

2014 年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. (2 分) (2014•常州) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

2. (2 分) (2014•常州) 下列运算正确的是 ()

- A. $a \cdot a^3 = a^3$ B. $(ab)^3 = a^3b$ C. $(a^3)^2 = a^6$ D. $a^8 \div a^4 = a^2$

3. (2 分) (2014•常州) 下列立体图形中，侧面展开图是扇形的是 ()



4. (2 分) (2014•常州) 甲、乙、丙、丁四人进行射击测试，每人 10 次射击成绩平均数均是 9.2 环，方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 0.56$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 0.60$ ， $S_{\text{丙}}^2 = 0.50$ ， $S_{\text{丁}}^2 = 0.45$ ，则成绩最稳定的是 ()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

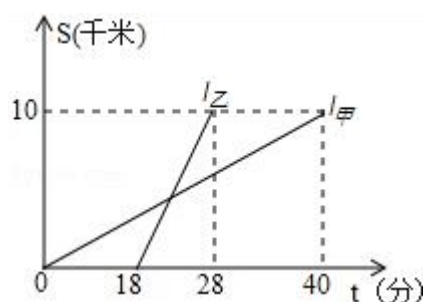
5. (2 分) (2014•常州) 已知两圆半径分别为 3cm，5cm，圆心距为 7cm，则这两圆的位置关系为 ()

- A. 相交 B. 外切 C. 内切 D. 外离

6. (2 分) (2014•常州) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 P (- 1, 2)，则这个函数的图象位于 ()

- A. 第二，三象限 B. 第一，三象限 C. 第三，四象限 D. 第二，四象限

7. (2 分) (2014•常州) 甲、乙两人以相同路线前往距离单位 10km 的培训中心参加学习. 图中 $l_{\text{甲}}$ 、 $l_{\text{乙}}$ 分别表示甲、乙两人前往目的地所走的路程 S (km) 随时间 t (分) 变化的函数图象. 以下说法: ①乙比甲提前 12 分钟到达; ②甲的平均速度为 15 千米/小时; ③乙走了 8km 后遇到甲; ④乙出发 6 分钟后追上甲. 其中正确的有 ()



A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

8. (2 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 经过点 $A(-3, 0)$, 点 $B(0, \sqrt{3})$, 点 P 的坐标为 $(1, 0)$, $\odot P$ 与 y 轴相切于点 O . 若将 $\odot P$ 沿 x 轴向左平移, 平移后得到 $\odot P'$ (点 P 的对应点为点 P'), 当 $\odot P'$ 与直线 l 相交时, 横坐标为整数的点 P' 共有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (本大题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分.)

9. (4 分) (2014•常州) 计算: $|-1| =$ _____, $2^{-2} =$ _____, $(-3)^2 =$ _____, $\sqrt[3]{-8} =$ _____.

10. (2 分) (2014•常州) 已知 $P(1, -2)$, 则点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是 _____.

11. (2 分) (2014•常州) 若 $\angle \alpha = 30^\circ$, 则 $\angle \alpha$ 的余角等于 _____ 度, $\sin \alpha$ 的值为 _____.

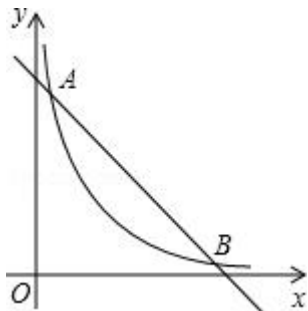
12. (2 分) (2014•常州) 已知扇形的半径为 3cm , 此扇形的弧长是 $2\pi\text{cm}$, 则此扇形的圆心角等于 _____ 度, 扇形的面积是 _____. (结果保留 π)

13. (2 分) (2014•常州) 已知反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 则自变量 x 的取值范围是 _____; 若式子 $\sqrt{x+3}$ 的值为 0, 则 $x =$ _____.

14. (2 分) (2014•常州) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根是 1, 则 $m =$ _____, 另一个根为 _____.

15. (2分) (2014•常州) 因式分解: $x^3 - 9xy^2 =$ _____.

16. (2分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=10-x$ 的图象与函数 $y=\frac{6}{x}$ ($x>0$) 的图象相交于点 A, B. 设点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 那么长为 x_1 , 宽为 y_1 的矩形的面积为_____, 周长为_____.



17. (2分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $P(1, 1)$, 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B, 且 $\tan \angle ABO=3$, 那么点 A 的坐标是_____.

三、计算题 (本大题共 2 小题, 满分 18 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (8分) (2014•常州) 计算与化简:

(1) $\sqrt{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + 2\tan 45^\circ$;

(2) $x(x-1) + (1-x)(1+x)$.

19. (10分) (2014•常州) 解不等式组和分式方程:

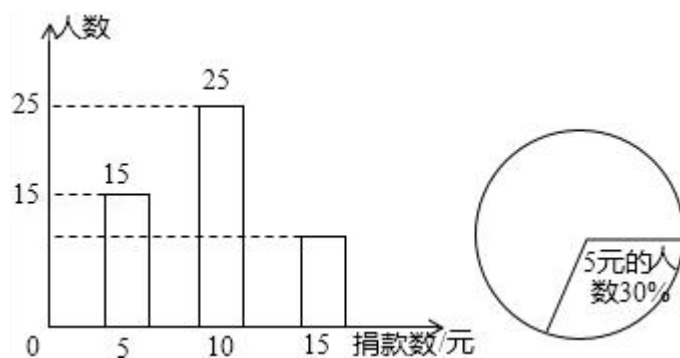
(1)
$$\begin{cases} 3x+2 > -1 \\ 1-x < 3 \end{cases};$$

(2)
$$\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{1-x} = 1.$$

四、解答题 (本大题共 2 小题, 满分 15 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

20. (7 分) (2014•常州) 为迎接“六一”儿童节的到来, 某校学生参加献爱心捐款活动, 随机抽取该校部分学生的捐款数进行统计分析, 相应数据的统计图如下:

- (1) 该样本的容量是_____, 样本中捐款 15 元的学生有_____人;
(2) 若该校一共有 500 名学生, 据此样本估计该校学生的捐款总数.



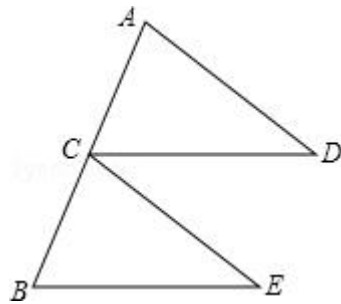
21. (8 分) (2014•常州) 一只不透明的箱子里共有 3 个球, 把它们的分别编号为 1, 2, 3, 这些球除编号不同外其余都相同.

