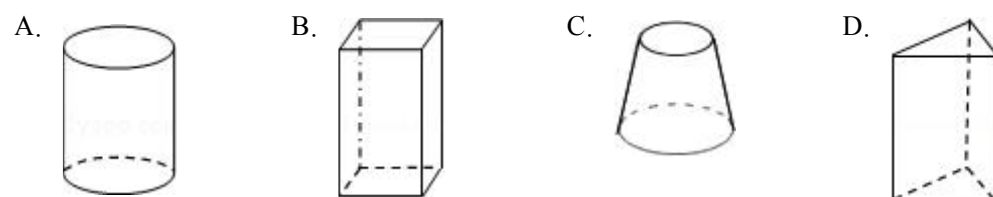


江苏省盐城市 2013 年中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项的字母填涂在答题卡相应位置上）

- (3 分) -2 、 0 、 1 、 -3 四个数中，最小的数是 ()
A. -2 B. 0 C. 1 D. -3
- (3 分) 如果收入 50 元，记作+50 元，那么支出 30 元记作 ()
A. +30 B. -30 C. +80 D. -80
- (3 分) 下面的几何体中，主视图不是矩形的是 ()



- (3 分) 若式子 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 3$ B. $x \leq 3$ C. $x > 3$ D. $x < 3$

- (3 分) 下列运算中，正确的是 ()

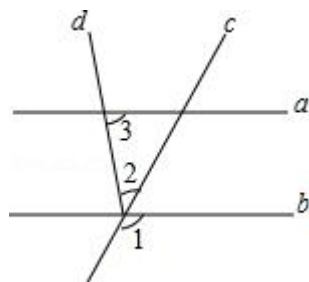
- A. $2a^2+3a^2=a^4$ B. $5a^2-2a^2=3$ C. $a^3 \times 2a^2=2a^6$ D. $3a^6 \div a^2=3a^4$

- (3 分) 某公司 10 名职工月份工资统计如下，该公司 10 名职工 5 月份工资的众数和中位数分别是 ()

工资 (元)	2000	2200	2400	2600
人数 (人)	1	3	4	2

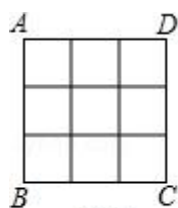
- A. 2400 元、2400 元 B. 2400 元、2300 元 C. 2200 元、2200 元 D. 2200 元、2300 元

- (3 分) 如图，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1=120^\circ$ ， $\angle 2=40^\circ$ ，则 $\angle 3$ 等于 ()

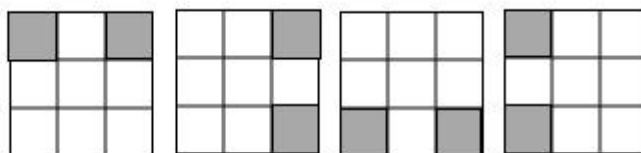


- A. 60° B. 70° C. 80° D. 90°

- (3 分) 如图①是 3×3 正方形方格，将其中两个方格涂黑，并且使涂黑后的整个图案是轴对称图形，约定绕正方形 ABCD 的中心旋转能重合的图案都视为同一种图案，例如图②中的四幅图就视为同一种图案，则得到的不同图案共有 ()



图①



图②

- A. 4 种 B. 5 种 C. 6 种 D. 7 种

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分。不需要写出解答过程, 请将答案直接写在答题卡相应位置上)

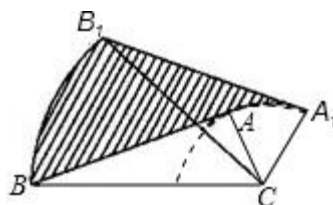
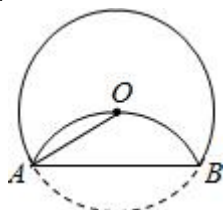
9. (3 分) 16 的平方根是_____.

10. (3 分) 因式分解: $a^2 - 9 =$ _____.

11. (3 分) 2013 年 4 月 20 日, 四川省雅安市芦山县发生 7.0 级地震. 我市爱心人士情系灾区, 积极捐款, 截止到 5 月 6 日, 市红十字会共收到捐款约 1400000 元, 这个数据用科学记数法可表示为_____元.

12. (3 分) 使分式 $\frac{x+1}{2x-1}$ 的值为零的条件是 $x =$ _____.

13. (3 分) 如图所示是一飞镖游戏板, 大圆的直径把一组同心圆分成四等份, 假设飞镖击中圆面上每一个点都是等可能的, 则飞镖落在黑色区域的概率是_____.



14. (3 分) 若 $x^2 - 2x = 3$, 则代数式 $2x^2 - 4x + 3$ 的值为_____.

15. (3 分) 写出一个过点 $(0, 3)$, 且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小的一次函数关系式: _____. (填上一个答案即可)

16. (3 分) 如图, 将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠, 使 $\widehat{AB}$ 经过圆心 O , 则 $\angle OAB =$ _____.

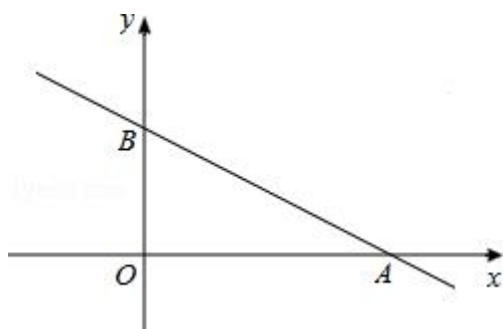
17. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $AC = 2\text{cm}$, 将 $\triangle ABC$

绕顶点 C 按顺时针方向旋转 45° 至 $\triangle A_1B_1C$ 的位置, 则线段 AB 扫过区域 (图中的阴影部分) 的面积为_____ cm^2 .

18. (3 分) 如图, 在以点 O 为原点的平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

的图象与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 点 C 在直线 AB 上, 且 $OC = \frac{1}{2}AB$,

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 C , 则所有可能的 k 值为_____.



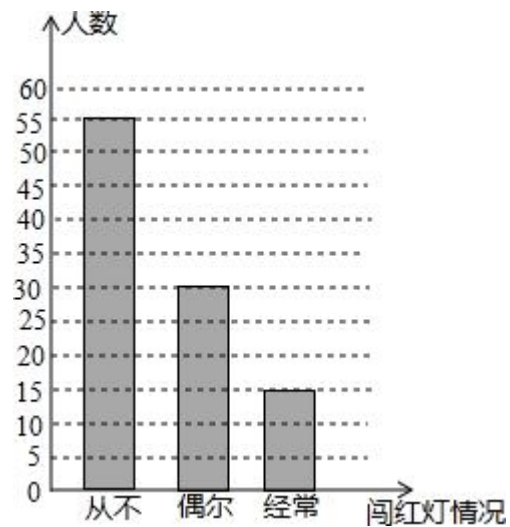
三、解答题 (本大题共有 10 小题, 共 96 分。请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、推理过程或演算步骤)

19. (8 分) (1) 计算: $2+|-3|+\tan 45^{\circ}$; (2) 解不等式: $3(x-1) > 2x+2$.

20. (8 分) 先化简, 再求值: $(x-1) \div (\frac{2}{x+1} - 1)$, 其中 x 为方程 $x^2+3x+2=0$ 的根.

21. (8 分) 市交警支队对某校学生进行交通安全知识宣传, 事先以无记名的方式随机调查了该校部分学生闯红灯的情况, 并绘制成如图所示的统计图. 请根据图中的信息回答下列问题:

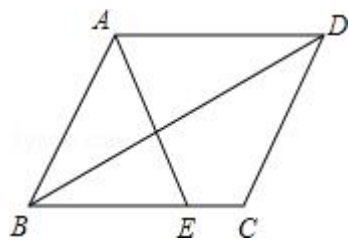
- (1) 本次共调查了多少名学生?
- (2) 如果该校共有 1500 名学生, 请你估计该校经常闯红灯的学生大约有多少人;
- (3) 针对图中反映的信息谈谈你的认识. (不超过 30 个字)



22. (8 分) 一只不透明的袋子, 装有分别标有数字 1、2、3 的三个球, 这些球除所标的数字外都相同, 搅匀后从中摸出 1 个球, 记录下数字后放回袋中并搅匀, 再从中任意摸出 1 个球, 记录下数字, 请用列表或画树状图的方法, 求出两次摸出的球上的数字之和为偶数的概率.

