

2013 年苏州市初中毕业暨升学考试试卷

数 学

一、选择题：本大题共有 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.

1. $|-2|$ 等于

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\pm \frac{1}{2}$

2. 计算 $-2x^2 + 3x^2$ 的结果为

- A. $-5x^2$ B. $5x^2$ C. $-x^2$ D. x^2

3. 若式子 $\frac{\sqrt{x-1}}{2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是

- A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x \geq 1$ D. $x \leq 1$

4. 一组数据：0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 10 的中位数是

- A. 2.5 B. 3 C. 3.5 D. 5

5. 世界文化遗产长城总长约为 $6700000m$ ，若将 6700000 用科学记数法表示为 6.7×10^n (n 是正整数)，则 n 的值为

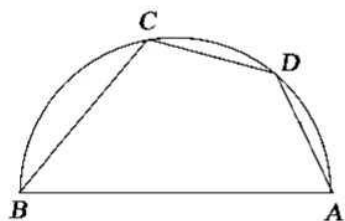
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

6. 已知二次函数 $y = x^2 - 3x + m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴的一个交点为 $(1, 0)$ ，则关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 的两实数根是

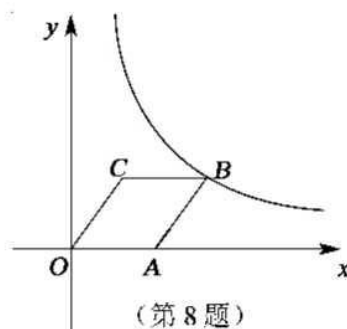
- A. $x_1 = 1, x_2 = -1$ B. $x_1 = 1, x_2 = 2$
C. $x_1 = 1, x_2 = 0$ D. $x_1 = 1, x_2 = 3$

7. 如图， AB 是半圆的直径，点 D 是 AC 的中点， $\angle ABC = 50^\circ$ ，则 $\angle DAB$ 等于

- A. 55° B. 60° C. 65° D. 70°



(第 7 题)



(第 8 题)

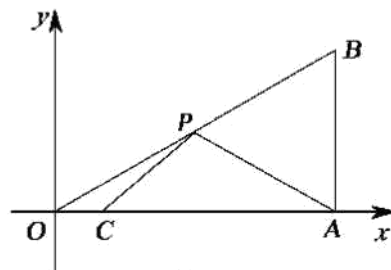
8. 如图，菱形 $OACB$ 的顶点 C 的坐标为 $(3, 4)$ ，顶点 A 在 x 轴的正半轴上. 反比例函数 y

$= \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过顶点 B ，则 k 的值为

- A. 12 B. 20 C. 24 D. 32

9. 已知 $x - \frac{1}{x} = 3$ ，则 $4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$ 的值为

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$
D. $\frac{7}{2}$



(第 10 题)

10. 如图，在平面直角坐标系中， $Rt\triangle OAB$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上，顶点 B 的坐标为 $(3, \sqrt{3})$ ，点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，点 P 为斜边 OB

上的一动点，则 $PA + PC$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{31}}{2}$ C. $\frac{3 + \sqrt{19}}{2}$ D. $2\sqrt{7}$

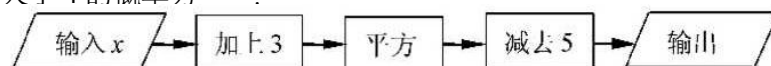
二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。把答案直接填在答题卡相对应的位置上。

11. 计算： $a^4 \div a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

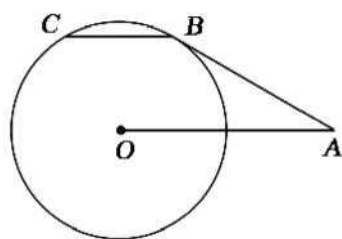
12. 因式分解： $a^2 + 2a + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{5}{2x+1}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

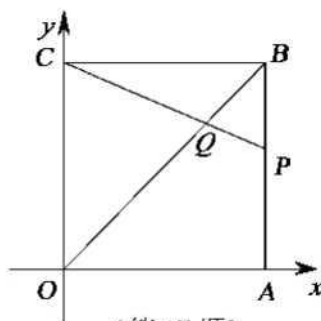
14. 任意抛掷一枚质地均匀的正方体骰子 1 次，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，掷得面朝上的点数大于 4 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



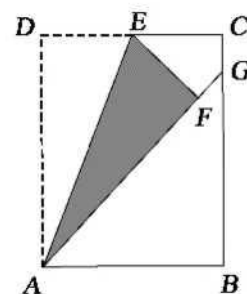
15. 按照下图所示的操作步骤，若输入 x 的值为 2，则输出的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第 16 题)



(第 17 题)



(第 18 题)

16. 如图， AB 切 $\odot O$ 于点 B ， $OA = 2$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ，弦 $BC \parallel OA$ ，劣弧 $\widehat{BC}$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果保留 π)

17. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是边长为 2 的正方形，顶点 A, C 分别在 x, y 轴的正半轴上. 点 Q 在对角线 OB 上，且 $OQ = OC$ ，连接 CQ 并延长 CQ 交边 AB 于点 P ，则点 P 的坐标为 (____, ____).

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是边 CD 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠后得到 $\triangle AFE$ ，且点 F 在矩形 $ABCD$ 内部. 将 AF 延长交边 BC 于点 G . 若 $\frac{CG}{GB} = \frac{1}{k}$ ，则 $\frac{AD}{AB} =$ ____ (用含 k 的代数式表示).

三、解答题：本大题共 11 小题，共 76 分.

19. (本题满分 5 分)

计算： $(-1)^3 + (\sqrt{3} + 1)^0 + \sqrt{9}$.

20. (本题满分 5 分)

解不等式组：
$$\begin{cases} x - 2 \geq 1 \\ 2(x - 1) < x + 3 \end{cases}$$

21. (本题满分 5 分)

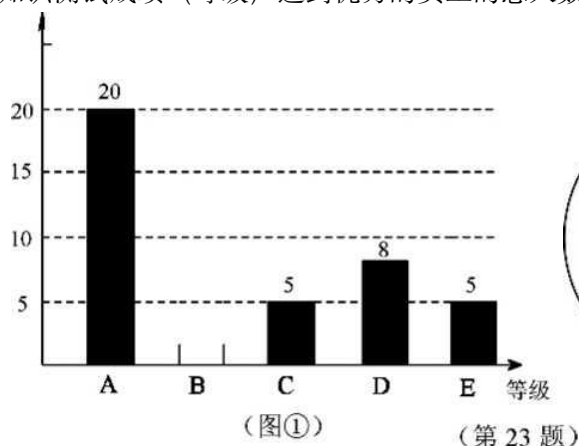
先化简，再求值： $\frac{x-2}{x-1} \div \left(x+1 - \frac{3}{x-1}\right)$ ，其中 $x = \sqrt{3} - 2$.

22. (本题满分 6 分) 苏州某旅行社组织甲、乙两个旅游团分别到西安、北京旅游. 已知这两个旅游团共有 55 人，甲旅游团的人数比乙旅游团的人数的 2 倍少 5 人. 问甲、乙两个旅游团各有多少人?

23. (本题满分 6 分) 某企业 500 名员工参加安全生产知识测试，成绩记为 A, B, C, D, E 共 5 个等级，为了解本次测试的成绩 (等级) 情况，现从中随机抽取部分员工的成绩 (等级)，统计整理并制作了如下的统计图：

(1) 求这次抽样调查的样本容量，并补全图①；

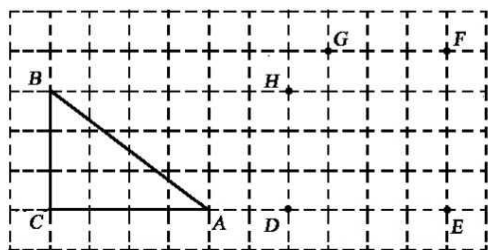
(2) 如果测试成绩 (等级) 为 A, B, C 级的定为优秀，请估计该企业参加本次安全生产知识测试成绩 (等级) 达到优秀的员工的总人数.



(图②)

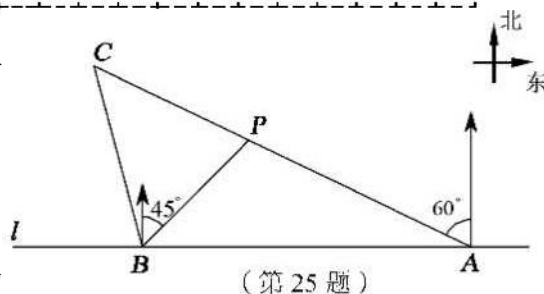
24. (本题满分 7 分) 如图, 在方格纸中, $\triangle ABC$ 的三个顶点及 D, E, F, G, H 五个点分别位于小正方形的顶点上.