- (1) 从箱子中随机摸出一个球, 求摸出的球是编号为 1 的球的概率;
(2) 从箱子中随机摸出一个球, 记录下编号后将它放回箱子, 搅匀后再摸出一个球并记录下编号, 求两次摸出的球都是编号为 3 的球的概率.

五、证明题 (本大题共 2 小题, 共 12 分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答应写出证明过程)

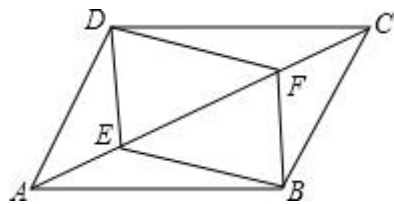
22. (5 分) (2014•常州) 已知: 如图, 点 C 为 AB 中点, $CD=BE$, $CD \parallel BE$.

求证: $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.



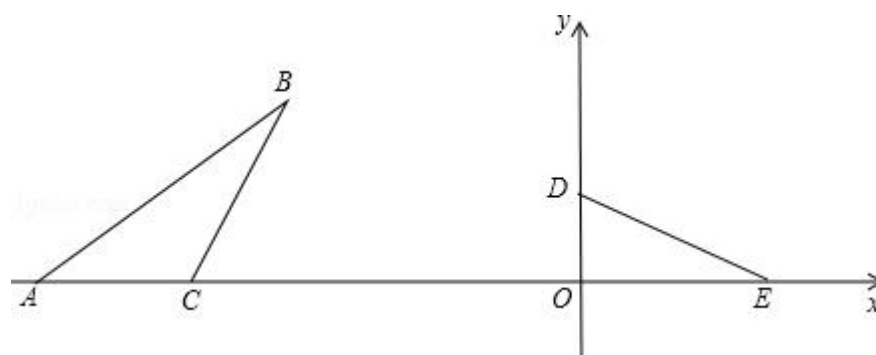
23. (7 分) (2014•常州) 已知: 如图, E, F 是四边形 ABCD 的对角线 AC 上的两点, $AF=CE$, 连接 DE, DF, BE, BF. 四边形 DEBF 为平行四边形.

求证: 四边形 ABCD 是平行四边形.



六、画图与应用（本大题共 5 小题，请在答题卡指定区域内作答，共 39 分）

24. (7 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中，如图，已知 $Rt\triangle DOE$ ， $\angle DOE=90^\circ$ ， $OD=3$ ，点 D 在 y 轴上，点 E 在 x 轴上，在 $\triangle ABC$ 中，点 A ， C 在 x 轴上， $AC=5$ ， $\angle ACB+\angle ODE=180^\circ$ ， $\angle ABC=\angle OED$ ， $BC=DE$ ．按下列要求画图（保留作图痕迹）：



- (1) 将 $\triangle ODE$ 绕 O 点按逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle OMN$ （其中点 D 的对应点为点 M ，点 E 的对应点为点 N ），画出 $\triangle OMN$ ；
- (2) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'B'C'$ （其中点 A ， B ， C 的对应点分别为点 A' ， B' ， C' ），使得 $B'C'$ 与 (1) 中的 $\triangle OMN$ 的边 NM 重合；
- (3) 求 OE 的长．

25. (7 分) (2014•常州) 某小商场以每件 20 元的价格购进一种服装，先试销一周，试销期间每天的销量（件）与每件的销售价 x （元/件）如下表：

x （元/件）	38	36	34	32	30	28	26
t （件）	4	8	12	16	20	24	28

假定试销中每天的销售量 t （件）与销售价 x （元/件）之间满足一次函数．

(1) 试求 t 与 x 之间的函数关系式;

(2) 在商品不积压且不考虑其它因素的条件下, 每件服装的销售定价为多少时, 该小商场销售这种服装每天获得的毛利润最大? 每天的最大毛利润是多少?

(注: 每件服装销售的毛利润=每件服装的销售价-每件服装的进货价)

26. (8 分) (2014•常州) 我们用 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, 例如: $[2.5]=2$, $[3]=3$, $[-2.5]=-3$; 用 $\langle a \rangle$ 表示大于 a 的最小整数, 例如: $\langle 2.5 \rangle=3$, $\langle 4 \rangle=5$, $\langle -1.5 \rangle=-1$. 解决下列问题:

(1) $[-4.5]=$ _____, $\langle 3.5 \rangle=$ _____.

(2) 若 $[x]=2$, 则 x 的取值范围是_____; 若 $\langle y \rangle=-1$, 则 y 的取值范围是_____.

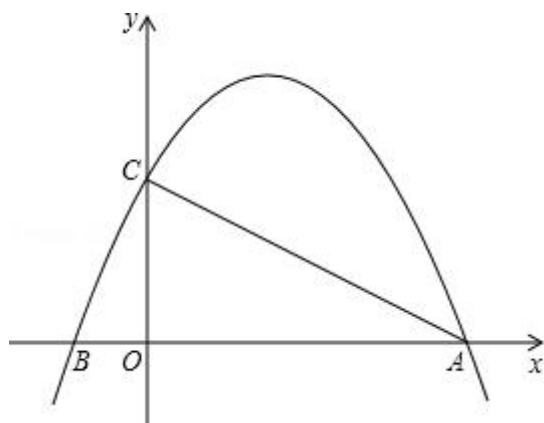
(3) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 3[x]+2\langle y \rangle=3 \\ 3[x]-\langle y \rangle=-6 \end{cases}$, 求 x, y 的取值范围.

27. (7 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 的图象与 x 轴交于点 A, B (点 B 在点 A 的左侧), 与 y 轴交于点 C . 过动点 $H(0, m)$ 作平行于 x 轴的直线 l , 直线 l 与二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 的图象相交于点 D, E .

(1) 写出点 A , 点 B 的坐标;

(2) 若 $m>0$, 以 DE 为直径作 $\odot Q$, 当 $\odot Q$ 与 x 轴相切时, 求 m 的值;

(3) 直线 l 上是否存在一点 F , 使得 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



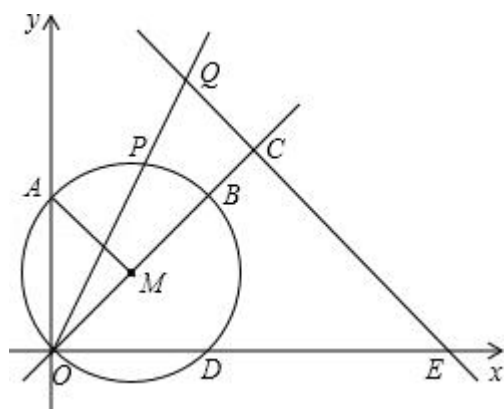
28. (10 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 以点 M 为圆心, OM 长为半径作 $\odot M$. 使 $\odot M$ 与直线 OM 的另一交点为点 B , 与 x 轴, y 轴的另一交点分别为点 D , A (如图), 连接 AM . 点 P 是 $\widehat{AB}$ 上的动点.