23. (10 分) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, E 为 BC 边上的一点, 连结 AE、BD 且 $AE=AB$.

- (1) 求证: $\angle ABE = \angle EAD$;
- (2) 若 $\angle AEB = 2\angle ADB$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.



24. (10 分) 实践操作

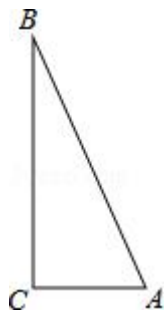
如图, $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 利用直尺和圆规按下列要求作图, 并在图中表明相应的字母. (保留作图痕迹, 不写作法)

- (1) 作 $\angle BAC$ 的平分线, 交 BC 于点 O ;
- (2) 以 O 为圆心, OC 为半径作圆.

综合运用

在你所作的图中,

- (1) AB 与 $\odot O$ 的位置关系是_____ ; (直接写出答案)
- (2) 若 $AC = 5$, $BC = 12$, 求 $\odot O$ 的半径.



25. (10 分) 水果店王阿姨到水果批发市场打算购进一种水果销售，经过还价，实际价格每千克比原来少 2 元，发现原来买这种水果 80 千克的钱，现在可买 88 千克.

(1) 现在实际购进这种水果每千克多少元?

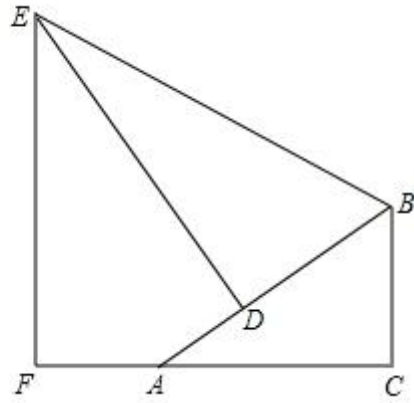
(2) 王阿姨准备购进这种水果销售，若这种水果的销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 满足如图所示的一次函数关系.

①求 y 与 x 之间的函数关系式;

②请你帮王阿姨拿个主意，将这种水果的销售单价定为多少时，能获得最大利润? 最大利润是多少? (利润=销售收入 - 进货金额)



26. (10 分) 如图是某地下商业街的入口，数学课外兴趣小组的同学打算运用所学的知识测量侧面支架的最高点 E 到地面的距离 EF. 经测量，支架的立柱 BC 与地面垂直，即 $\angle BCA=90^\circ$ ，且 $BC=1.5\text{m}$ ，点 F、A、C 在同一条水平线上，斜杆 AB 与水平线 AC 的夹角 $\angle BAC=30^\circ$ ，支撑杆 $DE \perp AB$ 于点 D，该支架的边 BE 与 AB 的夹角 $\angle EBD=60^\circ$ ，又测得 $AD=1\text{m}$. 请你求出该支架的边 BE 及顶端 E 到地面的距离 EF 的长度.



27. (12 分) 阅读材料

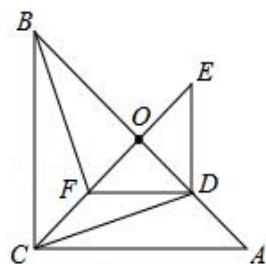
如图①， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle EDF = 90^\circ$ ，且点 D 在 AB 边上， AB 、 EF 的中点均为 O ，连结 BF 、 CD 、 CO ，显然点 C 、 F 、 O 在同一条直线上，可以证明 $\triangle BOF \cong \triangle COD$ ，则 $BF = CD$ 。

解决问题

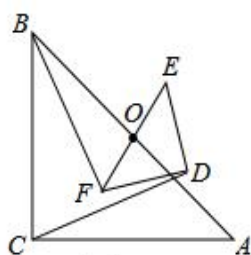
(1) 将图①中的 $\text{Rt}\triangle DEF$ 绕点 O 旋转得到图②, 猜想此时线段 BF 与 CD 的数量关系, 并证明你的结论;

(2) 如图③, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等边三角形, AB 、 EF 的中点均为 O , 上述 (1) 中的结论仍然成立吗? 如果成立, 请说明理由; 如不成立, 请求出 BF 与 CD 之间的数量关系;

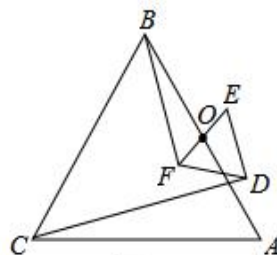
(3) 如图④, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等腰三角形, AB 、 EF 的中点均为 O , 且顶角 $\angle ACB = \angle EDF = \alpha$, 请直接写出 $\frac{BF}{CD}$ 的值 (用含 α 的式子表示出来)



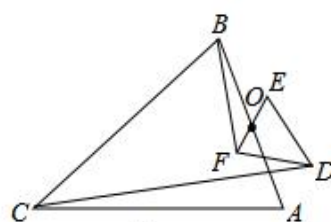
图①



图②



图③



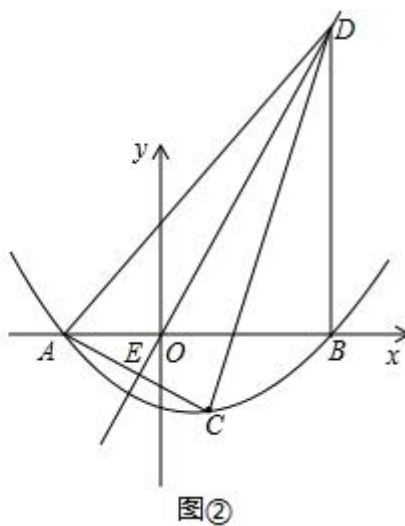
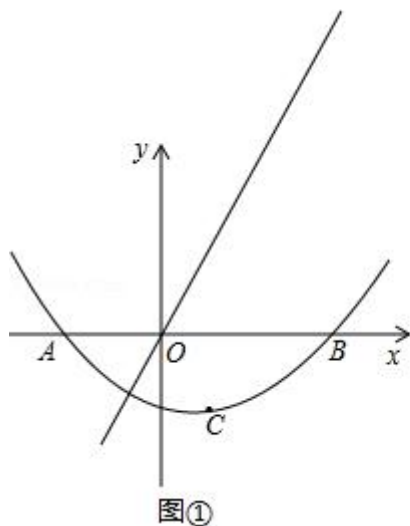
图④

28. (12 分) 如图①, 若二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, 点 A 关于正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象的对称点为 C .

(1) 求 b 、 c 的值;

(2) 证明: 点 C 在所求的二次函数的图象上;

(3) 如图②, 过点 B 作 $DB \perp x$ 轴交正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象于点 D , 连结 AC , 交正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象于点 E , 连结 AD 、 CD . 如果动点 P 从点 A 沿线段 AD 方向以每秒 2 个单位的速度向点 D 运动, 同时动点 Q 从点 D 沿线段 DC 方向以每秒 1 个单位的速度向点 C 运动. 当其中一个点到达终点时, 另一个点随之停止运动, 连结 PQ 、 QE 、 PE . 设运动时间为 t 秒, 是否存在某一时刻, 使 PE 平分 $\angle APQ$, 同时 QE 平分 $\angle PQC$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



(Word 解析版)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确选项的字母填涂在答题卡相应位置上)

1. (3 分) (2013·盐城) -2 、 0 、 1 、 -3 四个数中, 最小的数是 ()

A. -2 B. 0 C. 1 D. -3

考点: 有理数大小比较

分析: 根据有理数的大小比较法则 (正数都大于 0, 负数都小于 0, 正数大于一切负数, 两个负数, 其绝对值大的反而小) 比较即可.

解答: 解: -2 、 0 、 1 、 -3 四个数中, 最小的数是 -3 ;

故选 D.

点评: 本题考查了对有理数的大小比较法则的应用, 用到的知识点是正数都大于 0, 负数都小于 0, 正数大于一切负数, 两个负数, 其绝对值大的反而小.