- (1) 现以 D, E, F, G, H 中的三个点为顶点画三角形, 在所画的三角形中与 $\triangle ABC$ 不全等但面积相等的三角形是_____ (只需要填一个三角形);
- (2) 先从 D, E 两个点中任意取一个点, 再从 F, G, H 三个点中任意取两个不同的点, 以所取的这三个点为顶点画三角形, 求所画三角形与 $\triangle ABC$ 面积相等的概率 (用画树状图或列表格求解).



25. (本题满分 7 分) 如图, 在一笔直的海岸线 l 上有 A, B 两个观测站, A 在 B 的正东方向, $AB = 2$ (单位: km). 有一艘小船在点 P 处, 从 A 测得小船在北偏西 60° 的方向, 从 B 测得小船在北偏东 45° 的方向.

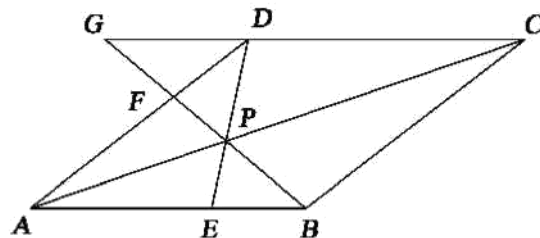
- (1) 求点 P 到海岸线 l 的距离;
 - (2) 小船从点 P 处沿射线 AP 的方向航行一段时间后, 到达点 C 处. 此时, 从 B 测得小船在北偏西 15° 的方向. 求点 C 与点 B 之间的距离.
- (上述 2 小题的结果都保留根号)



(第 25 题)

26. (本题满分 8 分) 如图, 点 P 是菱形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点, 连接 DP 并延长 DP 交边 AB 于点 E , 连接 BP 并延长 BP 交边 AD 于点 F , 交 CD 的延长线于点 G .

- (1) 求证: $\triangle APB \cong \triangle APD$;
- (2) 已知 $DF: FA = 1: 2$, 设线段 DP 的长为 x , 线段 PF 的长为 y .



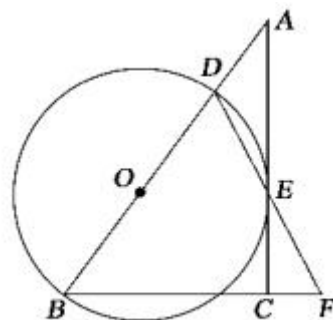
(第 26 题)

为 x , 线段 PF 的长为 y .

- ① 求 y 与 x 的函数关系式;
- ② 当 $x = 6$ 时, 求线段 FG 的长.

27. (本题满分 8 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 上一点, 以 BD 为直径的 $\odot O$ 与边 AC 相切于点 E , 连接 DE 并延长 DE 交 BC 的延长线于点 F .

- (1) 求证: $BD = BF$;



(第 27 题)

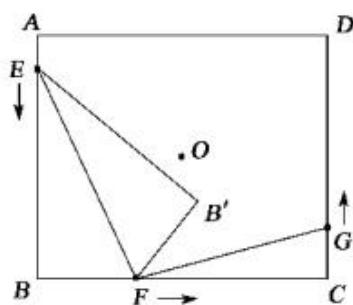
(2)若 $CF=1$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 求 $\odot O$ 的半径.

28. (本题满分 9 分) 如图, 点 O 为矩形 $ABCD$ 的对称中心, $AB=10\text{cm}$, $BC=12\text{cm}$. 点 E , F , G 分别从 A , B , C 三点同时出发, 沿矩形的边按逆时针方向匀速运动, 点 E 的运动速度为 1cm/s , 点 F 的运动速度为 3cm/s , 点 G 的运动速度为 1.5cm/s . 当点 F 到达点 C (即点 F 与点 C 重合) 时, 三个点随之停止运动. 在运动过程中, $\triangle EBF$ 关于直线 EF 的对称图形是 $\triangle EB'F$, 设点 E , F , G 运动的时间为 t (单位: s).

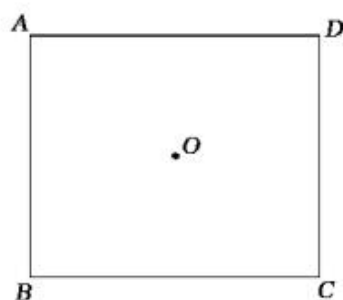
(1)当 $t = \underline{\hspace{1cm}} s$ 时, 四边形 $EBFB'$ 为正方形;

(2)若以点 E , B , F 为顶点的三角形与以点 F , C , G 为顶点的三角形相似, 求 t 的值;

(3)是否存在实数 t , 使得点 B' 与点 O 重合? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



(第 28 题)



(备用图)

29. (本题满分 10 分) 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 是常数, 且 $c < 0$) 与 x 轴分别交于点 A, B (点 A 位于点 B 的左侧), 与 y 轴的负半轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

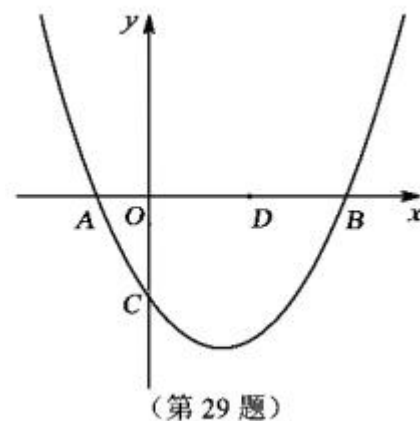
(1) $b = \underline{\hspace{2cm}}$, 点 B 的横坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (上述结果均用含 c 的代数式表示);

(2) 连接 BC , 过点 A 作直线 $AE \parallel BC$, 与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 交于点 E . 点 D 是 x 轴上一点, 其坐标为 $(2, 0)$, 当 C, D, E 三点在同一直线上时, 求抛物线的解析式;

(3) 在(2)的条件下, 点 P 是 x 轴下方的抛物线上的一动点, 连接 PB, PC , 设所得 $\triangle PBC$ 的面积为 S .

①求 S 的取值范围;

②若 $\triangle PBC$ 的面积 S 为整数, 则这样的 $\triangle PBC$ 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.



江苏省苏州市 2013 年中考数学试卷

一、选择题 (本大共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求的, 请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答案卡相应的位置上)

1. (3 分) (2013•苏州) $|-2|$ 等于 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

考点: 绝对值.

分析: 根据绝对值的性质可直接求出答案.

解答: 解: 根据绝对值的性质可知: $|-2|=2$.

故选 A.

点评: 此题考查了绝对值的性质, 要求掌握绝对值的性质及其定义, 并能熟练运用到实际运算当中.

绝对值规律总结: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

2. (3 分) (2013•苏州) 计算 $-2x^2+3x^2$ 的结果为 ()

- A. $-5x^2$ B. $5x^2$ C. $-x^2$ D. x^2

考点: 合并同类项.

分析: 根据合并同类项的法则, 即系数相加作为系数, 字母和字母的指数不变即可求解.

解答: 解: 原式 = $(-2+3)x^2=x^2$,

故选 D.

点评: 本题主要考查合并同类项得法则. 即系数相加作为系数, 字母和字母的指数不变.

3. (3 分) (2013•苏州) 若式子 $\frac{\sqrt{x-1}}{2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x \geq 1$ D. $x \leq 1$

考点: 二次根式有意义的条件.

分析: 根据二次根式有意义的条件可得 $x-1 \geq 0$, 再解不等式即可.

解答: 解: 由题意得: $x-1 \geq 0$,

解得: $x \geq 1$,

故选: C.

点评: 此题主要考查了二次根式有意义的条件, 关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数.

4. (3 分) (2013•苏州) 一组数据: 0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 10 的中位数是 ()

A. 2.5

B. 3

C. 3.5

D. 5

考点：中位数.

分析：根据中位数的定义先把这组数据从小到大排列，再求出最中间两个数的平均数即可.

解答：解：将这组数据从小到大排列为：0, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 10,

最中间两个数的平均数是： $(3+3) \div 2=3$,

则中位数是3;

故选 B.

点评：此题考查了中位数，掌握中位数的概念是解题的关键，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数）.

5. (3 分) (2013•苏州) 世界文化遗产长城总长约为 6700000m, 若将 6700000 用科学记数法表示为 6.7×10^n (n 是正整数), 则 n 的值为 ()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：将 6700000 用科学记数法表示为 6.7×10^6 ,

故 $n=6$.

