

2012 年江苏省苏州市中考数学试卷

一、选择题 (本题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. (3 分) 2 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

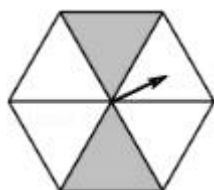
2. (3 分) 若式子 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x < 2$ B. $x > 2$ C. $x \leq 2$ D. $x \geq 2$

3. (3 分) 一组数据 2, 4, 5, 5, 6 的众数是 ()

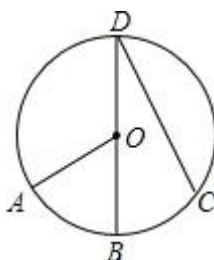
- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

4. (3 分) 如图, 一个正六边形转盘被分成 6 个全等的正三角形, 任意旋转这个转盘 1 次, 当旋转停止时, 指针指向阴影区域的概率是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

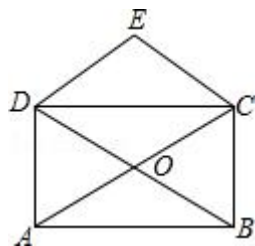
5. (3 分) 如图, 已知 BD 是 $\odot O$ 的直径, 点 A 、 C 在 $\odot O$ 上, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$, $\angle AOB = 60^\circ$, 则 $\angle BDC$ 的度数是 ()



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 40°

6. (3 分) 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $CE \parallel BD$, $DE \parallel$

AC, 若 $AC=4$, 则四边形 CODE 的周长 ()



- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

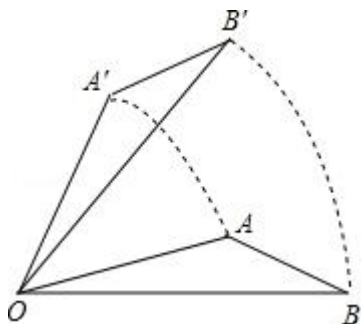
7. (3分) 若点 (m, n) 在函数 $y=2x+1$ 的图象上, 则 $2m-n$ 的值是 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

8. (3分) 若 $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{21}$, 则 m 的值为 ()

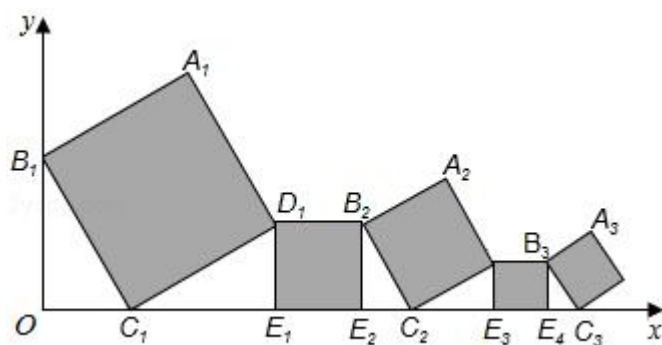
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

9. (3分) 如图, 将 $\triangle AOB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 45° 后得到 $\triangle A'OB'$, 若 $\angle AOB=15^\circ$, 则 $\angle AOB'$ 的度数是 ()



- A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°

10. (3分) 已知在平面直角坐标系中放置了 5 个如图所示的正方形 (用阴影表示), 点 B_1 在 y 轴上, 点 $C_1, E_1, E_2, C_2, E_3, E_4, C_3$ 在 x 轴上. 若正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1, $\angle B_1C_1O=60^\circ$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$, 则点 A_3 到 x 轴的距离是 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}+3}{18}$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{18}$ C. $\frac{\sqrt{3}+3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

二、填空题 (本题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

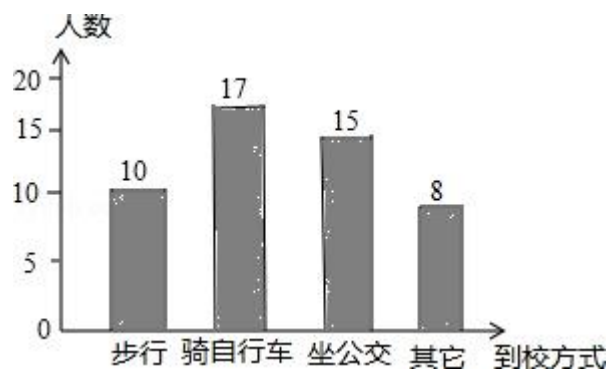
11. (3 分) 化简: $\sqrt{\frac{2}{3}}$ = _____.

12. (3 分) 若 $a=2$, $a+b=3$, 则 a^2+ab = _____.

13. (3 分) 已知太阳的半径约为 696000000m, 696000000 这个数用科学记数法表示为 _____.

14. (3 分) 已知扇形的圆心角为 45° , 弧长等于 $\frac{\pi}{2}$, 则该扇形的半径为 _____.

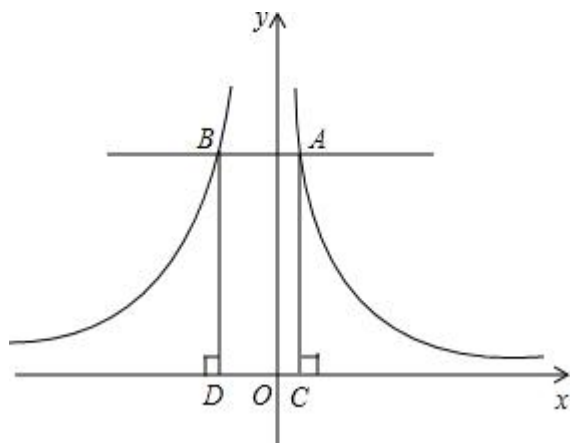
15. (3 分) 某初中学校共有学生 720 人, 该校有关部门从全体学生中随机抽取了 50 人, 对其到校方式进行调查, 并将调查的结果制成了如图所示的条形统计图, 由此可以估计全校坐公交车到校的学生有 _____ 人.



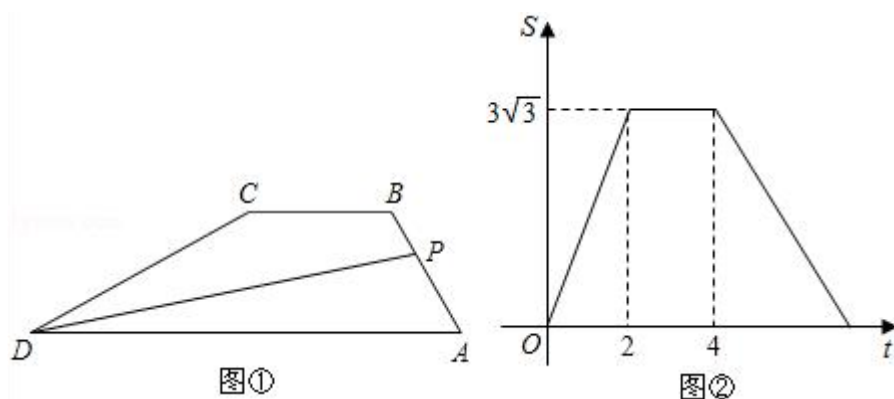
16. (3 分) 已知点 A (x_1 , y_1)、B (x_2 , y_2) 在二次函数 $y = (x-1)^2 + 1$ 的图象上, 若 $x_1 > x_2 > 1$, 则 y_1 _____ y_2 (填“>”、“<”或“=”).

17. (3 分) 如图, 已知第一象限内的图象是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象的一个分支,

第二象限内的图象是反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 图象的一个分支，在 x 轴的上方有一条平行于 x 轴的直线 l 与它们分别交于点 A 、 B ，过点 A 、 B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 C 、 D 。若四边形 $ABCD$ 的周长为 8 且 $AB < AC$ ，则点 A 的坐标为_____。



18. (3 分) 如图①，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，动点 P 从 A 点出发，以 1cm/s 的速度沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向不停移动，直到点 P 到达点 D 后才停止。已知 $\triangle PAD$ 的面积 S (单位： cm^2) 与点 P 移动的时间 (单位： s) 的函数如图②所示，则点 P 从开始移动到停止移动一共用了_____秒 (结果保留根号)。



三、解答题 (本大题共 11 小题，共 76 分)

19. (5 分) 计算： $(\sqrt{3}-1)^0 + |-2| - \sqrt{4}$.

20. (5 分) 解不等式组 $\begin{cases} 3x-2 < x+2 \\ 8-x \geq 1-3(x-1) \end{cases}$.

