

2014 年苏州市初中毕业暨升学考试试卷

数 学

本试卷由选择题、填空题和解答题三大题组成. 共 29 小题, 满分 130 分. 考试时间 120 分钟.

一、**选择题**: 本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答题卡相应位置上.

1. $(-3) \times 3$ 的结果是

- A. -9 B. 0 C. 9 D. -6

2. 已知 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 是对顶角, 若 $\angle \alpha = 30^\circ$, 则 $\angle \beta$ 的度数为

- A. 30° B. 60° C. 70° D. 150°

3. 有一组数据: 1, 3.3, 4, 5, 这组数据的众数为

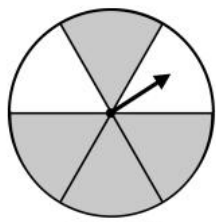
- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

4. 若式子 $\sqrt{x-4}$ 可在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是

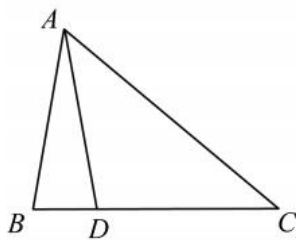
- A. $x \leq -4$ B. $x \geq -4$ C. $x \leq 4$ D. $x \geq 4$

5. 如图, 一个圆形转盘被分成 6 个圆心角都为 60° 的扇形, 任意转动这个转盘 1 次, 当转盘停止转动时, 指针指向阴影区域的概率是

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, $AB = AD = DC$, $\angle B = 80^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为

- A. 30° B. 40° C. 45° D. 60°

7. 下列关于 x 的方程有实数根的是

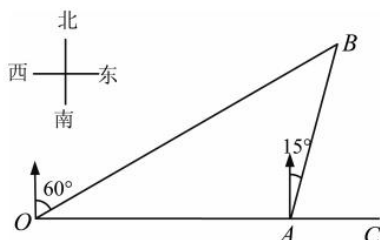
- A. $x^2 - x + 1 = 0$ B. $x^2 + x + 1 = 0$
C. $(x-1)(x+2) = 0$ D. $(x-1)^2 + 1 = 0$

8. 一次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 1)$. 则代数式 $1 - a - b$ 的值为

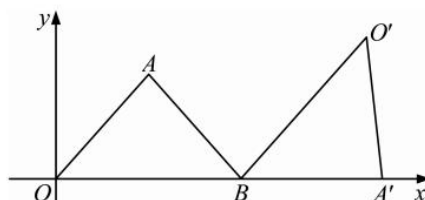
- A. -3 B. -1 C. 2 D. 5

9. 如图, 港口 A 在观测站 O 的正东方向, $OA = 4\text{km}$. 某船从港口 A 出发, 沿北偏东 15° 方向航行一段距离后到达 B 处, 此时从观测站 O 处测得该船位于北偏东 60° 的方向, 则该船航行的距离 (即 AB 的长) 为

- A. 4km B. $2\sqrt{3}\text{km}$ C. $2\sqrt{2}\text{km}$ D. $(\sqrt{3} + 1)\text{km}$



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图, $\triangle AOB$ 为等腰三角形, 顶点 A 的坐标为 $(2, \sqrt{5})$, 底边 OB 在 x 轴上. 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 按顺时针方向旋转一定角度后得 $\triangle A'O'B$, 点 A 的对应点 A' 在 x 轴上, 则点 O' 的坐标为

- A. $(\frac{20}{3}, \frac{10}{3})$ B. $(\frac{16}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3})$ C. $(\frac{20}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3})$ D. $(\frac{16}{3}, 4\sqrt{3})$

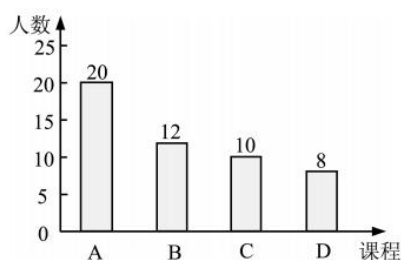
二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案直接填在答题卡相应位置上.

11. $\frac{3}{2}$ 的倒数是 .

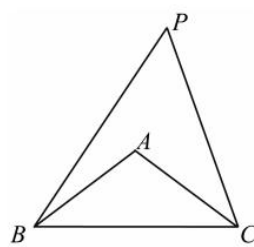
12 已知地球的表面积约为 510000000km^2 . 数 510000000 用科学记数法可以表示为 .

13. 已知正方形 ABCD 的对角线 $AC = \sqrt{2}$, 则正方形 ABCD 的周长为 .

14. 某学校计划开设 A, B, C, D 四门校本课程供全体学生选修, 规定每人必须并且只能选修其中一门. 为了了解各门课程的选修人数, 现从全体学生中随机抽取了部分学生进行调查, 并把调查结果绘制成如图所示的条形统计图. 已知该校全体学生人数为 1200 名, 由此可以估计选修 C 课程的学生有 人.



(第 14 题)

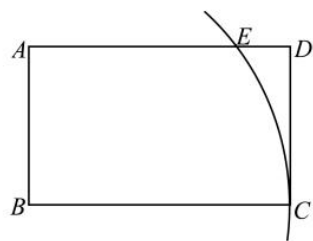


(第 15 题)

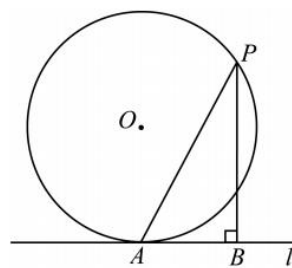
15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. 若 $\angle BPC = \frac{1}{2} \angle BAC$, 则 $\tan \angle BPC =$.

16. 某地准备对一段长 120m 的河道进行清淤疏通, 若甲工程队先用 4 天单独完成其中一部分河道的疏通任务, 则余下的任务由乙工程队单独完成需要 9 天; 若甲工程队先单独工作 8 天, 则余下的任务由乙工程队单独完成需要 3 天, 设甲工程队平均每天疏通河道 x m, 乙工程队平均每天疏通河道 y m, 则 $(x+y)$ 的值为 ▲ .

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, 以点 B 为圆心, BC 长为半径画弧, 交边 AD 于点 E , 若 $AE \cdot ED = \frac{4}{3}$, 则矩形 $ABCD$ 的面积为 ▲ .



(第 17 题)



(第 18 题)

18. 如图, 直线 l 与半径为 4 的 $\odot O$ 相切于点 A , P 是 $\odot O$ 上的一个动点 (不与点 A 重合), 过点 P 作 $PB \perp l$, 垂足为 B , 连接 PA . 设 $PA = x$, $PB = y$, 则 $(x-y)$ 的最大值是 ▲ .

三、解答题: 本大题共 11 小题, 共 76 分. 把解答过程写在答题卡相应位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明, 作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔.