故选 B.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

6. (3 分) (2013•苏州) 已知二次函数 $y=x^2-3x+m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴的一个交点为 $(1, 0)$, 则关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根是 ()

A. $x_1=1, x_2=-1$

B. $x_1=1, x_2=2$

C. $x_1=1, x_2=0$

D. $x_1=1, x_2=3$

考点：抛物线与 x 轴的交点.

分析：关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根就是二次函数 $y=x^2-3x+m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴的两个交点的横坐标.

解答：解： $\because$ 二次函数的解析式是 $y=x^2-3x+m$ (m 为常数),

$\therefore$ 该抛物线的对称轴是: $x=\frac{3}{2}$.

又 $\because$ 二次函数 $y=x^2-3x+m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴的一个交点为 $(1, 0)$,

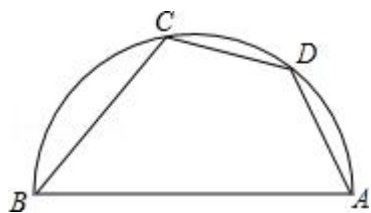
$\therefore$ 根据抛物线的对称性质知，该抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标是 $(2, 0)$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根分别是: $x_1=1, x_2=2$.

故选 B.

点评：本题考查了抛物线与 x 轴的交点. 解答该题时，也可以利用代入法求得 m 的值，然后来求关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根.

7. (3 分) (2013•苏州) 如图, AB 是半圆的直径, 点 D 是 AC 的中点, $\angle ABC=50^\circ$, 则 $\angle DAB$ 等于 ()



A. 55°

B. 60°

C. 65°

D. 70°

考点：圆周角定理；圆心角、弧、弦的关系.

专题：计算题.

分析：连结 BD, 由于点 D 是 AC 弧的中点, 即弧 CD=弧 AD, 根据圆周角定理得 $\angle ABD=\angle CBD$, 则 $\angle ABD=25^\circ$, 再根据直径所对的圆周角为直角得到 $\angle ADB=90^\circ$, 然后利用三角形内角和定理可计算出 $\angle DAB$ 的度数.

解答：解: 连结 BD, 如图,

$\because$ 点 D 是 AC 弧的中点, 即弧 CD=弧 AD,

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$,

而 $\angle ABC=50^\circ$,

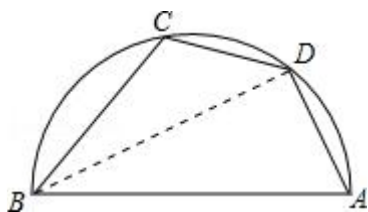
$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$,

$\because$ AB 是半圆的直径,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$,

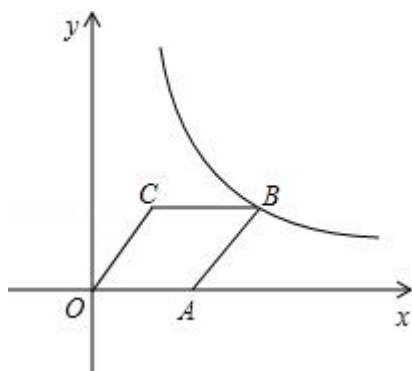
$\therefore \angle DAB=90^\circ-25^\circ=65^\circ$.

故选 C.



点评：本题考查了圆周角定理及其推论：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等；直径所对的圆周角为直角.

8. (3 分) (2013•苏州) 如图, 菱形 OABC 的顶点 C 的坐标为 (3, 4). 顶点 A 在 x 轴的正半轴上, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象经过顶点 B, 则 k 的值为 ()



A. 12

B. 20

C. 24

D. 32

考点：反比例函数综合题.

分析：过C点作 $CD \perp x$ 轴，垂足为D，根据点C坐标求出OD、CD、BC的值，进而求出B点的坐标，即可求出k的值.

解答：解：过C点作 $CD \perp x$ 轴，垂足为D，

$\because$ 点C的坐标为(3, 4),

$\therefore OD=3, CD=4,$

$\therefore OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

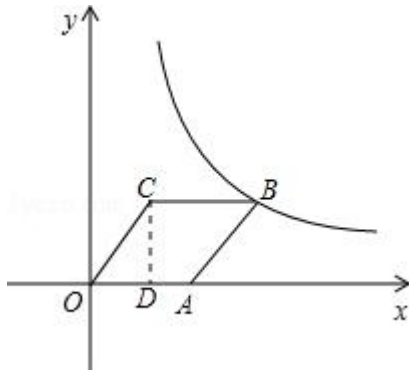
$\therefore OC=BC=5,$

$\therefore$ 点B坐标为(8, 4),

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象经过顶点B,

$\therefore k=32,$

故选D.



点评：本题主要考查反比例函数的综合题的知识点，解答本题的关键是求出点B的坐标，此题难度不大，是一道不错的习题.

9. (3分) (2013•苏州) 已知 $x - \frac{1}{x} = 3$ ，则 $4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$ 的值为()

A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{7}{2}$

考点：代数式求值；分式的混合运算.

专题：计算题.

分析：所求式子后两项提取公因式变形后，将已知等式去分母变形后代入计算即可求出值.

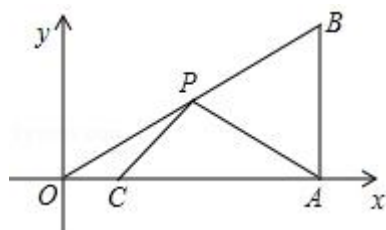
解答：解： $\because x - \frac{1}{x} = 3$ ，即 $x^2 - 3x = 1$,

$\therefore$ 原式 $= 4 - \frac{1}{2}(x^2 - 3x) = 4 - \frac{1-7}{2}.$

故选D.

点评：此题考查了代数式求值，将已知与所求式子进行适当的变形是解本题的关键.

10. (3分) (2013•苏州) 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上. 顶点 B 的坐标为 $(3, \sqrt{3})$, 点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 则 $PA+PC$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{31}}{2}$ C. $\frac{3+\sqrt{19}}{2}$ D. $2\sqrt{7}$

考点: 轴对称-最短路线问题; 坐标与图形性质.

分析: 作 A 关于 OB 的对称点 D , 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP , 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N , 则此时 $PA+PC$ 的值最小, 求出 AM , 求出 AD , 求出 DN 、 CN , 根据勾股定理求出 CD , 即可得出答案.

解答: 解: 作 A 关于 OB 的对称点 D , 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP , 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N , 则此时 $PA+PC$ 的值最小,

$$\therefore DP=PA,$$

$$\therefore PA+PC=PD+PC=CD,$$

$$\therefore B(3, \sqrt{3}),$$

$$\therefore AB=\sqrt{3}, OA=3, \angle B=60^\circ, \text{ 由勾股定理得: } OB=2\sqrt{3},$$

$$\text{由三角形面积公式得: } \frac{1}{2} \times OA \times AB = \frac{1}{2} \times OB \times AM,$$

$$\therefore AM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AD = 2 \times \frac{3}{2} = 3,$$

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAM = 60^\circ,$$

$$\therefore DN \perp OA,$$

$$\therefore \angle NDA = 30^\circ,$$

$$\therefore AN = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}, \text{ 由勾股定理得: } DN = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

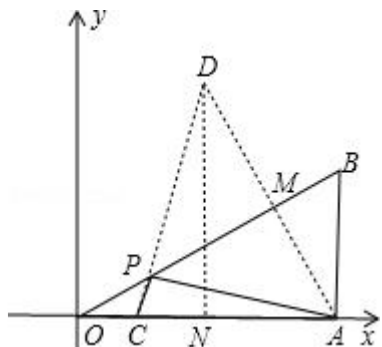
$$\therefore C(\frac{1}{2}, 0),$$

$$\therefore CN = 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 1,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DNC \text{ 中, 由勾股定理得: } DC = \sqrt{1^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{31}}{2},$$

即 $PA+PC$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{31}}{2}$,

故选 B.



点评: 本题考查了三角形的内角和定理, 轴对称 - 最短路线问题, 勾股定理, 含 30° 度角的直角三角形性质的应用, 关键是求出 P 点的位置, 题目比较好, 难度适中.

二、填空题: 本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案直接填在答题卡相对应位置上.

11. (3 分) (2013•苏州) 计算: $a^4 \div a^2 = \underline{a^2}$.

考点: 同底数幂的除法.

专题: 计算题.

分析: 根据同底数幂的除法法则: 底数不变, 指数相减, 进行运算即可.

解答: 解: 原式 $= a^{4-2} = a^2$.

故答案为: a^2 .