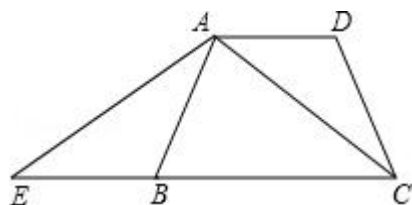
21. (5分) 先化简, 再求值: $\frac{2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{a-2}$, 其中, $a=\sqrt{2}+1$.

22. (6分) 解分式方程: $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2+2x}$.

23. (6分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \parallel BC$, $AB=CD$, 延长线段 CB 到 E , 使 $BE=AD$, 连接 AE 、 AC .

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDA$;

(2) 若 $\angle DAC=40^\circ$, 求 $\angle EAC$ 的度数.

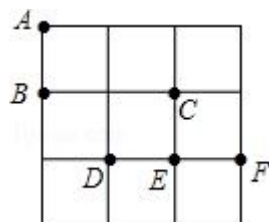


24. (6分) 我国是一个淡水资源严重缺乏的国家, 有关数据显示, 中国人均淡水资源占有量仅为美国人均淡水资源占有量的 $\frac{1}{5}$, 中、美两国人均淡水资源占有量之和为 13800m^3 , 问中、美两国人均淡水资源占有量各为多少 (单位: m^3) ?

25. (8分) 在 3×3 的方格纸中, 点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 分别位于如图所示的小正方形的顶点上.

(1) 从 A 、 D 、 E 、 F 四个点中任意取一点, 以所取的这一点及点 B 、 C 为顶点画三角形, 则所画三角形是等腰三角形的概率是_____;

(2) 从 A 、 D 、 E 、 F 四个点中先后任意取两个不同的点, 以所取的这两点及点 B 、 C 为顶点画四边形, 求所画四边形是平行四边形的概率是_____ (用树状图或列表法求解).

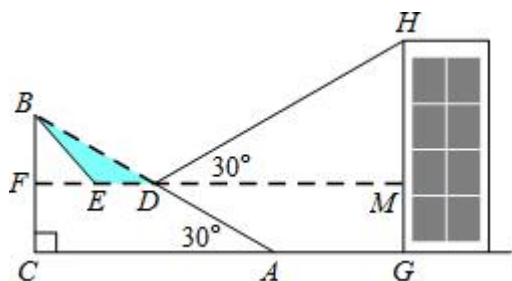


26. (8分) 如图, 已知斜坡 AB 长 60 米, 坡角 (即 $\angle BAC$) 为 30° , $BC \perp AC$,

现计划在斜坡中点 D 处挖去部分坡体（用阴影表示）修建一个平行于水平线 CA 的平台 DE 和一条新的斜坡 BE .（请将下面 2 小题的结果都精确到 0.1 米，参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）.

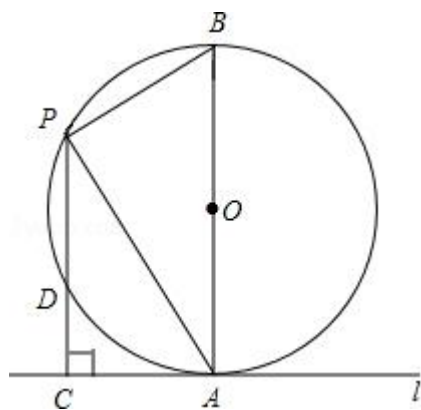
(1) 若修建的斜坡 BE 的坡角（即 $\angle BEF$ ）不大于 45° ，则平台 DE 的长最多为米；

(2) 一座建筑物 GH 距离坡角 A 点 27 米远（即 $AG=27$ 米），小明在 D 点测得建筑物顶部 H 的仰角（即 $\angle HDM$ ）为 30° . 点 B 、 C 、 A 、 G 、 H 在同一个平面内，点 C 、 A 、 G 在同一条直线上，且 $HG \perp CG$ ，问建筑物 GH 高为多少米？



27. (8 分) 如图，已知半径为 2 的 $\odot O$ 与直线 l 相切于点 A ，点 P 是直径 AB 左侧半圆上的动点，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为 C ， PC 与 $\odot O$ 交于点 D ，连接 PA 、 PB ，设 PC 的长为 x ($2 < x < 4$) .

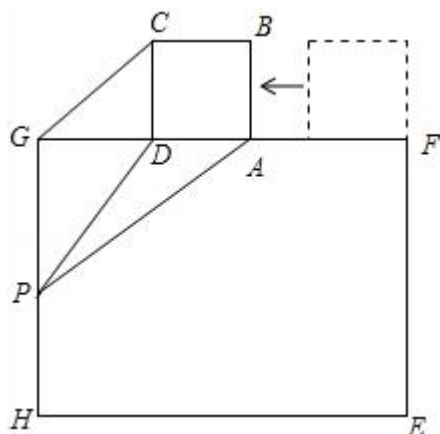
- (1) 当 $x = \frac{5}{2}$ 时，求弦 PA 、 PB 的长度；
- (2) 当 x 为何值时， $PD \cdot CD$ 的值最大？最大值是多少？



28. (9 分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边 AD 与矩形 $EFGH$ 的边 FG 重合，将正方

形 $ABCD$ 以 1cm/s 的速度沿 FG 方向移动, 移动开始前点 A 与点 F 重合, 在移动过程中, 边 AD 始终与边 FG 重合, 连接 CG , 过点 A 作 CG 的平行线交线段 GH 于点 P , 连接 PD . 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1cm , 矩形 $EFGH$ 的边 FG , GH 的长分别为 4cm , 3cm , 设正方形移动时间为 $x(\text{s})$, 线段 GP 的长为 $y(\text{cm})$, 其中 $0 \leq x \leq 2.5$.

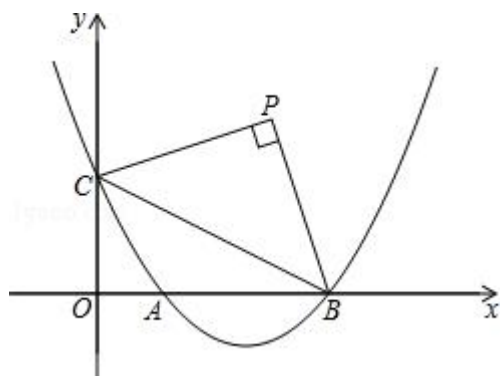
- (1) 试求出 y 关于 x 的函数关系式, 并求当 $y=3$ 时相应 x 的值;
- (2) 记 $\triangle DGP$ 的面积为 S_1 , $\triangle CDG$ 的面积为 S_2 . 试说明 $S_1 - S_2$ 是常数;
- (3) 当线段 PD 所在直线与正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 垂直时, 求线段 PD 的长.



29. (10 分) 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(b+1)x + \frac{b}{4}$ (b 是实数且 $b > 2$) 与 x 轴的正半轴分别交于点 A 、 B (点 A 位于点 B 的左侧), 与 y 轴的正半轴交于点 C .

- (1) 点 B 的坐标为_____, 点 C 的坐标为_____ (用含 b 的代数式表示);
- (2) 请你探索在第一象限内是否存在点 P , 使得四边形 $PCOB$ 的面积等于 $2b$, 且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 如果存在, 求出点 P 的坐标; 如果不存在, 请说明理由;
- (3) 请你进一步探索在第一象限内是否存在点 Q , 使得 $\triangle QCO$, $\triangle QOA$ 和 $\triangle$

$\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似（全等可作相似的特殊情况）？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由.



2012 年江苏省苏州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2016•钦州) 2 的相反数是 ()

A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【分析】根据相反数的定义即可求解.

【解答】解: 2 的相反数等于 -2 .

故选 A.

【点评】本题考查了相反数的知识, 属于基础题, 注意熟练掌握相反数的概念是关键.

2. (3 分) (2014•淮安) 若式子 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x < 2$ B. $x > 2$ C. $x \leq 2$ D. $x \geq 2$

【分析】根据二次根式中的被开方数必须是非负数, 即可求解.

【解答】解: 根据题意得: $x-2 \geq 0$, 解得: $x \geq 2$.

故选: D.

【点评】本题考查的知识点为: 二次根式的被开方数是非负数.

3. (3 分) (2013•鞍山) 一组数据 2, 4, 5, 5, 6 的众数是 ()

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】根据众数的定义解答即可.