19. (本题满分 5 分)

计算: $2^2 + |-1| - \sqrt{4}$.

20. (本题满分 5 分)

解不等式组:
$$\begin{cases} x-1 > 2 \\ 2+x \geq 2(x-1) \end{cases}$$

21. (本题满分 5 分)

先化简, 再求值: $\frac{x}{x^2-1} \div \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$, 其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

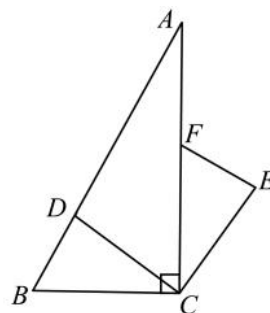
22. (本题满分 6 分)

解分式方程: $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{1-x} = 3$.

23. (本题满分 6 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D, F 分别在 AB, AC 上, $CF = CB$. 连接 CD , 将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后得 CE , 连接 EF .

(1) 求证: $\triangle BCD \cong \triangle FCE$;

(2) 若 $EF \parallel CD$, 求 $\angle BDC$ 的度数.

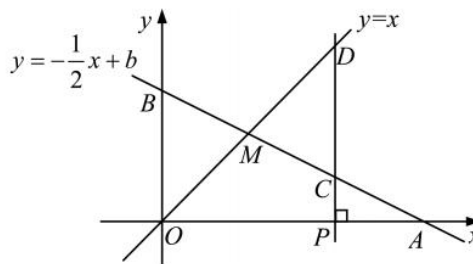


(第 23 题)

24. (本题满分 7 分) 如图, 已知函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , 与函数 $y = x$ 的图象交于点 M , 点 M 的横坐标为 2. 在 x 轴上有一点 $P(a, 0)$ (其中 $a > 2$), 过点 P 作 x 轴的垂线, 分别交函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 和 $y = x$ 的图象于点 C, D .

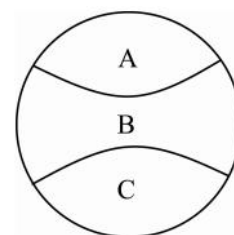
(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若 $OB = CD$, 求 a 的值.



(第 24 题)

25. (本题满分 7 分) 如图, 用红、蓝两种颜色随机地对 A, B, C 三个区域分别进行涂色, 每个区域必须涂色并且只能涂一种颜色, 请用列举法 (画树状图或列表) 求 A, C 两个区域所涂颜色不相同的概率.

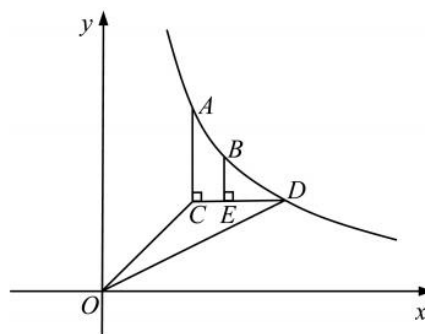


(第 25 题)

26 (本题满分 8 分) 如图, 已知函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A, B, 点 A 的坐标为 (1, 2). 过点 A 作 $AC \parallel y$ 轴, $AC = 1$ (点 C 位于点 A 的下方), 过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴, 与函数的图象交于点 D, 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足 E 在线段 CD 上, 连接 OC, OD.

(1) 求 $\triangle OCD$ 的面积;

(2) 当 $BE = \frac{1}{2}AC$ 时, 求 CE 的长.



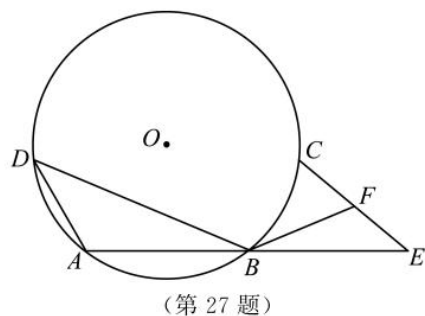
(第 26 题)

27. (本题满分 8 分) 如图, 已知 $\odot O$ 上依次有 A, B, C, D 四个点, $\widehat{AD} = \widehat{BC}$, 连接 AB, AD, BD, 弦 AB 不经过圆心 O. 延长 AB 到 E, 使 $BE = AB$, 连接 EC, F 是 EC 的中点, 连接 BF.

(1)若 $\odot O$ 的半径为3, $\angle DAB = 120^\circ$, 求劣弧 $\widehat{BD}$ 的长;

(2)求证: $BF = \frac{1}{2} BD$;

(3)设G是BD的中点探索: 在 $\odot O$ 上是否存在点P (小同于点B), 使得 $PG = PF$?并说明PB与AE的位置关系.



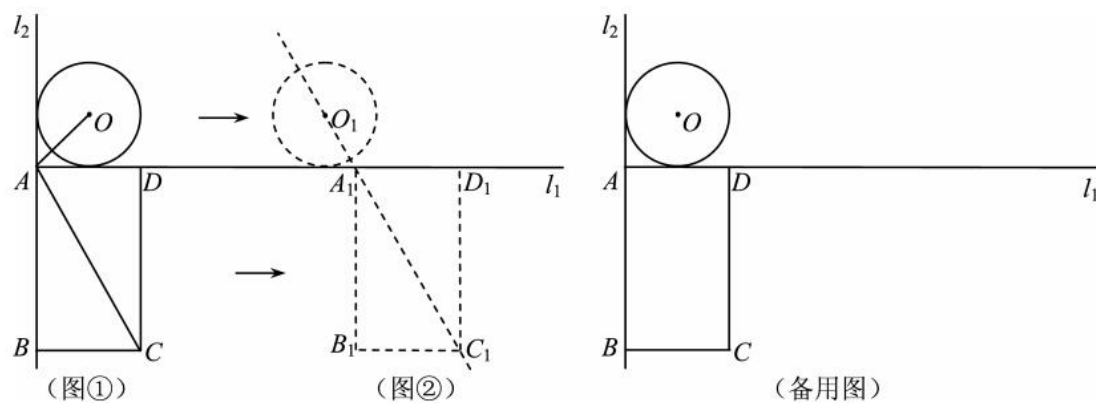
28. (本题满分9分) 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1, l_2 都相切, $\odot O$ 的半径为2cm. 矩形ABCD的边AD, AB分别与 l_1, l_2 重合, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AD = 4$ cm. 若 $\odot O$ 与矩形ABCD沿 l_1 同时向右移动, $\odot O$ 的移动速度为3cm/s, 矩形ABCD的移动速度为4cm/s, 设移动

时间为 $t(s)$.

