

2011 年苏州市初中毕业暨升学考试试卷

数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考点名称、考场号、座位号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡的相应位置上, 并认真核对条形码上的准考证号、姓名是否与本人相符合;
3. 答选择题必须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案; 答非选择题须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡指定的位置上, 不在答题区域内的答案一律无效, 不得用其他笔答题;
4. 考生答题必须答在答题卡上, 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破, 答在试卷和草稿纸上无效。

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答题卡相对应的位置上。

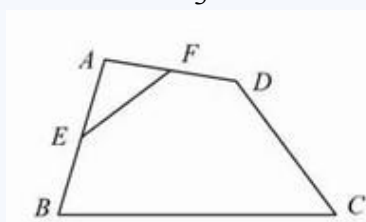
1. $2 \times (-\frac{1}{2})$ 的结果是
A. -4 B. -1 C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{2}$
2. $\triangle ABC$ 的内角和为
A. 180° B. 360° C. 540° D. 720°
3. 已知地球上海洋面积约为 $316\,000\,000\text{km}^2$, $316\,000\,000$ 这个数用科学记数法可表示为
A. 3.61×10^6 B. 3.61×10^7 C. 3.61×10^8 D. 3.61×10^9
4. 若 $m \cdot 2^3 = 2^6$, 则 m 等于
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
5. 有一组数据: 3, 4, 5, 6, 6, 则下列四个结论中正确的是
A. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 4.8, 6, 6
B. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 5, 5, 5
C. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 4.8, 6, 5
D. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 5, 6, 6
6. 不等式组 $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \frac{x}{2} < 3 \end{cases}$ 的所有整数解之和是
A. 9 B. 12 C. 13 D. 15
7. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{ab}{a-b}$ 的值是
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2
8. 下列四个结论中, 正确的是
A. 方程 $x + \frac{1}{x} = -2$ 有两个不相等的实数根
B. 方程 $x + \frac{1}{x} = 1$ 有两个不相等的实数根
C. 方程 $x + \frac{1}{x} = 2$ 有两个不相等的实数根
D. 方程 $x + \frac{1}{x} = a$ (其中 a 为常数, 且 $|a| > 2$) 有两个不相等的实数根
9. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是 AB 、 AD 的中点。若 $EF = 2$, $BC = 5$, $CD = 3$, 则 $\tan C$ 等于

A. $\frac{3}{4}$

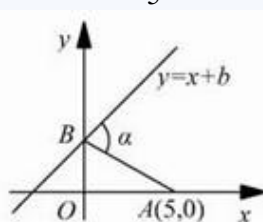
B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$



(第9题)



(第10题)

10. 如图, 已知 A 点坐标为 (5, 0), 直线 $y = x + b (b > 0)$ 与 y 轴交于点 B, 连接 AB, $\angle a = 75^\circ$, 则 b 的值为

A. 3

B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

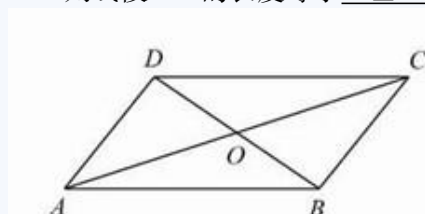
C. 4

D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

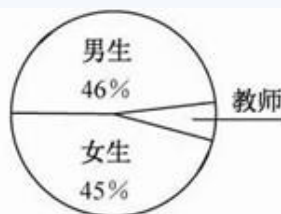
二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分, 把答案直接填在答题卡相对应的位置上。

11. 分解因式: $a^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 如图, 在四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, AC、BD 相交于点 O. 若 $AC = 6$, 则线段 AO 的长度等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第12题)



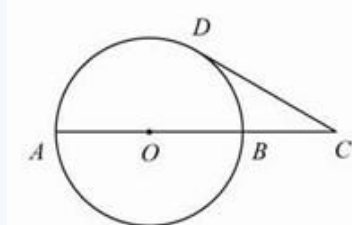
(第13题)

13. 某初中学校的男生、女生以及教师人数的扇形统计图如图所示, 若该校男生、女生以及教师的总人数为 1200 人, 则根据图中信息, 可知该校教师共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 人.

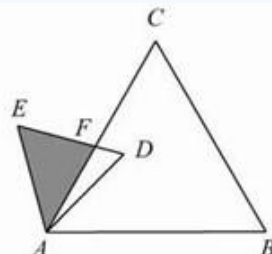
14. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 a、b 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则代数式 $(a-b)(a+b-2) + ab$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条直径, 延长 AB 至 C 点, 使得 $AC = 3BC$, CD 与 $\odot O$ 相切, 切点为 D. 若 $CD = \sqrt{3}$, 则线段 BC 的长度等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第16题)



(第17题)

17. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $AB = 2AD$, $\angle BAD = 45^\circ$, AC 与 DE 相交于点 F, 则 $\triangle AEF$ 的面积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ (结果保留根号).

18. 如图, 已知点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$, $AB \perp x$ 轴, 垂足为 B, 连接 OA, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$



($k>0$) 的图象与线段 OA 、 AB 分别交于点 C 、 D 。若 $AB=3BD$ ，以点 C 为圆心， CA 的 $\frac{5}{4}$ 倍的长为半径作圆，则该圆与 x 轴的位置关系是 相切 (填“相离”、“相切”或“相交”).

三、解答题：本大题共 11 小题，共 76 分，把解答过程写在答题卡相对应的位置上，解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明。作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔。

19. (本题满分 5 分)

计算： $2^2 + |-1| - \sqrt{9}$.

20. (本题满分 5 分)

解不等式： $3 - 2(x-1) < 1$.

