶点坐标是 $(1, -2)$.

考点：二次函数的性质.

分析：此题既可以利用 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标公式求得顶点坐标，也可以利用配方法求出其顶点的坐标.

解答：解：∵ $y = -x^2 + 2x - 3$

$$= -(x^2 - 2x + 1) - 2$$

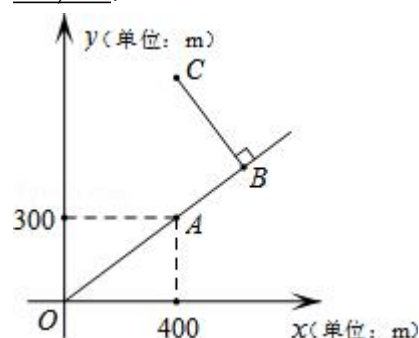
$$= -(x-1)^2 - 2,$$

故顶点的坐标是 $(1, -2)$.

故答案为 $(1, -2)$.

点评： 本题考查了二次函数的性质, 求抛物线的顶点坐标有两种方法①公式法, ②配方法.

16. (2 分) (2015•常州) 如图是根据某公园的平面示意图建立的平面直角坐标系, 公园的入口位于坐标原点 O , 古塔位于点 $A(400, 300)$, 从古塔出发沿射线 OA 方向前行 300m 是盆景园 B , 从盆景园 B 向左转 90° 后直行 400m 到达梅花阁 C , 则点 C 的坐标是 $(400, 800)$.



考点： 勾股定理的应用；坐标确定位置；全等三角形的应用.

分析： 根据题意结合全等三角形的判定与性质得出 $\triangle AOD \cong \triangle ACB$ (SAS), 进而得出 C, A, D 也在一条直线上, 求出 CD 的长即可得出 C 点坐标.

解答： 解：连接 AC ,

由题意可得： $AB=300m$, $BC=400m$,

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle ACB$ 中

$$\therefore \begin{cases} AD=AB \\ \angle ODA=\angle ABC, \\ DO=BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle ACB$ (SAS),

$\therefore \angle CAB=\angle OAD$,

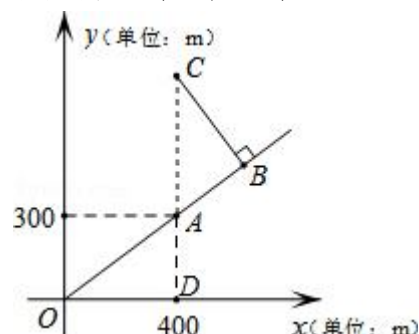
$\therefore B, O$ 在一条直线上,

$\therefore C, A, D$ 也在一条直线上,

$\therefore AC=AO=500m$, 则 $CD=AC=AD=800m$,

$\therefore C$ 点坐标为： $(400, 800)$.

故答案为： $(400, 800)$.



点评： 此题主要考查了全等三角形的判定与性质以及勾股定理, 得出 C, A, D 也在一条直线上是解题关键.

17. (2 分) (2015•常州) 数学家歌德巴赫通过研究下面一系列等式, 作出了一个著名的猜想.

$$\begin{array}{ll} 4=2+2; & 12=5+7; \\ 6=3+3; & 14=3+11=7+7; \\ 8=3+5; & 16=3+13=5+11; \\ 10=3+7=5+5 & 18=5+13=7+11; \end{array}$$

...

通过这组等式, 你发现的规律是 所有大于 2 的偶数都可以写成两个素数之和 (请用文字语言表达).

考点: 规律型: 数字的变化类.

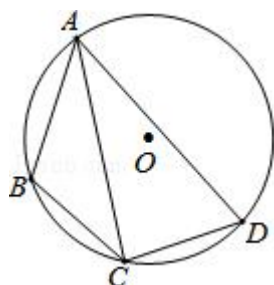
分析: 根据以上等式得出规律进行解答即可.

解答: 解: 此规律用文字语言表达为: 所有大于 2 的偶数都可以写成两个素数之和,

故答案为: 所有大于 2 的偶数都可以写成两个素数之和

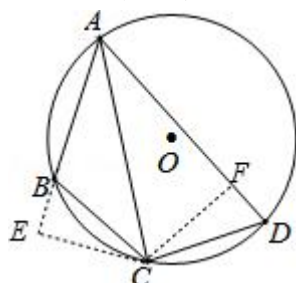
点评: 此题考查规律问题, 关键是根据几个等式寻找规律再用文字表达即可.

18. (2 分) (2015•常州) 如图, 在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=5$, $\angle BAD=60^\circ$, 点 C 为弧 BD 的中点, 则 AC 的长是 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



考点: 全等三角形的判定与性质; 勾股定理; 圆心角、弧、弦的关系; 圆周角定理.

分析: 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , $CF \perp AD$ 于 F , 得出 $\angle E = \angle CFD = \angle CFA = 90^\circ$, 推出 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$, 求出 $\angle BAC = \angle DAC$, $BC = CD$, 求出 $CE = CF$, 根据圆内接四边形性质求出 $\angle D = \angle CBE$, 证 $\triangle CBE \cong \triangle CDF$, 推出 $BE = DF$, 证 $\triangle AEC \cong \triangle AFC$, 推出 $AE = AF$, 设 $BE = DF = x$, 得出 $5 = x + 3 + x$, 求出 x , 解直角三角形求出即可.