(1)如图①, 连接 OA , AC , 则 $\angle OAC$ 的度数为 ▲ $^{\circ}$;

(2)如图②, 两个图形移动一段时间后, $\odot O$ 到达 $\odot O_1$ 的位置, 矩形 $ABCD$ 到达 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置, 此时点 O_1 , A_1 , C_1 恰好在同一直线上, 求圆心 O 移动的距离(即 OO_1 的长);

(3)在移动过程中, 圆心 O 到矩形对角线 AC 所在直线的距离在不断变化, 设该距离为 $d(cm)$. 当 $d < 2$ 时, 求 t 的取值范围. (解答时可以利用备用图画出相关示意图)



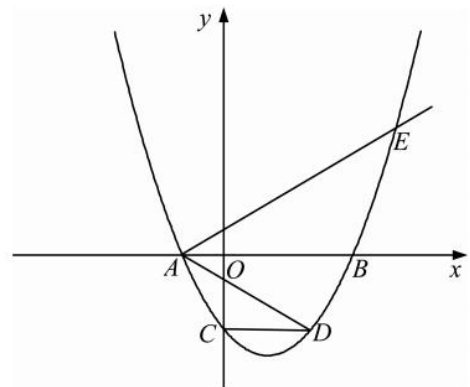
29. (本题满分 10 分) 如图, 一次函数 $y = a(x^2 - 2mx - 3m^2)$ (其中 a, m 是常数, 且 $a > 0, m > 0$) 的图象与 x 轴分别交于点 A, B (点 A 位于点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$,

点 D 在二次函数的图象上, $CD \parallel AB$, 连接 AD . 过点 A 作射线 AE 交二次函数的图象于点 E , AB 平分 $\angle DAE$.

(1)用含 m 的代数式表示 a ;

(2)求证: $\frac{AD}{AE}$ 为定值;

(3)设该二次函数图象的顶点为 F . 探索: 在 x 轴的负半轴上是否存在点 G , 连接 CF , 以线段 GF 、 AD 、 AE 的长度为三边长的三角形是直角三角形? 如果存在, 只要找出一个满足要求的点 G 即可, 并用含 m 的代数式表示该点的横坐标; 如果不存在, 请说明理由.



(第 29 题)

2014 年江苏省苏州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) (2014•苏州) $(-3) \times 3$ 的结果是 ()

A. -9 B. 0 C. 9 D. -6

【解答】解: 原式 $= -3 \times 3 = -9$,

故选: A.

2. (3 分) (2014•苏州) 已知 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 是对顶角, 若 $\angle \alpha = 30^\circ$, 则 $\angle \beta$ 的度数为 ()

A. 30° B. 60° C. 70° D. 150°

【解答】解: $\because \angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 是对顶角, $\angle \alpha = 30^\circ$,

∴根据对顶角相等可得 $\angle\beta=\angle\alpha=30^\circ$.

故选：A.

3. (3分) (2014•苏州) 有一组数据：1, 3, 3, 4, 5, 这组数据的众数为 ()

A. 1B. 3C. 4D. 5

【解答】解：这组数据中3出现的次数最多，
故众数为3.

故选：B

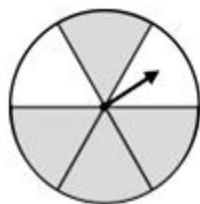
4. (3分) (2014•苏州) 若式子 $\sqrt{x-4}$ 在实数范围内有意义，则x的取值范围是 ()

A. $x\leq-4$ B. $x\geq-4$ C. $x\leq4$ D. $x\geq4$

【解答】解：依题意知， $x-4\geq0$ ，
解得 $x\geq4$.

故选：D.

5. (3分) (2014•苏州) 如图，一个圆形转盘被分成6个圆心角都为 60° 的扇形，任意转动这个转盘1次，当转盘停止转动时，指针指向阴影区域的概率是 ()

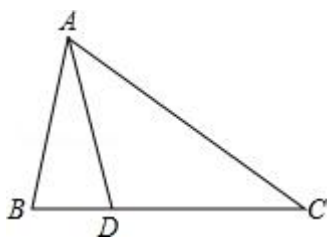


A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【解答】解：设圆的面积为6，
∵圆被分成6个相同扇形，
∴每个扇形的面积为1，
∴阴影区域的面积为4，
∴指针指向阴影区域的概率 $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故选：D.

6. (3分) (2014•苏州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D在BC上， $AB=AD=DC$ ， $\angle B=80^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()



A. 30° B. 40° C. 45° D. 60°

【解答】解：∵ $\triangle ABD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle B=80^\circ$ ，
∴ $\angle B=\angle ADB=80^\circ$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \angle ADC &= 180^\circ - \angle ADB = 100^\circ, \\ \because AD &= CD, \\ \therefore \angle C &= \frac{180^\circ - \angle ADC}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.\end{aligned}$$

故选：B.

7. (3分) (2014•苏州) 下列关于 x 的方程有实数根的是 ()

A. $x^2 - x + 1 = 0$ B. $x^2 + x + 1 = 0$ C. $(x - 1)(x + 2) = 0$ D. $(x - 1)^2 + 1 = 0$

【解答】解：A、 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，方程没有实数根，所以 A 选项错误；

B、 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，方程没有实数根，所以 B 选项错误；

C、 $x - 1 = 0$ 或 $x + 2 = 0$ ，则 $x_1 = 1$ ， $x_2 = -2$ ，所以 C 选项正确；

D、 $(x - 1)^2 = -1$ ，方程左边为非负数，方程右边为 0，所以方程没有实数根，所以 D 选项错误。

故选：C.

8. (3分) (2014•苏州) 二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 (1, 1)，则代数式 $1 - a - b$ 的值为 ()

A. -3 B. -1 C. 2 D. 5

【解答】解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx - 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 (1, 1)，

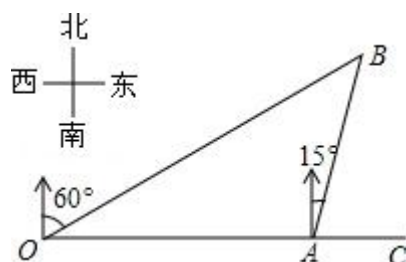
$$\therefore a + b - 1 = 1,$$

$$\therefore a + b = 2,$$

$$\therefore 1 - a - b = 1 - (a + b) = 1 - 2 = -1.$$

故选：B.

9. (3分) (2014•苏州) 如图，港口 A 在观测站 O 的正东方向， $OA = 4\text{km}$ ，某船从港口 A 出发，沿北偏东 15° 方向航行一段距离后到达 B 处，此时从观测站 O 处测得该船位于北偏东 60° 的方向，则该船航行的距离 (即 AB 的长) 为 ()



A. 4km B. $2\sqrt{3}\text{km}$ C. $2\sqrt{2}\text{km}$ D. $(\sqrt{3} + 1)\text{km}$

【解答】解：如图，过点 A 作 $AD \perp OB$ 于 D.