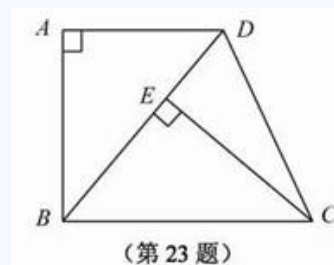
21. (本题满分 5 分)

先化简，再求值： $\left(a - 1 + \frac{2}{a+1}\right) \div (a^2 + 1)$ ，其中 $a = \sqrt{2} - 1$.

22. (本题满分 6 分) 如图，已知四边形 $ABCD$ 是梯形， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $BC = BD$ ， $CE \perp BD$ ，垂足为 E 。

(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle ECB$ ；

(2) 若 $\angle DBC = 50^\circ$ ，求 $\angle DCE$ 的度数。

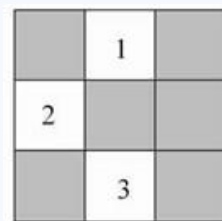


23. (2011·苏州) 已知 $|a-1| + \sqrt{b+2} = 0$ ，求方程 $\frac{a}{x} + bx = 1$ 的解。

24. (本题满分 6 分) 如图所示的方格地面上，标有编号 1、2、3 的 3 个小方格地面是空地，另外 6 个小方格地面是草坪，除此以外小方格地面完全相同。

(1) 一只自由飞行的小鸟，将随意地落在图中所示的方格地面上，求小鸟落在草坪上的概率；

(2) 现准备从图中所示的 3 个小方格空地中任意选取 2 个种植草坪，则编号为 1、2 的 2 个小方格空地种植草坪的概率是多少 (用树状图或列表法求解)？

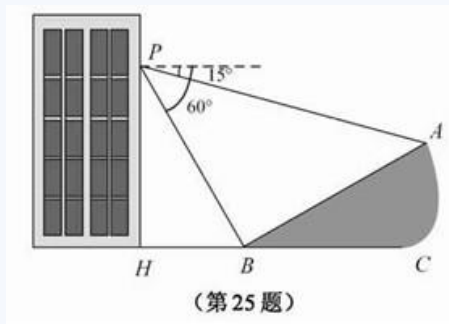


(第 24 题)

25. (本题满分 5 分) 如图, 小明在大楼 30 米高 (即 $PH = 30$ 米) 的窗口 P 处进行观测, 测得山坡上 A 处的俯角为 15° , 山脚 B 处的俯角为 60° , 已知该山坡的坡度 i (即 $\tan \angle ABC$) 为 $1: \sqrt{3}$, 点 P 、 H 、 B 、 C 、 A 在同一个平面上. 点 H 、 B 、 C 在同一条直线上, 且 $PH \perp HC$.

(1) 山坡坡角 (即 $\angle ABC$) 的度数等于 ▲ 度;

(2) 求 A 、 B 两点间的距离 (结果精确到 0.1 米, 参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$).



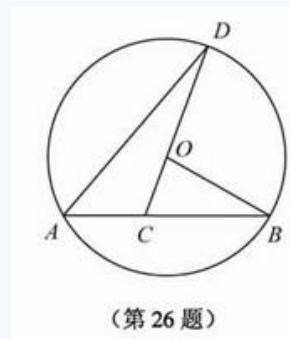
(第 25 题)

26. (本题满分 8 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, $OB = 2$, $\angle B = 30^\circ$, C 是弦 AB 上的任意一点 (不与点 A 、 B 重合), 连接 CO 并延长 CO 交于 $\odot O$ 于点 D , 连接 AD .

(1) 弦长 AB 等于 ▲ (结果保留根号);

(2) 当 $\angle D = 20^\circ$ 时, 求 $\angle BOD$ 的度数;

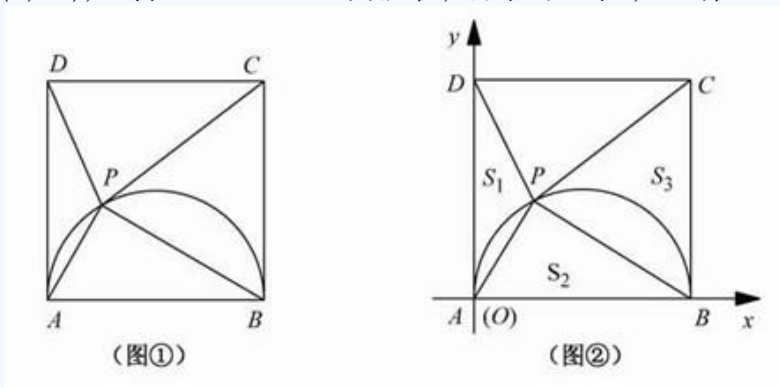
(3) 当 AC 的长度为多少时, 以 A 、 C 、 D 为顶点的三角形与以 B 、 C 、 O 为顶点的三角形相似? 请写出解答过程.



(第 26 题)

27. (本题满分 8 分) 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 以 AB 为直径在正方形内作半圆, P 是半圆上的动点 (不与点 A 、 B 重合), 连接 PA 、 PB 、 PC 、 PD .

- (1)如图①, 当 PA 的长度等于 ▲ 时, $\angle PAB = 60^\circ$;
 当 PA 的长度等于 ▲ 时, $\triangle PAD$ 是等腰三角形;
 (2)如图②, 以 AB 边所在直线为 x 轴、 AD 边所在直线为 y 轴, 建立如图所示的直角坐标系 (点 A 即为原点 O), 把 $\triangle PAD$ 、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 的面积分别记为 S_1 、 S_2 、 S_3 . 坐标为 (a, b) , 试求 $2S_1S_3 - S_2^2$ 的最大值, 并求出此时 a, b 的值.