(1) 写出 $\angle AMB$ 的度数;

(2) 点 Q 在射线 OP 上, 且 $OP \cdot OQ = 20$, 过点 Q 作 QC 垂直于直线 OM , 垂足为 C , 直线 QC 交 x 轴于点 E .

①当动点 P 与点 B 重合时, 求点 E 的坐标;

②连接 QD , 设点 Q 的纵坐标为 t , $\triangle QOD$ 的面积为 S . 求 S 与 t 的函数关系式及 S 的取值范围.



2014 年江苏省常州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. (2 分) (2014•常州) $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

【解答】解： $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$ ，

故选：A.

2. (2 分) (2014•常州) 下列运算正确的是 ()

A. $a \cdot a^3 = a^3$ B. $(ab)^3 = a^3b^3$ C. $(a^3)^2 = a^6$ D. $a^8 \div a^4 = a^2$

【解答】解：A、 $a \cdot a^3 = a^4$ ，故 A 选项错误；

B、 $(ab)^3 = a^3b^3$ ，故 B 选项错误；

C、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故 C 选项正确；

D、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故 D 选项错误.

故选：C.

3. (2 分) (2014•常州) 下列立体图形中，侧面展开图是扇形的是 ()



【解答】解：根据圆锥的特征可知，侧面展开图是扇形的是圆锥.

故选：B.

4. (2 分) (2014•常州) 甲、乙、丙、丁四人进行射击测试, 每人 10 次射击成绩平均数均是 9.2 环, 方差分别为 $S_{\text{甲}}^2=0.56$, $S_{\text{乙}}^2=0.60$, $S_{\text{丙}}^2=0.50$, $S_{\text{丁}}^2=0.45$, 则成绩最稳定的是 ()

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【解答】解: $\because S_{\text{甲}}^2=0.56$, $S_{\text{乙}}^2=0.60$, $S_{\text{丙}}^2=0.50$, $S_{\text{丁}}^2=0.45$,

$$\therefore S_{\text{丁}}^2 < S_{\text{丙}}^2 < S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2,$$

$\therefore$ 成绩最稳定的是丁;

故选: D.

5. (2 分) (2014•常州) 已知两圆半径分别为 3cm, 5cm, 圆心距为 7cm, 则这两圆的位置关系为 ()

A. 相交 B. 外切 C. 内切 D. 外离

【解答】解: $\because$ 两圆的半径分别是 3cm 和 5cm, 圆心距为 7cm,

$$5 - 3 = 2, \quad 3 + 5 = 8,$$

$$\therefore 2 < 7 < 8,$$

$\therefore$ 两圆相交.

故选: A.

6. (2 分) (2014•常州) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 P (-1, 2), 则这个函数的图象位于 ()

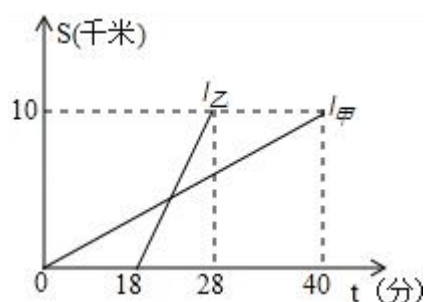
A. 第二, 三象限 B. 第一, 三象限 C. 第三, 四象限 D. 第二, 四象限

【解答】解: 由题意得, $k = -1 \times 2 = -2 < 0$,

$\therefore$ 函数的图象位于第二, 四象限.

故选: D.

7. (2分) (2014•常州) 甲、乙两人以相同路线前往距离单位 10km 的培训中心参加学习. 图中 $l_{甲}$ 、 $l_{乙}$ 分别表示甲、乙两人前往目的地所走的路程 S (km) 随时间 t (分) 变化的函数图象. 以下说法: ①乙比甲提前 12 分钟到达; ②甲的平均速度为 15 千米/小时; ③乙走了 8km 后遇到甲; ④乙出发 6 分钟后追上甲. 其中正确的有 ()



A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【解答】解: ①乙在 28 分时到达, 甲在 40 分时到达, 所以乙比甲提前了 12 分钟到达; 故①正确;

②根据甲到达目的地时的路程和时间知: 甲的平均速度 $= 10 \div \frac{40}{60} = 15$ 千米/时; 故

②正确;

④设乙出发 x 分钟后追上甲, 则有: $\frac{10}{28-18} \times x = \frac{10}{40} \times (18+x)$, 解得 $x=6$, 故④正确;

③由④知: 乙第一次遇到甲时, 所走的距离为: $6 \times \frac{10}{28-18} = 6$ km, 故③错误;

所以正确的结论有三个: ①②④,

故选: B.

8. (2分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 经过点 $A(-3, 0)$, 点 $B(0, \sqrt{3})$, 点 P 的坐标为 $(1, 0)$, $\odot P$ 与 y 轴相切于点 O . 若将 $\odot P$ 沿 x 轴向左平移, 平移后得到 $\odot P'$ (点 P 的对应点为点 P'), 当 $\odot P'$ 与直线 l 相交时, 横坐标为整数的点 P' 共有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【解答】解：如图所示， $\because$ 点 P 的坐标为 $(1, 0)$ ， $\odot P$ 与 y 轴相切于点 O，

$\therefore \odot P$ 的半径是 1，

若 $\odot P$ 与 AB 相切时，设切点为 D，由点 A $(-3, 0)$ ，点 B $(0, \sqrt{3})$ ，

$\therefore OA=3$ ， $OB=\sqrt{3}$ ，由勾股定理得： $AB=2\sqrt{3}$ ， $\angle DAM=30^\circ$ ，

设平移后圆与直线 AB 第一次相切时圆心为 M（即对应的 P' ），

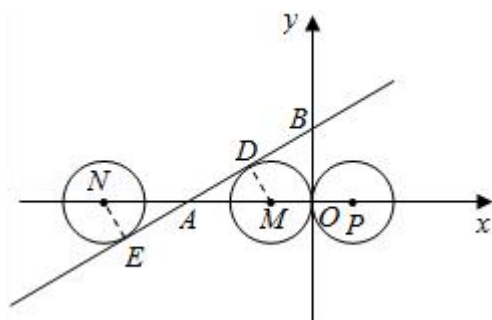
$\therefore MD \perp AB$ ， $MD=1$ ，又因为 $\angle DAM=30^\circ$ ，

$\therefore AM=2$ ，M 点的坐标为 $(-1, 0)$ ，即对应的 P' 点的坐标为 $(-1, 0)$ ，

同理可得圆与直线第二次相切时圆心 N 的坐标为 $(-5, 0)$ ，

所以当 $\odot P'$ 与直线 l 相交时，横坐标为整数的点 P' 的横坐标可以是 -2 ， -3 ， -4 共三个。

故选：C.