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $\because \angle ADO = 90^\circ$ ， $\angle AOD = 30^\circ$ ， $OA = 4$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}OA = 2.$$

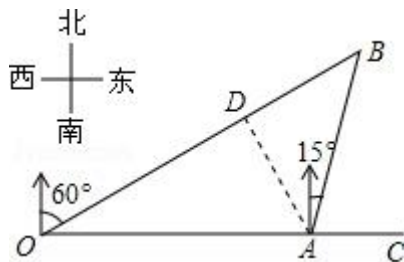
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\because \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle CAB - \angle AOB = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ ，

$$\therefore BD = AD = 2,$$

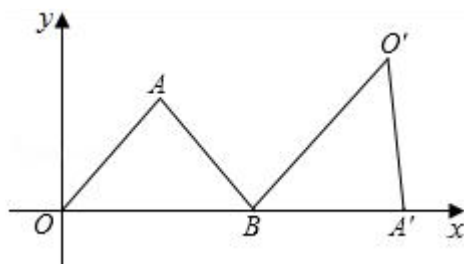
$$\therefore AB = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{2}.$$

即该船航行的距离 (即 AB 的长) 为 $2\sqrt{2}\text{km}$.

故选：C.



10. (3分) (2014•苏州) 如图, $\triangle AOB$ 为等腰三角形, 顶点 A 的坐标 $(2, \sqrt{5})$, 底边 OB 在 x 轴上. 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 按顺时针方向旋转一定角度后得 $\triangle A'O'B$, 点 A 的对应点 A' 在 x 轴上, 则点 O' 的坐标为 ()



- A. $(\frac{20}{3}, \frac{10}{3})$ B. $(\frac{16}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3})$ C. $(\frac{20}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3})$ D. $(\frac{16}{3}, 4\sqrt{3})$

【解答】解: 如图, 过点 A 作 $AC \perp OB$ 于 C , 过点 O' 作 $O'D \perp A'B$ 于 D ,
 $\because A(2, \sqrt{5})$,
 $\therefore OC=2, AC=\sqrt{5}$,

由勾股定理得, $OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$,

$\because \triangle AOB$ 为等腰三角形, OB 是底边,

$\therefore OB = 2OC = 2 \times 2 = 4$,

由旋转的性质得, $BO' = OB = 4$, $\angle A'BO' = \angle ABO$,

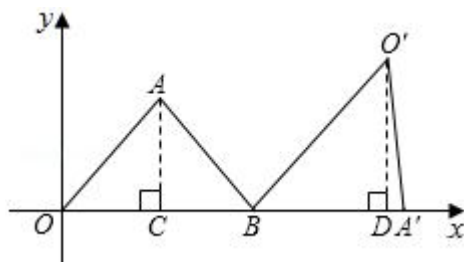
$\therefore O'D = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$,

$BD = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$,

$\therefore OD = OB + BD = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$,

$\therefore$ 点 O' 的坐标为 $(\frac{20}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3})$.

故选: C.



二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. (3 分) (2014•苏州) $\frac{3}{2}$ 的倒数是 $-\frac{2}{3}$.

【解答】解： $\frac{3}{2}$ 的倒数是 $\frac{2}{3}$,

故答案为： $\frac{2}{3}$.

12. (3 分) (2014•苏州) 已知地球的表面积约为 510000000km^2 ，数 510000000 用科学记数法可表示为 5.1×10^8 .

【解答】解： $510\,000\,000 = 5.1 \times 10^8$.

故答案为： 5.1×10^8 .

13. (3 分) (2014•苏州) 已知正方形 ABCD 的对角线 $AC = \sqrt{2}$ ，则正方形 ABCD 的周长为 4.

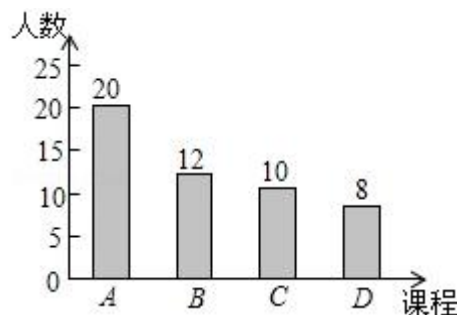
【解答】解： $\because$ 正方形 ABCD 的对角线 $AC = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 边长 $AB = \sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1$,

$\therefore$ 正方形 ABCD 的周长 $= 4 \times 1 = 4$.

故答案为：4.

14. (3 分) (2014•苏州) 某学校计划开设 A、B、C、D 四门校本课程供全体学生选修，规定每人必须并且只能选修其中一门，为了了解各门课程的选修人数，现从全体学生中随机抽取了部分学生进行调查，并把调查结果绘制成如图所示的条形统计图. 已知该校全体学生人数为 1200 名，由此可以估计选修 C 课程的学生有 240 人.



【解答】解：C 占样本的比例 $\frac{10}{20+12+10+8} = \frac{1}{5}$,

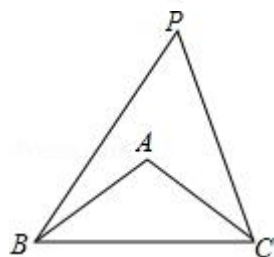
C 占总体的比例是 $\frac{1}{5}$,

选修 C 课程的学生有 $1200 \times \frac{1}{5} = 240$ (人),

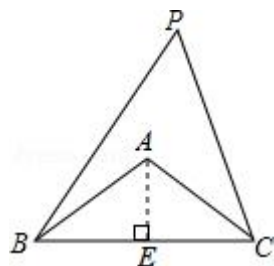
故答案为：240.

15. (3分) (2014•苏州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=8$. 若 $\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BAC$, 则

$$\tan \angle BPC = \frac{4}{3}.$$



【解答】解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E,



$$\because AB=AC=5,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \quad \angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$$\because \angle BPC = \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BAE.$$

在 $Rt\triangle BAE$ 中, 由勾股定理得

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$\therefore \tan \angle BPC = \tan \angle BAE = \frac{BE}{AE} = \frac{4}{3}.$$

故答案为: $\frac{4}{3}$.

16. (3分) (2014•苏州) 某地准备对一段长 120m 的河道进行清淤疏通. 若甲工程队先用 4 天单独完成其中一部分河道的疏通任务, 则余下的任务由乙工程队单独完成需要 9 天; 若甲工程队先单独工作 8 天, 则余下的任务由乙工程队单独完成需要 3 天. 设甲工程队平均每天疏通河道 x m, 乙工程队平均每天疏通河道 y m, 则 $(x+y)$ 的值为 20.