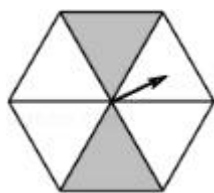
【解答】解: 在 2, 4, 5, 5, 6 中, 5 出现了两次, 次数最多,

故众数为 5.

故选 C.

【点评】此题考查了众数的概念——一组数据中，出现次数最多的数称为众数，众数可以有多个.

4. (3 分) (2012•苏州) 如图，一个正六边形转盘被分成 6 个全等的正三角形，任意旋转这个转盘 1 次，当旋转停止时，指针指向阴影区域的概率是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

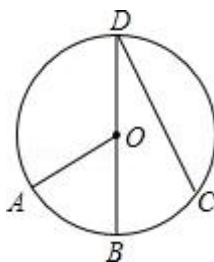
【分析】确定阴影部分的面积在整个转盘中占的比例，根据这个比例即可求出转盘停止转动时指针指向阴影部分的概率.

【解答】解：如图：转动转盘被均匀分成 6 部分，阴影部分占 2 份，转盘停止转动时指针指向阴影部分的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

故选 B.

【点评】本题考查了几何概率. 用到的知识点为：概率=相应的面积与总面积之比.

5. (3 分) (2012•苏州) 如图，已知 BD 是 $\odot O$ 的直径，点 A、C 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数是 ()



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 40°

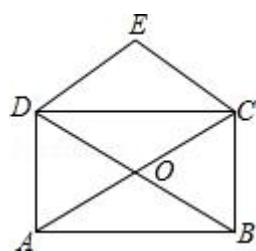
【分析】由 BD 是 $\odot O$ 的直径，点 A 、 C 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AB}=\widehat{BC}$ ， $\angle AOB=60^\circ$ ，利用在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半，即可求得 $\angle BDC$ 的度数.

【解答】解： $\because \widehat{AB}=\widehat{BC}$ ， $\angle AOB=60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BDC=\frac{1}{2}\angle AOB=30^\circ$.

故选 C.

【点评】此题考查了圆周角定理. 此题比较简单，注意数形结合思想的应用，注意在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半定理的应用.

6. (3 分) (2012•苏州) 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $CE \parallel BD$ ， $DE \parallel AC$ ，若 $AC=4$ ，则四边形 $CODE$ 的周长 ()



A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

【分析】首先由 $CE \parallel BD$ ， $DE \parallel AC$ ，可证得四边形 $CODE$ 是平行四边形，又由四边形 $ABCD$ 是矩形，根据矩形的性质，易得 $OC=OD=2$ ，即可判定四边形 $CODE$ 是菱形，继而求得答案.

【解答】解： $\because CE \parallel BD$ ， $DE \parallel AC$ ，
 $\therefore$ 四边形 $CODE$ 是平行四边形，
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
 $\therefore AC=BD=4$ ， $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

$$\therefore OD=OC=\frac{1}{2}AC=2,$$

$\therefore$ 四边形 CODE 是菱形,

$\therefore$ 四边形 CODE 的周长为: $4OC=4 \times 2=8$.

故选 C.

【点评】 此题考查了菱形的判定与性质以及矩形的性质. 此题难度不大, 注意证得四边形 CODE 是菱形是解此题的关键.

7. (3 分) (2012•苏州) 若点 (m, n) 在函数 $y=2x+1$ 的图象上, 则 $2m-n$ 的值是 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

【分析】 将点 (m, n) 代入函数 $y=2x+1$, 得到 m 和 n 的关系式, 再代入 $2m-n$ 即可解答.

【解答】 解: 将点 (m, n) 代入函数 $y=2x+1$ 得,
 $n=2m+1$,

整理得, $2m-n=-1$.

故选: D.

【点评】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 要明确, 一次函数图象上的点的坐标符合函数解析式.

8. (3 分) (2012•苏州) 若 $3 \times 9^m \times 27^m = 3^{21}$, 则 m 的值为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】 先逆用幂的乘方的性质转化为以 3 为底数的幂相乘, 再利用同底数幂的乘法的性质计算后根据指数相等列出方程求解即可.

【解答】 解: $3 \cdot 9^m \cdot 27^m = 3 \cdot 3^{2m} \cdot 3^{3m} = 3^{1+2m+3m} = 3^{21}$,

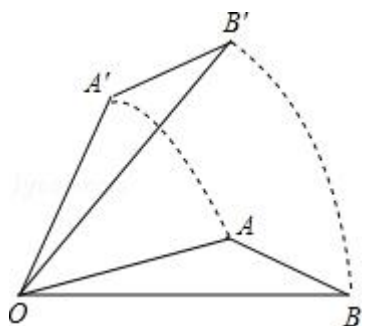
$$\therefore 1+2m+3m=21,$$

解得 $m=4$.

故选 B.

【点评】 本题考查了幂的乘方的性质的逆用，同底数幂的乘法，转化为同底数幂的乘法，理清指数的变化是解题的关键.

9. (3 分) (2012•苏州) 如图，将 $\triangle AOB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 45° 后得到 $\triangle A'OB'$ ，若 $\angle AOB=15^\circ$ ，则 $\angle AOB'$ 的度数是 ()



A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°

【分析】 根据旋转的性质旋转前后图形全等以及对应边的夹角等于旋转角，进而得出答案即可.

【解答】 解： $\because$ 将 $\triangle AOB$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 45° 后得到 $\triangle A'OB'$,

$$\therefore \angle A'OA=45^\circ, \angle AOB=\angle A'OB'=15^\circ,$$

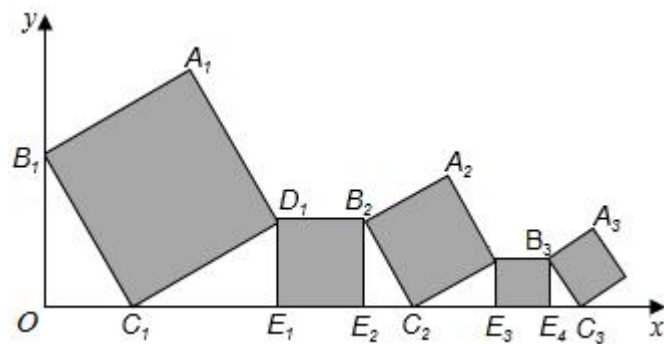
$$\therefore \angle AOB'=\angle A'OA-\angle A'OB'=45^\circ-15^\circ=30^\circ,$$

故选: B.

【点评】 此题主要考查了旋转的性质，根据旋转的性质得出 $\angle A'OA=45^\circ$ ， $\angle AOB=\angle A'OB'=15^\circ$ 是解题关键.

10. (3 分) (2012•苏州) 已知在平面直角坐标系中放置了 5 个如图所示的正方形 (用阴影表示)，点 B_1 在 y 轴上，点 C_1 、 E_1 、 E_2 、 C_2 、 E_3 、 E_4 、 C_3 在 x 轴上. 若

正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1, $\angle B_1C_1O=60^\circ$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$, 则点 A_3 到 x 轴的距离是 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}+3}{18}$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{18}$ C. $\frac{\sqrt{3}+3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

【分析】利用正方形的性质以及平行线的性质分别得出 $D_1E_1=B_2E_2=\frac{1}{2}$, $B_2C_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 进而得出 $B_3C_3=\frac{1}{3}$, 求出 $WQ=\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $FW=WA_3 \cdot \cos 30^\circ=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, 即可得出答案.

【解答】解: 过小正方形的一个顶点 W 作 $FQ \perp x$ 轴于点 Q , 过点 $A_3F \perp FQ$ 于点 F ,

$\because$ 正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1, $\angle B_1C_1O=60^\circ$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$,

$\therefore \angle B_3C_3E_4=60^\circ$, $\angle D_1C_1E_1=30^\circ$, $\angle E_2B_2C_2=30^\circ$,

$$\therefore D_1E_1=\frac{1}{2}D_1C_1=\frac{1}{2},$$

$$\therefore D_1E_1=B_2E_2=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos 30^\circ=\frac{B_2E_2}{B_2C_2}=\frac{\frac{1}{2}}{B_2C_2},$$

$$\text{解得: } B_2C_2=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore B_3E_4=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\cos 30^\circ=\frac{B_3E_4}{B_3C_3},$$

$$\text{解得: } B_3C_3=\frac{1}{3},$$

则 $WC_3 = \frac{1}{3}$,

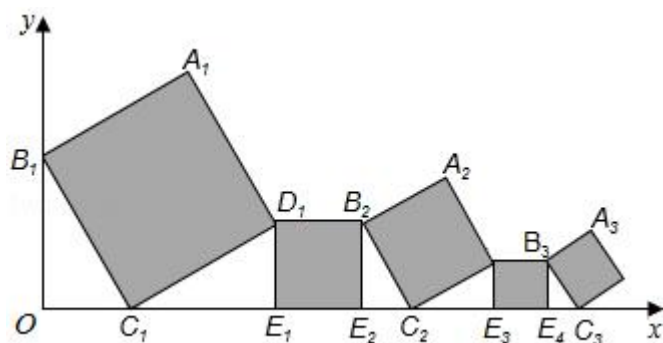
根据题意得出: $\angle WC_3Q = 30^\circ$, $\angle C_3WQ = 60^\circ$, $\angle A_3WF = 30^\circ$,

$$\therefore WQ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$FW = WA_3 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{则点 } A_3 \text{ 到 } x \text{ 轴的距离是: } FW + WQ = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{6},$$

故选: D.