2. (3 分) (2013•盐城) 如果收入 50 元, 记作+50 元, 那么支出 30 元记作 ()
A. +30 B. - 30 C. +80 D. - 80

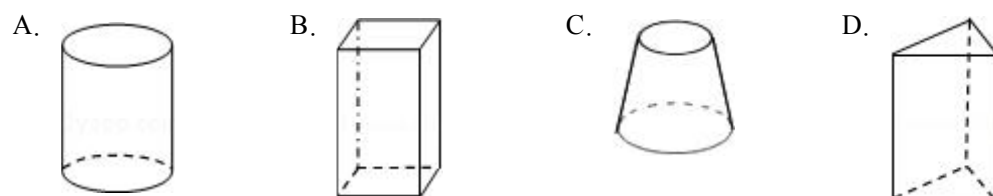
考点: 正数和负数

分析: 收入为“+”, 则支出为“-”, 由此可得出答案.

解答: 解: $\because$ 收入 50 元, 记作+50 元,
 $\therefore$ 支出 30 元记作 - 30 元.
故选 B.

点评: 本题考查了正数和负数的知识, 解题关键是理解“正”和“负”的相对性, 确定一对具有相反意义的量.

3. (3 分) (2013•盐城) 下面的几何体中, 主视图不是矩形的是 ()



考点: 简单几何体的三视图

分析: 找到从正面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在主视图中.

解答: 解: A 为圆柱体, 它的主视图应该为矩形;
B 为长方体, 它的主视图应该为矩形;
C 为圆台, 它的主视图应该为梯形;
D 为三棱柱, 它的主视图应该为矩形.
故选 C.

点评: 本题考查了三视图的知识, 主视图是从物体的正面看得到的视图, 考查了学生细心观察能力, 属于基础题.

4. (3 分) (2013•盐城) 若式子 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()
A. $x \geq 3$ B. $x \leq 3$ C. $x > 3$ D. $x < 3$

考点: 二次根式有意义的条件

分析: 根据被开方数大于等于 0 列式进行计算即可得解.

解答: 解: 根据题意得, $x-3 \geq 0$,
解得 $x \geq 3$.
故选 A.

点评: 本题考查的知识点为: 二次根式的被开方数是非负数.

5. (3 分) (2013•盐城) 下列运算中, 正确的是 ()
A. $2a^2+3a^2=a^4$ B. $5a^2-2a^2=3$ C. $a^3 \times 2a^2=2a^6$ D. $3a^6 \div a^2=3a^4$

考点: 整式的除法; 合并同类项; 单项式乘单项式

分析: 根据合并同类项、单项式乘单项式、单项式除以单项式的法则, 对各选项分析判断后利用排除法求解.

解答: 解: A、 $2a^2+3a^2=5a^2$, 故本选项错误;

B、 $5a^2-2a^2=3a^2$, 故本选项错误;

C、 $a^3 \times 2a^2=2a^5$, 故本选项错误;

D、 $3a^6 \div a^2=3a^4$, 故本选项正确.

故选 D.

点评: 本题考查合并同类项、单项式乘单项式、单项式除以单项式, 记准法则是解题的关键.

6. (3 分) (2013•盐城) 某公司 10 名职工月份工资统计如下, 该公司 10 名职工 5 月份工资的众数和中位数分别是 ()

工资 (元)	2000	2200	2400	2600
人数 (人)	1	3	4	2

A. 2400 元、2400 元 B. 2400 元、2300 元 C. 2200 元、2200 元 D. 2200 元、2300 元

考点: 众数; 中位数

分析: 根据中位数和众数的定义求解即可; 中位数是将一组数据从小到大重新排列, 找出最中间的两个数的平均数, 众数是一组数据中出现次数最多的数.

解答: 解: $\because$ 2400 出现了 4 次, 出现的次数最多,

$\therefore$ 众数是 2400;

$\because$ 共有 10 个数,

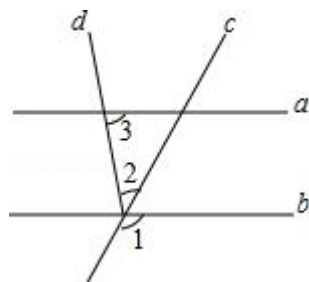
$\therefore$ 中位数是第 5、6 个数的平均数,

$\therefore$ 中位数是 $(2400+2400) \div 2=2400$;

故选 A.

点评: 此题考查了众数与中位数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 众数是一组数据中出现次数最多的数.

7. (3 分) (2013•盐城) 如图, 直线 $a \parallel b$, $\angle 1=120^\circ$, $\angle 2=40^\circ$, 则 $\angle 3$ 等于 ()



A. 60°

B. 70°

C. 80°

D. 90°

考点: 平行线的性质

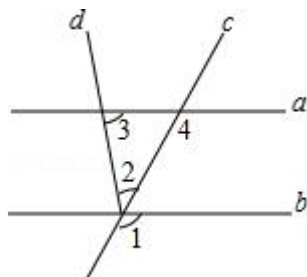
专题: 计算题.

分析: 由 $a \parallel b$, 根据平行线的性质得 $\angle 1=\angle 4=120^\circ$, 再根据三角形外角性质得 $\angle 4=\angle 2+\angle 3$, 所以 $\angle 3=\angle 4-\angle 2=80^\circ$.

解答: 解: 如图,

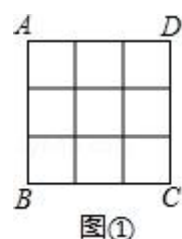
$$\begin{aligned} &\because a \parallel b, \\ &\therefore \angle 1 = \angle 4 = 120^\circ, \\ &\because \angle 4 = \angle 2 + \angle 3, \\ &\text{而 } \angle 2 = 40^\circ, \\ &\therefore 120^\circ = 40^\circ + \angle 3, \\ &\therefore \angle 3 = 80^\circ. \end{aligned}$$

故选 C.

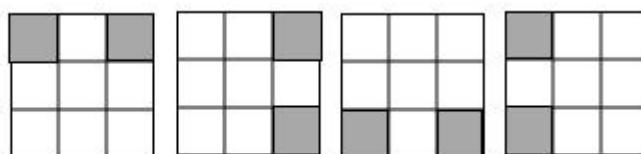


点评: 本题考查了平行线的性质: 两直线平行, 同位角相等. 也考查了三角形外角性质.

8. (3 分) (2013•盐城) 如图①是 3×3 正方形方格, 将其中两个方格涂黑, 并且使涂黑后的整个图案是轴对称图形, 约定绕正方形 ABCD 的中心旋转能重合的图案都视为同一种图案, 例如图②中的四幅图就视为同一种图案, 则得到的不同图案共有 ()



图①



图②

A. 4 种

B. 5 种

C. 6 种

D. 7 种

考 利用旋转设计图案; 利用轴对称设计图案

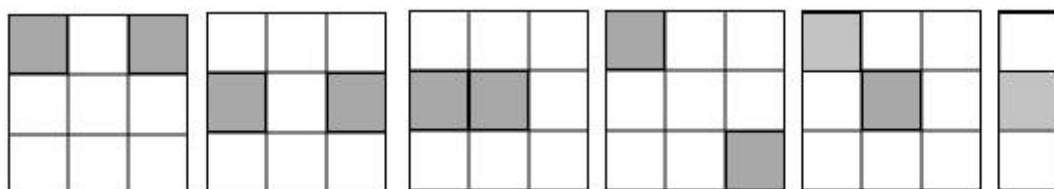
点:

分 根据轴对称的定义, 及题意要求画出所有图案后即可得出答案.

析:

解 解: 得到的不同图案有:

答:



,
共 6 种.

故选 C.

点 本题考查了学生实际操作能力, 用到了图形的旋转及轴对称的知识, 需要灵活掌握.

评:

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 不需要写出解答过程, 请将答案直接写在答题卡相应位置上)

9. (3 分) (2013•盐城) 16 的平方根是 ± 4 .

考点: 平方根

专题: 计算题.

分析: 根据平方根的定义, 求数 a 的平方根, 也就是求一个数 x , 使得 $x^2=a$, 则 x 就是 a 的平方根, 由此即可解决问题.

解答: 解: $\because (\pm 4)^2=16$,
 $\therefore 16$ 的平方根是 ± 4 .