【解答】解: 设甲工程队平均每天疏通河道 x m, 乙工程队平均每天疏通河道 y m, 由题意, 得

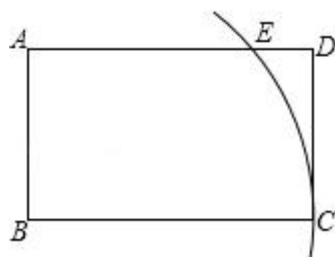
$$\begin{cases} 4x+9y=120 \\ 8x+3y=120 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=12 \\ y=8 \end{cases}.$$

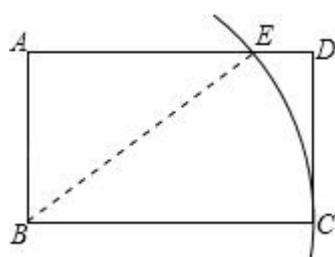
$$\therefore x+y=20.$$

故答案为: 20.

17. (3 分) (2014•苏州) 如图, 在矩形 ABCD 中, $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$, 以点 B 为圆心, BC 长为半径画弧, 交边 AD 于点 E. 若 $AE \cdot ED=\frac{4}{3}$, 则矩形 ABCD 的面积为 5.

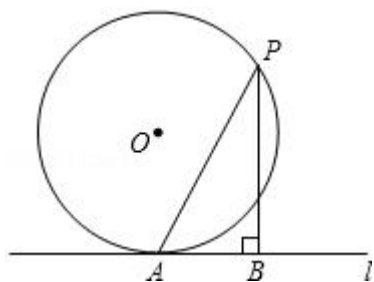


【解答】解: 如图, 连接 BE, 则 $BE=BC$.

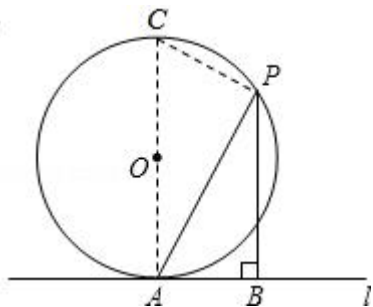


设 $AB=3x$, $BC=5x$,
 $\because$ 四边形 ABCD 是矩形,
 $\therefore AB=CD=3x$, $AD=BC=5x$, $\angle A=90^\circ$,
 由勾股定理得: $AE=4x$,
 则 $DE=5x-4x=x$,
 $\because AE \cdot ED=\frac{4}{3}$,
 $\therefore 4x \cdot x=\frac{4}{3}$,
 解得: $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (负数舍去),
 则 $AB=3x=\sqrt{3}$, $BC=5x=\frac{5\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore$ 矩形 ABCD 的面积是 $AB \times BC=\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{3}=5$,
 故答案为: 5.

18. (3 分) (2014•苏州) 如图, 直线 l 与半径为 4 的 $\odot O$ 相切于点 A, P 是 $\odot O$ 上的一个动点 (不与点 A 重合), 过点 P 作 $PB \perp l$, 垂足为 B, 连接 PA. 设 $PA=x$, $PB=y$, 则 $(x-y)$ 的最大值是 2.



【解答】解：如图，作直径 AC，连接 CP，



$$\therefore \angle CPA = 90^\circ,$$

$\because AB$ 是切线，

$$\therefore CA \perp AB,$$

$$\because PB \perp l,$$

$$\therefore AC \parallel PB,$$

$$\therefore \angle CAP = \angle APB,$$

$$\therefore \triangle APC \sim \triangle PBA,$$

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{PB}{PA},$$

$$\because PA = x, PB = y, \text{ 半径为 } 4,$$

$$\therefore \frac{x}{8} = \frac{y}{x},$$

$$\therefore y = \frac{1}{8}x^2,$$

$$\therefore x - y = x - \frac{1}{8}x^2 = -\frac{1}{8}x^2 + x = -\frac{1}{8}(x - 4)^2 + 2,$$

当 $x = 4$ 时， $x - y$ 有最大值是 2，

故答案为：2.

三、解答题（共 11 小题，共 76 分）

19. (5 分) (2014•苏州) 计算： $2^2 + |-1| - \sqrt{4}$.

【解答】解：原式 $= 4 + 1 - 2 = 3$.

20. (5 分) (2014•苏州) 解不等式组：
$$\begin{cases} x - 1 > 2 \\ 2 + x \geq 2(x - 1) \end{cases}$$

【解答】解：
$$\begin{cases} x - 1 > 2 & \text{①} \\ 2 + x \geq 2(x - 1) & \text{②} \end{cases}$$

由①得: $x > 3$; 由②得: $x \leq 4$,
 则不等式组的解集为 $3 < x \leq 4$.

21. (5分) (2015•东莞) 先化简, 再求值: $\frac{x}{x^2-1} \div (1+\frac{1}{x-1})$, 其中 $x=\sqrt{2}-1$.

【解答】 解: $\frac{x}{x^2-1} \div (1+\frac{1}{x-1})$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \div (\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1})$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \div \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{1}{x+1},$$

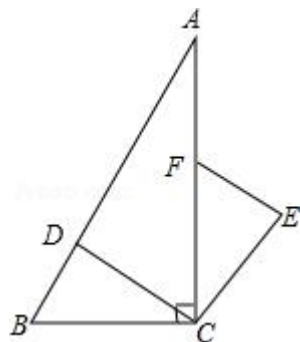
把 $x=\sqrt{2}-1$, 代入原式 $= \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

22. (6分) (2014•苏州) 解分式方程: $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{1-x} = 3$.

【解答】 解: 去分母得: $x-2=3x-3$,
 解得: $x=\frac{1}{2}$,
 经检验 $x=\frac{1}{2}$ 是分式方程的解.

23. (6分) (2014•苏州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D、F 分别在 AB、AC 上, $CF=CB$, 连接 CD, 将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后得 CE, 连接 EF.

- (1) 求证: $\triangle BCD \cong \triangle FCE$;
- (2) 若 $EF \parallel CD$, 求 $\angle BDC$ 的度数.



【解答】 (1) 证明: $\because$ 将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后得 CE,
 $\therefore CD=CE$, $\angle DCE=90^\circ$,
 $\because \angle ACB=90^\circ$,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle FCE,$$

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} CB=CF \\ \angle BCD=\angle FCE, \\ CD=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle FCE \text{ (SAS)}.$$

(2) 解: 由 (1) 可知 $\triangle BCD \cong \triangle FCE$,

$$\therefore \angle BDC = \angle E, \quad \angle BCD = \angle FCE,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DCA + \angle FCE = \angle DCA + \angle BCD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel CD,$$

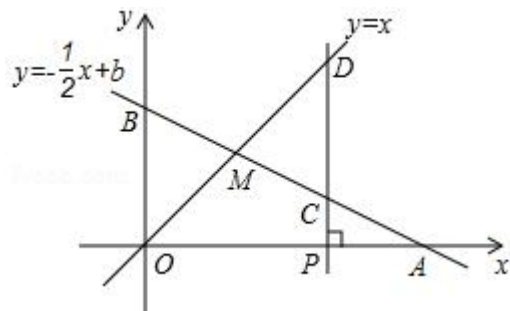
$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ.$$

24. (7 分) (2014·苏州) 如图, 已知函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 与函数 $y = x$ 的图象交于点 M , 点 M 的横坐标为 2, 在 x 轴上有一点 $P(a, 0)$ (其中 $a > 2$), 过点 P 作 x 轴的垂线, 分别交函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 和 $y = x$ 的图象于点 C 、 D .