28. (本题满分 9 分) 如图①, 小慧同学把一个正三角形纸片 (即 $\triangle OAB$) 放在直线 l_1 上, OA 边与直线 l_1 重合, 然后将三角形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 120° , 此时点 O 运动到了点 O_1 处, 点 B 运动到了点 B_1 处; 小慧又将三角形纸片 AO_1B_1 绕点 B_1 按顺时针方向旋转 120° , 此时点 A 运动到了点 A_1 处, 点 O_1 运动到了点 O_2 处 (即顶点 O 经过上述两次旋转到达 O_2 处).

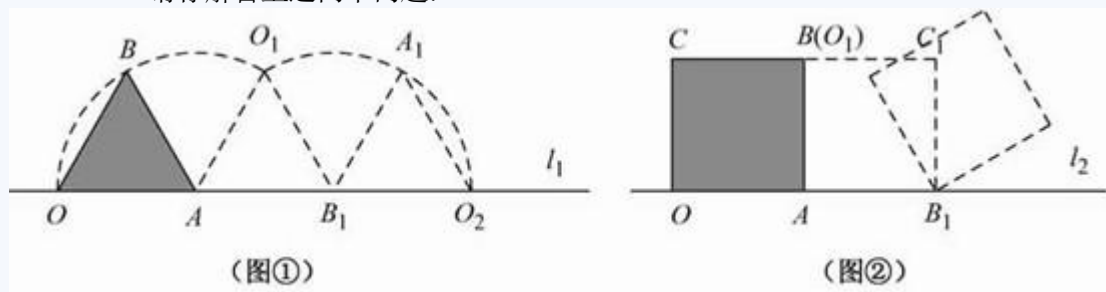
小慧还发现: 三角形纸片在上述两次旋转的过程中, 顶点 O 运动所形成的图形是两段圆弧, 即 $\widehat{OO_1}$ 和 $\widehat{O_1O_2}$, 顶点 O 所经过的路程是这两段圆弧的长度之和, 并且这两段圆弧与直线 l_1 围成的图形面积等于扇形 AOO_1 的面积、 $\triangle AO_1B_1$ 的面积和扇形 $B_1O_1O_2$ 的面积之和.

小慧进行类比研究: 如图②, 她把边长为 1 的正方形纸片 $OABC$ 放在直线 l_2 上, OA 边与直线 l_2 重合, 然后将正方形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 90° , 此时点 O 运动到了点 O_1 处 (即点 B 处), 点 C 运动到了点 C_1 处, 点 B 运动到了点 B_1 处; 小慧又将正方形纸片 $AO_1C_1B_1$ 绕顶点 B_1 按顺时针方向旋转 90° , $\dots\dots$, 按上述方法经过若干次旋转后. 她提出了如下问题:

问题①：若正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过 3 次旋转，求顶点 O 经过的路程，并求顶点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线 l_2 围成图形的面积；若正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过 5 次旋转，求顶点 O 经过的路程；

问题②：正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过多少次旋转，顶点 O 经过的路程是 $\frac{41+20\sqrt{2}}{2}\pi$ ？

请你解答上述两个问题。



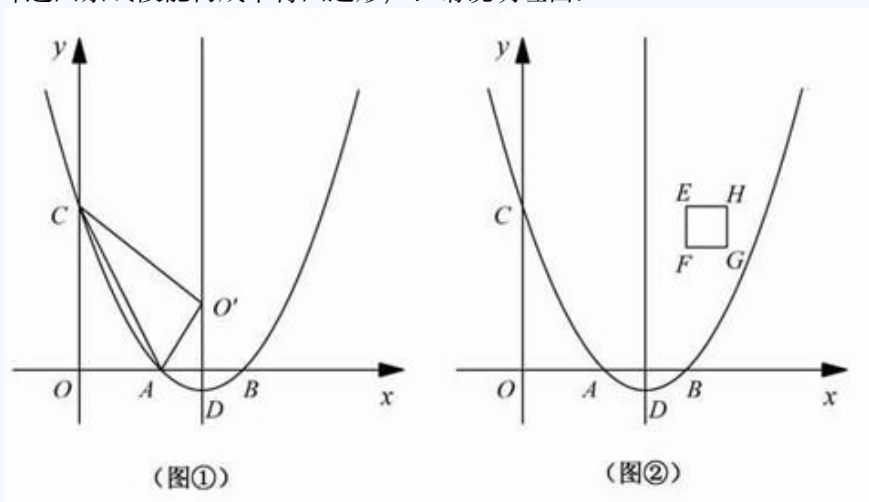
29. (本题满分 10 分) 已知二次函数 $y = a(x^2 - 6x + 8)$ ($a > 0$) 的图象与 x 轴分别交于点 A 、

B ，与 y 轴交于点 C ，点 D 是抛物线的顶点。

(1)如图①，连接 AC ，将 $\triangle OAC$ 沿直线 AC 翻折，若点 O 的对应点 O' 恰好落在该抛物线的对称轴上，求实数 a 的值；

(2)如图②，在正方形 $EFGH$ 中，点 E 、 F 的坐标分别是 $(4, 4)$ 、 $(4, 3)$ ，边 HG 位于边 EF 的右侧。小林同学经过探索后发现了一个正确的命题：“若点 P 是边 EH 或边 HG 上的任意一点，则四条线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 不能与任何一个平行四边形的四条边对应相等（即这四条线段不能构成平行四边形）。”若点 P 是边 EF 或边 FG 上的任意一点，刚才的结论是否也成立？请你积极探索，并写出探索过程；

(3)如图②，当点 P 在抛物线对称轴上时，设点 P 的纵坐标 t 是大于 3 的常数，试问：是否存在一个正数 a ，使得四条线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 与一个平行四边形的四条边对应相等（即这四条线段能构成平行四边形）？请说明理由。