二、填空题（本大题共 9 小题，每小题 4 分，满分 20 分.）

9. (4 分) (2014•常州) 计算： $|-1|=\underline{1}$ ， $2^{-2}=\underline{\frac{1}{4}}$ ， $(-3)^2=\underline{9}$ ， $\sqrt[3]{-8}=\underline{-2}$.

【解答】解： $\because |-1|=1$ ，

$$2^{-2}=\frac{1}{4},$$

$$(-3)^2=9,$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2.$$

故答案为：1, $\frac{1}{4}$, 9, -2.

10. (2 分) (2014•常州) 已知 P (1, -2), 则点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是
_(1, 2)_____.

【解答】解：∵P (1, -2),

∴点 P 关于 x 轴的对称点的坐标是：(1, 2).

故答案为：(1, 2).

11. (2 分) (2014•常州) 若 $\angle \alpha = 30^\circ$, 则 $\angle \alpha$ 的余角等于 60 度, $\sin \alpha$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

【解答】解：∵ $\angle A = 30^\circ$,

∴ $\angle A$ 的余角是： $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$;

$$\sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

故答案为：60, $\frac{1}{2}$.

12. (2 分) (2014•常州) 已知扇形的半径为 3cm, 此扇形的弧长是 2π cm, 则此扇形的圆心角等于 120 度, 扇形的面积是 $3\pi \text{cm}^2$. (结果保留 π)

【解答】解：设扇形的圆心角的度数是 n° , 则

$$\frac{3n\pi}{180} = 2\pi,$$

解得： $n = 120$,

$$\text{扇形的面积是：} \frac{120\pi \times 3^2}{360} = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

故答案是：120, $3\pi \text{cm}^2$.

13. (2 分) (2014•常州) 已知反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 则自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$;

若式子 $\sqrt{x+3}$ 的值为 0, 则 $x =$ -3 .

【解答】解: 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$,

$$\sqrt{x+3}=0,$$

解得 $x = -3$.

故答案为: $x \neq 0$, -3 .

14. (2 分) (2014•常州) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的一个根是 1, 则 $m =$ 2, 另一个根为 2.

【解答】解: 将 $x=1$ 代入方程得: $1 - 3 + m = 0$,

解得: $m=2$,

方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 即 $(x - 1)(x - 2) = 0$,

解得: $x=1$ 或 $x=2$,

则另一根为 2.

故答案为: 2, 2.

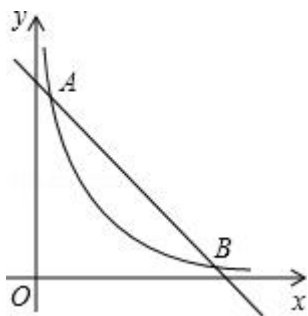
15. (2 分) (2014•常州) 因式分解: $x^3 - 9xy^2 =$ $x(x+3y)(x-3y)$.

【解答】解: $x^3 - 9xy^2$,

$$=x(x^2 - 9y^2),$$

$$=x(x+3y)(x-3y).$$

16. (2 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=10-x$ 的图象与函数 $y=\frac{6}{x}$ ($x > 0$) 的图象相交于点 A, B. 设点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 那么长为 x_1 , 宽为 y_1 的矩形的面积为 6, 周长为 20.



【解答】解：∵点 A 在函数 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 上，

$$\therefore x_1 y_1 = 6,$$

又∵点 A 在函数 $y = 10 - x$ 上，

$$\therefore x_1 + y_1 = 10,$$

$$\therefore \text{矩形的周长为 } 2(x_1 + y_1) = 20,$$

故答案为：6，20.

17. (2 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $P(1, 1)$ ，与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，且 $\tan \angle ABO = 3$ ，那么点 A 的坐标是 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$.

【解答】解：在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中，由 $\tan \angle ABO = 3$ ，可得 $OA = 3OB$ ，则一次函数 $y = kx + b$ 中 $k = \pm \frac{1}{3}$.

∵一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $P(1, 1)$ ，

∴当 $k = \frac{1}{3}$ 时，求可得 $b = \frac{2}{3}$;

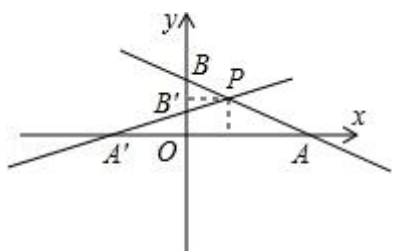
$k = -\frac{1}{3}$ 时，求可得 $b = \frac{4}{3}$.

即一次函数的解析式为 $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 或 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

令 $y = 0$ ，则 $x = -2$ 或 4 ，

∴点 A 的坐标是 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$.

故答案为： $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$.



三、计算题（本大题共 2 小题，满分 18 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

18. （8 分）（2014•常州）计算与化简：

$$(1) \sqrt{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + 2\tan 45^\circ;$$

$$(2) x(x-1) + (1-x)(1+x).$$

【解答】解：（1）原式=2-1+2×1

$$=2-1+2$$

$$=3;$$

$$(2) \text{原式} = x^2 - x + 1 - x^2$$

$$=1-x.$$

19. （10 分）（2014•常州）解不等式组和分式方程：

$$(1) \begin{cases} 3x+2 > -1 \\ 1-x < 3 \end{cases};$$

$$(2) \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{1-x} = 1.$$

【解答】解：（1） $\begin{cases} 3x+2 > -1 \text{ ①} \\ 1-x < 3 \text{ ②} \end{cases},$

由①得： $x > -1$,

由②得： $x > -2$,

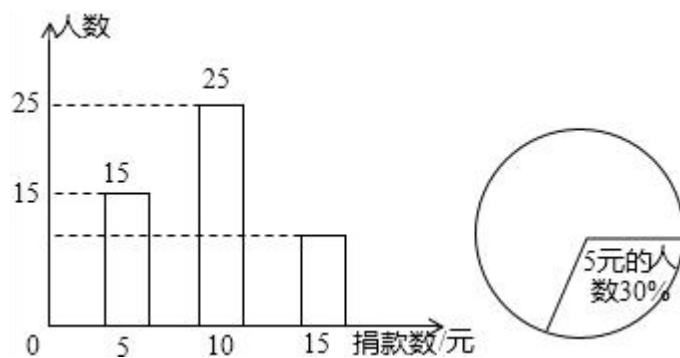
则不等式组的解集为： $x > -1$;

(2) 去分母得: $3x+2=x-1$,
 移项得: $3x-x=-1-2$, 即 $2x=-3$,
 解得: $x=-\frac{3}{2}$,
 经检验 $x=-\frac{3}{2}$ 是分式方程的解.