点评: 此题考查了同底数幂的除法运算, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握同底数幂的除法法则.

12. (3 分) (2013•苏州) 分解因式: $a^2+2a+1 = \underline{(a+1)^2}$.

考点: 因式分解-运用公式法.

分析: 符合完全平方公式的结构特点, 利用完全平方公式分解因式即可.

解答: 解: $a^2+2a+1 = (a+1)^2$.

点评: 本题主要考查利用完全平方公式分解因式, 熟记公式结构是解题的关键.

13. (3 分) (2013•苏州) 方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{5}{2x+1}$ 的解为 $\underline{x=2}$.

考点: 解分式方程.

专题: 计算题.

分析: 方程两边都乘以最简公分母 $(x-1)(2x+1)$ 把分式方程化为整式方程, 求解后进行检验.

解答: 解: 方程两边都乘以 $(x-1)(2x+1)$ 得,

$$2x+1=5(x-1),$$

解得 $x=2$,

检验: 当 $x=2$ 时, $(x-1)(2x+1) = (2-1) \times (2 \times 2+1) = 5 \neq 0$,

所以，原方程的解是 $x=2$.

故答案为: $x=2$.

点评: 本题考查了解分式方程, (1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解.

(2) 解分式方程一定要注意要验根.

14. (3 分) (2013•苏州) 任意抛掷一枚质地均匀的正方体骰子 1 次, 骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数, 掷得面朝上的点数大于 4 的概率为 $\frac{1}{3}$.

考点: 概率公式.

分析: 根据掷得面朝上的点数大于 4 情况有 2 种, 进而求出概率即可.

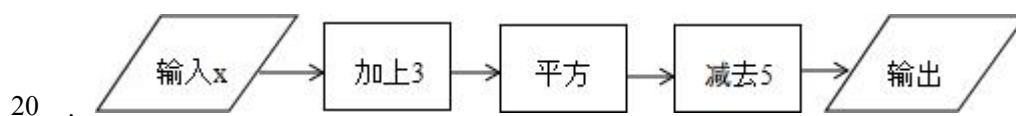
解答: 解: 掷一枚均匀的骰子时, 有 6 种情况, 出现点数大于 4 的情况有 2 种,

掷得面朝上的点数大于 4 的概率是: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

点评: 此题考查了概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (3 分) (2013•苏州) 按照如图所示的操作步骤, 若输入 x 的值为 2, 则输出的值为 20.



考点: 代数式求值.

专题: 图表型.

分析: 根据运算程序写出算式, 然后代入数据进行计算即可得解.

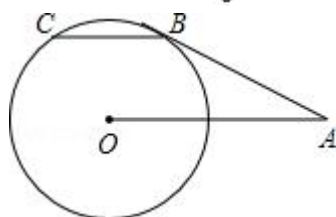
解答: 解: 由图可知, 运算程序为 $(x+3)^2 - 5$,

当 $x=2$ 时, $(x+3)^2 - 5 = (2+3)^2 - 5 = 25 - 5 = 20$.

故答案为: 20.

点评: 本题考查了代数式求值, 是基础题, 根据图表准确写出运算程序是解题的关键.

16. (3 分) (2013•苏州) 如图, AB 切 $\odot O$ 于点 B , $OA=2$, $\angle OAB=30^\circ$, 弦 $BC \parallel OA$, 劣弧 $\widehat{BC}$ 的弧长为 $\frac{1}{3}\pi$. (结果保留 π)



考点: 切线的性质; 含 30° 度角的直角三角形; 弧长的计算.

专题：计算题.

分析：连接 OB, OC, 由 AB 为圆的切线, 利用切线的性质得到三角形 AOB 为直角三角形, 根据 30 度所对的直角边等于斜边的一半, 由 OA 求出 OB 的长, 且 $\angle AOB$ 为 60 度, 再由 BC 与 OA 平行, 利用两直线平行内错角相等得到 $\angle OBC$ 为 60 度, 又 $OB=OC$, 得到三角形 BOC 为等边三角形, 确定出 $\angle BOC$ 为 60 度, 利用弧长公式即可求出劣弧 BC 的长.

解答：解：连接 OB, OC,

$\because AB$ 为圆 O 的切线,

$\therefore \angle ABO=90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABO$ 中, $OA=2$, $\angle OAB=30^\circ$,

$\therefore OB=1$, $\angle AOB=60^\circ$,

$\because BC \parallel OA$,

$\therefore \angle OBC=\angle AOB=60^\circ$,

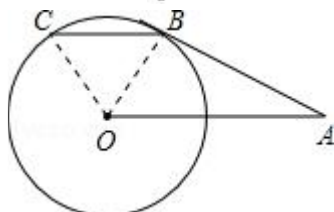
又 $OB=OC$,

$\therefore \triangle BOC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle BOC=60^\circ$,

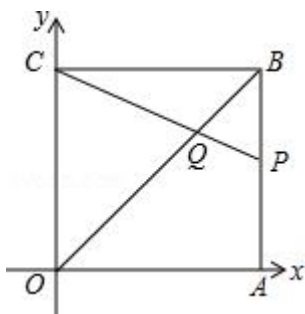
则劣弧 $\widehat{BC}$ 长为 $\frac{60\pi \times 1}{180} = \frac{1}{3}\pi$.

故答案为: $\frac{1}{3}\pi$



点评：此题考查了切线的性质, 含 30 度直角三角形的性质, 以及弧长公式, 熟练掌握切线的性质是解本题的关键.

17. (3 分) (2013•苏州) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 OABC 是边长为 2 的正方形, 顶点 A、C 分别在 x, y 轴的正半轴上. 点 Q 在对角线 OB 上, 且 $QO=OC$, 连接 CQ 并延长 CQ 交边 AB 于点 P. 则点 P 的坐标为 $(2, 4-2\sqrt{2})$.



考点：相似三角形的判定与性质；坐标与图形性质；正方形的性质.

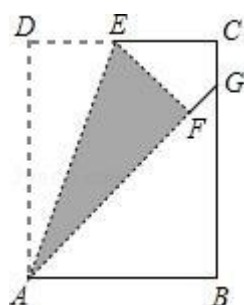
分析：根据正方形的对角线等于边长的 $\sqrt{2}$ 倍求出 OB, 再求出 BQ, 然后求出 $\triangle BPQ$ 和 $\triangle OCQ$ 相似, 根据相似三角形对应边成比例列式求出 BP 的长, 再求出 AP, 即可得到点 P 的坐标.

解答：解： $\because$ 四边形 OABC 是边长为 2 的正方形,

$$\begin{aligned}
&\therefore OA=OC=2, \quad OB=2\sqrt{2}, \\
&\therefore QO=OC, \\
&\therefore BQ=OB-OQ=2\sqrt{2}-2, \\
&\therefore \text{正方形 } OABC \text{ 的边 } AB \parallel OC, \\
&\therefore \triangle BPQ \sim \triangle OCQ, \\
&\therefore \frac{BP}{OC} = \frac{BQ}{OQ}, \\
&\text{即 } \frac{BP}{2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}, \\
&\text{解得 } BP=2\sqrt{2}-2, \\
&\therefore AP=AB-BP=2-(2\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}, \\
&\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2, 4-2\sqrt{2}). \\
&\text{故答案为: } (2, 4-2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质, 正方形的对角线等于边长的 $\sqrt{2}$ 倍的性质, 以及坐标与图形的性质, 比较简单, 利用相似三角形的对应边成比例求出 BP 的长是解题的关键.

18. (3 分) (2013•苏州) 如图, 在矩形 ABCD 中, 点 E 是边 CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠后得到 $\triangle AFE$, 且点 F 在矩形 ABCD 内部. 将 AF 延长交边 BC 于点 G. 若 $\frac{CG}{GB} = \frac{1}{k}$, 则 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{k+1}}{2}$ (用含 k 的代数式表示).



考点: 矩形的性质; 翻折变换 (折叠问题).

分析: 根据中点定义可得 $DE=CE$, 再根据翻折的性质可得 $DE=EF$, $AF=AD$, $\angle AFE=\angle D=90^\circ$, 从而得到 $CE=EF$, 连接 EG, 利用“HL”证明 $\text{Rt}\triangle ECG$ 和 $\text{Rt}\triangle EFG$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $CG=FG$, 设 $CG=a$, 表示出 GB, 然后求出 BC, 再根据矩形的对边相等可得 $AD=BC$, 从而求出 AF, 再求出 AG, 然后利用勾股定理列式求出 AB, 再求比值即可.