江苏省苏州市 2011 年初中毕业暨升学考试试卷数学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分

1. $2 \times (-\frac{1}{2})$ 的结果是

- A. -4 B. -1 C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

【答案】B。

【考点】有理数乘法。

【分析】利用有理数运算法则，直接得出结果数。

2. $\triangle ABC$ 的内角和为

- A. 180° B. 360° C. 540° D. 720°

【答案】A

【考点】三角形的内角和定理。

【分析】利用三角形的内角和定理，直接得出。

3. 已知地球上海洋面积约为 $316\,000\,000\text{km}^2$ ， $316\,000\,000$ 这个数用科学记数法可表示为

- A. 3.61×10^6 B. 3.61×10^7 C. 3.61×10^8 D. 3.61×10^9

【答案】C。

【考点】科学记数法。

【分析】利用科学记数法的计算方法，直接得出结果。

4. 若 $m \cdot 2^3 = 2^6$ ，则 m 等于

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】D。

【考点】指数运算法则。

【分析】利用指数运算法则，直接得出结果， $m = 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3 = 8$ 。

5. 有一组数据：3，4，5，6，6，则下列四个结论中正确的是

- A. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 4.8，6，6
B. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 5，5，5
C. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 4.8，6，5
D. 这组数据的平均数、众数、中位数分别是 5，6，6

【答案】C。

【考点】平均数、众数、中位数。

【分析】平均数 $= \frac{3+4+5+5+6}{5} = 4.8$ ，众数 6，中位数 5。

6. 不等式组 $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \frac{x}{2} < 3 \end{cases}$ 的所有整数解之和是

- A. 9 B. 12 C. 13 D. 15

【答案】B。

【考点】不等式组。

【分析】解不等式组可得 $3 \leq x < 6$ ，其间所有整数解之和是 $3+4+5=12$ 。

7. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{ab}{a-b}$ 的值是

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

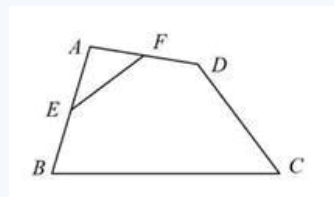
C. 2

D. -2

【答案】D.

【考点】代数式变形。

【分析】 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab}{a-b} = -2$ 。



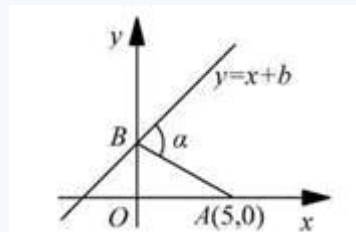
8. 下列四个结论中，正确的是

A. 方程 $x + \frac{1}{x} = -2$ 有两个不相等的实数根

B. 方程 $x + \frac{1}{x} = 1$ 有两个不相等的实数根

C. 方程 $x + \frac{1}{x} = 2$ 有两个不相等的实数根

D. 方程 $x + \frac{1}{x} = a$ (其中 a 为常数, 且 $|a| > 2$) 有两个不相等的实数根



9. 如图，在四边形 ABCD 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点。若 $EF = 2$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$ ，则 $\tan C$ 等于

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【考点】三角形中位线定理，勾股定理，锐角三角函数定义。

【分析】连接 BD，在 $\triangle ABD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点，且 $EF = 2$ ， $\therefore BD = 4$

在 $\triangle BDC$ 中， $BD = 4$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$ ，满足 $BC^2 = BD^2 + CD^2$ ， $\therefore \triangle BDC$ 是直角三角形。

所以 $\tan C = \frac{BD}{CD} = \frac{4}{3}$ 。

10. 如图，已知 A 点坐标为 (5, 0)，直线 $y = x + b$ ($b > 0$) 与 y 轴交于点 B，连接 AB， $\angle a = 75^\circ$ ，则 b 的值为

A. 3

B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

C. 4

D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

【答案】B.

【考点】一次函数，特殊角三角函数值。

【分析】在 $\triangle OBA$ 中， $\because \angle OBA = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ ， $OA = 5$ ， $\therefore b = OB = \frac{OA}{\tan OBA} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

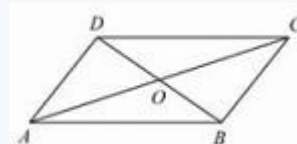
二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分

11. 分解因式： $a^2 - 9 =$ 。

【答案】 $(a+3)(a-3)$ 。

【考点】平方差公式。

【分析】利用平方差公式，直接得出结果。

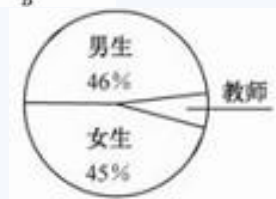


12. 如图，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，AC、BD 相交于点 O。若 $AC = 6$ ，则线段 AO 的长度等于 。

【答案】3.

【考点】平行四边形对角互相平分的性质。

【分析】利用平行四边形对角互相平分的性质，直接得出结果



13. 某初中学校的男生、女生以及教师人数的扇形统计图如图所示，若该校男生、女生以及教师的总人数为 1200 人，则根据图中信息，可知该校教师共有 人。

【答案】108.