点评: 本题考查了平方根的定义. 注意一个正数有两个平方根, 它们互为相反数; 0 的平方根是 0; 负数没有平方根.

10. (3 分) (2013•盐城) 因式分解: $a^2 - 9 = \underline{(a+3)(a-3)}$.

考点: 因式分解-运用公式法

分析: $a^2 - 9$ 可以写成 $a^2 - 3^2$, 符合平方差公式的特点, 利用平方差公式分解即可.

解答: 解: $a^2 - 9 = (a+3)(a-3)$.

点评: 本题考查了公式法分解因式, 熟记平方差公式的结构特点是解题的关键.

11. (3 分) (2013•盐城) 2013 年 4 月 20 日, 四川省雅安市芦山县发生 7.0 级地震. 我市爱心人士情系灾区, 积极捐款, 截止到 5 月 6 日, 市红十字会共收到捐款约 1400000 元, 这个数据用科学记数法可表示为 1.4×10^6 元.

考点: 科学记数法—表示较大的数

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: $1\,400\,000 = 1.4 \times 10^6$,
故答案为: 1.4×10^6 .

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) (2013•盐城) 使分式 $\frac{x+1}{2x-1}$ 的值为零的条件是 $x = \underline{-1}$.

考点: 分式的值为零的条件.

分析: 分式的值为零时, 分子等于零, 且分母不等于零.

解答: 解: 由题意, 得

$$x+1=0,$$

$$\text{解得, } x = -1.$$

$$\text{经检验, } x = -1 \text{ 时, } \frac{x+1}{2x-1} = 0.$$

故答案是: -1 .

点评: 本题考查了分式的值为零的条件. 若分式的值为零, 需同时具备两个条件: (1) 分子为 0; (2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

13. (3 分) (2013•盐城) 如图所示是一飞镖游戏板, 大圆的直径把一组同心圆分成四等份, 假设飞镖击中圆面上每一个点都是等可能的, 则飞镖落在黑色区域的概率是 $\frac{1}{2}$.



考点: 几何概率.

分析: 首先确定阴影的面积在整个轮盘中占的比例, 根据这个比例即可求出飞镖落在阴影部分的概率.

解答: 解: $\because$ 观察发现: 阴影部分面积 $= \frac{1}{2}$ 圆的面积,
 $\therefore$ 镖落在黑色区域的概率是 $\frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

点评: 此题主要考查了几何概率, 确定阴影部分的面积与大圆的面积之间的关系是解题的关键.

14. (3 分) (2013•盐城) 若 $x^2 - 2x = 3$, 则代数式 $2x^2 - 4x + 3$ 的值为 9.

考点: 代数式求值.

专题: 计算题.

分析: 所求式子前两项提取 2 变形后, 将已知等式代入计算即可求出值.

解答: 解: $\because x^2 - 2x = 3$,
 $\therefore 2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3 = 6 + 3 = 9$.
故答案为: 9

点评: 此题考查了代数式求值, 利用了整体代入的思想, 是一道基本题型.

15. (3 分) (2013•盐城) 写出一个过点 (0, 3), 且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小的一次函数关系式: $y = -x + 3$. (填上一个答案即可)

考点: 一次函数的性质.

专题: 开放型.

分析: 首先可以用待定系数法设此一次函数关系式是: $y = kx + b$ ($k \neq 0$). 根据已知条件确定 k, b 应满足的关系式, 再根据条件进行分析即可.

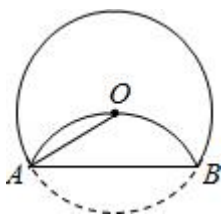
解答: 解: 设此一次函数关系式是: $y = kx + b$.
把 $x = 0$, $y = 3$ 代入得: $b = 3$,
又根据 y 随 x 的增大而减小, 知: $k < 0$.

故此题只要给定 k 一个负数，代入解出 b 值即可。如 $y = -x + 3$ 。（答案不唯一）

故答案是： $y = -x + 3$ 。

点评： 本题考查了一次函数的性质。掌握待定系数法，首先根据已知条件确定 k ， b 应满足的关系式，再根据条件进行分析即可。

16. (3 分) (2013•盐城) 如图，将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠，使 $\widehat{AB}$ 经过圆心 O ，则 $\angle OAB = \underline{30^\circ}$ 。



考点： 垂径定理；等边三角形的判定与性质；翻折变换（折叠问题）

专题： 探究型。

分析： 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 C ，再由将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠，使 $\widehat{AB}$ 经过圆心 O 可知， $OD = \frac{1}{2}OC$ ，故可得出 $OD = \frac{1}{2}OA$ ，再由 $OC \perp AB$ 即可得出结论。

解答： 解：过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 C ，

$\because$ 将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠，使 $\widehat{AB}$ 经过圆心 O ，

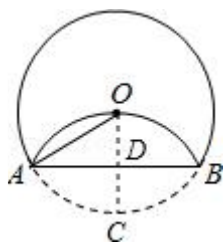
$$\therefore OD = \frac{1}{2}OC,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OA,$$

$$\because OC \perp AB,$$

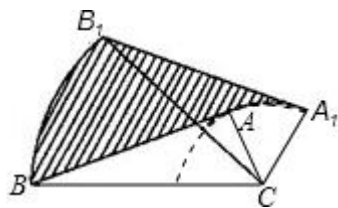
$$\therefore \angle OAB = 30^\circ.$$

故答案为： 30° 。



点评： 本题考查的是垂径定理及图形的反折变换，熟知图形反折不变性的性质是解答此题的关键。

17. (3 分) (2013•盐城) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 5\text{cm}$ ， $AC = 2\text{cm}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕顶点 C 按顺时针方向旋转 45° 至 $\triangle A_1B_1C$ 的位置，则线段 AB 扫过区域（图中的阴影部分）的面积为 $\underline{\frac{25\pi}{8}} \text{cm}^2$ 。



考点: 扇形面积的计算; 旋转的性质

分析: 根据阴影部分的面积是: $S_{\text{扇形} BCB_1} + S_{\triangle CB_1A_1} - S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形} CAA_1}$, 分别求得: 扇形

BCB_1 的面积, $S_{\triangle CB_1A_1}$, $S_{\triangle ABC}$ 以及扇形 CAA_1 的面积, 即可求解.

解答: 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{29}$.

$$\text{扇形 } BCB_1 \text{ 的面积} = \frac{45\pi \times (\sqrt{29})^2}{360} = \frac{29\pi}{8},$$

$$S_{\triangle CB_1A_1} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5;$$

$$S_{\text{扇形} CAA_1} = \frac{45\pi \times 2^2}{360} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{故 } S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形} BCB_1} + S_{\triangle CB_1A_1} - S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形} CAA_1} = \frac{29\pi}{8} + 5 - 5 - \frac{\pi}{2} = \frac{25\pi}{8}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{25\pi}{8}.$$

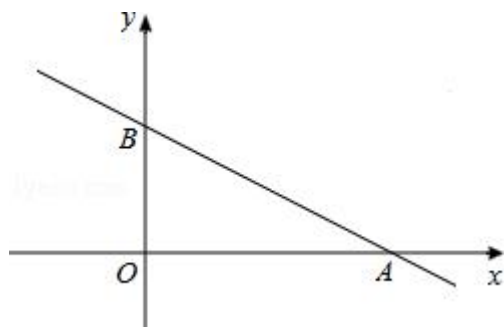
点评: 本题考查了扇形的面积的计算, 正确理解阴影部分的面积 = $S_{\text{扇形} BCB_1} + S_{\triangle CB_1A_1} -$

$S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形} CAA_1}$ 是关键.

18. (3 分) (2013•盐城) 如图, 在以点 O 为原点的平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

的图象与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B, 点 C 在直线 AB 上, 且 $OC = \frac{1}{2}AB$, 反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 C, 则所有可能的 k 值为 $-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{50}$.



考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: 首先求出点 A、B 的坐标, 然后由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”确定点 C 是线段 AB 的中点, 据此可以求得点 C 的坐标, 把点 C 的坐标代入反比例函数解析式即可求得 k 的值.

另外, 以点 O 为圆心, OC 长为半径作圆, 与直线 AB 有另外一个交点 C', 点 C' 也符合要求, 不要遗漏.