解答: 解: $\because$ 点 E 是边 CD 的中点,

$$\therefore DE=CE,$$

$\because$ 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠后得到 $\triangle AFE$,

$$\therefore DE=EF, \quad AF=AD, \quad \angle AFE=\angle D=90^\circ,$$

$$\therefore CE=EF,$$

连接 EG,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ECG \text{ 和 } \text{Rt}\triangle EFG \text{ 中, } \begin{cases} EG=EG \\ CE=EF \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ECG \cong \text{Rt}\triangle EFG$ (HL),

$\therefore CG=FG$,

设 $CG=a$, $\therefore \frac{CG}{GB} = \frac{1}{k}$,

$\therefore GB=ka$,

$\therefore BC=CG+BG=a+ka=a(k+1)$,

在矩形 $ABCD$ 中, $AD=BC=a(k+1)$,

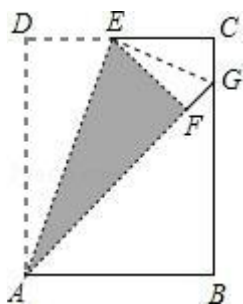
$\therefore AF=a(k+1)$,

$AG=AF+FG=a(k+1)+a=a(k+2)$,

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, $AB = \sqrt{AG^2 - BG^2} = \sqrt{[a(k+2)]^2 - (ka)^2} = 2a\sqrt{k+1}$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{a(k+1)}{2a\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{k+1}}{2}$.



点评: 本题考查了矩形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理的应用, 以及翻折变换的性质, 熟记性质并作辅助线构造出全等三角形是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 76 分. 把解答过程写在答题卡相对应的位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明. 作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔.)

19. (5 分) (2013•苏州) 计算: $(-1)^3 + (\sqrt{3}+1)^0 + \sqrt{9}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂.

分析: 按照实数的运算法则依次计算, 注意: $(-1)^3 = -1$, $(\sqrt{3}+1)^0 = 1$, $\sqrt{9} = 3$.

解答: 解: $(-1)^3 + (\sqrt{3}+1)^0 + \sqrt{9}$
 $= -1 + 1 + 3$
 $= 3$.

点评: 此题主要考查了实数运算, 本题需注意的知识点是: 负数的立方是负数, 任何不等于 0 的数的 0 次幂是 1.

20. (5 分) (2013•苏州) 解不等式组: $\begin{cases} x-2 \geq 1 \\ 2(x-1) < x+3 \end{cases}$.

考点: 解一元一次不等式组.

分析: 首先分别解出两个不等式的解集, 再根据: 大小小大取中间确定不等式组的解集即可.

解答:

$$\text{解: } \begin{cases} x-2 \geq 1 & \text{①} \\ 2(x-1) < x+3 & \text{②} \end{cases}$$

由①得: $x \geq 3$,

由②得: $x < 5$,

故不等式组的解集为: $3 \leq x < 5$.

点评: 此题主要考查了解一元一次不等式组, 关键是正确解出两个不等式, 掌握解集的规律: 同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到.

21. (5分) (2013•苏州) 先化简, 再求值: $\frac{x-2}{x-1} \div (x+1 - \frac{3}{x-1})$, 其中 $x = \sqrt{3} - 2$.

考点: 分式的化简求值.

分析: 将原式括号中各项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 整理后再利用平方差公式分解因式, 然后利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算, 约分得到最简结果, 即可得到原式的值.

解答:

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{x-2}{x-1} \div (x+1 - \frac{3}{x-1}) \\ &= \frac{x-2}{x-1} \div [\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1}] \\ &= \frac{x-2}{x-1} \div \frac{x^2-4}{x-1} \\ &= \frac{x-2}{x-1} \times \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x+2} \\ \text{当 } x &= \sqrt{3} - 2 \text{ 时,} \\ \text{原式} &= \frac{1}{\sqrt{3}-2+2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

点评: 此题考查了分式的化简求值, 分式的加减运算关键是通分, 通分的关键是找最简公分母; 分式的乘除运算关键是约分, 约分的关键是找出公因式, 约分时, 分式的分子分母出现多项式, 应将多项式分解因式后再约分.

22. (6分) (2013•苏州) 苏州某旅行社组织甲乙两个旅游团分别到西安、北京旅行, 已知这两旅游团共有 55 人, 甲旅游团的人数比乙旅游团的人数的 2 倍少 5 人. 问甲、乙两个旅游团个有多少人?

考点: 二元一次方程组的应用.

分析: 设甲、乙两个旅游团个有 x 人、 y 人, 根据题意可得等量关系: 甲团+乙团=55 人; 甲团人数=乙团人数 $\times 2 - 5$, 根据等量关系列出方程组, 再解即可.

解答: 解: 设甲、乙两个旅游团个有 x 人、 y 人, 由题意得:

$$\begin{cases} x+y=55 \\ x=2y-5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=35 \\ y=20 \end{cases}$$

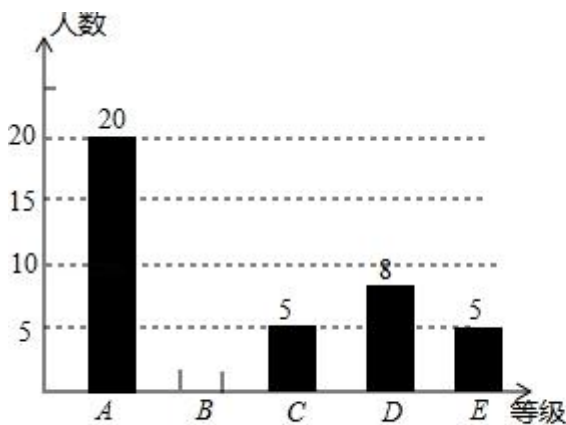
答：甲、乙两个旅游团个有 35 人、20 人.

点评：此题主要考查了二元一次方程组的应用，关键是正确理解题意，抓住题目中的关键语句，找出等量关系，列出方程组.

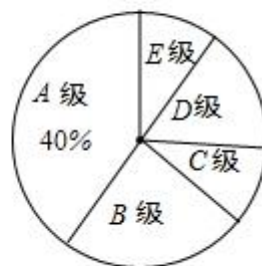
23. (6 分) (2013•苏州) 某企业 500 名员工参加安全生产知识测试，成绩记为 A, B, C, D, E 共 5 个等级，为了解本次测试的成绩 (等级) 情况，现从中随机抽取部分员工的成绩 (等级)，统计整理并制作了如下的统计图：

(1) 求这次抽样调查的样本容量，并补全图①；

(2) 如果测试成绩 (等级) 为 A, B, C 级的定位优秀，请估计该企业参加本次安全生产知识测试成绩 (等级) 达到优秀的员工的总人数.



(图①)



(图②)

考点：条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析：(1) 抽查人数的样本容量可由 A 级所占的比例 40%，根据总数=某级人数÷比例来计算；可由总数减去 A、C、D、E 的人数求得 B 级的人数，再补全条形统计图；

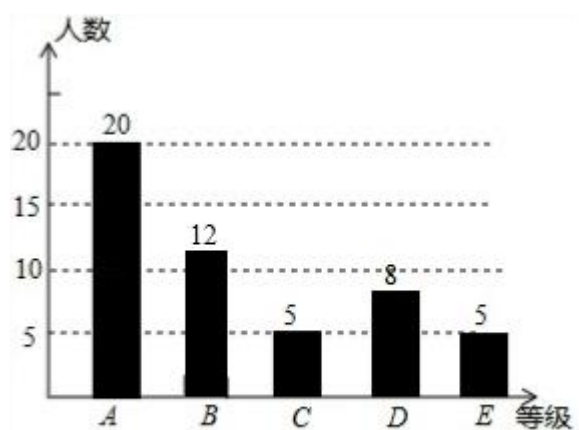
(2) 用样本估计总体，用总人数×达到优秀的员工的百分比，就是要求的结果.

解答：解：(1) 依题意有：20÷40%=50 (人)，

则这次抽样调查的样本容量为 50.

50 - 20 - 5 - 8 - 5 = 12 (人).

补全图①为：



(图①)

(2) 依题意有 $500 \times \frac{37}{50} = 370$ (人).

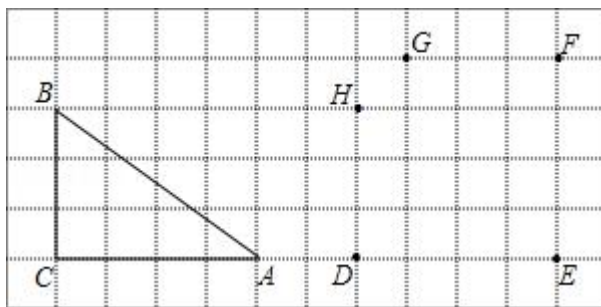
答: 估计该企业参加本次安全生产知识测试成绩 (等级) 达到优秀的员工的总人数为 370 人.