【考点】 扇形统计图,频数。

【分析】 该校教师共有 $1200 \times (1 - 46\% - 45\%) = 108$

14. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ 的自变量 x 的取值范围是 ▲。

【答案】 $x > 1$

【考点】 函数自变量的取值范围, 二次根式, 分式。

【分析】 利用二次根式的定义和分式, 直接得出结果。

15. 已知 a, b 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则代数式 $(a-b)(a+b-2) + ab$ 的值等于 ▲。

【答案】 -1。

【考点】 一元二次方程根与系数的关系。

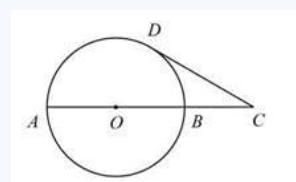
【分析】 $\because a, b$ 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, $\therefore a + b = 2, ab = -1$
 $\therefore (a-b)(a+b-2) + ab = (a-b)(2-2) - 1 = -1$ 。

16. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条直径, 延长 AB 至 C 点, 使得 $AC = 3BC$, CD 与 $\odot O$ 相切, 切点为 D 。若 $CD = \sqrt{3}$, 则线段 BC 的长度等于 ▲。

【答案】 65

【考点】 圆的切线性质, 勾股定理。

【分析】 连接 OD , 则 $OD \perp CD$ 。由 $AC = 3BC$ 有 $OC = 2BC = 2OB$ 。在直角三角形 CDO 中, 根据勾股定理有 $OC^2 = OB^2 + OD^2 \Rightarrow (2BC)^2 = BC^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow BC = 1$



17. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $AB = 2AD$, $\angle BAD = 45^\circ$, AC 与 DE 相交于点 F , 则 $\triangle AEF$ 的面积等于 ▲ (结果保留根号)。

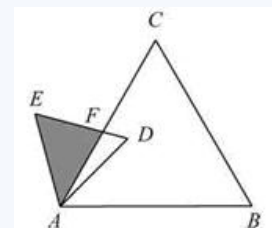
【答案】 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 。

【考点】 相似三角形, 等边三角形, 特殊角的三角函数。

【分析】 由 $AB = 2AD$ $AB = 2AD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = 2$, 又 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

而由 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, $\triangle ABC$ 是等边三角形知 $\triangle ADE$ 也是等边三角形, 其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}AE^2 \Rightarrow AE = 1$ 。作 $FG \perp AE$ 于 G , $\because \angle BAD = 45^\circ$, $\angle BAC = \angle EAD = 60^\circ \therefore \angle EAF = 45^\circ$, 所从 $\triangle AFG$ 是等腰直角三角形, 从而设 $AG = FG = h$ 。在直角三角形 FGE 中 $\angle E = 60^\circ$, $EG = 1 - h$, $FG = h$

$\therefore \tan E = \frac{FG}{EG} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{1-h} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$



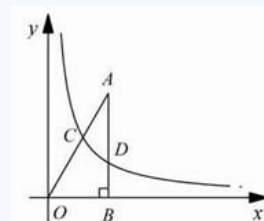
18. 如图, 已知点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$, $AB \perp x$ 轴, 垂足为 B , 连接 OA , 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象与线段 OA 、 AB 分别交于点 C 、 D 。若 $AB = 3BD$,

以点 C 为圆心, CA 的 $\frac{5}{4}$ 倍的长为半径作圆, 则该圆与 x 轴的位置关系是 ▲ (填“相离”、“相切”或“相交”)。

【答案】 相交。

【考点】 一次函数, 反比例函数, 圆与直线的位置关系。

【分析】 要看该圆与 x 轴的位置关系如何, 只要求出圆半径和点 C 到 x 轴的距离即可。这都要求出点 C 的坐标。因为点 D 横坐标与点 A 相同为 $\sqrt{3}$, 纵坐标由 $AB = 3BD = 3$ 可得为 1。点



D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图像上, 所以由 $1 = \frac{k}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \sqrt{3} \Rightarrow$ 反比例函数为 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$.

又易知直线 OA 为 $y = \sqrt{3}x$, 所以点 C 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, $CA = 16 - 8\sqrt{3}$, 圆半径为 $20 - 10\sqrt{3}$. 而 $\sqrt{3}$ 小于 $20 - 10\sqrt{3}$ 则该圆与 x 轴的位置关系是相交.

三、解答题: 本大题共 11 小题, 共 76 分, 把解答过程写在答题卡相对应的位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明. 作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔.

19. (本题满分 5 分)

【答案】 解: $2^2 + |-1| - \sqrt{9} = 4 + 1 - 3 = 2$

【考点】 绝对值, 算术平方根.

【分析】 利用负数的绝对值, 算术平方根的定义, 直接得出结果.

计算: $2^2 + |-1| - \sqrt{9}$.

20. (本题满分 5 分)

解不等式: $3 - 2(x - 1) < 1$.

21. (本题满分 5 分)

先化简, 再求值: $\left(a - 1 + \frac{2}{a+1}\right) \div (a^2 + 1)$, 其中 $a = \sqrt{2} - 1$.

【答案】 解: $\left(a - 1 + \frac{2}{a+1}\right) \div (a^2 + 1) = \frac{(a-1)(a+1)+2}{a+1} \cdot \frac{1}{a^2+1} = \frac{a^2-1+2}{a+1} \cdot \frac{1}{a^2+1} = \frac{1}{a+1}$

当 $a = \sqrt{2} - 1$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】 分式运算法则, 平方差公式.

【分析】 利用分式运算法则, 平方差公式, 直接得出结果.

22. (本题满分 6 分) 如图, 已知四边形 ABCD 是梯形, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $BC = BD$, $CE \perp BD$, 垂足为 E.

(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ECB$;

(2) 若 $\angle DBC = 50^\circ$, 求 $\angle DCE$ 的度数.

【答案】 (1) 证明: $\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle BEC$

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECB$ 中 $\begin{cases} \angle A = \angle BEC = 90^\circ \\ BD = CB \\ \angle ADB = \angle BEC \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ECB$

(2) 解法一: $\because \angle DBC = 50^\circ, BC = BD,$

$\therefore \angle EDC = 65^\circ.$

又 $\because CE \perp BD, \therefore \angle CED = 90^\circ.$

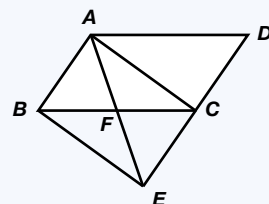
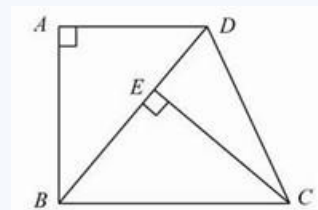
$\therefore \angle DCE = 90^\circ - \angle EDC = 25^\circ.$

解法二: $\because \angle DBC = 50^\circ, BC = BD,$

$\therefore \angle BCD = 65^\circ.$

又 $\because \angle BEC = 90^\circ, \therefore \angle BCE = 40^\circ.$

$\therefore \angle DCE = \angle BCD - \angle BCE = 25^\circ.$



【考点】 平行线的性质, 全等三角形的判定, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质.