【点评】 此题主要考查了正方形的性质以及锐角三角函数的应用等知识, 根据已知得出 B_3C_3 的长是解题关键.

二、填空题 (本题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3 分) (2012•苏州) 化简: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

【分析】 根据最简二次根式的方法求解即可.

【解答】 解: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故填 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【点评】 本题主要考查了二次根式的化简方法.

12. (3 分) (2012•苏州) 若 $a=2$, $a+b=3$, 则 $a^2+ab=$ 6.

【分析】 利用提公因式法进行因式分解, 然后把 $a=2$, $a+b=3$ 代入即可.

【解答】 解: $\because a=2$, $a+b=3$,

$$\therefore a^2+ab=a(a+b)=2 \times 3=6.$$

故答案为：6.

【点评】 本题考查了因式分解的应用，利用提公因式法把 a^2+ab 进行因式分解是解题的关键.

13. (3 分) (2012•苏州) 已知太阳的半径约为 696000000m, 696000000 这个数用科学记数法表示为 6.96×10^8 .

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】 解：696000000= 6.96×10^8 ,

故答案为： 6.96×10^8 .

【点评】 此题主要考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

14. (3 分) (2012•苏州) 已知扇形的圆心角为 45° ，弧长等于 $\frac{\pi}{2}$ ，则该扇形的半径为 2.

【分析】 根据弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ 可以求得该扇形的半径的长度.

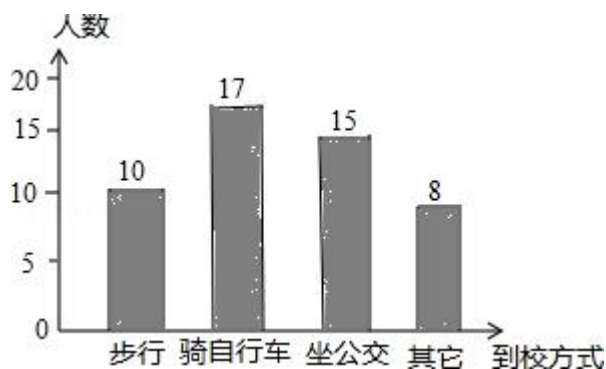
【解答】 解：根据弧长的公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，知

$$r = \frac{180l}{n\pi} = \frac{180 \times \frac{\pi}{2}}{45\pi} = 2, \text{ 即该扇形的半径为 } 2.$$

故答案是：2.

【点评】 本题考查了弧长的计算. 解题时，主要是根据弧长公式列出关于半径 r 的方程，通过解方程即可求得 r 的值.

15. (3分) (2012•苏州) 某初中学校共有学生 720 人, 该校有关部门从全体学生中随机抽取了 50 人, 对其到校方式进行调查, 并将调查的结果制成了如图所示的条形统计图, 由此可以估计全校坐公交车到校的学生有 216 人.



【分析】 先求出 50 个人里面坐公交车的人数所占的比例, 然后即可估算出全校坐公交车到校的学生.

【解答】 解: 由题意得, 50 个人里面坐公交车的人数所占的比例为: $\frac{15}{50}=30\%$,
故全校坐公交车到校的学生有: $720 \times 30\%=216$ 人.

即全校坐公交车到校的学生有 216 人.

故答案为: 216.

【点评】 此题考查了用样本估计总体的知识, 解答本题的关键是根据所求项占样本的比例, 属于基础题, 难度一般.

16. (3分) (2012•苏州) 已知点 A (x_1 , y_1)、B (x_2 , y_2) 在二次函数 $y=(x-1)^2+1$ 的图象上, 若 $x_1 > x_2 > 1$, 则 y_1 > y_2 (填“>”、“<”或“=”).

【分析】 先根据二次函数的解析式得出函数图象的对称轴, 再判断出两点的位置及函数的增减性, 进而可得出结论.

【解答】 解: $\because a=1 > 0$,

$\therefore$ 二次函数的图象开口向上,

由二次函数 $y=(x-1)^2+1$ 可知, 其对称轴为 $x=1$,

$$\therefore x_1 > x_2 > 1,$$

$\therefore$ 两点均在对称轴的右侧,

$\therefore$ 此函数图象开口向上,

$\therefore$ 在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大,

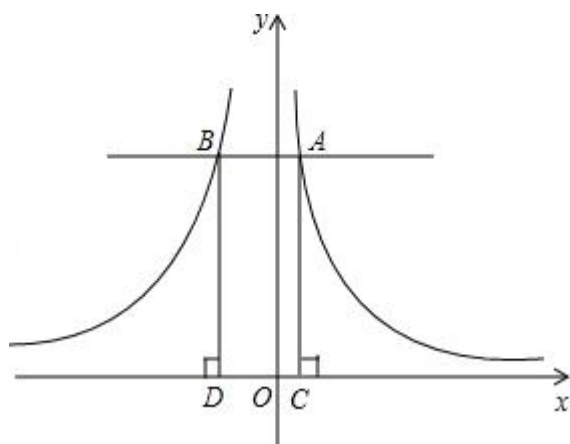
$$\therefore x_1 > x_2 > 1,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故答案为: $>$.

【点评】 本题考查的是二次函数图象上点的坐标特点, 根据题意判断出 A、B 两点的位置是解答此题的关键.

17. (3 分) (2012•苏州) 如图, 已知第一象限内的图象是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象的一个分支, 第二象限内的图象是反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 图象的一个分支, 在 x 轴的上方有一条平行于 x 轴的直线 l 与它们分别交于点 A、B, 过点 A、B 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 C、D. 若四边形 ABCD 的周长为 8 且 $AB < AC$, 则点 A 的坐标为 $(\frac{1}{3}, 3)$.



【分析】 设 A 点坐标为 $(a, \frac{1}{a})$, 利用 AB 平行于 x 轴, 点 B 的纵坐标为 $\frac{1}{a}$, 而点 B 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 图象上, 易得 B 点坐标为 $(-2a, \frac{1}{a})$, 则 $AB = a - (-2a) = 3a$, $AC = \frac{1}{a}$, 然后根据矩形的性质得到

$AB+AC=4$, 即 $3a+\frac{1}{a}=4$, 则 $3a^2-4a+1=0$, 用因式分解法解得 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=1$, 而 $AB<AC$, 则 $a=\frac{1}{3}$, 即可写出 A 点坐标.

【解答】解: 点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上, 设 A 点坐标为 $(a, \frac{1}{a})$,

$\therefore AB$ 平行于 x 轴,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 $\frac{1}{a}$,

而点 B 在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上,

$\therefore$ B 点的横坐标 $=-2 \times a = -2a$, 即 B 点坐标为 $(-2a, \frac{1}{a})$,

$\therefore AB=a-(-2a)=3a$, $AC=\frac{1}{a}$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 的周长为 8, 而四边形 ABCD 为矩形,

$\therefore AB+AC=4$, 即 $3a+\frac{1}{a}=4$,

整理得, $3a^2-4a+1=0$, $(3a-1)(a-1)=0$,

$\therefore a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=1$,

而 $AB<AC$,

$\therefore a=\frac{1}{3}$,

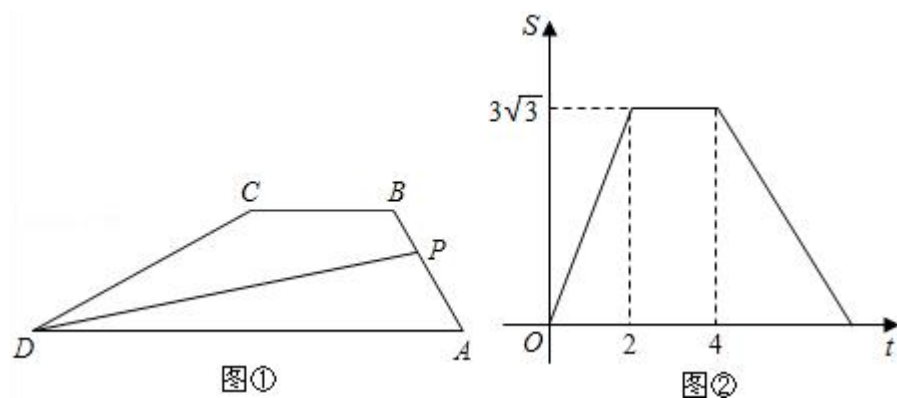
$\therefore$ A 点坐标为 $(\frac{1}{3}, 3)$.