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若 $OB = CD$, 求 a 的值.



【解答】 解: (1) $\because$ 点 M 在直线 $y = x$ 的图象上, 且点 M 的横坐标为 2,
 $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(2, 2)$,

把 $M(2, 2)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 得 $-1 + b = 2$, 解得 $b = 3$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$,

把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 得 $-\frac{1}{2}x + 3 = 0$, 解得 $x = 6$,

$\therefore A$ 点坐标为 $(6, 0)$;

(2) 把 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 得 $y = 3$,

$\therefore B$ 点坐标为 $(0, 3)$,

$$\therefore CD = OB,$$

$$\therefore CD = 3,$$

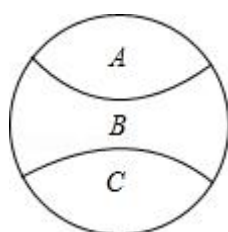
$\because PC \perp x$ 轴,

$\therefore C$ 点坐标为 $(a, -\frac{1}{2}a+3)$, D 点坐标为 (a, a)

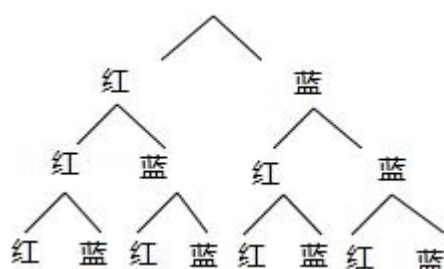
$\therefore a - (-\frac{1}{2}a+3) = 3,$

$\therefore a=4.$

25. (7 分) (2014•苏州) 如图, 用红、蓝两种颜色随机地对 A、B、C 三个区域分别进行涂色, 每个区域必须涂色并且只能涂一种颜色, 请用列举法 (画树状图或列表) 求 A、C 两个区域所涂颜色不相同的概率.



【解答】解: 画树状图, 如图所示:



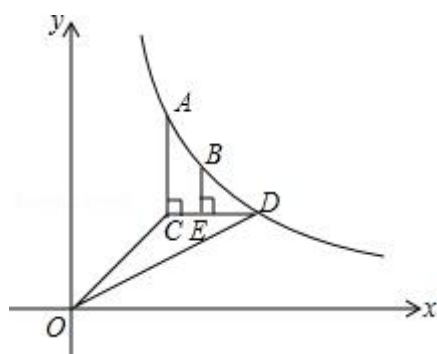
所有等可能的情况 8 种, 其中 A、C 两个区域所涂颜色不相同的有 4 种,

则 $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

26. (8 分) (2014•苏州) 如图, 已知函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A、B, 点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 过点 A 作 $AC \parallel y$ 轴, $AC=1$ (点 C 位于点 A 的下方), 过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴, 与函数的图象交于点 D, 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足 E 在线段 CD 上, 连接 OC、OD.

(1) 求 $\triangle OCD$ 的面积;

(2) 当 $BE = \frac{1}{2}AC$ 时, 求 CE 的长.



【解答】解：(1) $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A (1, 2),

$$\therefore k=2.$$

$$\because AC \parallel y \text{ 轴}, AC=1,$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标为 } (1, 1).$$

$$\because CD \parallel x \text{ 轴}, \text{点 D 在函数图象上},$$

$$\therefore \text{点 D 的坐标为 } (2, 1).$$

$$\therefore S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \because BE = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}.$$

$$\because BE \perp CD,$$

$$\text{点 B 的纵坐标} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{由反比例函数 } y = \frac{2}{x},$$

$$\text{点 B 的横坐标 } x = 2 \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{点 B 的横坐标是 } \frac{4}{3}, \text{纵坐标是 } \frac{3}{2}.$$

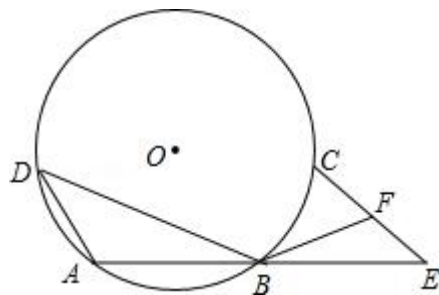
$$\therefore CE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

27. (8分) (2014•苏州) 如图, 已知 $\odot O$ 上依次有 A、B、C、D 四个点, $\widehat{AD} = \widehat{BC}$, 连接 AB、AD、BD, 弦 AB 不经过圆心 O, 延长 AB 到 E, 使 BE=AB, 连接 EC, F 是 EC 的中点, 连接 BF.

(1) 若 $\odot O$ 的半径为 3, $\angle DAB = 120^\circ$, 求劣弧 $\widehat{BD}$ 的长;

(2) 求证: $BF = \frac{1}{2} BD$;

(3) 设 G 是 BD 的中点, 探索: 在 $\odot O$ 上是否存在点 P (不同于点 B), 使得 $PG = PF$? 并说明 PB 与 AE 的位置关系.



【解答】(1) 解: 连接 OB, OD,

$\because \angle DAB=120^\circ$, $\therefore \widehat{BCD}$ 所对圆心角的度数为 240° ,

$\therefore \angle BOD=360^\circ - 240^\circ=120^\circ$,

$\because \odot O$ 的半径为 3,

$\therefore$ 劣弧 $\widehat{BD}$ 的长为: $\frac{120}{180} \times \pi \times 3 = 2\pi$;

(2) 证明: 连接 AC,

$\because AB=BE$, $\therefore$ 点 B 为 AE 的中点,

$\because F$ 是 EC 的中点, $\therefore BF$ 为 $\triangle EAC$ 的中位线,

$\therefore BF = \frac{1}{2}AC$,

$\because \widehat{AD} = \widehat{BC}$,

$\therefore \widehat{AD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AB}$,

$\therefore \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$,

$\therefore BD=AC$,

$\therefore BF = \frac{1}{2}BD$;

(3) 解: 过点 B 作 AE 的垂线, 与 $\odot O$ 的交点即为所求的点 P,

$\because BF$ 为 $\triangle EAC$ 的中位线,

$\therefore BF \parallel AC$,

$\therefore \angle FBE = \angle CAE$,

$\because \widehat{AD} = \widehat{BC}$,

$\therefore \angle CAB = \angle DBA$,

$\because$ 由作法可知 $BP \perp AE$,

$\therefore \angle GBP = \angle FBP$,

$\because G$ 为 BD 的中点,

$\therefore BG = \frac{1}{2}BD$,

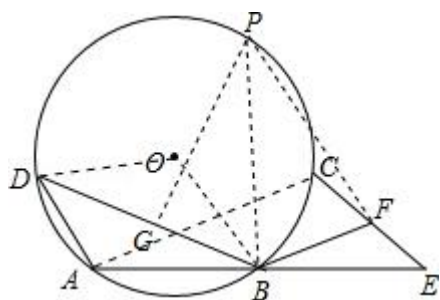
$\therefore BG=BF$,

在 $\triangle PBG$ 和 $\triangle PBF$ 中,

$$\begin{cases} BG=BF \\ \angle PBG=\angle PBF \\ BP=BP \end{cases}$$

$\therefore \triangle PBG \cong \triangle PBF$ (SAS),

$\therefore PG=PF$.