【分析】(1)要证明 $\triangle ABD \cong \triangle ECB$, 已知有一对直角相等和一组对边相等, 只要再证一组对角相等即可, 而由于 $AD \parallel BC$, 根据两直线平行内错角相等 $\angle ADB = \angle BEC$, 从而得证.

(2)由 $AB = CD$ 得出 $\angle BCD = \angle BDC$ 和平行线同旁内角互补的性质, 直角三角形两锐角互余的性质经过等量代和变形可求得.

23. (2011•苏州) 已知 $|a-1| + \sqrt{b+2} = 0$, 求方程 $\frac{a}{x} + bx = 1$ 的解.

考点: 解分式方程; 非负数的性质: 绝对值; 非负数的性质: 算术平方根.

专题: 综合题; 方程思想.

分析: 首先根据非负数的性质, 可求出 a 、 b 的值, 然后再代入方程求解即可.

解答: 解: $\because |a-1| + \sqrt{b+2} = 0$,

$\therefore a-1=0$, $a=1$; $b+2=0$, $b=-2$.

$\therefore \frac{1}{x} - 2x = 1$, 得 $2x^2 + x - 1 = 0$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

经检验: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ 是原方程的解.

$\therefore$ 原方程的解为: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

点评: 本题考查了非负数的性质: 几个非负数的和为 0 时, 这几个非负数都为 0. 同时考查了解分式方程, 注意解分式方程一定要注意要验根.

24. (本题满分 6 分) 如图所示的方格地面上, 标有编号 1、2、3 的 3 个小方格地面是空地, 另外 6 个小方格地面是草坪, 除此以外小方格地面完全相同.

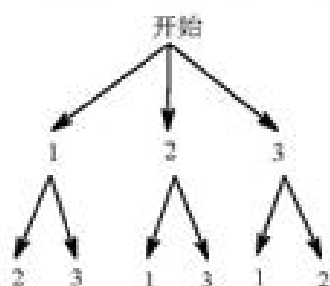
(1)一只自由飞行的小鸟, 将随意地落在图中所示的方格地面上, 求小鸟落在草坪上的概率;

(2)现准备从图中所示的 3 个小方格空地中任意选取 2 个种植草坪, 则编号为 1、2 的 2 个小方格空地种植草坪的概率是多少 (用树状图或列表法求解)?

【答案】 解: (1) 小鸟落在草坪上的概率为 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$



(2) 用“树状图”或利用表格列出所有可能的结果：



	1	2	3
1		(1,2)	(1,3)
2	(2,1)		(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	

以编号为 1、2 的 2 个小方格空地种植草坪的概率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【考点】 概率。

【分析】 (1) 自由飞行的小鸟随意地落在图中所示的方格地面上共有 9 种可能，落在草坪上有 6 种可能，因而得求。

(2) 列举出所有情况，看编号为 1、2 的 2 个小方格空地种植草坪的概率是多少。

25. (本题满分 5 分) 如图，小明在大楼 30 米高 (即 $PH = 30$ 米) 的窗口 P 处进行观测，测得山坡上 A 处的俯角为 15° ，山脚 B 处的俯角为 60° ，已知该山坡的坡度 i (即 $\tan \angle ABC$) 为 $1 : \sqrt{3}$ ，点 P、H、B、C、A 在同一个平面上。点 H、B、C 在同一条直线上，且 $PH \perp HC$ 。

(1) 山坡坡角 (即 $\angle ABC$) 的度数等于 度；

(2) 求 A、B 两点间的距离 (结果精确到 0.1 米，参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$)。

【答案】

解: (1) 30° 。

(2) 由题意得: $\angle PBH = 60^\circ$, $\angle APB = 45^\circ$ 。

$\therefore \angle ABC = 30^\circ$, $\therefore \angle ABP = 90^\circ$ 。

在 $Rt \triangle PHB$ 中, $PB = \frac{PH}{\sin \angle PBH} = 20\sqrt{3}$,

在 $Rt \triangle PBA$ 中, $AB = PB = 20\sqrt{3} \approx 34.6$ 。

答: A、B 两点间的距离约 34.6 米。

【考点】 解直角三角形, 特殊角的三角函数, 等腰直角三角形的判定。

【分析】 (1) 由 $\tan \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $\angle ABC = 30^\circ$

(2) 欲求 A、B 两点间的距离, 由已知可求得 $\triangle PBA$ 是等腰直角三角形, 从而知 $AB = PB$

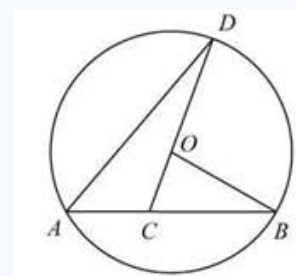
26. (本题满分 8 分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, $OB = 2$, $\angle B = 30^\circ$, C 是弦 AB 上的任意一点 (不与点 A、B 重合), 连接 CO 并延长 CO 交于 $\odot O$ 于点 D, 连接 AD。

(1) 弦长 AB 等于 (结果保留根号);

(2) 当 $\angle D = 20^\circ$ 时, 求 $\angle BOD$ 的度数;