解答: 解:

过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , $CF \perp AD$ 于 F ,

则 $\angle E = \angle CFD = \angle CFA = 90^\circ$,

$\because$ 点 C 为弧 BD 的中点,

$\therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}$,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC, BC = CD,$$

$$\because CE \perp AB, CF \perp AD,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$\therefore A、B、C、D$ 四点共圆,

$$\therefore \angle D = \angle CBE,$$

在 $\triangle CBE$ 和 $\triangle CDF$ 中

$$\begin{cases} \angle CBE = \angle D \\ \angle E = \angle CFD \\ CE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBE \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore BE = DF,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AFC$ 中

$$\begin{cases} \angle E = \angle AFC \\ \angle EAC = \angle FAC \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle AFC,$$

$$\therefore AE = AF,$$

设 $BE = DF = x$,

$$\because AB = 3, AD = 5,$$

$$\therefore AE = AF = x + 3,$$

$$\therefore 5 = x + 3 + x,$$

解得: $x = 1$,

即 $AE = 4$,

$$\therefore AC = \frac{AE}{\cos 30^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

点评: 本题考查了圆心角、弧、弦之间的关系, 圆内接四边形性质, 解直角三角形, 全等三角形的性质和判定的应用, 能正确作出辅助线是解此题的关键, 综合性比较强, 难度适中.

三、解答题 (共 10 小题, 共 84 分)

19. (6 分) (2015•常州) 先化简, 再求值: $(x+1)^2 - x(2-x)$, 其中 $x=2$.

考点: 整式的混合运算—化简求值.

专题: 计算题.

分析: 原式第一项利用完全平方公式化简, 第二项利用单项式乘以多项式法则计算, 去括号合并得到最简结果, 把 x 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: 原式 $= x^2 + 2x + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 + 1$,

当 $x=2$ 时, 原式 $= 8 + 1 = 9$.

点评: 此题考查了整式的混合运算—化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (8 分) (2015•常州) 解方程和不等式组:

$$(1) \frac{x}{3x-1} = 2 - \frac{1}{1-3x};$$

$$(2) \begin{cases} 2x+4>0 \\ 1-2x>-5. \end{cases}$$

考点： 解分式方程；解一元一次不等式组.

专题： 计算题.

分析： (1) 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解；

(2) 分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可求出解集.

解答： 解：(1) 去分母得： $x=6x-2+1$,

解得： $x=\frac{1}{5}$,

经检验 $x=\frac{1}{5}$ 是分式方程的解；

$$(2) \begin{cases} 2x+4>0 \textcircled{1} \\ 1-2x>-5 \textcircled{2} \end{cases}$$

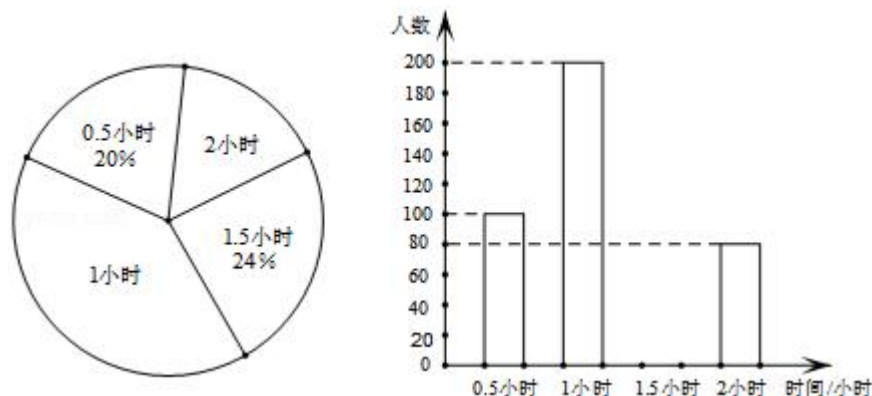
由①得： $x>-2$,

由②得： $x<3$,

则不等式组的解集为 $-2<x<3$.

点评： 此题考查了解分式方程，以及解一元一次不等式组，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

21. (8分) (2015•常州) 某调查小组采用简单随机抽样方法，对某市部分中小學生一天中阳光体育运动时间进行了抽样调查，并把所得数据整理后绘制成如下的统计图：



(1) 该调查小组抽取的样本容量是多少？

(2) 求样本学生中阳光体育运动时间为 1.5 小时的人数，并补全占频数分布直方图；

(3) 请估计该市中小學生一天中阳光体育运动的平均时间.

考点： 频数（率）分布直方图；扇形统计图；加权平均数.

分析： (1) 利用 0.5 小时的人数为：100 人，所占比例为：20%，即可求出样本容量；

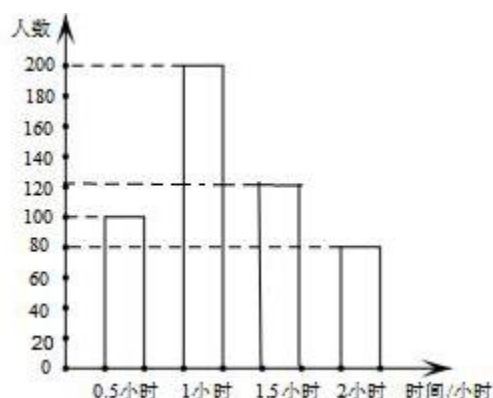
(2) 利用样本容量乘以 1.5 小时的百分数，即可求出 1.5 小时的人数，画图即可；

(3) 计算出该市中小學生一天中阳光体育运动的平均时间即可.