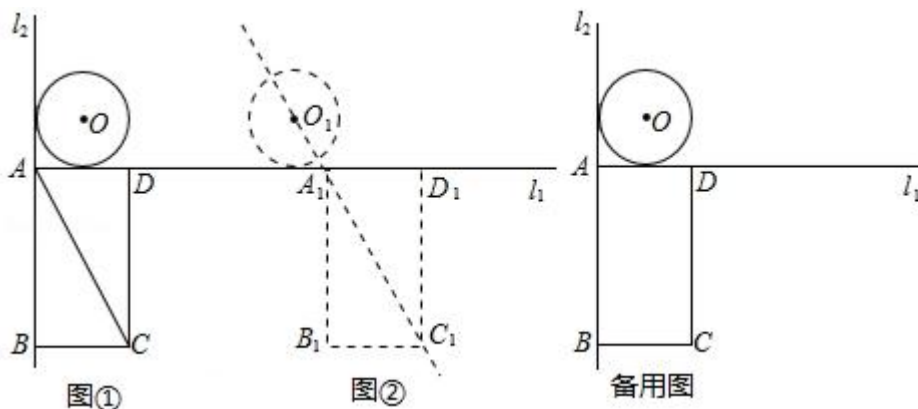


28. (9分) (2014•苏州) 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1, l_2 都相切, $\odot O$ 的半径为 2cm, 矩形 ABCD 的边 AD、AB 分别与 l_1, l_2 重合, $AB=4\sqrt{3}\text{cm}$, $AD=4\text{cm}$, 若 $\odot O$ 与矩形 ABCD 沿 l_1 同时向右移动, $\odot O$ 的移动速度为 3cm/s, 矩形 ABCD 的移动速度为 4cm/s, 设移动时间为 t (s)

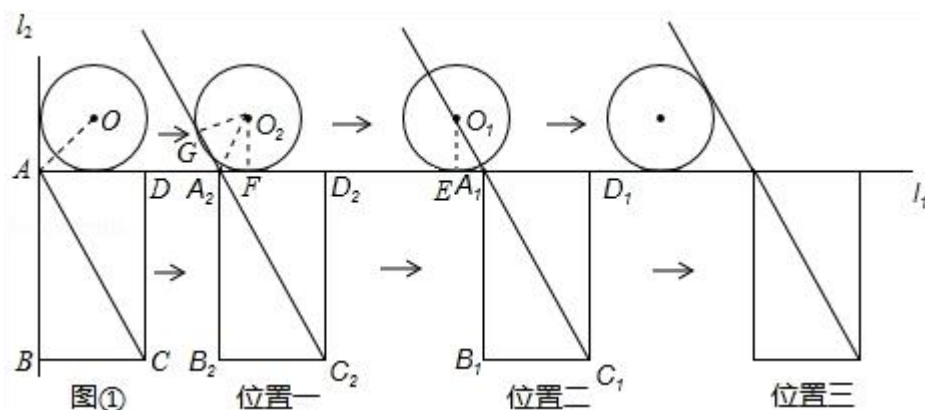
(1) 如图①, 连接 OA、AC, 则 $\angle OAC$ 的度数为 105°;

(2) 如图②, 两个图形移动一段时间后, $\odot O$ 到达 $\odot O_1$ 的位置, 矩形 ABCD 到达 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置, 此时点 O_1, A_1, C_1 恰好在同一直线上, 求圆心 O 移动的距离 (即 OO_1 的长);

(3) 在移动过程中, 圆心 O 到矩形对角线 AC 所在直线的距离在不断变化, 设该距离为 d (cm), 当 $d < 2$ 时, 求 t 的取值范围 (解答时可以利用备用图画出相关示意图).



【解答】 解: (1) $\because l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1, l_2 都相切,
 $\therefore \angle OAD = 45^\circ$,
 $\because AB = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$,
 $\therefore CD = 4\sqrt{3}\text{cm}$,
 $\therefore \tan \angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$,
 $\therefore \angle DAC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle OAC$ 的度数为: $\angle OAD + \angle DAC = 105^\circ$,
 故答案为: 105;



(2) 如图位置二, 当 O_1, A_1, C_1 恰好在同一直线上时, 设 $\odot O_1$ 与 l_1 的切点为 E , 连接 O_1E , 可得 $O_1E=2$, $O_1E \perp l_1$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1D_1C_1$ 中, $\because A_1D_1=4$, $C_1D_1=4\sqrt{3}$,

$\therefore \tan \angle C_1A_1D_1 = \sqrt{3}$, $\therefore \angle C_1A_1D_1 = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1O_1E$ 中, $\angle O_1A_1E = \angle C_1A_1D_1 = 60^\circ$,

$$\therefore A_1E = \frac{2}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\because A_1E = AA_1 - OO_1 - 2 = t - 2,$$

$$\therefore t - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2,$$

$$\therefore OO_1 = 3t = 2\sqrt{3} + 6;$$

(3) ①当直线 AC 与 $\odot O$ 第一次相切时, 设移动时间为 t_1 ,

如图位置一, 此时 $\odot O$ 移动到 $\odot O_2$ 的位置, 矩形 $ABCD$ 移动到 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置,