(3) 当 AC 的长度为多少时, 以 A、C、D 为顶点的三角形与以 B、C、O 为顶点的三角形相似? 请写出解答过程。

【答案】 解: (1) $2\sqrt{3}$



(2) 解法一: $\because \angle BOD$ 是 $\triangle BOC$ 的外角, $\angle BCO$ 是 $\triangle ACD$ 的外角,

$$\therefore \angle BOD = \angle B + \angle BCO, \angle BCO = \angle A + \angle D.$$

$$\therefore \angle BOD = \angle B + \angle A + \angle D.$$

$$\text{又} \because \angle BOD = 2\angle A, \angle B = 30^\circ, \angle D = 20^\circ,$$

$$\therefore 2\angle A = \angle B + \angle A + \angle D = \angle A + 50^\circ, \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle A = 100^\circ.$$

解法二: 如图, 连结 OA .

$$\because OA = OB, OA = OD, \therefore \angle BAO = \angle B, \angle DAO = \angle D$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BAO + \angle DAO = \angle B + \angle D.$$

$$\text{又} \because \angle B = 30^\circ, \angle D = 20^\circ, \therefore \angle DAB = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle DAB = 100^\circ.$$

$$(3) \because \angle BCO = \angle A + \angle D, \therefore \angle BCO > \angle A, \angle BCO > \angle D.$$

$$\therefore \text{要使} \triangle DAC \text{ 与} \triangle BOC \text{ 相似, 只能} \angle DCA = \angle BCO = 90^\circ.$$

$$\text{此时} \angle BOC = 60^\circ, \angle BOD = 120^\circ, \therefore \angle DAC = 60^\circ.$$

$$\therefore \triangle DAC \sim \triangle BOC.$$

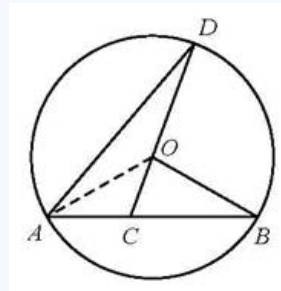
$$\because \angle BCO = 90^\circ, \text{即 } OC \perp AB, \therefore AC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}.$$

【考点】垂直于弦的直径平分弦, 直角三角函数, 圆周角是圆心角的一半, 三角形外角定理.

【分析】(1) 由 $OB = 2, \angle B = 30^\circ$ 知 $\frac{1}{2}AB = OB \cos B = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$

(2) 由 $\angle BOD$ 是圆心角, 它是圆周角 A 的两倍, 而 $\angle A = \angle B + \angle D$ 得求.

(3) 同解法.

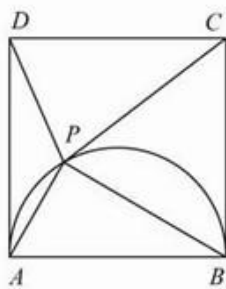


27. (本题满分 8 分) 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 以 AB 为直径在正方形内作半圆, P 是半圆上的动点 (不与点 A 、 B 重合), 连接 PA 、 PB 、 PC 、 PD .

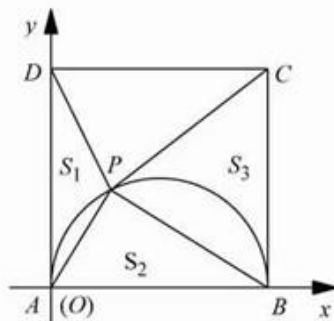
(1) 如图①, 当 PA 的长度等于 ▲ 时, $\angle PAB = 60^\circ$;

当 PA 的长度等于 ▲ 时, $\triangle PAD$ 是等腰三角形;

(2) 如图②, 以 AB 边所在直线为 x 轴、 AD 边所在直线为 y 轴, 建立如图所示的直角坐标系 (点 A 即为原点 O), 把 $\triangle PAD$ 、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 的面积分别记为 S_1 、 S_2 、 S_3 . 坐标为 (a, b) , 试求 $2S_1 S_3 - S_2^2$ 的最大值, 并求出此时 a, b 的值.



(图①)



(图②)

【答案】

解: (1) 2; $2\sqrt{2}$ 或 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

(2) 如图, 过点 P 分别作 $PE \perp AB$, $PF \perp AD$,

垂足分别为 E 、 F , 延长 FP 交 BC 于点 G , 则 $PG \perp BC$.

$\because P$ 点坐标为 (a, b) , $\therefore PE = b$, $PF = a$, $PG = 4 - a$.

在 $\triangle PAD$ 、 $\triangle PAB$ 及 $\triangle PBC$ 中,

$S_1 = 2a$, $S_2 = 2b$, $S_3 = 8 - 2a$,

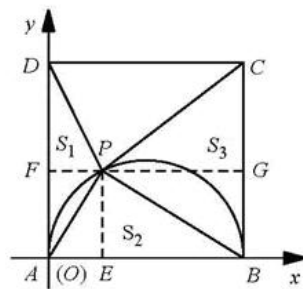
$\because AB$ 为直径, $\therefore \angle APB = 90^\circ$.

$\therefore PE^2 = AE \cdot BE$, 即 $b^2 = a(4 - a)$.

$\therefore 2S_1S_3 - S_2^2 = 4a(8 - 2a) - 4b^2$

$= -4a^2 + 16a = -4(a - 2)^2 + 16$.

$\therefore$ 当 $a = 2$ 时, $b = 2$, $2S_1S_3 - S_2^2$ 有最大值 16.



【考点】直径所对的圆周角是直角, 直角三角形中 30° 所对对的边是斜边的一半, 相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 直径垂直平分弦, 二次函数的最大值.