解答： 解：(1) 由题意可得：0.5 小时的人数为：100 人，所占比例为：20%，

∴本次调查共抽样了 500 名学生；

(2) 1.5 小时的人数为：500×2.4=120（人）



如图所示：

(3) 根据题意得： $\frac{100 \times 0.5 + 200 \times 1 + 120 \times 1.5 + 80 \times 2}{100 + 200 + 120 + 80} = 1.18$ ，即该市中小學生一天中

阳光体育运动的平均时间约 1 小时。

点评：此题主要考查了条形统计图以及扇形统计图的应用，根据统计图得出正确信息是解题关键。

22. (8 分) (2015•常州) 甲，乙，丙三位学生进入了“校园朗诵比赛”冠军、亚军和季军的决赛，他们将通过抽签来决定比赛的出场顺序。

(1) 求甲第一个出场的概率；

(2) 求甲比乙先出场的概率。

考点：列表法与树状图法。

专题：计算题。

分析：(1) 画树状图得出所有等可能的情况数，找出甲第一个出场的情况数，即可求出所求的概率；

(2) 找出甲比乙先出场的情况数，即可求出所求的概率。

解答：解：(1) 画树状图如下：



所有等可能的情况有 6 种，其中甲第一个出场的情况有 2 种，

则 $P(\text{甲第一个出场}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ；

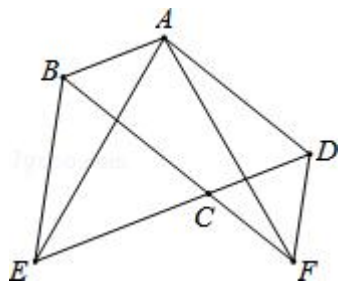
(2) 甲比乙先出场的情况有 3 种，

则 $P(\text{甲比乙先出场}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

点评：此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

23. (8分) (2015•常州) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BCD=120^\circ$, 分别延长 DC 、 BC 到点 E 、 F , 使得 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 都是正三角形.

- (1) 求证: $AE=AF$;
(2) 求 $\angle EAF$ 的度数.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质; 平行四边形的性质.

分析: (1) 由平行四边形的性质得出 $\angle BAD=\angle BCD=120^\circ$, $\angle ABC=\angle ADC$, $AB=CD$, $BC=AD$, 由等边三角形的性质得出 $BE=BC$, $DF=CD$, $\angle EBC=\angle CDF=60^\circ$, 证出 $\angle ABE=\angle FDA$, $AB=DF$, $BE=AD$, 根据 SAS 证明 $\triangle ABE\cong\triangle FDA$, 得出对应边相等即可;
(2) 由全等三角形的性质得出 $\angle AEB=\angle FAD$, 求出 $\angle AEB+\angle BAE=60^\circ$, 得出 $\angle FAD+\angle BAE=60^\circ$, 即可得出 $\angle EAF$ 的度数.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore \angle BAD=\angle BCD=120^\circ$, $\angle ABC=\angle ADC$, $AB=CD$, $BC=AD$,
 $\because \triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 都是正三角形,
 $\therefore BE=BC$, $DF=CD$, $\angle EBC=\angle CDF=60^\circ$,
 $\therefore \angle ABE=\angle FDA$, $AB=DF$, $BE=AD$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDA$ 中,
$$\begin{cases} AB=DF \\ \angle ABE=\angle FDA \\ BE=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FDA$ (SAS),

$\therefore AE=AF$;

(2) 解: $\because \triangle ABE\cong\triangle FDA$,

$\therefore \angle AEB=\angle FAD$,

$\because \angle ABE=60^\circ+60^\circ=120^\circ$,

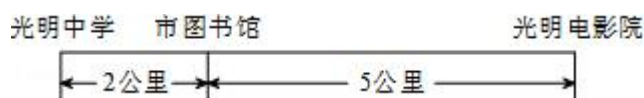
$\therefore \angle AEB+\angle BAE=60^\circ$,

$\therefore \angle FAD+\angle BAE=60^\circ$,

$\therefore \angle EAF=120^\circ-60^\circ=60^\circ$.

点评: 本题考查了平行四边形的性质、等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质; 熟练掌握平行四边形和等边三角形的性质, 证明三角形全等是解决问题的关键.

24. (8分) (2015•常州) 已知某市的光明中学、市图书馆和光明电影院在同一直线上, 它们之间的距离如图所示. 小张星期天上午带了 75 元现金先从光明中学乘出租车去了市图书馆, 付费 9 元; 中午再从市图书馆乘出租车去了光明电影院, 付费 12.6 元. 若该市出租车的收费标准是: 不超过 3 公里计费为 m 元, 3 公里后按 n 元/公里计费.



- (1) 求 m , n 的值, 并直接写出车费 y (元) 与路程 x (公里) ($x > 3$) 之间的函数关系式;
 (2) 如果小张这天外出的消费还包括: 中午吃饭花费 15 元, 在光明电影院看电影花费 25 元. 问小张剩下的现金够不够乘出租车从光明电影院返回光明中学? 为什么?

考点: 一次函数的应用.

分析: (1) 根据题意, 不超过 3 公里计费为 m 元, 由图示可知光明中学和市图书馆相距 2 公里, 可由此得出 m , 由出租车的收费标准是: 不超过 3 公里计费为 m 元, 3 公里后按 n 元/公里计费. 当 $x > 3$ 时, 由收费与路程之间的关系就可以求出结论;

(2) 分别计算小张所剩钱数和返程所需钱数, 即可得出结论.

解答: 解: (1) $\because$ 由图示可知光明中学和市图书馆相距 2 公里, 付费 9 元,

$$\therefore m=9,$$

$\because$ 从市图书馆乘出租车去光明电影院, 路程 5 公里, 付费 12.6 元,

$$\therefore (5-3)n+9=12.6,$$

解得: $n=1.8$.