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 会画条形统计图. 也考查了用样本估计总体.

24. (7 分) (2013•苏州) 如图, 在方格纸中, $\triangle ABC$ 的三个顶点及 D, E, F, G, H 五个点分别位于小正方形的顶点上.

(1) 现以 D, E, F, G, H 中的三个点为顶点画三角形, 在所画的三角形中与 $\triangle ABC$ 不全等但面积相等的三角形是 $\triangle DFG$ 或 $\triangle DHF$ (只需要填一个三角形)

(2) 先从 D, E 两个点中任意取一个点, 再从 F, G, H 三个点中任意取两个不同的点, 以所取得这三个点为顶点画三角形, 求所画三角形与 $\triangle ABC$ 面积相等的概率 (用画树状图或列表格求解).



考点: 作图—应用与设计作图; 列表法与树状图法.

分析: (1) 根据格点之间的距离得出 $\triangle ABC$ 的面积进而得出三角形中与 $\triangle ABC$ 不全等但面积相等的三角形;

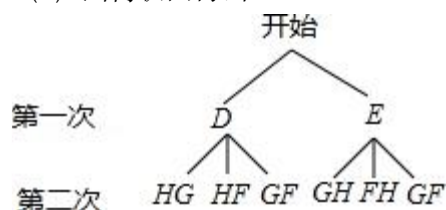
(2) 利用树状图得出所有的结果, 进而根据概率公式求出即可.

解答: 解: (1) $\because \triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,

只有 $\triangle DFG$ 或 $\triangle DHF$ 的面积也为 6 且不与 $\triangle ABC$ 全等,

$\therefore$ 与 $\triangle ABC$ 不全等但面积相等的三角形是: $\triangle DFG$ 或 $\triangle DHF$;

(2) 画树状图得出:



由树状图可知共有 6 种可能的结果, 其中与 $\triangle ABC$ 面积相等的有 3 种, 即 $\triangle DHF$, $\triangle DGF$, $\triangle EGF$,

故所画三角形与 $\triangle ABC$ 面积相等的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

答: 所画三角形与 $\triangle ABC$ 面积相等的概率为 $\frac{1}{2}$.

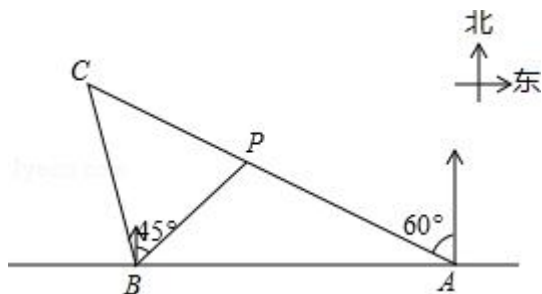
故答案为: $\triangle DFG$ 或 $\triangle DHF$.

点评: 此题主要考查了三角形面积求法以及树状图法求概率, 根据已知得出三角形面积是解题关键.

25. (7 分) (2013·苏州) 如图, 在一笔直的海岸线 l 上有 AB 两个观测站, A 在 B 的正东方向, $AB=2$ (单位: km). 有一艘小船在点 P 处, 从 A 测得小船在北偏西 60° 的方向, 从 B 测得小船在北偏东 45° 的方向.

(1) 求点 P 到海岸线 l 的距离;

(2) 小船从点 P 处沿射线 AP 的方向航行一段时间后, 到点 C 处, 此时, 从 B 测得小船在北偏西 15° 的方向. 求点 C 与点 B 之间的距离. (上述两小题的结果都保留根号)



考点: 解直角三角形的应用-方向角问题.

分析: (1) 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D , 设 $PD=x$ km, 先解 $Rt\triangle PBD$, 用含 x 的代数式表示 BD , 再解 $Rt\triangle PAD$, 用含 x 的代数式表示 AD , 然后根据 $BD+AD=AB$, 列出关于 x 的方程, 解方程即可;

(2) 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F , 先解 $Rt\triangle ABF$, 得出 $BF = \frac{1}{2}AB = 1$ km, 再解 $Rt\triangle BCF$, 得出 $BC = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}$ km.

解答: 解: (1) 如图, 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D . 设 $PD=x$ km.

在 $Rt\triangle PBD$ 中, $\angle BDP=90^\circ$, $\angle PBD=90^\circ - 45^\circ=45^\circ$,

$\therefore BD=PD=x$ km.

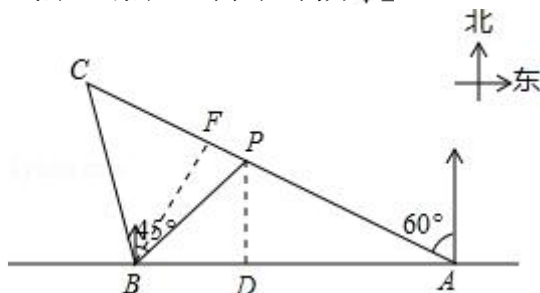
在 $Rt\triangle PAD$ 中, $\angle ADP=90^\circ$, $\angle PAD=90^\circ - 60^\circ=30^\circ$,

$\therefore AD=\sqrt{3}PD=\sqrt{3}x$ km.

$\therefore BD+AD=AB$,

$\therefore x + \sqrt{3}x = 2$,
 $x = \sqrt{3} - 1$,
 $\therefore$ 点 P 到海岸线 l 的距离为 $(\sqrt{3} - 1)$ km;

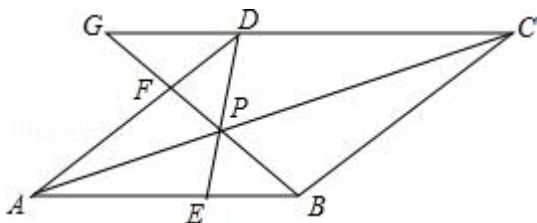
(2) 如图, 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F.
 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $\angle AFB = 90^\circ$, $\angle BAF = 30^\circ$,
 $\therefore BF = \frac{1}{2}AB = 1\text{km}$.
 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 45^\circ$.
 在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $\angle BFC = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$,
 $\therefore BC = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}\text{km}$,
 $\therefore$ 点 C 与点 B 之间的距离为 $\sqrt{2}\text{km}$.



点评: 本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题, 难度适中. 通过作辅助线, 构造直角三角形是解题的关键.

26. (8分) (2013•苏州) 如图, 点 P 是菱形 ABCD 对角线 AC 上的一点, 连接 DP 并延长 DP 交边 AB 于点 E, 连接 BP 并延长交边 AD 于点 F, 交 CD 的延长线于点 G.

- (1) 求证: $\triangle APB \cong \triangle APD$;
 (2) 已知 $DF:FA=1:2$, 设线段 DP 的长为 x, 线段 PF 的长为 y.
 ①求 y 与 x 的函数关系式;
 ②当 $x=6$ 时, 求线段 FG 的长.



考点: 相似三角形的判定与性质; 全等三角形的判定与性质; 菱形的性质.

分析: (1) 根据菱形的性质得出 $\angle DAP = \angle PAB$, $AD = AB$, 再利用全等三角形的判定得出 $\triangle APB \cong \triangle APD$;

(2) ①首先证明 $\triangle DFP \cong \triangle BEP$, 进而得出 $\frac{DG}{AB} = \frac{1}{2}$, $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{3}$, 进而得出 $\frac{DP}{PE} = \frac{DG}{EB}$, 即 $\frac{3}{2} = \frac{x}{y}$,

即可得出答案;

②根据①中所求得 $PF = PE = 4$, $DP = PB = 6$, 进而得出 $\frac{GF}{BF} = \frac{DG}{AB} = \frac{1}{2}$, 求出即可.

解答: (1) 证明: $\because$ 点 P 是菱形 ABCD 对角线 AC 上的一点,

$$\therefore \angle DAP = \angle PAB, AD = AB,$$

$\therefore$ 在 $\triangle APB$ 和 $\triangle APD$ 中

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAP = \angle PAB, \\ AP = AP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle APD \text{ (SAS)};$$

(2) 解: ① $\because \triangle APB \cong \triangle APD$,

$$\therefore DP = PB, \angle ADP = \angle ABP,$$

$\therefore$ 在 $\triangle DFP$ 和 $\triangle BEP$ 中,

$$\begin{cases} \angle FDP = \angle EBP \\ DP = BP \\ \angle FPD = \angle EPB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DFP \cong \triangle BEP \text{ (ASA)},$$

$$\therefore PF = PE, DF = BE,$$

$$\therefore GD \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{GD}{AB},$$

$$\therefore DF : FA = 1 : 2,$$

$$\therefore \frac{DG}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{BE}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{DG}{BE} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{DF}{PE} = \frac{DG}{EB}, \text{ 即 } \frac{3-x}{2} = \frac{x}{y},$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x;$$

$$\text{② 当 } x=6 \text{ 时, } y = \frac{2}{3} \times 6 = 4,$$

$$\therefore PF = PE = 4, DP = PB = 6,$$

$$\therefore \frac{GF}{BF} = \frac{DG}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{FG}{10} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } FG = 5,$$

故线段 FG 的长为 5.