故答案为: $(\frac{1}{3}, 3)$.

【点评】本题考查了反比例函数综合题: 点在反比例函数图象上, 点的横纵坐标满足其解析式; 利用矩形对边相等的性质建立方程以及用因式分解法解一元二次方程.

18. (3 分) (2012•苏州) 如图①, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle A=60^\circ$, 动点 P 从 A 点出发, 以 1cm/s 的速度沿着 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 的方向不停移动, 直到点 P 到达点 D 后才停止. 已知 $\triangle PAD$ 的面积 S (单位: cm^2) 与点 P 移动的时间

(单位：s) 的函数如图②所示，则点 P 从开始移动到停止移动一共用了 $(4+2\sqrt{3})$ 秒 (结果保留根号)。



【分析】 根据图②判断出 AB、BC 的长度，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E，然后求出梯形 ABCD 的高 BE，再根据 $t=2$ 时 $\triangle PAD$ 的面积求出 AD 的长度，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F，然后求出 DF 的长度，利用勾股定理列式求出 CD 的长度，然后求出 AB、BC、CD 的和，再根据时间=路程÷速度计算即可得解。

【解答】 解：由图②可知， t 在 2 到 4 秒时， $\triangle PAD$ 的面积不发生变化，
 $\therefore$ 在 AB 上运动的时间是 2 秒，在 BC 上运动的时间是 $4 - 2 = 2$ 秒，

$\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s，

$\therefore AB=2\text{cm}$ ， $BC=2\text{cm}$ ，

过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F，

则四边形 BCFE 是矩形，

$\therefore BE=CF$ ， $BC=EF=2\text{cm}$ ，

$\therefore \angle A=60^\circ$ ，

$\therefore BE=AB\sin 60^\circ=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ，

$AE=AB\cos 60^\circ=2 \times \frac{1}{2}=1$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times AD \times BE=3\sqrt{3}$ ，

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times AD \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3},$$

解得 $AD=6\text{cm}$,

$$\therefore DF=AD-AE-EF=6-1-2=3,$$

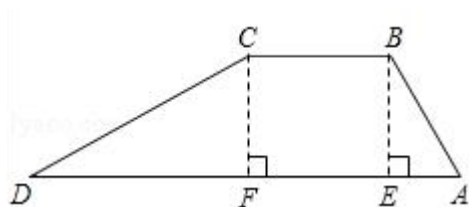
$$\text{在 Rt}\triangle CDF \text{ 中, } CD=\sqrt{CF^2+DF^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}=2\sqrt{3},$$

$$\text{所以, 动点 P 运动的总路程为 } AB+BC+CD=2+2+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 动点 P 的运动速度是 1cm/s ,

$$\therefore \text{点 P 从开始移动到停止移动一共用了 } (4+2\sqrt{3}) \div 1 = 4+2\sqrt{3} \text{ (秒)}.$$

故答案为: $(4+2\sqrt{3})$.



【点评】 本题考查了动点问题的函数图象, 根据图②的三角形的面积的变化情况判断出 AB 、 BC 的长度是解题的关键, 根据梯形的问题中, 经常作过梯形的上底边的两个顶点的高线作出辅助线也很关键.

三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 76 分)

19. (5 分) (2012•苏州) 计算: $(\sqrt{3}-1)^0 + |-2| - \sqrt{4}$.

【分析】 分别计算零指数幂、绝对值及二次根式的化简, 然后合并即可得出答案.

【解答】 解: 原式 $= 1 + 2 - 2$

$$= 1.$$

【点评】 此题考查了实数的运算及零指数幂的知识, 属于基础运算题, 解答此题的关键是熟练掌握各部分的运算法则.

20. (5 分) (2012•苏州) 解不等式组
$$\begin{cases} 3x-2 < x+2 \\ 8-x \geq 1-3(x-1) \end{cases}.$$

【分析】首先分别解出两个不等式，再根据求不等式组的解集的规律：同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到，确定解集即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} 3x-2 < x+2 & \text{①} \\ 8-x \geq 1-3(x-1) & \text{②} \end{cases}$$

由不等式①得, $x < 2$,

由不等式②得, $x \geq -2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2 \leq x < 2$.

【点评】此题主要考查了解一元一次不等式组, 关键是正确求出两个不等式的解集.

21. (5 分) (2012•苏州) 先化简, 再求值: $\frac{2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{a-2}$, 其中, $a = \sqrt{2}+1$.

【分析】将原式第二项第一个因式的分子利用完全公式分解因式, 分母利用平方差公式分解因式, 约分后再利用同分母分式的加法法则计算, 得到最简结果, 然后将 a 的值代入化简后的式子中计算, 即可得到原式的值.

【解答】解:
$$\begin{aligned} & \frac{2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{a-2} \\ &= \frac{2}{a-1} + \frac{(a-2)^2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{a-2} \\ &= \frac{2}{a-1} + \frac{a-2}{a-1} \\ &= \frac{a}{a-1}, \\ & \text{当 } a = \sqrt{2}+1 \text{ 时, 原式} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

【点评】此题考查了分式的化简求值, 分式的加减运算关键是通分, 通分的关键是找最简公分母; 分式的乘除运算关键是约分, 约分的关键是找公因式, 约分时分式的分子分母出现多项式, 应先将多项式分解因式后再约分, 此外化简求值题要先将原式化为最简时再代值.

22. (6 分) (2012•苏州) 解分式方程: $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{4}{x^2+2x}$.

【分析】两边同乘分式方程的最简公分母，将分式方程转化为整式方程，再解答，然后检验.

【解答】解：去分母得： $3x+x+2=4$,

解得： $x=\frac{1}{2}$,

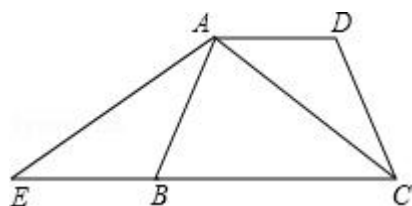
经检验， $x=\frac{1}{2}$ 是原方程的解.

【点评】本题考查了解分式方程，找到最简公分母将分式方程转化为整式方程是解题的关键.

23. (6分) (2012•苏州) 如图，在梯形ABCD中，已知 $AD\parallel BC$ ， $AB=CD$ ，延长线段CB到E，使 $BE=AD$ ，连接AE、AC.

(1) 求证： $\triangle ABE\cong\triangle CDA$;

(2) 若 $\angle DAC=40^\circ$ ，求 $\angle EAC$ 的度数.



【分析】(1) 先根据题意得出 $\angle ABE=\angle CDA$ ，然后结合题意条件利用 SAS 可判断三角形全等；

(2) 根据题意可分别求出 $\angle AEC$ 及 $\angle ACE$ 的度数，在 $\triangle AEC$ 中利用三角形的内角和定理即可得出答案.

【解答】(1) 证明：在梯形ABCD中， $\because AD\parallel BC$ ， $AB=CD$ ，

$\therefore \angle ABE=\angle BAD$ ， $\angle BAD=\angle CDA$ ，

$\therefore \angle ABE=\angle CDA$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDA$ 中，
$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDA \\ BE=DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDA$ (SAS).

(2) 解：由 (1) 得： $\angle AEB = \angle CAD$, $AE = AC$,

$\therefore \angle AEB = \angle ACE$,

$\therefore \angle DAC = 40^\circ$,

$\therefore \angle AEB = \angle ACE = 40^\circ$,

$\therefore \angle EAC = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

【点评】 此题考查了梯形、全等三角形的判定及性质，解答本题的关键是根据梯形及题意条件得出一些线段之间的关系，注意所学知识的融会贯通.