$\therefore$ 车费 y (元) 与路程 x (公里) ($x > 3$) 之间的函数关系式为: $y=1.8(x-3)+9=1.8x+3.6$ ($x > 3$).

(2) 小张剩下坐车的钱数为: $75-15-25-9-12.6=13.4$ (元),

乘出租车从光明电影院返回光明中学的费用: $1.8 \times 7 + 3.6 = 16.2$ (元)

$$\because 13.4 < 16.2,$$

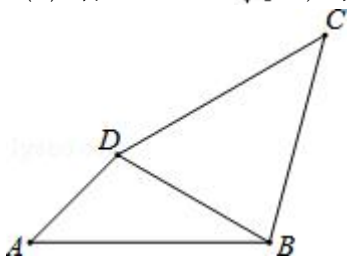
故小张剩下的现金不够乘出租车从光明电影院返回光明中学.

点评: 本题考查了分段函数, 一次函数的解析式, 由一次含数的解析式求自变量和函数值, 解答时求出函数的解析式是关键

25. (8 分) (2015•常州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle ADB = \angle ABC = 105^\circ$.

(1) 若 $AD=2$, 求 AB ;

(2) 若 $AB+CD=2\sqrt{3}+2$, 求 AB .



考点: 勾股定理; 含 30° 度角的直角三角形; 等腰直角三角形.

分析: (1) 在四边形 $ABCD$ 中, 由 $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle ADB = \angle ABC = 105^\circ$, 得 $\angle BDF = \angle ADC - \angle ADB = 165^\circ - 105^\circ = 60^\circ$, $\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 为等腰直角三角形, 求得 AE , 利用锐角三角函数得 BE , 得 AB ;

(2) 设 $DE=x$, 利用 (1) 的某些结论, 特殊角的三角函数和勾股定理, 表示 AB , CD , 得结果.

解答: 解: (1) 过 A 点作 $DE \perp AB$, 过点 B 作 $BF \perp CD$,

$$\because \angle A = \angle C = 45^\circ, \angle ADB = \angle ABC = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 360^\circ - \angle A - \angle C - \angle ABC = 360^\circ - 45^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 165^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle ADC - \angle ADB = 165^\circ - 105^\circ = 60^\circ,$$

$\triangle ADE$ 与 $\triangle BCF$ 为等腰直角三角形,

$$\because AD=2,$$

$$\therefore AE=DE=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

$$\because \angle ABC=105^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=105^\circ-45^\circ-30^\circ=30^\circ,$$

$$\therefore BE=\frac{DE}{\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{6},$$

$$\therefore AB=\sqrt{2}+\sqrt{6};$$

$$(2) \text{ 设 } DE=x, \text{ 则 } AE=x, BE=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x,$$

$$\therefore BD=\sqrt{x^2+(\sqrt{3}x)^2}=2x,$$

$$\because \angle BDF=60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF=30^\circ,$$

$$\therefore DF=\frac{1}{2}BD=x,$$

$$\therefore BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x,$$

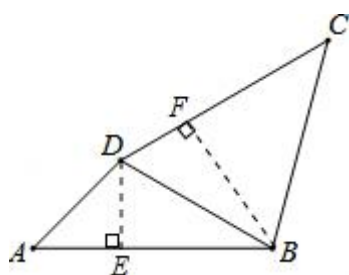
$$\therefore CF=\sqrt{3}x,$$

$$\therefore AB=AE+BE=x+\sqrt{3}x,$$

$$CD=DF+CF=x+\sqrt{3}x,$$

$$AB+CD=2\sqrt{3}+2,$$

$$\therefore AB=\sqrt{3}+1$$



点评： 本题考查了勾股定理、等腰直角三角形的判定和性质、含有 30° 角的直角三角形的性质，解题的关键是作辅助线 DE、BF，构造直角三角形，求出相应角的度数.

26. (10 分) (2015•常州) 设 ω 是一个平面图形，如果用直尺和圆规经过有限步作图（简称尺规作图），画出一个正方形与 ω 的面积相等（简称等积），那么这样的等积转化称为 ω 的“化方”.

(1) 阅读填空

如图①，已知矩形 ABCD，延长 AD 到 E，使 $DE=DC$ ，以 AE 为直径作半圆，延长 CD 交半圆于点 H，以 DH 为边作正方形 DFGH，则正方形 DFGH 与矩形 ABCD 等积.

理由：连接 AH，EH.

$$\because AE \text{ 为直径}, \therefore \angle AHE=90^\circ, \therefore \angle HAE+\angle HEA=90^\circ.$$

$\because DH \perp AE, \therefore \angle ADH = \angle EDH = 90^\circ$
 $\therefore \angle HAD + \angle AHD = 90^\circ$
 $\therefore \angle AHD = \angle HED, \therefore \triangle ADH \sim \triangle HDE$.
 $\therefore \frac{AD}{DH} = \frac{DH}{DE}$, 即 $DH^2 = AD \times DE$.

又 $\because DE = DC$

$\therefore DH^2 = AD \times DC$, 即正方形 DFGH 与矩形 ABCD 等积.

(2) 操作实践

平行四边形的“化方”思路是, 先把平行四边形转化为等积的矩形, 再把矩形转化为等积的正方形.

如图②, 请用尺规作图作出与 $\square ABCD$ 等积的矩形 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹).