解答: 解: 在 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 中, 令 $y = 0$, 则 $x = 2$; 令 $x = 0$, 得 $y = 1$,

$\therefore A(2, 0), B(0, 1)$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得: $AB = \sqrt{5}$.

设 $\angle BAO = \theta$, 则 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

当点 C 为线段 AB 中点时, 有 $OC = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore A(2, 0), B(0, 1)$,

$\therefore C(1, \frac{1}{2})$.

以点 O 为圆心, OC 长为半径作圆, 与直线 AB 的另外一个交点是 C', 则点 C、点 C' 均符合条件.

如图, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E, 则 $AE = OA \cdot \cos\theta = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore EC = AE - AC = \frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

$\therefore OC = OC'$, $\therefore EC' = EC = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\therefore AC' = AE + EC' = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{11\sqrt{5}}{10}$.

过点 C' 作 $CF \perp x$ 轴于点 F, 则 $C'F = AC' \cdot \sin\theta = \frac{11\sqrt{5}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{10}$,

$AF = AC' \cdot \cos\theta = \frac{11\sqrt{5}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{5}$,

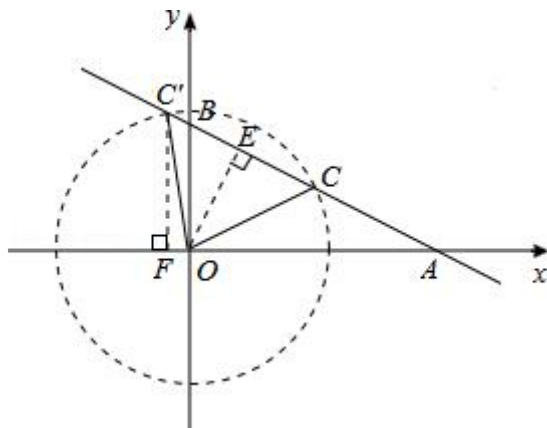
$\therefore OF = AF - OA = \frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5}$.

$\therefore C'(-\frac{1}{5}, \frac{11}{10})$.

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 C 或 C', $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5} \times \frac{11}{10} = -\frac{11}{50}$,

$\therefore k = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{50}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{50}$.



点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题. 注意符合条件的点 C 有两个, 需要分别计算, 不要遗漏.

三、解答题 (本大题共有 10 小题, 共 96 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、推理过程或演算步骤)

19. (8 分) (2013•盐城) (1) 计算: $2+|-3|+\tan 45^\circ$;
(2) 解不等式: $3(x-1) > 2x+2$.

考点: 解一元一次不等式; 实数的运算; 特殊角的三角函数值.

分析: (1) 此题涉及到绝对值和特殊角的三角函数, 首先根据各知识进行计算, 再计算有理数的加减即可;

(2) 首先利用乘法分配律去括号, 再移项、合并同类项即可.

解答: 解: (1) $2+|-3|+\tan 45^\circ$
 $=2+3+1$
 $=6$;

(2) 去括号得: $3x-3 > 2x+2$,
 移项得: $3x-2x > 2+3$,
 合并同类项得: $x > 5$.

点评: 此题主要考查了绝对值和特殊角的三角函数, 以及解一元一次不等式, 关键是注意利用乘法分配律时, 不要漏乘.

20. (8 分) (2013•盐城) 先化简, 再求值: $(x-1) \div (\frac{2}{x+1} - 1)$, 其中 x 为方程 $x^2+3x+2=0$ 的根.

考点: 分式的化简求值; 解一元二次方程-因式分解法.

专题: 分类讨论.

分析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 a 的值代入进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= (x-1) \div \frac{2-x-1}{x+1}$
 $= (x-1) \div \frac{1-x}{x+1}$

$$= (x-1) \times \frac{x+1}{1-x}$$

$$= -x-1.$$

由 x 为方程 $x^2+3x+2=0$ 的根，解得 $x=-1$ 或 $x=-2$.

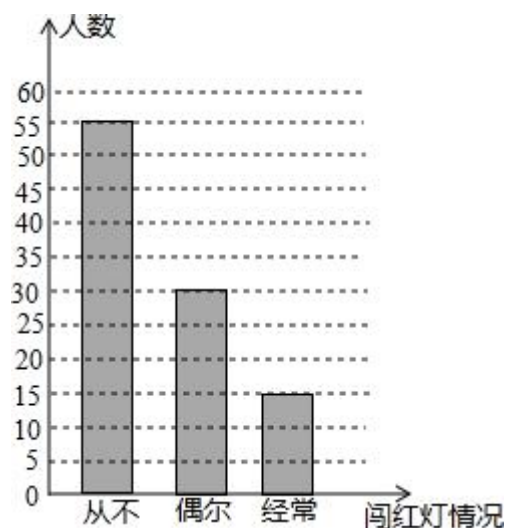
当 $x=-1$ 时，原式无意义，所以 $x=-1$ 舍去；

当 $x=-2$ 时，原式 $= -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1$.

点评： 本题考查的是分式的化简求值及实数的运算，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

21. (8分) (2013•盐城) 市交警支队对某校学生进行交通安全知识宣传，事先以无记名的方式随机调查了该校部分学生闯红灯的情况，并绘制成如图所示的统计图. 请根据图中的信息回答下列问题:

- (1) 本次共调查了多少名学生?
- (2) 如果该校共有 1500 名学生，请你估计该校经常闯红灯的学生大约有多少人;
- (3) 针对图中反映的信息谈谈你的认识. (不超过 30 个字)



考点： 频数（率）分布直方图；用样本估计总体

分析： (1) 每项的人数的和就是总人数；

(2) 1500 乘以经常闯红灯的人数所占的比例即可求解；

(3) 根据实际情况说一下自己的认识即可，答案不唯一.

解答： 解：(1) 调查的总人数是： $55+30+15=100$ (人)；

(2) 经常闯红灯的人数是： $1500 \times \frac{15}{100} = 225$ (人)；

(3) 学生的交通安全意识不强，还需要进行教育.

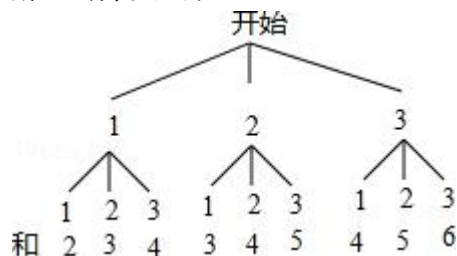
点评： 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力；利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

22. (8分) (2013•盐城) 一只不透明的袋子，装有分别标有数字 1、2、3 的三个球，这些球除所标的数字外都相同，搅匀后从中摸出 1 个球，记录下数字后放回袋中并搅匀，再从中任意摸出 1 个球，记录下数字，请用列表或画树状图的方法，求出两次摸出的球上的数字之和为偶数的概率.

考点: 列表法与树状图法

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的球上的数字之和为偶数的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



$\therefore$ 共有 9 种等可能的结果, 两次摸出的球上的数字之和为偶数的有 5 种情况,

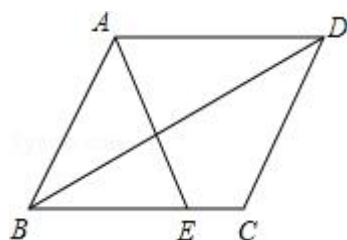
$\therefore$ 两次摸出的球上的数字之和为偶数的概率为: $\frac{5}{9}$.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 注意概率=所求情况数与总情况数之比.

23. (10 分) (2013•盐城) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, E 为 BC 边上的一点, 连结 AE、BD 且 AE=AB.

(1) 求证: $\angle ABE = \angle EAD$;

(2) 若 $\angle AEB = 2\angle ADB$, 求证: 四边形 ABCD 是菱形.



考点: 菱形的判定; 平行四边形的性质

专题: 证明题.

分析: (1) 根据平行四边形的对边互相平行可得 $AD \parallel BC$, 再根据两直线平行, 内错角相等可得 $\angle AEB = \angle EAD$, 根据等边对等角可得 $\angle ABE = \angle AEB$, 即可得证;

(2) 根据两直线平行, 内错角相等可得 $\angle ADB = \angle DBE$, 然后求出 $\angle ABD = \angle ADB$, 再根据等角对等边求出 $AB = AD$, 然后利用邻边相等的平行四边形是菱形证明即可.