24. (6 分) (2012•苏州) 我国是一个淡水资源严重缺乏的国家，有关数据显示，中国人均淡水资源占有量仅为美国人均淡水资源占有量的 $\frac{1}{5}$ ，中、美两国人均淡水资源占有量之和为 13800m^3 ，问中、美两国人均淡水资源占有量各为多少 (单位： m^3) ?

【分析】 设中国人均淡水资源占有量为 $x\text{m}^3$ ，美国人均淡水资源占有量为 $y\text{m}^3$ ，根据题意所述等量关系得出方程组，解出即可得出答案.

【解答】 解：设中国人均淡水资源占有量为 $x\text{m}^3$ ，美国人均淡水资源占有量为 $y\text{m}^3$.

根据题意得：
$$\begin{cases} y=5x \\ x+y=13800 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=2300 \\ y=11500 \end{cases}$$

答：中、美两国人均淡水资源占有量各为 2300m^3 ， 11500m^3 .

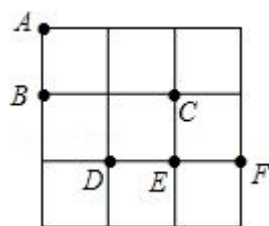
【点评】 此题考查了二元一次方程组的应用，解答本题的关键是设出未知数，根据题意所述等量关系得出方程组，难度一般.

25. (8 分) (2012•苏州) 在 3×3 的方格纸中，点 A、B、C、D、E、F 分别位

于如图所示的小正方形的顶点上.

(1) 从 A、D、E、F 四个点中任意取一点, 以所取的这一点及点 B、C 为顶点画三角形, 则所画三角形是等腰三角形的概率是 $\frac{1}{4}$;

(2) 从 A、D、E、F 四个点中先后任意取两个不同的点, 以所取的这两点及点 B、C 为顶点画四边形, 求所画四边形是平行四边形的概率是 $\frac{1}{3}$ (用树状图或列表法求解).

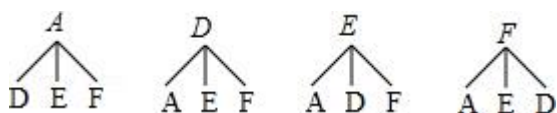


【分析】 (1) 根据从 A、D、E、F 四个点中任意取一点, 一共有 4 种可能, 只有选取 D 点时, 所画三角形是等腰三角形, 即可得出答案;

(2) 利用树状图得出从 A、D、E、F 四个点中先后任意取两个不同的点, 一共有 12 种可能, 进而得出以点 A、E、B、C 为顶点及以 D、F、B、C 为顶点所画的四边形是平行四边形, 即可求出概率.

【解答】 解: (1) 根据从 A、D、E、F 四个点中任意取一点, 一共有 4 种可能, 只有选取 D 点时, 所画三角形是等腰三角形,
故 P (所画三角形是等腰三角形) $= \frac{1}{4}$;

(2) 用“树状图”或利用表格列出所有可能的结果:



$\therefore$ 以点 A、E、B、C 为顶点及以 D、F、B、C 为顶点所画的四边形是平行四边形,

$\therefore$ 所画的四边形是平行四边形的概率 $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

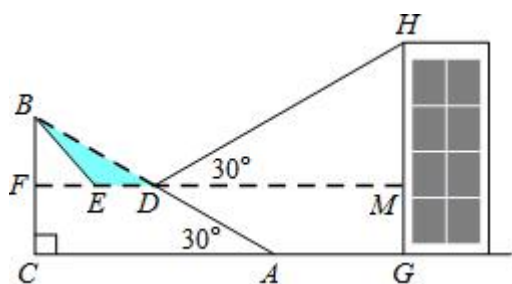
故答案为：(1) $\frac{1}{4}$, (2) $\frac{1}{3}$.

【点评】此题主要考查了利用树状图求概率，根据已知正确列举出所有结果，进而得出概率是解题关键.

26. (8 分) (2012·苏州) 如图，已知斜坡 AB 长 60 米，坡角（即 $\angle BAC$ ）为 30° ， $BC \perp AC$ ，现计划在斜坡中点 D 处挖去部分坡体（用阴影表示）修建一个平行于水平线 CA 的平台 DE 和一条新的斜坡 BE.（请将下面 2 小题的结果都精确到 0.1 米，参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）.

(1) 若修建的斜坡 BE 的坡角（即 $\angle BEF$ ）不大于 45° ，则平台 DE 的长最多为米；

(2) 一座建筑物 GH 距离坡角 A 点 27 米远（即 $AG=27$ 米），小明在 D 点测得建筑物顶部 H 的仰角（即 $\angle HDM$ ）为 30° . 点 B、C、A、G、H 在同一个平面内，点 C、A、G 在同一条直线上，且 $HG \perp CG$ ，问建筑物 GH 高为多少米？



【分析】(1) 根据题意得出， $\angle BEF$ 最大为 45° ，当 $\angle BEF=45^\circ$ 时，EF 最短，此时 ED 最长，进而得出 EF 的长，即可得出答案；

(2) 利用在 $Rt\triangle DPA$ 中， $DP=\frac{1}{2}AD$ ，以及 $PA=AD \cdot \cos 30^\circ$ 进而得出 DM 的长，利用 $HM=DM \cdot \tan 30^\circ$ 得出即可.

【解答】解：(1) $\because$ 修建的斜坡 BE 的坡角（即 $\angle BEF$ ）不大于 45° ,

$\therefore \angle BEF$ 最大为 45° ,

当 $\angle BEF=45^\circ$ 时，EF 最短，此时 ED 最长，

$$\therefore BF=EF=\frac{1}{2}BD=15,$$

故: $DE=DF-EF=15(\sqrt{3}-1)=11.0$ (米);

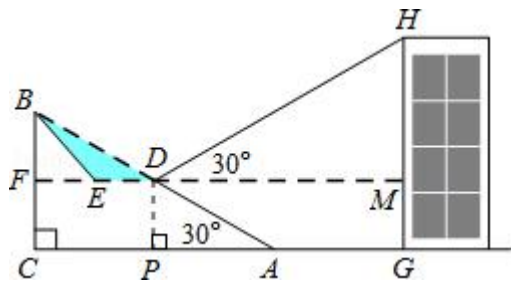
(2) 过点 D 作 $DP \perp AC$, 垂足为 P.

在 $\text{Rt}\triangle DPA$ 中, $DP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 30 = 15$,

在矩形 DPGM 中, $MG=DP=15$, $DM=PG=15\sqrt{3}+27$,

$$HM=DM \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (15\sqrt{3}+27) = 15+9\sqrt{3}.$$

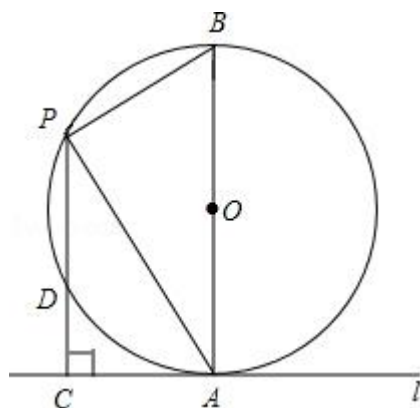
答: 建筑物 GH 高约为 45.6 米.



27. (8分) (2012•苏州) 如图, 已知半径为 2 的 $\odot O$ 与直线 l 相切于点 A , 点 P 是直径 AB 左侧半圆上的动点, 过点 P 作直线 l 的垂线, 垂足为 C , PC 与 $\odot O$ 交于点 D , 连接 PA 、 PB , 设 PC 的长为 x ($2 < x < 4$).

(1) 当 $x = \frac{5}{2}$ 时, 求弦 PA、PB 的长度;

(2) 当 x 为何值时, $PD \cdot CD$ 的值最大? 最大值是多少?