(3) 解决问题

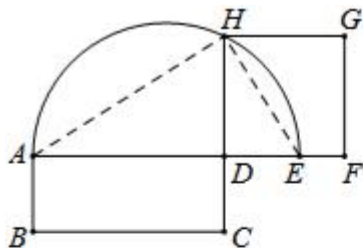
三角形的“化方”思路是: 先把三角形转化为等积的 矩形 (填写图形名称), 再转化为等积的正方形.

如图③, $\triangle ABC$ 的顶点在正方形网格的格点上, 请作出与 $\triangle ABC$ 等积的正方形的一条边 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹, 不通过计算 $\triangle ABC$ 面积作图).

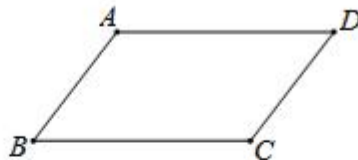
(4) 拓展探究

n 边形 ($n > 3$) 的“化方”思路之一是: 把 n 边形转化为等积的 $n - 1$ 边形, ..., 直至转化为等积的三角形, 从而可以化方.

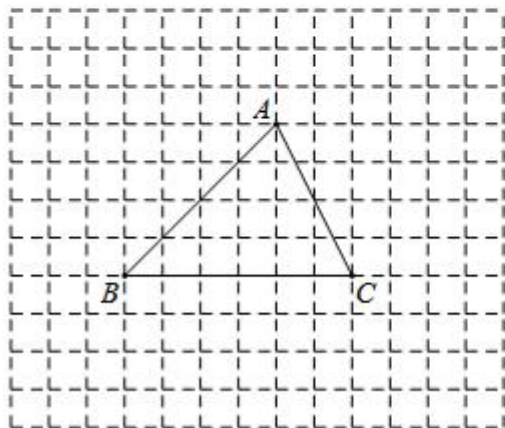
如图④, 四边形 ABCD 的顶点在正方形网格的格点上, 请作出与四边形 ABCD 等积的三角形 (不要求写具体作法, 保留作图痕迹, 不通过计算四边形 ABCD 面积作图).



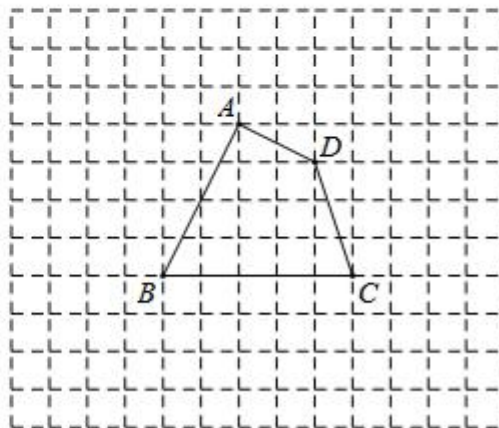
图①



图②



图③



图④

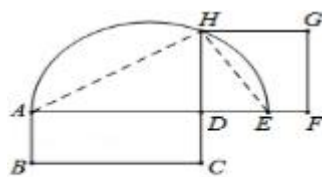
考点: 相似形综合题.

分析: (1) 首先根据相似三角形的判定方法, 可得 $\triangle ADH \sim \triangle HDE$; 然后根据等量代换, 可得 $DH^2 = AD \times DC$, 据此判断即可.

(2) 首先把平行四边形 $ABCD$ 转化为等积的矩形 $ADMN$, 然后延长 AD 到 E , 使 $DE = DM$, 以 AE 为直径作半圆. 延长 MD 交半圆于点 H , 以 DH 为边作正方形 $DFGH$, 则正方形 $DFGH$ 与矩形 $ABMN$ 等积, 所以正方形 $DFGH$ 与平行四边形 $ABCD$ 等积, 据此解答即可.

(3) 首先以三角形的底为矩形的长, 以三角形的高的一半为矩形的宽, 将 $\triangle ABC$ 转化为等积的矩形 $MBCD$; 然后延长 MD 到 E , 使 $DE = DC$, 以 ME 为直径作半圆. 延长 CD 交半圆于点 H , 则 DH 即为与 $\triangle ABC$ 等积的正方形的一条边.

(4) 首先根据 $AG \parallel EH$, 判断出 $AG = 2EH$, 然后根据 $CF = 2DF$, 可得 $CF \cdot EH = DF \cdot AG$, 据此判断出 $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ADF}$, $S_{\triangle CDF} = S_{\triangle AEI}$, 所以 $S_{\triangle BCE} = S_{\text{四边形 } ABCD}$, 即 $\triangle BCE$ 与四边形 $ABCD$ 等积, 据此解答即可.



图①

解答: 解: (1) 如图①, 连接 AH , EH ,

$\because AE$ 为直径,

$\therefore \angle AHE = 90^\circ$,

$\therefore \angle HAE + \angle HEA = 90^\circ$.

$\because DH \perp AE$,

$\therefore \angle ADH = \angle EDH = 90^\circ$,

$\therefore \angle HAD + \angle AHD = 90^\circ$,

$\therefore \angle AHD = \angle HED$,

$\therefore \triangle ADH \sim \triangle HDE$.

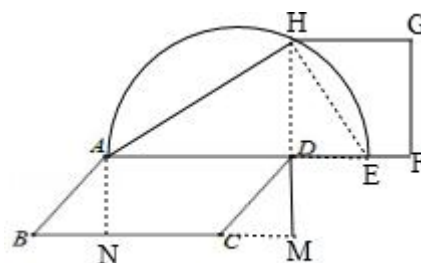
$$\therefore \frac{AD}{DH} = \frac{DH}{DE},$$

即 $DH^2 = AD \times DE$.

又 $\because DE = DC$,

$\therefore DH^2 = AD \times DC$,

即正方形 $DFGH$ 与矩形 $ABCD$ 等积.