解答: 证明: (1) 在平行四边形 ABCD 中, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle EAD,$$

$$\because AE = AB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EAD;$$

$$(2) \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBE,$$

$$\because \angle ABE = \angle AEB, \angle AEB = 2\angle ADB,$$

$\therefore \angle ABE = 2\angle ADB$,
 $\therefore \angle ABD = \angle ABE - \angle DBE = 2\angle ADB - \angle ADB = \angle ADB$,
 $\therefore AB = AD$,
 又 $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,
 $\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形.

点评: 本题考查了菱形的判定, 平行四边形的性质, 平行线的性质, 等边对等角的性质, 等角对等边的性质, 熟练掌握平行四边形与菱形的关系是解题的关键.

24. (10 分) (2013•盐城) 实践操作

如图, $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 利用直尺和圆规按下列要求作图, 并在图中表明相应的字母. (保留作图痕迹, 不写作法)

- (1) 作 $\angle BAC$ 的平分线, 交 BC 于点 O;
- (2) 以 O 为圆心, OC 为半径作圆.

综合运用

在你所作的图中,

- (1) AB 与 $\odot O$ 的位置关系是 相切; (直接写出答案)
- (2) 若 $AC = 5$, $BC = 12$, 求 $\odot O$ 的半径.



考点: 作图—复杂作图; 角平分线的性质; 勾股定理; 切线的判定

分析: 实践操作: 根据题意画出图形即可;

综合运用: (1) 根据角平分线上的点到角两边的距离相等可得 AB 与 $\odot O$ 的位置关系是相切;

(2) 首先根据勾股定理计算出 AB 的长, 再设半径为 xcm, 则 $OC = OD = x$ cm, $BO = (12 - x)$ cm 再次利用勾股定理可得方程 $x^2 + 8^2 = (12 - x)^2$, 再解方程即可.

解答: 解: 实践操作, 如图所示:

综合运用:

(1) AB 与 $\odot O$ 的位置关系是相切.

$\because$ AO 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore DO = CO$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADO = 90^\circ$,

$\therefore$ AB 与 $\odot O$ 的位置关系是相切;

(2) $\because AC = 5$, $BC = 12$,

$$\therefore AD=5, AB=\sqrt{5^2+12^2}=13,$$

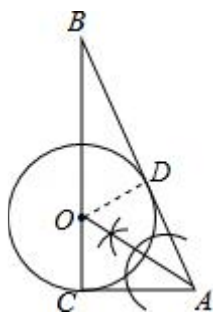
$$\therefore DB=13-5=7,$$

设半径为 $x\text{cm}$, 则 $OC=OD=x\text{cm}$, $BO=(12-x)\text{cm}$,

$$x^2+8^2=(12-x)^2,$$

$$\text{解得: } x=\frac{10}{3}.$$

答: $\odot O$ 的半径为 $\frac{10}{3}$.



点评: 此题主要考查了复杂作图, 以及切线的判定、勾股定理的应用, 关键是掌握角平分线的性质: 角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

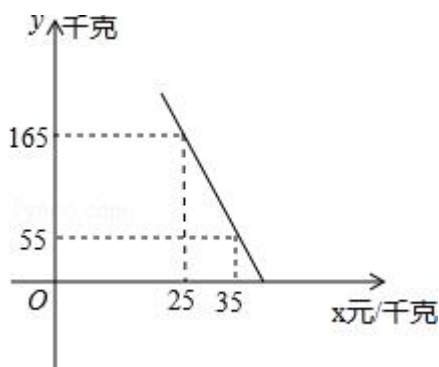
25. (10 分) (2013·盐城) 水果店王阿姨到水果批发市场打算购进一种水果销售, 经过还价, 实际价格每千克比原来少 2 元, 发现原来买这种水果 80 千克的钱, 现在可买 88 千克.

(1) 现在实际购进这种水果每千克多少元?

(2) 王阿姨准备购进这种水果销售, 若这种水果的销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 满足如图所示的一次函数关系.

①求 y 与 x 之间的函数关系式;

②请你帮王阿姨拿个主意, 将这种水果的销售单价定为多少时, 能获得最大利润? 最大利润是多少? (利润=销售收入-进货金额)



考点: 一次函数的应用

分析: (1) 设现在实际购进这种水果每千克 x 元, 根据原来买这种水果 80 千克的钱, 现在可买 88 千克列出关于 x 的一元一次方程, 解方程即可;

(2) ①设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$, 将 $(25, 165)$, $(35, 55)$ 代入, 运用待定系数法即可求出 y 与 x 之间的函数关系式;

②设这种水果的销售单价为 x 元时, 所获利润为 w 元, 根据利润=销售收入-进货金

额得到 w 关于 x 的函数关系式为 $w = -11(x - 30)^2 + 1100$ ，再根据二次函数的性质即可求解。

解答：解：(1) 设现在实际购进这种水果每千克 x 元，则原来购进这种水果每千克 $(x+2)$ 元，由题意，得

$$80(x+2) = 88x,$$

解得 $x=20$ 。

答：现在实际购进这种水果每千克 20 元；

(2) ①设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$ ，

将 $(25, 165)$ ， $(35, 55)$ 代入，

$$\text{得} \begin{cases} 25k+b=165 \\ 35k+b=55 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-11 \\ b=440 \end{cases},$$

故 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -11x + 440$ ；

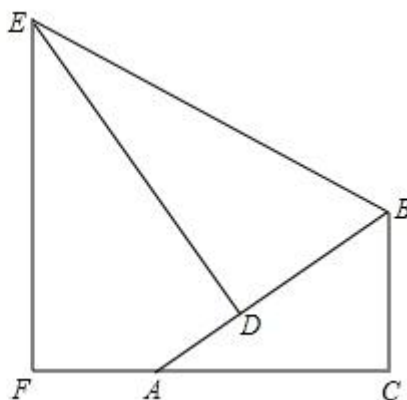
②设这种水果的销售单价为 x 元时，所获利润为 w 元，

则 $w = (x - 20)y = (x - 20)(-11x + 440) = -11x^2 + 660x - 8800 = -11(x - 30)^2 + 1100$ ，
所以当 $x=30$ 时， w 有最大值 1100。

答：将这种水果的销售单价定为 30 元时，能获得最大利润，最大利润是 1100 元。

点评：本题考查了一元一次方程、一次函数、二次函数在实际生活中的应用，其中涉及到找等量关系列方程，运用待定系数法求一次函数的解析式，二次函数的性质等知识，本题难度适中。

26. (10 分) (2013·盐城) 如图是某地下商业街的入口，数学课外兴趣小组的同学打算运用所学的知识测量侧面支架的最高点 E 到地面的距离 EF 。经测量，支架的立柱 BC 与地面垂直，即 $\angle BCA=90^\circ$ ，且 $BC=1.5\text{m}$ ，点 F 、 A 、 C 在同一条水平线上，斜杆 AB 与水平线 AC 的夹角 $\angle BAC=30^\circ$ ，支撑杆 $DE \perp AB$ 于点 D ，该支架的边 BE 与 AB 的夹角 $\angle EBD=60^\circ$ ，又测得 $AD=1\text{m}$ 。请你求出该支架的边 BE 及顶端 E 到地面的距离 EF 的长度。

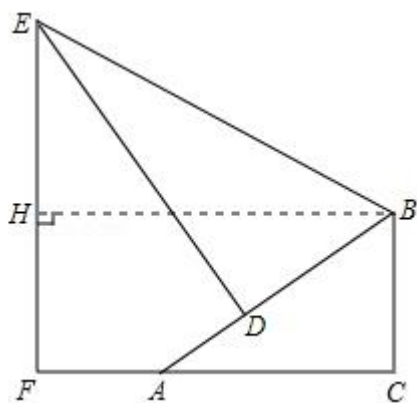


考点：解直角三角形的应用

分析：过 B 作 $BH \perp EF$ 于点 H ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据 $\angle BAC=30^\circ$ ， $BC=1.5$ ，可求得 AB 的长度，又 $AD=1\text{m}$ ，可求得 BD 的长度，在 $\text{Rt}\triangle EBD$ 中解直角三角形求得 EB 的长度，然后根据 $BH \perp EF$ ，求得 $\angle EBH=30^\circ$ ，继而可求得 EH 的长度，易得 $EF=EH+HF$ 的值。