四、解答题 (本大题共 2 小题, 满分 15 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

20. (7 分) (2014•常州) 为迎接“六一”儿童节的到来, 某校学生参加献爱心捐款活动, 随机抽取该校部分学生的捐款数进行统计分析, 相应数据的统计图如下:

- (1) 该样本的容量是 50, 样本中捐款 15 元的学生有 10 人;
 (2) 若该校一共有 500 名学生, 据此样本估计该校学生的捐款总数.



【解答】 解: (1) $15 \div 30\% = 50$ (人), $50 - 15 - 25 = 10$ (人),

故答案为: 50, 10;

(2) 平均每人的捐款数为: $\frac{1}{50} \times (5 \times 15 + 10 \times 25 + 15 \times 10) = 9.5$ (元),

$9.5 \times 500 = 4750$ (元),

答: 该校学生的捐款总数为 4750 元.

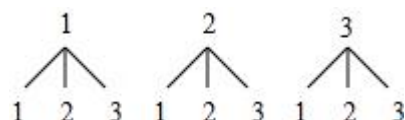
21. (8 分) (2014•常州) 一只不透明的箱子里共有 3 个球, 把它们的分别编号为 1, 2, 3, 这些球除编号不同外其余都相同.

- (1) 从箱子中随机摸出一个球, 求摸出的球是编号为 1 的球的概率;

(2) 从箱子中随机摸出一个球，记录下编号后将它放回箱子，搅匀后再摸出一个球并记录下编号，求两次摸出的球都是编号为 3 的球的概率.

【解答】解：(1) 从箱子中随机摸出一个球，摸出的球是编号为 1 的球的概率为： $\frac{1}{3}$;

(2) 画树状图如下：

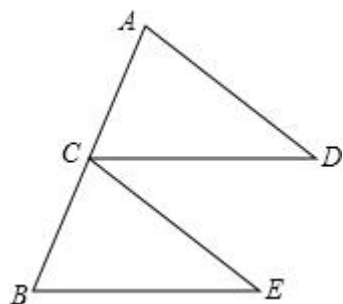


共有 9 种等可能的结果，两次摸出的球都是编号为 3 的球的概率为 $\frac{1}{9}$.

五、证明题 (本大题共 2 小题，共 12 分，请在答题卡指定区域内作答，解答应写出证明过程)

22. (5 分) (2014•常州) 已知：如图，点 C 为 AB 中点， $CD=BE$ ， $CD \parallel BE$.

求证： $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.



【解答】证明： $\because C$ 是 AB 的中点 (已知)，

$\therefore AC=CB$ (线段中点的定义).

$\because CD \parallel BE$ (已知)，

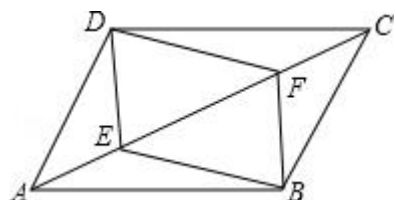
$\therefore \angle ACD = \angle B$ (两直线平行，同位角相等).

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} AC=CB \\ \angle ACD=\angle CBE, \\ CD=BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$ (SAS).

23. (7分) (2014•常州) 已知: 如图, E, F 是四边形 ABCD 的对角线 AC 上的两点, $AF=CE$, 连接 DE, DF, BE, BF. 四边形 DEBF 为平行四边形.
求证: 四边形 ABCD 是平行四边形.



【解答】 证明: 如图, 连结 BD 交 AC 于点 O.

$\because$ 四边形 DEBF 为平行四边形,

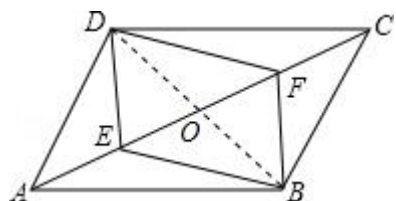
$\therefore OD=OB, OE=OF,$

$\because AF=CE,$

$\therefore AF - EF = CE - EF$, 即 $AE=CF$,

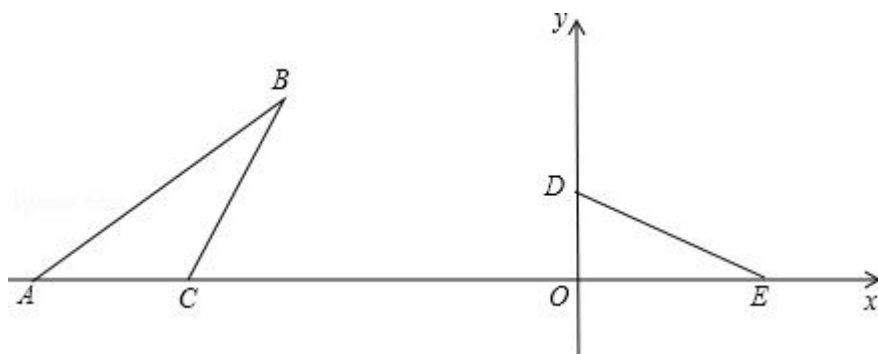
$\therefore AE+OE=CF+OF$, 即 $OA=OC$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形.



六、画图与应用 (本大题共 5 小题, 请在答题卡指定区域内作答, 共 39 分)

24. (7分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 已知 $Rt\triangle DOE$, $\angle DOE=90^\circ$, $OD=3$, 点 D 在 y 轴上, 点 E 在 x 轴上, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 A, C 在 x 轴上, $AC=5$. $\angle ACB + \angle ODE = 180^\circ$, $\angle ABC = \angle OED$, $BC=DE$. 按下列要求画图 (保留作图痕迹):



(1) 将 $\triangle ODE$ 绕 O 点按逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle OMN$ (其中点 D 的对应点为点 M , 点 E 的对应点为点 N), 画出 $\triangle OMN$;

(2) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'B'C'$ (其中点 A , B , C 的对应点分别为点 A' , B' , C'), 使得 $B'C'$ 与(1)中的 $\triangle OMN$ 的边 NM 重合;

(3) 求 OE 的长.