图②

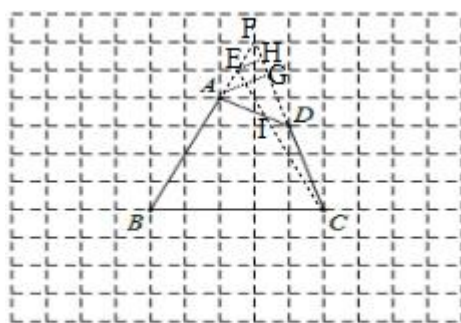
(2) 如图②, 延长 AD 到 E , 使 $DE = DM$, 连接 AH , EH ,

$\because$ 矩形 $ADMN$ 的长和宽分别等于平行四边形 $ABCD$ 的底和高,

$\therefore$ 矩形 $ADMN$ 的面积等于平行四边形 $ABCD$ 的面积,

$\because AE$ 为直径,

(4) 如图④，延长 BA、CD 交于点 F，作 $AG \perp CF$ 于点 G， $EH \perp CF$ 于点 H，



图④

$\triangle BCE$ 与四边形 $ABCD$ 等积，理由如下：

$\because AG \parallel EH$,

$$\therefore \frac{EH}{AG} = \frac{EF}{AF} = \frac{1}{2},$$

$\therefore AG = 2EH$,

又 $\because CF = 2DF$,

$$\therefore CF \cdot EH = DF \cdot AG,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ADF},$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = S_{\triangle AEF},$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\text{四边形 } ABCD},$$

即 $\triangle BCE$ 与四边形 $ABCD$ 等积.

故答案为： $\triangle HDE$ 、 $AD \times DC$ 、矩形.

点评：（1）此题主要考查了相似形综合题，考查了分析推理能力，考查了分类讨论思想的应用，考查了数形结合思想的应用，要熟练掌握.

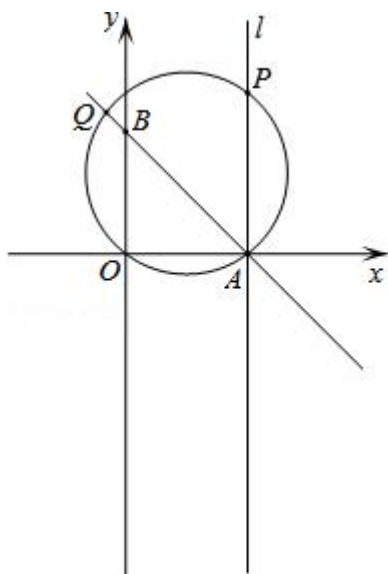
（2）此题还考查了矩形、三角形的面积的求法，以及对等积转化的理解，要熟练掌握.

27. (10 分) (2015•常州) 如图，一次函数 $y = -x + 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A、B，过点 A 作 x 轴的垂线 l ，点 P 为直线 l 上的动点，点 Q 为直线 AB 与 $\triangle OAP$ 外接圆的交点，点 P、Q 与点 A 都不重合.

(1) 写出点 A 的坐标；

(2) 当点 P 在直线 l 上运动时，是否存在点 P 使得 $\triangle OQB$ 与 $\triangle APQ$ 全等？如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

(3) 若点 M 在直线 l 上，且 $\angle POM = 90^\circ$ ，记 $\triangle OAP$ 外接圆和 $\triangle OAM$ 外接圆的面积分别是 S_1 、 S_2 ，求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ 的值.



考点：圆的综合题.

分析：（1）将 $y=0$ 代入 $y=-x+4$ ，求得 x 的值，从而得到点 A 的坐标；

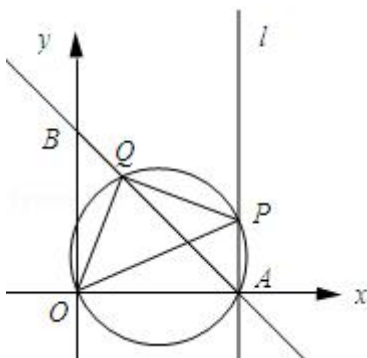
（2）首先根据题意画出图形，然后在 $\text{Rt}\triangle BOA$ 中，由勾股定理得： AB 的长度，然后由全等三角形的性质求得 QA 的长度，从而得到 BQ 的长，然后根据 $PA=BQ$ 求得 PA 的长度，从而可求得点 P 的坐标；

（3）首先根据题意画出图形，设 $AP=m$ ，由 $\triangle OAM \sim \triangle PAO$ ，可求得 AM 的长度，然后根据勾股定理可求得两圆的直径（用含 m 的式子表示），然后利用圆的面积公式求得两圆的面积，最后代入所求代数式求解即可．

解答：解（1）令 $y=0$ ，得： $-x+4=0$ ，解得 $x=4$ ，
所以点 A 的坐标为 $(4, 0)$ ；

（2）存在．

理由：如图下图所示：



将 $x=0$ 代入 $y=-x+4$ 得： $y=4$ ，

$\therefore OB=4$ ，

由（1）可知 $OA=4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BOA$ 中，由勾股定理得： $AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=4\sqrt{2}$ ．