解答：解：过 B 作 $BH \perp EF$ 于点 H ，

$\therefore$ 四边形 BCFH 为矩形, $BC=HF=1.5\text{m}$, $\angle HBA=\angle AC=30^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,
 $\because \angle BAC=30^\circ$, $BC=1.5\text{m}$,
 $\therefore AB=3\text{m}$,
 $\therefore AD=1\text{m}$,
 $\therefore BD=2\text{m}$,
 在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中,
 $\because \angle EBD=60^\circ$,
 $\therefore \angle BED=90^\circ-60^\circ=30^\circ$,
 $\therefore EB=2BD=2\times 2=4\text{m}$,
 又 $\because \angle HBA=\angle AC=30^\circ$,
 $\therefore \angle EBH=\angle EBD-\angle HBD=30^\circ$,
 $\therefore EH=\frac{1}{2}EB=2\text{m}$,
 $\therefore EF=EH+HF=2+1.5=3.5\text{ (m)}$.
 答: 该支架的边 BE 为 4m, 顶端 E 到地面的距离 EF 的长度为 3.5m.



点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是将实际问题转化为数学问题, 构造直角三角形并解直角三角形, 难度适中.

27. (12 分) (2013•盐城) 阅读材料

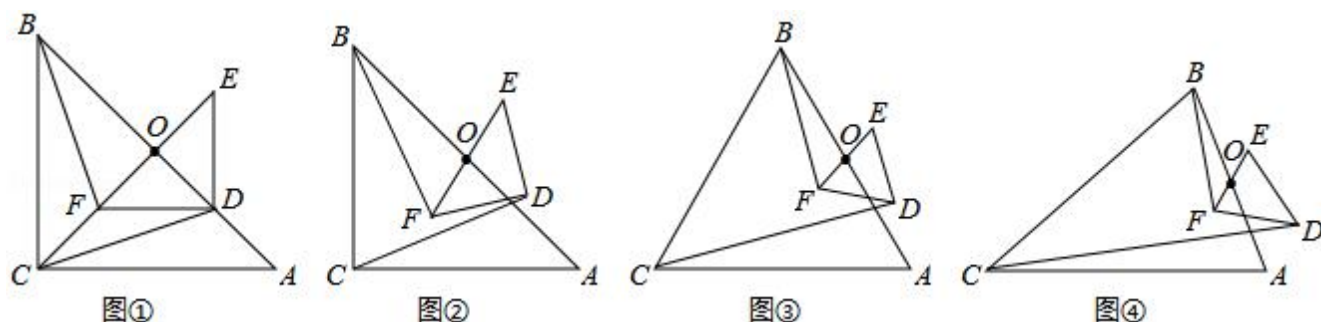
如图①, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB=\angle EDF=90^\circ$, 且点 D 在 AB 边上, AB、EF 的中点均为 O, 连结 BF、CD、CO, 显然点 C、F、O 在同一条直线上, 可以证明 $\triangle BOF \cong \triangle COD$, 则 $BF=CD$.

解决问题

(1) 将图①中的 $\text{Rt}\triangle DEF$ 绕点 O 旋转得到图②, 猜想此时线段 BF 与 CD 的数量关系, 并证明你的结论;

(2) 如图③, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等边三角形, AB、EF 的中点均为 O, 上述 (1) 中的结论仍然成立吗? 如果成立, 请说明理由; 如不成立, 请求出 BF 与 CD 之间的数量关系;

(3) 如图④, 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 都是等腰三角形, AB、EF 的中点均为 O, 且顶角 $\angle ACB=\angle EDF=\alpha$, 请直接写出 $\frac{BF}{CD}$ 的值 (用含 α 的式子表示出来)



考点: 几何变换综合题

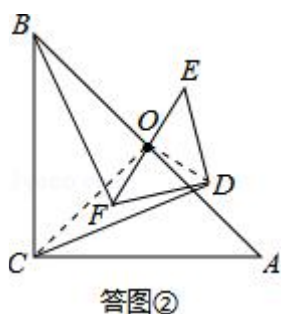
分析: (1) 如答图②所示, 连接 OC、OD, 证明 $\triangle BOF \cong \triangle COD$;

(2) 如答图③所示, 连接 OC、OD, 证明 $\triangle BOF \sim \triangle COD$, 相似比为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(3) 如答图④所示, 连接 OC、OD, 证明 $\triangle BOF \sim \triangle COD$, 相似比为 $\tan \frac{\alpha}{2}$.

解答: 解: (1) 猜想: $BF=CD$. 理由如下:

如答图②所示, 连接 OC、OD.



$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 点 O 为斜边 AB 的中点,

$\therefore OB=OC$, $\angle BOC=90^\circ$.

$\because \triangle DEF$ 为等腰直角三角形, 点 O 为斜边 EF 的中点,

$\therefore OF=OD$, $\angle DOF=90^\circ$.

$\therefore \angle BOF = \angle BOC + \angle COF = 90^\circ + \angle COF$, $\angle COD = \angle DOF + \angle COF = 90^\circ + \angle COF$,

$\therefore \angle BOF = \angle COD$.

$\therefore$ 在 $\triangle BOF$ 与 $\triangle COD$ 中,

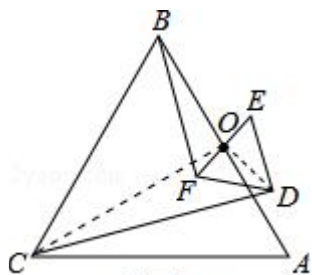
$$\begin{cases} OB=OC \\ \angle BOF=\angle COD \\ OF=OD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOF \cong \triangle COD$ (SAS),

$\therefore BF=CD$.

(2) 答: (1) 中的结论不成立.

如答图③所示, 连接 OC、OD.



答图③

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, 点 O 为边 AB 的中点,

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

$\because \triangle DEF$ 为等边三角形, 点 O 为边 EF 的中点,

$$\therefore \frac{OF}{OD} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \angle DOF = 90^\circ.$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{OF}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\because \angle BOF = \angle BOC + \angle COF = 90^\circ + \angle COF, \quad \angle COD = \angle DOF + \angle COF = 90^\circ + \angle COF,$

$\therefore \angle BOF = \angle COD.$

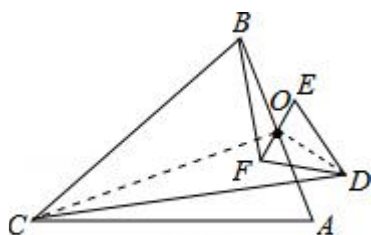
在 $\triangle BOF$ 与 $\triangle COD$ 中,

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{OF}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \angle BOF = \angle COD,$$

$\therefore \triangle BOF \sim \triangle COD,$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3) 如答图④所示, 连接 OC 、 OD .