设 $\odot O_2$ 与直线 l_1, A_2C_2 分别相切于点 F, G , 连接 O_2F, O_2G, O_2A_2 ,

$\therefore O_2F \perp l_1, O_2G \perp A_2C_2$,

由 (2) 得, $\angle C_2A_2D_2 = 60^\circ$, $\therefore \angle GA_2F = 120^\circ$,

$\therefore \angle O_2A_2F = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle A_2O_2F$ 中, $O_2F=2$, $\therefore A_2F = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\because OO_2 = 3t_1, AF = AA_2 + A_2F = 4t_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore 4t_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 3t_1 = 2,$$

$$\therefore t_1 = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

②当直线 AC 与 $\odot O$ 第二次相切时, 设移动时间为 t_2 ,

记第一次相切时为位置一, 点 O_1, A_1, C_1 共线时位置二, 第二次相切时为位置三,

由题意知, 从位置一到位置二所用时间与位置二到位置三所用时间相等,

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 - (2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}) = t_2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2),$$

$$\text{解得: } t_2 = 2 + 2\sqrt{3},$$

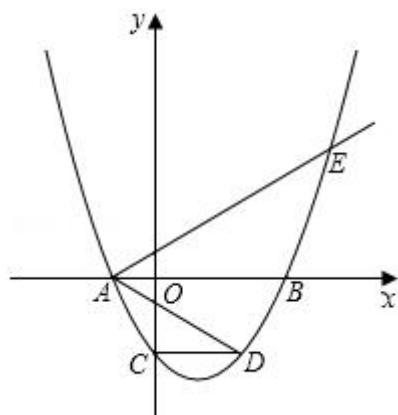
综上所述，当 $d < 2$ 时， t 的取值范围是： $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < t < 2 + 2\sqrt{3}$.

29. (10 分) (2014·苏州) 如图，二次函数 $y = a(x^2 - 2mx - 3m^2)$ (其中 a, m 是常数，且 $a > 0, m > 0$) 的图象与 x 轴分别交于点 A, B (点 A 位于点 B 的左侧)，与 y 轴交于 $C(0, -3)$ ，点 D 在二次函数的图象上， $CD \parallel AB$ ，连接 AD ，过点 A 作射线 AE 交二次函数的图象于点 E ， AB 平分 $\angle DAE$.

(1) 用含 m 的代数式表示 a ;

(2) 求证： $\frac{AD}{AE}$ 为定值;

(3) 设该二次函数图象的顶点为 F ，探索：在 x 轴的负半轴上是否存在点 G ，连接 GF ，以线段 GF, AD, AE 的长度为三边长的三角形是直角三角形？如果存在，只要找出一个满足要求的点 G 即可，并用含 m 的代数式表示该点的横坐标；如果不存在，请说明理由.



【解答】(1) 解：将 $C(0, -3)$ 代入二次函数 $y = a(x^2 - 2mx - 3m^2)$ ，
则 $-3 = a(0 - 0 - 3m^2)$ ，
解得 $a = \frac{1}{m^2}$.

(2) 方法一：

证明：如图 1，过点 D, E 分别作 x 轴的垂线，垂足为 M, N .

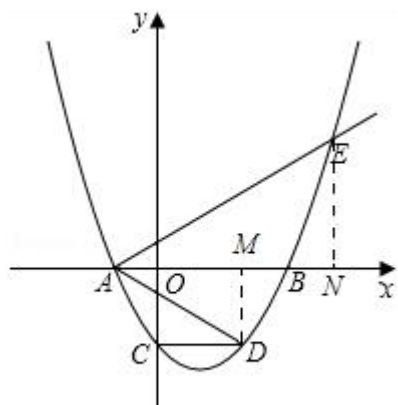


图 1

由 $a(x^2 - 2mx - 3m^2) = 0$ ，
解得 $x_1 = -m, x_2 = 3m$ ，
则 $A(-m, 0), B(3m, 0)$.

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore D$ 点的纵坐标为 -3 ,

又 $\because D$ 点在抛物线上,

$\therefore$ 将 D 点纵坐标代入抛物线方程得 D 点的坐标为 $(2m, -3)$.

$\because AB$ 平分 $\angle DAE$,

$\therefore \angle DAM = \angle EAN$,

$\because \angle DMA = \angle ENA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADM \sim \triangle AEN$.

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AN} = \frac{DM}{EN}.$$

设 E 坐标为 $(x, \frac{1}{m^2}(x^2 - 2mx - 3m^2))$,

$$\therefore \frac{\frac{3}{\frac{1}{m^2}(x^2 - 2mx - 3m^2)}}{x - (-m)} = \frac{3m}{-m},$$

$\therefore x = 4m$,

$\therefore E(4m, 5)$,

$\because AM = AO + OM = m + 2m = 3m$, $AN = AO + ON = m + 4m = 5m$,

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AN} = \frac{3}{5}, \text{ 即为定值.}$$

方法二:

过点 D 、 E 分别作 x 轴的垂线, 垂足为 M 、 N ,

$$\because a(x^2 - 2mx - 3m^2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = -m, x_2 = 3m,$$

则 $A(-m, 0)$, $B(3m, 0)$,

$\because CD \parallel AB$, $\therefore D$ 点的纵坐标为 -3 , $\therefore D(2m, -3)$,

$\because AB$ 平分 $\angle DAE$, $\therefore K_{AD} + K_{AE} = 0$,

$\because A(-m, 0)$, $D(2m, -3)$,

$$\therefore K_{AD} = \frac{0+3}{-m-2m} = -\frac{1}{m}, \therefore K_{AE} = \frac{1}{m},$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{m}x + 1 \\ y = \frac{1}{m^2}x^2 - \frac{2}{m} - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3mx - 4m^2 = 0,$$

$\therefore x_1 = -m$ (舍), $x_2 = 4m$, $\therefore E(4m, 5)$,

$\because \angle DAM = \angle EAN = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADM \sim \triangle AEN$,

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{DM}{EN},$$

$\because DM = 3$, $EN = 5$,

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}.$$

连接 FC 并延长, 与 x 轴负半轴交于一点, 此点即为所求的点 G.

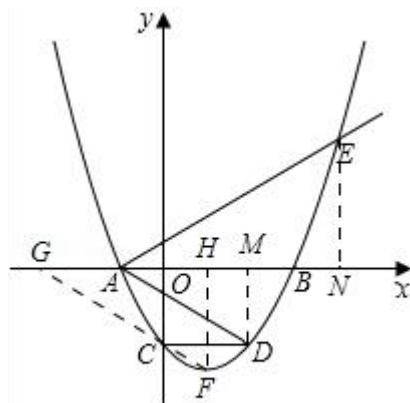


图 2

$$\therefore \frac{OC}{OG} = \frac{HF}{HG},$$

$$\therefore \frac{OC}{OG} = \frac{HF}{OH+OG},$$

$$\therefore OC=3, \quad HF=4, \quad OH=m,$$

$$\therefore OG = 3m.$$

$$\therefore GF = \sqrt{GH^2 + HF^2} = \sqrt{16m^2 + 16} = 4\sqrt{m^2 + 1},$$

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \sqrt{9m^2 + 9} = 3\sqrt{m^2 + 1},$$

$$\therefore \frac{GF}{AD} = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AD: GF: AE = 3: 4: 5,$$

∴以线段 GF, AD, AE 的长度为三边长的三角形是直角三角形, 此时 G 点的横坐标为 -3m .