$\because \triangle BOQ \cong \triangle AQP$ ．

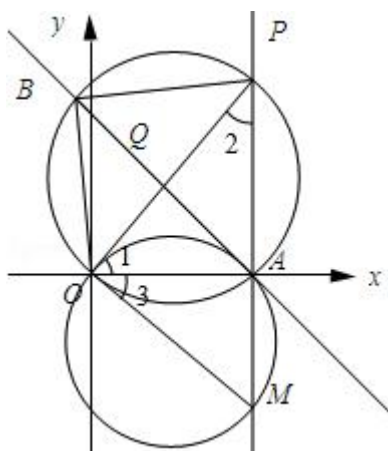
$\therefore QA=OB=4$ ， $BQ=PA$ ．

$\therefore BQ=AB-AQ=4\sqrt{2}-4$ ，

$$\therefore PA=4\sqrt{2}-4.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (4, 4\sqrt{2}-4).$$

(3) 如下图所示:



$$\because OP \perp OM,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 2 + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3.$$

$$\text{又} \because \angle OAP = \angle OAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAM \sim \triangle PAO.$$

$$\therefore \frac{AO}{PA} = \frac{AM}{AO},$$

$$\text{设 } AP=m, \text{ 则: } \frac{4}{m} = \frac{AM}{4},$$

$$\therefore AM = \frac{16}{m}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAP \text{ 中, } PO = \sqrt{OA^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + m^2},$$

$$\therefore S_1 = \pi \cdot \left(\frac{PO}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{4^2 + m^2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi(16 + m^2)}{4},$$

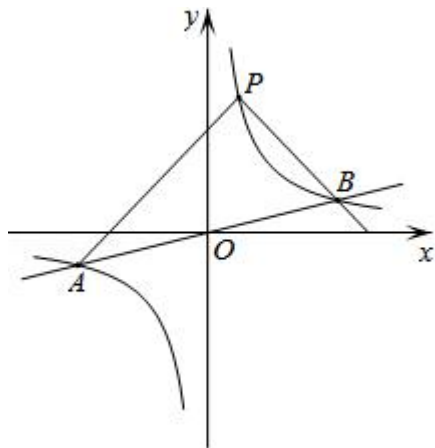
$$\text{在 Rt}\triangle OAM \text{ 中, } OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{16}{m}\right)^2},$$

$$\therefore S_2 = \pi \cdot \left(\frac{OM}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{4^2 + \left(\frac{16}{m}\right)^2}}{2}\right)^2 = 4\pi \left(1 + \frac{16}{m^2}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{4}{\pi(16 + m^2)} + \frac{m^2}{4\pi(m^2 + 16)} = 1 \cdot \frac{16}{4\pi(16 + m^2)} + \frac{m^2}{4\pi(m^2 + 16)} = \frac{1}{4\pi}.$$

点评: 本题主要考查的是全等三角形的性质, 相似三角形的性质和判定以及勾股定理和一次函数的综合应用, 根据题意画出图形, 利用全等三角形和相似三角形的性质和判定求得 AM 和 PA 的长度是解题的关键.

28. (10 分) (2015•常州) 如图, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=\frac{1}{4}x$ 的图象交于点 A、B, 点 B 的横坐标是 4. 点 P 是第一象限内反比例函数图象上的动点, 且在直线 AB 的上方.
- (1) 若点 P 的坐标是 (1, 4), 直接写出 k 的值和 $\triangle PAB$ 的面积;
 - (2) 设直线 PA、PB 与 x 轴分别交于点 M、N, 求证: $\triangle PMN$ 是等腰三角形;
 - (3) 设点 Q 是反比例函数图象上位于 P、B 之间的动点 (与点 P、B 不重合), 连接 AQ、BQ, 比较 $\angle PAQ$ 与 $\angle PBQ$ 的大小, 并说明理由.



考点: 反比例函数综合题; 待定系数法求一次函数解析式; 反比例函数与一次函数的交点问题; 三角形的外角性质; 线段垂直平分线的性质; 等腰三角形的判定与性质.

专题: 综合题.

分析: (1) 过点 A 作 $AR \perp y$ 轴于 R, 过点 P 作 $PS \perp y$ 轴于 S, 连接 PO, 设 AP 与 y 轴交于点 C, 如图 1, 可根据条件先求出点 B 的坐标, 然后把点 B 的坐标代入反比例函数的解析式, 即可求出 k, 然后求出直线 AB 与反比例函数的交点 A 的坐标, 从而得到 $OA=OB$, 由此可得 $S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}$, 要求 $\triangle PAB$ 的面积, 只需求 $\triangle PAO$ 的面积, 只需用割补法就可解决问题;

(2) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H, 如图 2. 可用待定系数法求出直线 PB 的解析式, 从而得到点 N 的坐标, 同理可得到点 M 的坐标, 进而得到 $MH=NH$, 根据垂直平分线的性质可得 $PM=PN$, 即 $\triangle PMN$ 是等腰三角形;

(3) 过点 Q 作 $QT \perp x$ 轴于 T, 设 AQ 交 x 轴于 D, QB 的延长线交 x 轴于 E, 如图 3. 可设点 Q 为 $(c, \frac{4}{c})$, 运用待定系数法求出直线 AQ 的解析式, 即可得到点 D 的坐标为 $(c-4, 0)$, 同理可得 E $(c+4, 0)$, 从而得到 $DT=ET$, 根据垂直平分线的性质可得 $QD=QE$, 则有 $\angle QDE=\angle QED$. 然后根据对顶角相等及三角形外角的性质, 就可得到 $\angle PAQ=\angle PBQ$.

解答: 解: (1) $k=4$, $S_{\triangle PAB}=15$.

提示: 过点 A 作 $AR \perp y$ 轴于 R, 过点 P 作 $PS \perp y$ 轴于 S, 连接 PO, 设 AP 与 y 轴交于点 C, 如图 1,

把 $x=4$ 代入 $y=\frac{1}{4}x$, 得到点 B 的坐标为 $(4, 1)$,

把点 B $(4, 1)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$, 得 $k=4$.