点评: 此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质等知识, 根据平行

关系得出 $\frac{DG}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{BE}{AB} = \frac{1}{3}$ 是解题关键.

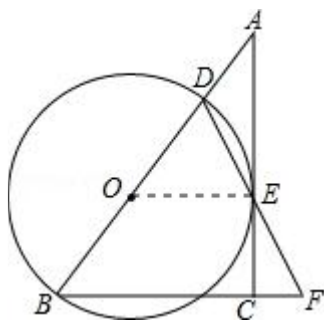
27. (8分) (2013•苏州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是 AB 边上一点, 以 BD 为直径的 $\odot O$ 与边 AC 相切于点 E , 连接 DE 并延长 DE 交 BC 的延长线于点 F .

(1) 求证: $BD = BF$;

$$\therefore \cos \angle AOE = \cos B, \text{ 即 } \frac{OE}{OA} = \frac{3}{5}, \text{ 即 } \frac{\frac{3x+1}{2}}{\frac{7x-1}{2}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得: } x = \frac{4}{3},$$

$$\text{则圆 } O \text{ 的半径为 } \frac{3x+1}{2} = \frac{5}{2}.$$



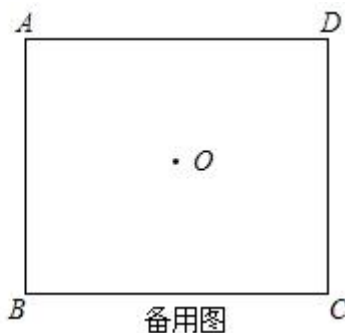
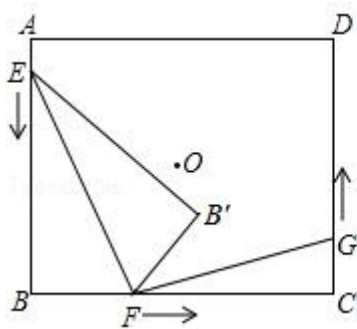
点评: 此题考查了切线的性质, 锐角三角函数定义, 以及圆周角定理, 熟练掌握切线的性质是解本题的关键.

28. (9分) (2013•苏州) 如图, 点 O 为矩形 ABCD 的对称中心, AB=10cm, BC=12cm, 点 E、F、G 分别从 A、B、C 三点同时出发, 沿矩形的边按逆时针方向匀速运动, 点 E 的运动速度为 1cm/s, 点 F 的运动速度为 3cm/s, 点 G 的运动速度为 1.5cm/s, 当点 F 到达点 C (即点 F 与点 C 重合) 时, 三个点随之停止运动. 在运动过程中, $\triangle EBF$ 关于直线 EF 的对称图形是 $\triangle EBF'$. 设点 E、F、G 运动的时间为 t (单位: s).

(1) 当 $t = \underline{2.5}$ s 时, 四边形 EBF'F 为正方形;

(2) 若以点 E、B、F 为顶点的三角形与以点 F、C、G 为顶点的三角形相似, 求 t 的值;

(3) 是否存在实数 t, 使得点 B' 与点 O 重合? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



考点: 相似形综合题.

分析: (1) 利用正方形的性质, 得到 $BE=BF$, 列一元一次方程求解即可;

(2) $\triangle EBF$ 与 $\triangle FCG$ 相似, 分两种情况, 需要分类讨论, 逐一分析计算;

(3) 本问为存在型问题. 假设存在, 则可以分别求出在不同条件下的 t 值, 它们互相矛盾, 所以不存在.

解答: 解: (1) 若四边形 EBF'F 为正方形, 则 $BE=BF$,

即: $10 - t = 3t$,
解得 $t = 2.5$;

(2) 分两种情况, 讨论如下:

①若 $\triangle EBF \sim \triangle FCG$,

$$\text{则有 } \frac{EB}{FC} = \frac{BF}{CG}, \text{ 即 } \frac{10-t}{12-3t} = \frac{3t}{1.5t},$$

解得: $t = 2.8$;

②若 $\triangle EBF \sim \triangle GCF$,

$$\text{则有 } \frac{EB}{CG} = \frac{BF}{FC}, \text{ 即 } \frac{10-t}{1.5t} = \frac{3t}{12-3t},$$

解得: $t = -14 - 2\sqrt{69}$ (不合题意, 舍去) 或 $t = -14 + 2\sqrt{69}$.

$\therefore$ 当 $t = 2.8$ s 或 $t = (-14 + 2\sqrt{69})$ s 时, 以点 E、B、F 为顶点的三角形与以点 F、C、G 为顶点的三角形相似.

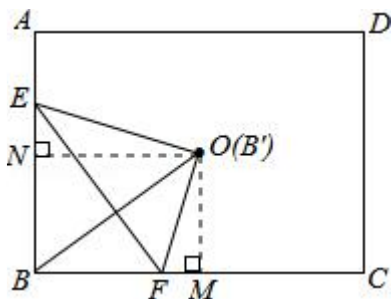
(3) 假设存在实数 t , 使得点 B' 与点 O 重合.

如图, 过点 O 作 $OM \perp BC$ 于点 M, 则在 $\text{Rt}\triangle OFM$ 中, $OF = BF = 3t$, $FM = \frac{1}{2}BC - BF = 6 - 3t$, $OM = 5$,

由勾股定理得: $OM^2 + FM^2 = OF^2$,

$$\text{即: } 5^2 + (6 - 3t)^2 = (3t)^2$$

$$\text{解得: } t = \frac{61}{36};$$



过点 O 作 $ON \perp AB$ 于点 N, 则在 $\text{Rt}\triangle OEN$ 中, $OE = BE = 10 - t$, $EN = BE - BN = 10 - t - 5 = 5 - t$, $ON = 6$,

由勾股定理得: $ON^2 + EN^2 = OE^2$,

$$\text{即: } 6^2 + (5 - t)^2 = (10 - t)^2$$

解得: $t = 3.9$.

$$\therefore \frac{61}{36} \neq 3.9,$$

$\therefore$ 不存在实数 t , 使得点 B' 与点 O 重合.

点评: 本题为运动型综合题, 考查了矩形性质、轴对称、相似三角形的判定性质、勾股定理、解方程等知识点. 题目并不复杂, 但需要仔细分析题意, 认真作答. 第 (2) 问中, 需要分类讨论, 避免漏解; 第 (3) 问是存在型问题, 可以先假设存在, 然后通过推导出互相矛盾的结论, 从而判定不存在.

29. (10分) (2013•苏州) 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 是常数, 且 $c < 0$) 与 x 轴分别交于点 A, B (点 A 位于点 B 的左侧), 与 y 轴的负半轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

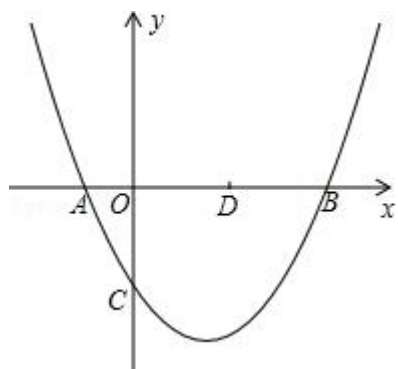
(1) $b = \underline{\frac{1}{2} + c}$, 点 B 的横坐标为 $\underline{-2c}$ (上述结果均用含 c 的代数式表示);

(2) 连接 BC , 过点 A 作直线 $AE \parallel BC$, 与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 交于点 E , 点 D 是 x 轴上的一点, 其坐标为 $(2, 0)$. 当 C, D, E 三点在同一直线上时, 求抛物线的解析式;

(3) 在 (2) 条件下, 点 P 是 x 轴下方的抛物线上的一个动点, 连接 PB, PC , 设所得 $\triangle PBC$ 的面积为 S .