【分析】(1) 由直线 l 与圆相切于点 A , 且 AB 为圆的直径, 根据切线的性质得到 AB 垂直于直线 l , 又 PC 垂直于直线 l , 根据垂直于同一条直线的两直线平行, 得到 AB 与 PC 平行, 根据两直线平行内错角相等得到一对内错角相等, 再由一对直角相等, 利用两对对应角相等的两三角形相似可得出 $\triangle PCA$ 与 $\triangle PAB$ 相似, 由相似得比例, 将 PC 及直径 AB 的长代入求出 PA 的长, 在直角三角形 PAB 中, 由 AB 及 PA 的长, 利用勾股定理即可求出 PB 的长;

(2) 过 O 作 OE 垂直于 PD, 与 PD 交于点 E, 由垂径定理得到 E 为 PD 的中点, 再由三个角为直角的四边形为矩形得到 OACE 为矩形, 根据矩形的对边相等, 可得出 $EC=OA=2$, 用 $PC-EC$ 的长表示出 PE, 根据 $PD=2PE$ 表示出 PD, 再由 $PC-PD$ 表示出 CD, 代入所求的式子中, 整理后得到关于 x 的二次函数, 配方后根据自变量 x 的范围, 利用二次函数的性质即可求出所求式子的最大值及此时 x 的取值.

【解答】解: (1) $\because \odot O$ 与直线 l 相切于点 A , 且 AB 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore AB \perp l, \text{ 又 } \because PC \perp l,$$
$$\therefore AB \parallel PC,$$

$$\therefore \angle CPA = \angle PAB,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle APB = 90^\circ, \text{ 又 } PC \perp l,$$

$$\therefore \angle PCA = \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PCA \sim \triangle APB,$$

$$\therefore \frac{PC}{AP} = \frac{PA}{AB}, \text{ 即 } PA^2 = PC \cdot AB,$$

$$\because PC = \frac{5}{2}, AB = 4,$$

$$\therefore PA = \sqrt{\frac{5}{2} \times 4} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle APB \text{ 中, } AB = 4, PA = \sqrt{10},$$

$$\text{由勾股定理得: } PB = \sqrt{16 - 10} = \sqrt{6};$$

(2) 过 O 作 $OE \perp PD$, 垂足为 E ,

$\because PD$ 是 $\odot O$ 的弦, $OE \perp PD$,

$$\therefore PE = ED,$$

$$\text{又 } \because \angle CEO = \angle ECA = \angle OAC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OACE$ 为矩形,

$$\therefore CE = OA = 2, \text{ 又 } PC = x,$$

$$\therefore PE = ED = PC - CE = x - 2,$$

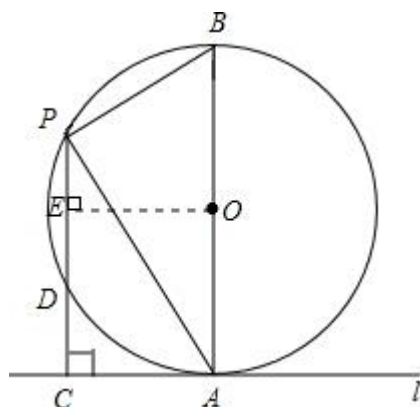
$$\therefore PD = 2(x - 2),$$

$$\therefore CD = PC - PD = x - 2(x - 2) = x - 2x + 4 = 4 - x,$$

$$\therefore PD \cdot CD = 2(x - 2) \cdot (4 - x) = -2x^2 + 12x - 16 = -2(x - 3)^2 + 2,$$

$$\because 2 < x < 4,$$

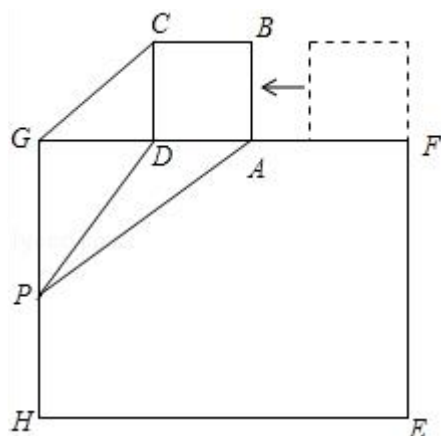
∴ 当 $x=3$ 时, $PD \cdot CD$ 的值最大, 最大值是 2.



【点评】 此题考查了切线的性质, 平行线的性质, 矩形的判定与性质, 垂径定理, 勾股定理, 相似三角形的判定与性质, 以及二次函数的性质, 熟练掌握性质及定理是解本题的关键.

28. (9 分) (2012•苏州) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边 AD 与矩形 $EFGH$ 的边 FG 重合, 将正方形 $ABCD$ 以 1cm/s 的速度沿 FG 方向移动, 移动开始前点 A 与点 F 重合, 在移动过程中, 边 AD 始终与边 FG 重合, 连接 CG , 过点 A 作 CG 的平行线交线段 GH 于点 P , 连接 PD . 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1cm , 矩形 $EFGH$ 的边 FG , GH 的长分别为 4cm , 3cm , 设正方形移动时间为 x (s), 线段 GP 的长为 y (cm), 其中 $0 \leq x \leq 2.5$.

- (1) 试求出 y 关于 x 的函数关系式, 并求当 $y=3$ 时相应 x 的值;
- (2) 记 $\triangle DGP$ 的面积为 S_1 , $\triangle CDG$ 的面积为 S_2 . 试说明 $S_1 - S_2$ 是常数;
- (3) 当线段 PD 所在直线与正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 垂直时, 求线段 PD 的长.



【分析】 (1) 根据题意表示出 AG、GD 的长度，再由 $\triangle GCD \sim \triangle APG$ ，利用对应边成比例可解出 x 的值.

(2) 利用 (1) 得出的 y 与 x 的关系式表示出 S_1 、 S_2 ，然后作差即可.

(3) 延长 PD 交 AC 于点 Q，然后判断 $\triangle DGP$ 是等腰直角三角形，从而结合 x 的范围得出 x 的值，在 $Rt\triangle DGP$ 中，解直角三角形可得出 PD 的长度.

【解答】 解：(1) $\because CG \parallel AP$,

$$\therefore \angle CGD = \angle GAP,$$

$$\text{又} \because \angle CDG = \angle AGP,$$

$$\therefore \triangle GCD \sim \triangle APG,$$

$$\therefore \frac{CD}{GD} = \frac{PG}{AG},$$

$$\because GF = 4, CD = DA = 1, AF = x,$$

$$\therefore GD = 3 - x, AG = 4 - x,$$

$$\therefore \frac{1}{3-x} = \frac{y}{4-x}, \text{ 即 } y = \frac{4-x}{3-x},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \frac{4-x}{3-x},$$

$$\text{当 } y = 3 \text{ 时, } \frac{4-x}{3-x} = 3, \text{ 解得 } x = 2.5,$$

经检验的 $x = 2.5$ 是分式方程的根.

故 x 的值为 2.5;

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \therefore S_1 &= \frac{1}{2} GP \cdot GD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x}{3-x} \cdot (3-x) = \frac{4-x}{2} \text{ (cm}^2\text{)}, \\
 S_2 &= \frac{1}{2} GD \cdot CD = \frac{1}{2} (3-x) \times 1 = \frac{3-x}{2} \text{ (cm}^2\text{)}, \\
 \therefore S_1 - S_2 &= \frac{4-x}{2} - \frac{3-x}{2} = \frac{1}{2} \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ 即为常数;}
 \end{aligned}$$

(3) 延长 PD 交 AC 于点 Q.

$\therefore$ 正方形 ABCD 中, AC 为对角线,

$\therefore \angle CAD = 45^\circ$,

$\therefore PQ \perp AC$,

$\therefore \angle ADQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle GDP = \angle ADQ = 45^\circ$.

$\therefore \triangle DGP$ 是等腰直角三角形, 则 $GD = GP$,

$$\therefore 3-x = \frac{4-x}{3-x},$$

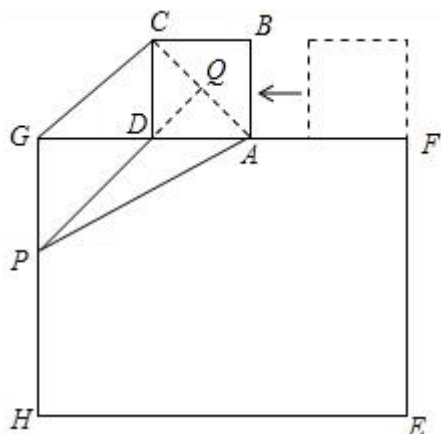
化简得: $x^2 - 5x + 5 = 0$.

$$\text{解得: } x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2.5,$$

$$\therefore x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DGP \text{ 中, } PD = \frac{GD}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} (3-x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10}}{2} \text{ (cm)}.$$



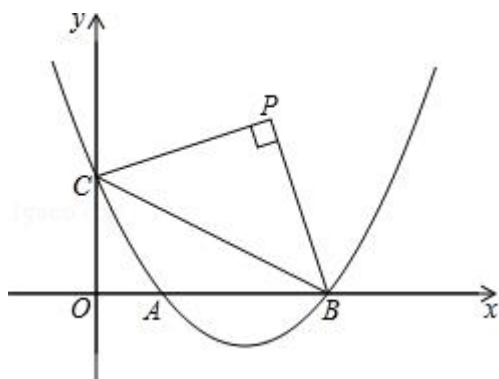
【点评】此题考查了正方形的性质、等腰三角形的性质及解直角三角形的知识，解答本题的关键是用移动的时间表示出有关线段的长度，然后运用所学知识进行求解.