答图④

$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形, 点 O 为底边 AB 的中点,

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BOC = 90^\circ.$$

$\because \triangle DEF$ 为等腰三角形, 点 O 为底边 EF 的中点,

$$\therefore \frac{OF}{OD} = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \angle DOF = 90^\circ.$$

$$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{OF}{OD} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$\because \angle BOF = \angle BOC + \angle COF = 90^\circ + \angle COF, \quad \angle COD = \angle DOF + \angle COF = 90^\circ + \angle COF,$

$\therefore \angle BOF = \angle COD.$

在 $\triangle BOF$ 与 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{OB}{OC} &= \frac{OF}{OD} = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BOF = \angle COD, \\ \therefore \triangle BOF &\sim \triangle COD, \\ \therefore \frac{BF}{CD} &= \tan \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

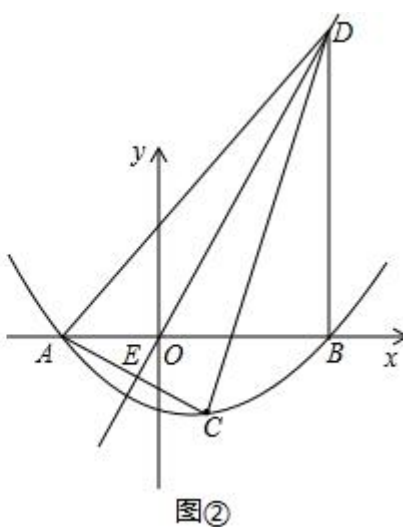
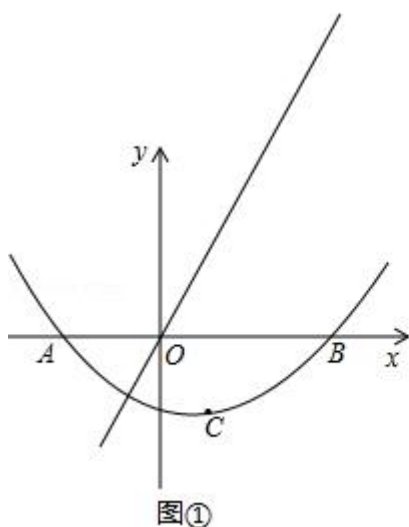
点评: 本题是几何综合题, 考查了旋转变换中相似三角形、全等三角形的判定与性质. 解题关键是: 第一, 善于发现几何变换中不变的逻辑关系, 即 $\triangle BOF \cong \triangle COD$ 或 $\triangle BOF \sim \triangle COD$; 第二, 熟练运用等腰直角三角形、等边三角形、等腰三角形的相关性质. 本题 (1) (2) (3) 问的解题思路一脉相承, 由特殊到一般, 有利于同学们进行学习与探究.

28. (12 分) (2013·盐城) 如图①, 若二次函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, 点 A 关于正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象的对称点为 C .

(1) 求 b 、 c 的值;

(2) 证明: 点 C 在所求的二次函数的图象上;

(3) 如图②, 过点 B 作 $DB \perp x$ 轴交正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象于点 D , 连结 AC , 交正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图象于点 E , 连结 AD 、 CD . 如果动点 P 从点 A 沿线段 AD 方向以每秒 2 个单位的速度向点 D 运动, 同时动点 Q 从点 D 沿线段 DC 方向以每秒 1 个单位的速度向点 C 运动. 当其中一个点到达终点时, 另一个点随之停止运动, 连结 PQ 、 QE 、 PE . 设运动时间为 t 秒, 是否存在某一时刻, 使 PE 平分 $\angle APQ$, 同时 QE 平分 $\angle PQC$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题

分析: (1) 利用待定系数法求出 b 、 c 的值;

(2) 如答图 1 所示, 关键是求出点 C 的坐标. 首先求出直线 $y = \sqrt{3}x$ 与 x 轴所夹角为 60° , 则可推出在 $Rt\triangle CEK$ 中, $\angle COK = 60^\circ$, 解此直角三角形即可求出点 C 的坐标;

(3) 如答图 2 所示, 关键是证明 $\triangle APE \sim \triangle CEQ$. 根据 $\angle DAC = \angle DCA$, $\angle AEP = \angle CQE$, 证明 $\triangle APE \sim \triangle CEQ$, 根据相似线段比例关系列出方程, 解方程求出时间 t 的值.

解答:

解: (1) $\because$ 点 A (-2, 0), B (3, 0) 在抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + bx + c$ 上,

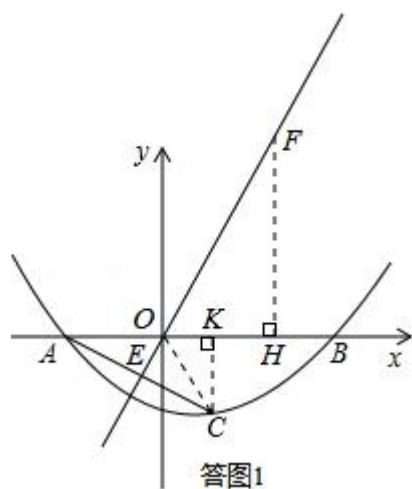
$$\therefore \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6} \times 4 - 2b + c = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \times 9 + 3b + c = 0 \end{cases},$$

解得: $b = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, $c = -\sqrt{3}$.

(2) 设点 F 在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, 且 $F (2, 2\sqrt{3})$.

如答图 1 所示, 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H, 则 $FH = 2\sqrt{3}$, $OH = 2$,

$$\therefore \tan \angle FOB = \frac{FH}{OH} = \sqrt{3}, \therefore \angle FOB = 60^\circ.$$



$$\therefore \angle AOE = \angle FOB = 60^\circ.$$

连接 OC, 过点 C 作 $CK \perp x$ 轴于点 K.

$\because$ 点 A、C 关于 $y = \sqrt{3}x$ 对称, $\therefore OC = OA = 2$, $\angle COE = \angle AOE = 60^\circ$.

$$\therefore \angle COK = 180^\circ - \angle AOE - \angle COE = 60^\circ.$$

在 $Rt\triangle COK$ 中, $CK = OC \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $OK = OC \cdot \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

$$\therefore C (1, -\sqrt{3}).$$

抛物线的解析式为: $y = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x - \sqrt{3}$, 当 $x = 1$ 时, $y = -\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 C 在所求二次函数的图象上.

(3) 假设存在.

如答图 1 所示, 在 $Rt\triangle ACK$ 中, 由勾股定理得:

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

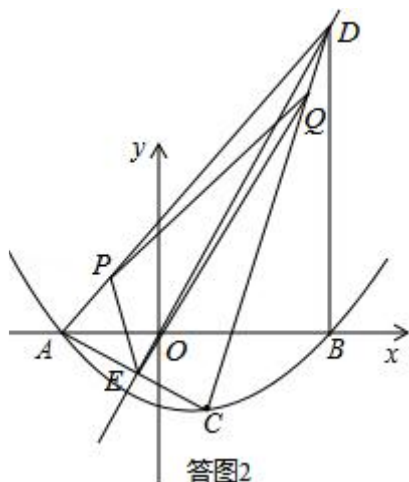
如答图 2 所示, $\because OB = 3$, $\therefore BD = 3\sqrt{3}$, $AB = OA + OB = 5$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得: $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$.

$\therefore$ 点 A、C 关于 $y = \sqrt{3}x$ 对称,

$$\therefore CD=AD=2\sqrt{13}, \angle DAC=\angle DCA, AE=CE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}.$$

连接 PQ、PE、QE，则 $\angle APE=\angle QPE$ ， $\angle PQE=\angle CQE$ 。



在四边形 APQC 中， $\angle DAC+\angle APQ+\angle PQC+\angle DCA=360^\circ$ ，(四边形内角和等于 360°)
即 $2\angle DAC+2\angle APE+2\angle CQE=360^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAC+\angle APE+\angle CQE=180^\circ.$$

又 $\because \angle DAC+\angle APE+\angle AEP=180^\circ$ ，(三角形内角和定理)

$$\therefore \angle AEP=\angle CQE.$$

在 $\triangle APE$ 与 $\triangle CEQ$ 中， $\because \angle DAC=\angle DCA$ ， $\angle AEP=\angle CQE$ ，

$$\therefore \triangle APE \sim \triangle CEQ,$$

$$\therefore \frac{CQ}{AE} = \frac{CE}{AP}, \text{ 即: } \frac{2\sqrt{13}-t}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2t},$$

$$\text{整理得: } 2t^2 - 4\sqrt{13}t + 3 = 0,$$

$$\text{解得: } t = \frac{2\sqrt{13} - \sqrt{46}}{2} \text{ 或 } t = \frac{2\sqrt{13} + \sqrt{46}}{2} \quad (t > \sqrt{13}, \text{ 故舍去})$$

$$\therefore \text{存在某一时刻, 使 PE 平分 } \angle APQ, \text{ 同时 QE 平分 } \angle PQC, \text{ 此时 } t = \frac{2\sqrt{13} - \sqrt{46}}{2}.$$

点评: 本题是二次函数压轴题，考查了二次函数的图象与性质、正比例函数的图象与性质、待定系数法、对称、解直角三角形、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程等知识点。试题的难点在于第 (3) 问，图形中线段较多关系复杂，难以从中发现有效的等量关系，证明 $\triangle APE \sim \triangle CEQ$ 是解题关键。