①求 S 的取值范围;

②若 $\triangle PBC$ 的面积 S 为整数, 则这样的 $\triangle PBC$ 共有 11 个.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 将 $A(-1, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, 可以得出 $b = \frac{1}{2} + c$; 根据一元二次方程根与系数的

关系, 得出 $-1 \cdot x_B = \frac{c}{\frac{1}{2}}$, 即 $x_B = -2c$;

(2) 由 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, 求出此抛物线与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0, c)$, 则可设直线 BC

的解析式为 $y = kx + c$, 将 B 点坐标代入, 运用待定系数法求出直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + c$;

由 $AE \parallel BC$, 设直线 AE 得到解析式为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 将点 A 的坐标代入, 运用待定系数法求

出直线 AE 得到解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; 解方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2} + c)x + c \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$, 求出点 E 坐标为

$(1 - 2c, 1 - c)$, 将点 E 坐标代入直线 CD 的解析式 $y = -\frac{c}{2}x + c$, 求出 $c = -2$, 进而得到

抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$;

(3) ①分两种情况进行讨论: (I) 当 $-1 < x < 0$ 时, 由 $0 < S < S_{\triangle ACB}$, 易求 $0 < S < 5$; (II)

当 $0 < x < 4$ 时, 过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G, 交 CB 于点 F. 设点 P 坐标为 $(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2)$, 则点 F 坐标为 $(x, \frac{1}{2}x - 2)$, $PF = PG - GF = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, $S = \frac{1}{2}PF \cdot OB = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$, 根据二次函数的性质求出 $S_{\text{最大值}} = 4$, 即 $0 < S \leq 4$. 则 $0 < S < 5$;
 ②由 $0 < S < 5$, S 为整数, 得出 $S = 1, 2, 3, 4$. 分两种情况进行讨论: (I) 当 $-1 < x < 0$ 时, 根据 $\triangle PBC$ 中 BC 边上的高 h 小于 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高 $AC = \sqrt{5}$, 得出满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 4 个; (II) 当 $0 < x < 4$ 时, 由于 $S = -x^2 + 4x$, 根据一元二次方程根的判别式, 得出满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 7 个; 则满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 $4 + 7 = 11$ 个.

解答:

解: (1) $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 过点 A $(-1, 0)$,

$$\therefore 0 = \frac{1}{2} \times (-1)^2 + b \times (-1) + c,$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} + c,$$

$\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴分别交于点 A $(-1, 0)$ 、B $(x_B, 0)$ (点 A 位于点 B 的左侧),

$\therefore -1$ 与 x_B 是一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2 + bx + c = 0$ 的两个根,

$$\therefore -1 \cdot x_B = -\frac{c}{\frac{1}{2}},$$

$\therefore x_B = -2c$, 即点 B 的横坐标为 $-2c$;

(2) $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴的负半轴交于点 C,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = c$, 即点 C 坐标为 $(0, c)$.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + c$,

$\because B(-2c, 0)$,

$\therefore -2kc + c = 0$,

$\because c \neq 0$,

$$\therefore k = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + c$.

$\because AE \parallel BC$,

$\therefore$ 可设直线 AE 得到解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + m$,

$\because$ 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times (-1) + m = 0, \text{ 解得 } m = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 直线 AE 得到解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2}+c)x + c \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1-2c \\ y_2 = 1-c \end{cases},$$

∴点 E 坐标为 $(1-2c, 1-c)$.

∴点 C 坐标为 $(0, c)$, 点 D 坐标为 $(2, 0)$,

∴直线 CD 的解析式为 $y = -\frac{c}{2}x + c$.

∵C, D, E 三点在同一直线上,

$$\therefore 1-c = -\frac{c}{2} \times (1-2c) + c,$$

$$\therefore 2c^2 + 3c - 2 = 0,$$

$$\therefore c_1 = \frac{1}{2} \text{ (与 } c < 0 \text{ 矛盾, 舍去)}, c_2 = -2,$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} + c = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2;$$

$$(3) \text{①设点 P 坐标为 } (x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2).$$

∵点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 B 坐标为 $(4, 0)$, 点 C 坐标为 $(0, -2)$,

∴AB=5, OC=2, 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$.

分两种情况:

(I) 当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < S < S_{\triangle ACB}$.

$$\therefore S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 5,$$

$$\therefore 0 < S < 5;$$

(II) 当 $0 < x < 4$ 时, 过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G, 交 CB 于点 F.

$$\therefore \text{点 F 坐标为 } (x, \frac{1}{2}x - 2),$$

$$\therefore PF = PG - GF = -(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2) + (\frac{1}{2}x - 2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,$$

$$\therefore S = S_{\triangle PFC} + S_{\triangle PFB} = \frac{1}{2}PF \cdot OB = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + 2x) \times 4 = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4,$$

∴当 $x=2$ 时, $S_{\text{最大值}}=4$,

$$\therefore 0 < S \leq 4.$$

综上可知 $0 < S < 5$;

② ∵ $0 < S < 5$, S 为整数,

$$\therefore S = 1, 2, 3, 4.$$

分两种情况:

(I) 当 $-1 < x < 0$ 时, 设 $\triangle PBC$ 中 BC 边上的高为 h.

∵点 A 的坐标为 (-1, 0), 点 B 坐标为 (4, 0), 点 C 坐标为 (0, -2),

$$\therefore AC^2=1+4=5, BC^2=16+4=20, AB^2=25,$$

$$\therefore AC^2+BC^2=AB^2, \angle ACB=90^\circ, BC \text{ 边上的高 } AC=\sqrt{5}.$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}BC \cdot h, \therefore h=\frac{2S}{BC}=\frac{2S}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}S.$$

如果 $S=1$, 那么 $h=\frac{\sqrt{5}}{5} \times 1=\frac{\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$, 此时 P 点有 1 个, $\triangle PBC$ 有 1 个;

如果 $S=2$, 那么 $h=\frac{\sqrt{5}}{5} \times 2=\frac{2\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$, 此时 P 点有 1 个, $\triangle PBC$ 有 1 个;

如果 $S=3$, 那么 $h=\frac{\sqrt{5}}{5} \times 3=\frac{3\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$, 此时 P 点有 1 个, $\triangle PBC$ 有 1 个;

如果 $S=4$, 那么 $h=\frac{\sqrt{5}}{5} \times 4=\frac{4\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$, 此时 P 点有 1 个, $\triangle PBC$ 有 1 个;

即当 $-1 < x < 0$ 时, 满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 4 个;

(II) 当 $0 < x < 4$ 时, $S = -x^2 + 4x$.

如果 $S=1$, 那么 $-x^2 + 4x = 1$, 即 $x^2 - 4x + 1 = 0$,

∵ $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, ∴ 方程有两个不相等的实数根, 此时 P 点有 2 个, $\triangle PBC$ 有 2 个;

如果 $S=2$, 那么 $-x^2 + 4x = 2$, 即 $x^2 - 4x + 2 = 0$,

∵ $\Delta = 16 - 8 = 8 > 0$, ∴ 方程有两个不相等的实数根, 此时 P 点有 2 个, $\triangle PBC$ 有 2 个;

如果 $S=3$, 那么 $-x^2 + 4x = 3$, 即 $x^2 - 4x + 3 = 0$,

∵ $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, ∴ 方程有两个不相等的实数根, 此时 P 点有 2 个, $\triangle PBC$ 有 2 个;

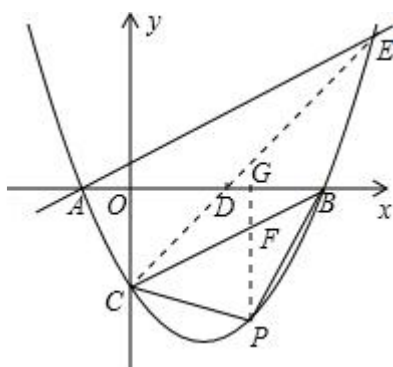
如果 $S=4$, 那么 $-x^2 + 4x = 4$, 即 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

∵ $\Delta = 16 - 16 = 0$, ∴ 方程有两个相等的实数根, 此时 P 点有 1 个, $\triangle PBC$ 有 1 个;

即当 $0 < x < 4$ 时, 满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 7 个;

综上所述, 满足条件的 $\triangle PBC$ 共有 $4+7=11$ 个.

故答案为 $\frac{1}{2}+c$, $-2c$; 11.



点评: 本题是二次函数的综合题, 其中涉及到运用待定系数法求一次函数、二次函数的解析式, 二次函数的性质, 直线平移的规律, 求两个函数的交点坐标, 三角形的面积, 一元二次方程的根的判别及根与系数的关系等知识, 综合性较强, 有一定难度, 运用数形结合、分类讨论及方程思想是解题的关键.