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}, \text{得到点 A 的坐标为 } (-4, -1),$$

则点 A 与点 B 关于原点对称,

$$\therefore OA=OB,$$

$$\therefore S_{\triangle AOP}=S_{\triangle BOP},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}.$$

设直线 AP 的解析式为 $y=mx+n$,

把点 A $(-4, -1)$ 、P $(1, 4)$ 代入 $y=mx+n$,

求得直线 AP 的解析式为 $y=x+3$,

则点 C 的坐标 $(0, 3)$, $OC=3$,

$$\therefore S_{\triangle AOP}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle POC}$$

$$=\frac{1}{2}OC \cdot AR + \frac{1}{2}OC \cdot PS$$

$$=\frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{15}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}=15;$$

(2) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H, 如图 2.

设直线 PB 的解析式为 $y=ax+b$,

把点 P $(1, 4)$ 、B $(4, 1)$ 代入 $y=ax+b$, 得

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 4a+b=1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PB 的解析式为 $y=-x+5$.

当 $y=0$ 时, $-x+5=0$,

$\therefore x=5$, 点 N $(5, 0)$.

同理可得 M $(-3, 0)$,

$$\therefore MH=1-(-3)=4, \quad NH=5-1=4,$$

$$\therefore MH=NH,$$

$\therefore PH$ 垂直平分 MN,

$$\therefore PM=PN,$$

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰三角形;

(3) $\angle PAQ=\angle PBQ$.

理由如下:

过点 Q 作 $QT \perp x$ 轴于 T, 设 AQ 交 x 轴于 D, QB 的延长线交 x 轴于 E, 如图 3.

可设点 Q 为 $(c, \frac{4}{c})$, 直线 AQ 的解析式为 $y=px+q$, 则有

$$\begin{cases} -4p+q=-1 \\ cp+q=\frac{4}{c} \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} p = \frac{1}{c} \\ q = \frac{4}{c} - 1 \end{cases},$$

∴ 直线 AQ 的解析式为 $y = \frac{1}{c}x + \frac{4}{c} - 1$.

当 $y=0$ 时, $\frac{1}{c}x + \frac{4}{c} - 1 = 0$,

解得: $x=c-4$,

$$\therefore D = (c - 4, 0).$$

同理可得 $E(c+4, 0)$,

$$\therefore DT=c - (c - 4) =4, \quad ET=c+4 - c=4,$$
$$\therefore DT=ET,$$

$\therefore$ QT 垂直平分 DE,

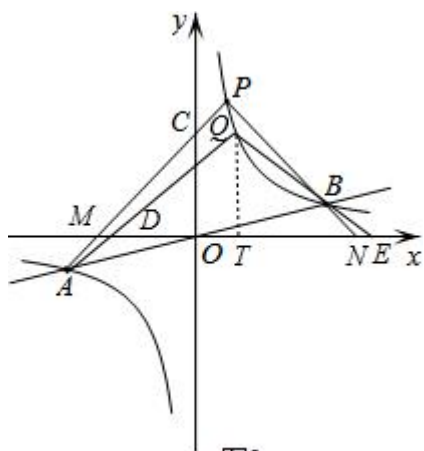
$$\therefore QD=QE,$$
$$\therefore \angle QDE = \angle QED.$$
$$\therefore \angle \text{MDA} = \angle \text{QDE},$$
$$\therefore \angle \text{MDA} = \angle \text{QED}.$$
$$\because PM=PN, \therefore \angle PMN=\angle PNM.$$
$$\because \angle PAQ = \angle PMN - \angle MDA, \quad \angle PBQ = \angle NBE = \angle PNM - \angle QED,$$
$$\therefore \angle \text{PAQ} = \angle \text{PBQ}.$$


圖3

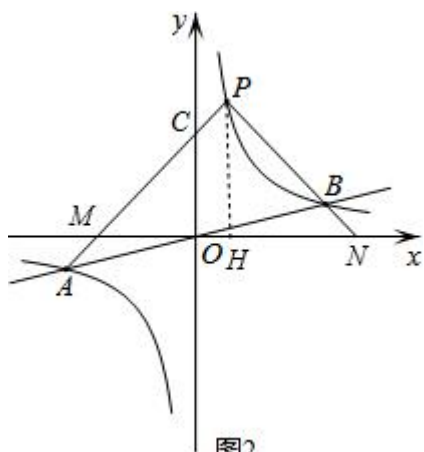


圖2

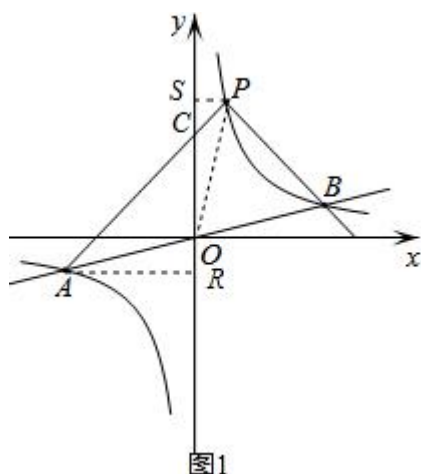


图1

点评： 本题主要考查了用待定系数法求反比例函数及一次函数的解析式、求反比例函数及一次函数图象的交点，三角形的中线平分三角形的面积、垂直平分线的性质、等腰三角形的判定与性质、三角形外角的性质、对顶角相等知识，运用（2）中的结论及（2）中的解题方法是解决第（3）小题的关键．