【解答】解: (1) $\triangle OMN$ 如图所示;

(2) $\triangle A'B'C'$ 如图所示;

(3) 设 $OE=x$, 则 $ON=x$, 作 $MF \perp A'B'$ 于点 F ,
由作图可知: $B'C'$ 平分 $\angle A'B'O$, 且 $C'O \perp OB'$,
所以, $B'F=B'O=OE=x$, $FC'=OC'=OD=3$,

$$\therefore A'C'=AC=5,$$

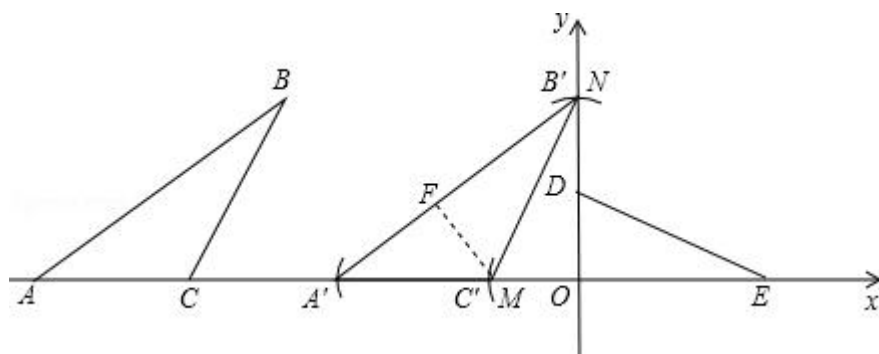
$$\therefore A'F=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

$$\therefore A'B'=x+4, \quad A'O=5+3=8,$$

在 $Rt\triangle A'B'O$ 中, $x^2+8^2=(4+x)^2$,

解得 $x=6$,

即 $OE=6$.



25. (7分) (2014•常州) 某小商场以每件 20 元的价格购进一种服装，先试销一周，试销期间每天的销量（件）与每件的销售价 x （元/件）如下表：

x （元/件）	38	36	34	32	30	28	26
t （件）	4	8	12	16	20	24	28

假定试销中每天的销售量 t （件）与销售价 x （元/件）之间满足一次函数。

(1) 试求 t 与 x 之间的函数关系式；

(2) 在商品不积压且不考虑其它因素的条件下，每件服装的销售定价为多少时，该小商场销售这种服装每天获得的毛利润最大？每天的最大毛利润是多少？

(注：每件服装销售的毛利润=每件服装的销售价－每件服装的进货价)

【解答】 解：(1) 设 t 与 x 之间的函数关系式为： $t=kx+b$ ，因为函数的图象经过 $(38, 4)$ 和 $(36, 8)$ 两点，

$$\therefore \begin{cases} 4=38k+b \\ 8=36k+b \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k=-2 \\ b=80 \end{cases}.$

故 $t=-2x+80$.

(2) 设每天的毛利润为 W 元，每件服装销售的毛利润为 $(x-20)$ 元，每天售出 $(80-2x)$ 件，

$$\text{则 } W=(x-20)(80-2x)=-2x^2+120x-1600=-2(x-30)^2+200,$$

当 $x=30$ 时，获得的毛利润最大，最大毛利润为 200 元。

26. (8分) (2014•常州) 我们用 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, 例如: $[2.5]=2$, $[3]=3$, $[-2.5]=-3$; 用 $\langle a \rangle$ 表示大于 a 的最小整数, 例如: $\langle 2.5 \rangle=3$, $\langle 4 \rangle=5$, $\langle -1.5 \rangle=-1$. 解决下列问题:

(1) $[-4.5]=\underline{-5}$, $\langle 3.5 \rangle=\underline{4}$.

(2) 若 $[x]=2$, 则 x 的取值范围是 $\underline{2 \leq x < 3}$; 若 $\langle y \rangle=-1$, 则 y 的取值范围是 $\underline{-2 \leq y < -1}$.

(3) 已知 x, y 满足方程组
$$\begin{cases} 3[x]+2\langle y \rangle=3 \\ 3[x]-\langle y \rangle=-6 \end{cases}$$
, 求 x, y 的取值范围.

【解答】解: (1) 由题意得, $[-4.5]=-5$, $\langle 3.5 \rangle=4$;

(2) $\because [x]=2$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $2 \leq x < 3$;

$\because \langle y \rangle=-1$,

$\therefore y$ 的取值范围是 $-2 \leq y < -1$;

(3) 解方程组得:
$$\begin{cases} [x]=-1 \\ \langle y \rangle=3 \end{cases}$$
,

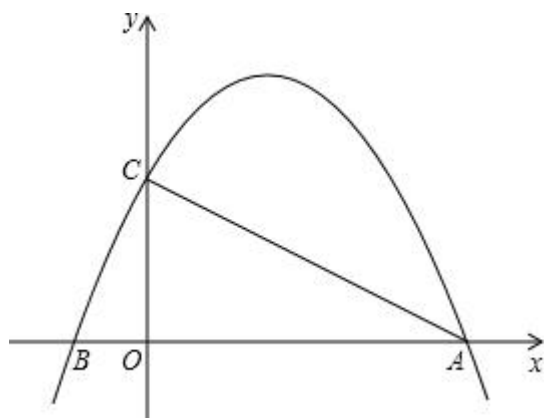
$\therefore x, y$ 的取值范围分别为 $-1 \leq x < 0$, $2 \leq y < 3$.

27. (7分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 的图象与 x 轴交于点 A, B (点 B 在点 A 的左侧), 与 y 轴交于点 C . 过动点 $H(0, m)$ 作平行于 x 轴的直线 l , 直线 l 与二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 的图象相交于点 D, E .

(1) 写出点 A, B 的坐标;

(2) 若 $m > 0$, 以 DE 为直径作 $\odot Q$, 当 $\odot Q$ 与 x 轴相切时, 求 m 的值;

(3) 直线 l 上是否存在一点 F , 使得 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.



【解答】解: (1) 当 $y=0$ 时, 有 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$,

解得: $x_1=4$, $x_2=-1$,

$\therefore$ A、B 两点的坐标分别为 $(4, 0)$ 和 $(-1, 0)$.