29. (10 分) (2012•苏州) 如图，已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(b+1)x + \frac{b}{4}$ (b 是实数且 $b > 2$) 与 x 轴的正半轴分别交于点 A 、 B (点 A 位于点 B 的左侧)，与 y 轴的正半轴交于点 C .

(1) 点 B 的坐标为 $(b, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, \frac{b}{4})$ (用含 b 的代数式表示)；

(2) 请你探索在第一象限内是否存在点 P ，使得四边形 $PCOB$ 的面积等于 $2b$ ，且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由；

(3) 请你进一步探索在第一象限内是否存在点 Q ，使得 $\triangle QCO$ ， $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似 (全等可作相似的特殊情况)？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由.



【分析】(1) 令 $y=0$ ，即 $y=\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(b+1)x + \frac{b}{4}=0$ ，解关于 x 的一元二次方程即可求出 A 、 B 横坐标，令 $x=0$ ，求出 y 的值即 C 的纵坐标；

(2) 存在，先假设存在这样的点 P ，使得四边形 $PCOB$ 的面积等于 $2b$ ，且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形．设点 P 的坐标为 (x, y) ，连接 OP ，过 P 作 $PD \perp x$ 轴， $PE \perp y$ 轴，垂足分别为 D 、 E ，利用已知条件证明 $\triangle PEC \cong \triangle PDB$ ，进而求出 x 和 y 的值，从而求出 P 的坐标；

(3) 存在，假设存在这样的点 Q ，使得 $\triangle QCO$ ， $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似，有条件可知：要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle QAB$ 相似，只能 $\angle QAO = \angle BAQ = 90^\circ$ ，即 $QA \perp x$ 轴；要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle OQC$ 相似，只能 $\angle QCO = 90^\circ$ 或 $\angle OQC = 90^\circ$ ；再分别讨论求出满足题意 Q 的坐标即可．

【解答】解：(1) 令 $y=0$ ，即 $y=\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(b+1)x + \frac{b}{4}=0$ ，

解得： $x=1$ 或 b ，

$\therefore b$ 是实数且 $b > 2$ ，点 A 位于点 B 的左侧，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(b, 0)$ ，

令 $x=0$ ，

解得： $y=\frac{b}{4}$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, \frac{b}{4})$ ，

故答案为: $(b, 0), (0, \frac{b}{4})$;

(2) 存在,

假设存在这样的点 P, 使得四边形 PCOB 的面积等于 $2b$, 且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形.

设点 P 的坐标为 (x, y) , 连接 OP.

$$\text{则 } S_{\text{四边形 PCOB}} = S_{\triangle PCO} + S_{\triangle POB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y = 2b,$$

$$\therefore x + 4y = 16.$$

过 P 作 $PD \perp x$ 轴, $PE \perp y$ 轴, 垂足分别为 D、E,

$$\therefore \angle PEO = \angle EOD = \angle ODP = 90^\circ.$$

$\therefore$ 四边形 PEO D 是矩形.

$$\therefore \angle EPD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle EPC = \angle DPB.$$

$$\therefore \triangle PEC \cong \triangle PDB, \therefore PE = PD, \text{ 即 } x = y.$$

$$\text{由 } \begin{cases} x=y \\ x+4y=16 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{16}{5} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\text{由 } \triangle PEC \cong \triangle PDB \text{ 得 } EC = DB, \text{ 即 } \frac{16}{5} - \frac{b}{4} = b - \frac{16}{5},$$

$$\text{解得 } b = \frac{128}{25} > 2 \text{ 符合题意.}$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } (\frac{16}{5}, \frac{16}{5});$$

(3) 假设存在这样的点 Q, 使得 $\triangle QCO$, $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似.

$$\therefore \angle QAB = \angle AOQ + \angle AQO,$$

$$\therefore \angle QAB > \angle AOQ, \angle QAB > \angle AQO.$$

$\therefore$ 要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle QAB$ 相似, 只能 $\angle QAO = \angle BAQ = 90^\circ$, 即 $QA \perp x$ 轴.

$$\therefore b > 2,$$

$$\therefore AB > OA,$$

$$\therefore \angle QOA > \angle ABQ.$$

$\therefore$ 只能 $\angle AOQ = \angle AQB$. 此时 $\angle OQB = 90^\circ$,

由 $QA \perp x$ 轴知 $QA \parallel y$ 轴.

$$\therefore \angle COQ = \angle OQA.$$

$\therefore$ 要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle OQC$ 相似, 只能 $\angle QCO = 90^\circ$ 或 $\angle OQC = 90^\circ$.

(I) 当 $\angle OCQ = 90^\circ$ 时, $\triangle CQO \cong \triangle QOA$.

$$\therefore AQ = CO = \frac{b}{4}.$$

由 $AQ^2 = OA \cdot AB$ 得: $\left(\frac{b}{4}\right)^2 = b - 1$.

$$\text{解得: } b = 8 \pm 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore b > 2,$$

$$\therefore b = 8 + 4\sqrt{3}.$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标是 $(1, 2 + \sqrt{3})$.

(II) 当 $\angle OQC = 90^\circ$ 时, $\triangle OCQ \sim \triangle QOA$,

$$\therefore \frac{OQ}{CO} = \frac{AQ}{QO}, \text{ 即 } OQ^2 = OC \cdot AQ.$$

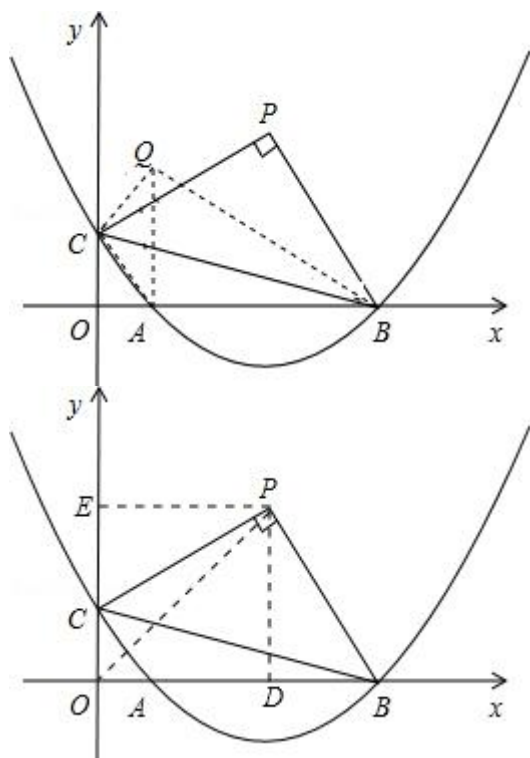
$$\text{又 } OQ^2 = OA \cdot OB,$$

$$\therefore OC \cdot AQ = OA \cdot OB. \text{ 即 } \frac{b}{4} \cdot AQ = 1 \times b.$$

解得: $AQ = 4$, 此时 $b = 17 > 2$ 符合题意,

$\therefore$ 点 Q 的坐标是 $(1, 4)$.

∴ 综上所述可知，存在点 $Q(1, 2+\sqrt{3})$ 或 $Q(1, 4)$ ，使得 $\triangle QCO$ ， $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似。



【点评】 此题是一道综合题，难度较大，主要考查二次函数的性质，全等三角形的判定和性质，以及相似三角形的判定和性质，还考查等腰三角形的性质及勾股定理，同时还让学生探究存在性问题，对待问题要思考全面，学会分类讨论的思想。

参与本试卷答题和审题的老师有： cair.； zhjh； lantin； zcx； CJX； wd1899；
gbl210； sd2011； ln_86； 蓝月梦； dbz1018； caicl； gsls； 星期天； sks（排名
不分先后）

菁优网

2017 年 7 月 12 日