(2) $\because \odot Q$ 与 x 轴相切, 且与 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 交于 D、E 两点,

$\therefore$ 圆心 Q 位于直线与抛物线对称轴的交点处,

$\because$ 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{\frac{3}{2}}{2 \times (-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2}$, $\odot Q$ 的半径为 H 点的纵坐标 m ($m > 0$),

$\therefore$ D、E 两点的坐标分别为: $(\frac{3}{2} - m, m)$, $(\frac{3}{2} + m, m)$

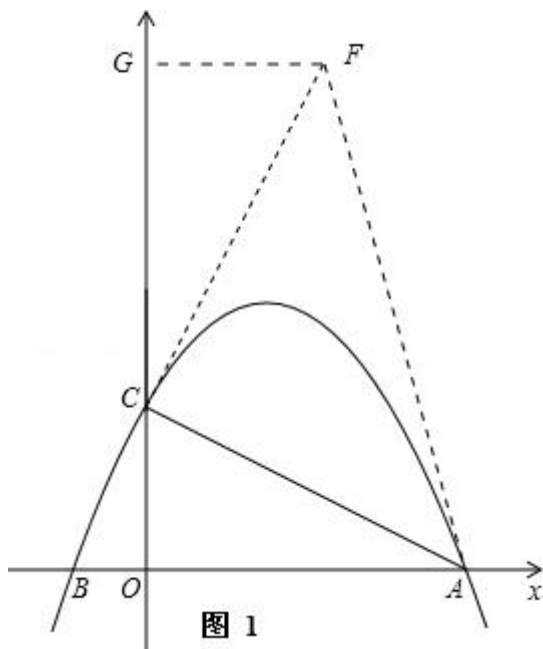
$\because$ E 点在二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 的图象上,

$\therefore m = -\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2} + m)^2 + \frac{3}{2} \times (\frac{3}{2} + m) + 2$,

解得 $m = \frac{\sqrt{29}}{2} - 1$ 或 $m = -\frac{\sqrt{29}}{2} - 1$ (不合题意, 舍去).

(3) 存在.

①如图 1,



当 $\angle ACF=90^\circ$, $AC=FC$ 时, 过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于 G ,

$$\therefore \angle AOC = \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACO + \angle FCG = 90^\circ, \quad \angle GFC + \angle FCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle CFG,$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle CFG,$$

$$\therefore CG = AO = 4,$$

$$\because CO = 2,$$

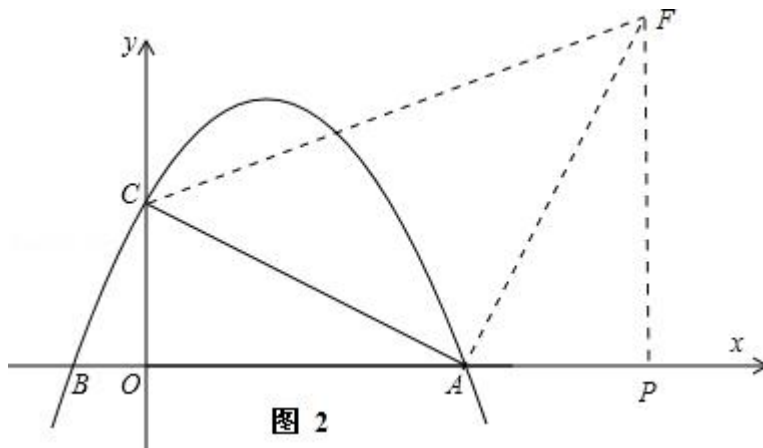
$$\therefore m = OG = 2 + 4 = 6;$$

反向延长 FC , 使得 $CF = CF'$, 此时 $\triangle ACF'$ 亦为等腰直角三角形,

$$\text{易得 } y_C - y_{F'} = CG = 4,$$

$$\therefore m = CO - 4 = 2 - 4 = -2.$$

②如图 2,



当 $\angle CAF=90^\circ$, $AC=AF$ 时, 过点 F 作 $FP \perp x$ 轴于 P,

$\because \angle AOC=\angle APF=90^\circ$, $\angle ACO+\angle OAC=90^\circ$, $\angle FAP+\angle OAC=90^\circ$,

$\therefore \angle ACO=\angle FAP$,

$\therefore \triangle ACO \cong \triangle FAP$,

$\therefore FP=AO=4$,

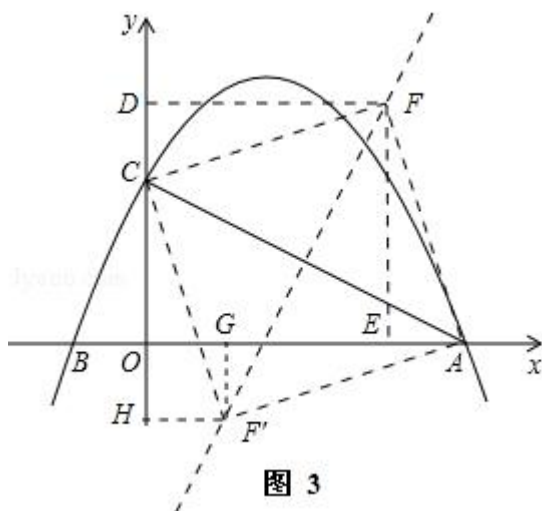
$\therefore m=FP=4$;

反向延长 FA, 使得 $AF=AF'$, 此时 $\triangle ACF'$ 亦为等腰直角三角形,

易得 $y_A - y_{F'}=FP=4$,

$\therefore m=0-4=-4$.

③如图 3,



当 $\angle AFC=90^\circ$, $FA=FC$ 时, 则 F 点一定在 AC 的中垂线上, 此时存在两个点分别记为 F, F',

分别过 F, F' 两点作 x 轴、y 轴的垂线, 分别交于 E, G, D, H.

$$\because \angle DFC + \angle CFE = \angle CFE + \angle EFA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle EFA,$$

$$\because \angle CDF = \angle AEF, \quad CF = AF,$$

$$\therefore \triangle CDF \cong \triangle AEF,$$

$$\therefore CD = AE, \quad DF = EF,$$

$\therefore$ 四边形 OEFD 为正方形,

$$\therefore OA = OE + AE = OD + AE = OC + CD + AE = OC + 2CD,$$

$$\therefore 4 = 2 + 2 \cdot CD,$$

$$\therefore CD = 1,$$

$$\therefore m = OC + CD = 2 + 1 = 3.$$

$$\because \angle HF'C + \angle CGF' = \angle CF'G + \angle GF'A,$$

$$\therefore \angle HF'C = \angle GF'A,$$

$$\because \angle HF'C = \angle GF'A, \quad CF' = AF',$$

$$\therefore \triangle HF'C \cong \triangle GF'A,$$

$$\therefore HF' = GF', \quad CH = AG,$$

$\therefore$ 四边形 OHF'G 为正方形,

$$\therefore OH = CH - CO = AG - CO = AO - OG - CO = AO - OH - CO = 4 - OH - 2,$$

$$\therefore OH = 1,$$

$$\therefore m = -1.$$

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$\therefore y$ 的最大值为 $\frac{25}{8}$.

$\because$ 直线 l 与抛物线有两个交点, $\therefore m < \frac{25}{8}$.

$\therefore m$ 可取值为: -4 、 -2 、 -1 或 3 .

综上所述, 直线 l 上存在一点 F , 使得 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形, m 的值为 -4 、 -2 、 -1 或 3 .

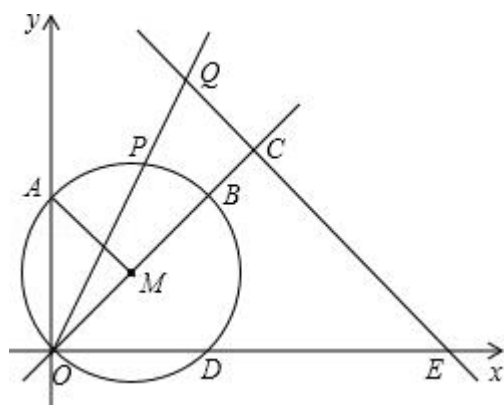
28. (10 分) (2014•常州) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 以点 M 为圆心, OM 长为半径作 $\odot M$. 使 $\odot M$ 与直线 OM 的另一交点为点 B , 与 x 轴, y 轴的另一交点分别为点 D , A (如图), 连接 AM . 点 P 是 $\widehat{AB}$ 上的动点.

(1) 写出 $\angle AMB$ 的度数;

(2) 点 Q 在射线 OP 上, 且 $OP \cdot OQ = 20$, 过点 Q 作 QC 垂直于直线 OM , 垂足为 C , 直线 QC 交 x 轴于点 E .

①当动点 P 与点 B 重合时, 求点 E 的坐标;

②连接 QD , 设点 Q 的纵坐标为 t , $\triangle QOD$ 的面积为 S . 求 S 与 t 的函数关系式及 S 的取值范围.



【解答】 解: (1) 过点 M 作 $MH \perp OD$ 于点 H ,

$\because$ 点 $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

$$\therefore OH = MH = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle MOD = 45^\circ,$$

$$\because \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOM = 45^\circ,$$

$$\because OM = AM,$$

$$\therefore \angle OAM = \angle AOM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AMO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ;$$

$$(2) \text{ ① } \because OH = MH = \sqrt{2}, MH \perp OD,$$

$$\therefore OM = \sqrt{MH^2 + OH^2} = 2, OD = 2OH = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OB = 4,$$

$$\because \text{动点 } P \text{ 与点 } B \text{ 重合时, } OP \cdot OQ = 20,$$

$$\therefore OQ = 5,$$

$$\because \angle OQE = 90^\circ, \angle POE = 45^\circ,$$

$$\therefore OE = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore E \text{ 点坐标为 } (5\sqrt{2}, 0)$$

$$\text{② } \because OD = 2\sqrt{2}, Q \text{ 的纵坐标为 } t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}t = \sqrt{2}t.$$

如图 2, 当动点 P 与 B 点重合时, 过点 Q 作 $QF \perp x$ 轴, 垂足为 F 点,

$$\because OP = 4, OP \cdot OQ = 20,$$

$$\therefore OQ = 5,$$

$\because \angle OFC=90^\circ, \angle QOD=45^\circ,$

$$\therefore t=QF=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{此时 } S=\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}=5;$$

如图 3, 当动点 P 与 A 点重合时, Q 点在 y 轴上,

$$\therefore OP=2\sqrt{2},$$

$$\therefore OP \cdot OQ=20,$$

$$\therefore t=OQ=5\sqrt{2},$$

$$\text{此时 } S=\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}=10;$$

$\therefore S$ 的取值范围为 $5 \leq S \leq 10$.

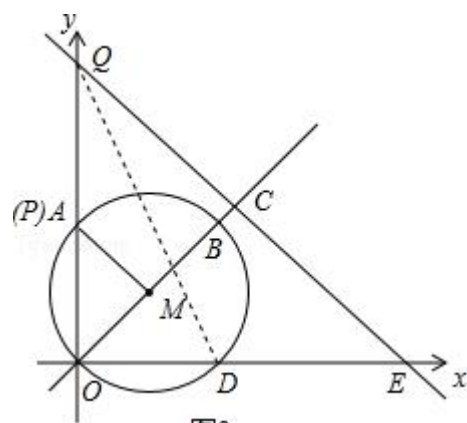


图3

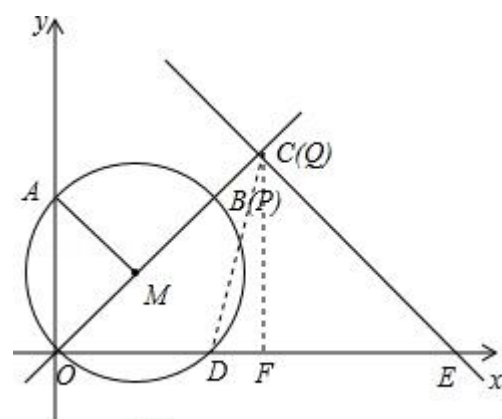
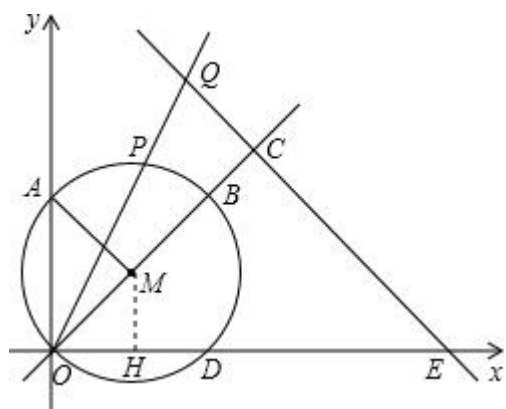


图2



参与本试卷答题和审题的老师有：sd2011；wkd；HJJ；lantin；sjzx；星期八；郝老师；MMCH；qingli；gbl210；wdyzlhx；zhjh；HLing；wdxwwzy；zjx111；自由人；sks；nhx600；wd1899；caicl；SPIDER；zcx（排名不分先后）

菁优网

2016年7月19日