【分析】(1) 因为 AB 是直径, 所以 $\triangle ABP$ 是直角三角形, 要使 $\angle PAB = 60^\circ$ 即要 $\angle PAB = 30^\circ$ 即

要 $PA = \frac{1}{2} AB = 2$. 要使 $\triangle PAD$ 是等腰三角形即要 $PA = PD$ 或 $AD = PD$, 要使 $PA = PD$ 要点 P 在弧

APB 的中点, 此时 $PA = 2\sqrt{2}$; 要使 $PA = PD$, 利用辅助线 $DO \perp AP$ 交 PA 于 G , 交 AB 于 O , 易知 $\triangle DAO \sim \triangle DGA$ 从而用对应边的相似比可得 $PA = \frac{8}{5}\sqrt{5}$.

(2) 要求 $2S_1S_3 - S_2^2$ 的最大值, 只要先把 S_1 、 S_2 、 S_3 用 a 、 b 表示, 再根据 $PE^2 = AE \cdot BE$ 得到 a 、 b 间的关系式 $b^2 = a(4 - a)$, 从而利用二次函数的最大值概念求得.

28. (本题满分 9 分) 如图①, 小慧同学把一个正三角形纸片 (即 $\triangle OAB$) 放在直线 l_1 上, OA 边与直线 l_1 重合, 然后将三角形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 120° , 此时点 O 运动到了点 O_1 处, 点 B 运动到了点 B_1 处; 小慧又将三角形纸片 AO_1B_1 绕点 B_1 按顺时针方向旋转 120° , 此时点 A 运动到了点 A_1 处, 点 O_1 运动到了点 O_2 处 (即顶点 O 经过上述两次旋转到达 O_2 处).

小慧还发现: 三角形纸片在上述两次旋转的过程中, 顶点 O 运动所形成的图形是两段圆弧, 即 $\widehat{OO_1}$ 和 $\widehat{O_1O_2}$, 顶点 O 所经过的路程是这两段圆弧的长度之和, 并且这两段圆弧与直线 l_1 围成的图形面积等于扇形 AOO_1 的面积、 $\triangle AO_1B_1$ 的面积和扇形 $B_1O_1O_2$ 的面积之和.

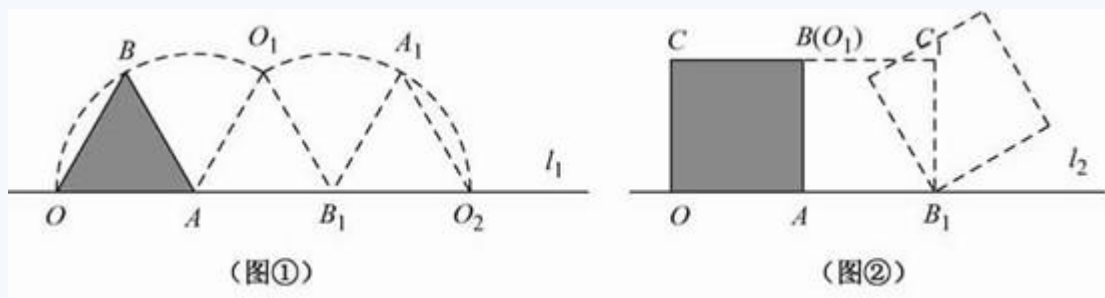
小慧进行类比研究: 如图②, 她把边长为 1 的正方形纸片 $OABC$ 放在直线 l_2 上, OA 边与直线 l_2 重合, 然后将正方形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 90° , 此时点 O 运动到了点 O_1 处 (即点 B 处), 点 C 运动到了点 C_1 处, 点 B 运动到了点 B_1 处; 小慧又将正方形纸片 $AO_1C_1B_1$ 绕顶点 B_1 按顺时针方向旋转 90° , $\dots\dots$, 按上述方法经过若干次旋转后, 她提出了如下问题:

问题①: 若正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过 3 次旋转, 求顶点 O 经过的路程, 并求顶点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线 l_2 围成图形的面积; 若正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过 5 次旋转, 求顶点 O 经过的路程;

问题②: 正方形纸片 $OABC$ 按上述方法经过多少次旋转, 顶点 O 经过的路程是

$$\frac{41 + 20\sqrt{2}}{2}\pi?$$

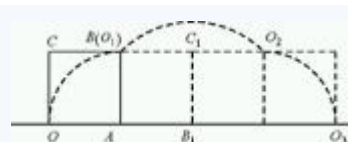
请你解答上述两个问题.



【答案】解：问题①：如图，正方形纸片经过3次旋转，顶点O运动所形成的图形是三段圆弧 $\widehat{OO_1}$, $\widehat{O_1O_2}$, $\widehat{O_2O_3}$ ，

所以顶点O在此运动过程中经过的路程为

$$\frac{90 \cdot \pi \cdot 1}{180} \cdot 2 + \frac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{180} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi.$$



顶点O在此运动过程中所形成的图形与直线 l_2 围成图形的面积为 $\frac{90 \cdot \pi \cdot 1^2}{360} \cdot 2 + \frac{90 \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2}{360} + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 + \pi$ 。

正方形纸片经过5次旋转，顶点O运动经过的路程为： $\frac{90 \cdot \pi \cdot 1}{180} \cdot 3 + \frac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{180} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi$ 。

问题②：∵ 正方形纸片每经过4次旋转，顶点O运动经过的路程均为：

$$\frac{90 \cdot \pi \cdot 1}{180} \cdot 2 + \frac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{180} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi.$$

又 $\frac{41 + 20\sqrt{2}}{2} \pi = 20 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \pi + \frac{\pi}{2}$ ，而 $\frac{\pi}{2}$ 是正方形纸片第81次旋转，顶点O运动经过的路程。

∴ 正方形纸片OABC按上述方法经过81次旋转，顶点O经过的路程是 $\frac{41 + 20\sqrt{2}}{2} \pi$

【考点】图形的翻转,扇形弧长和面积.

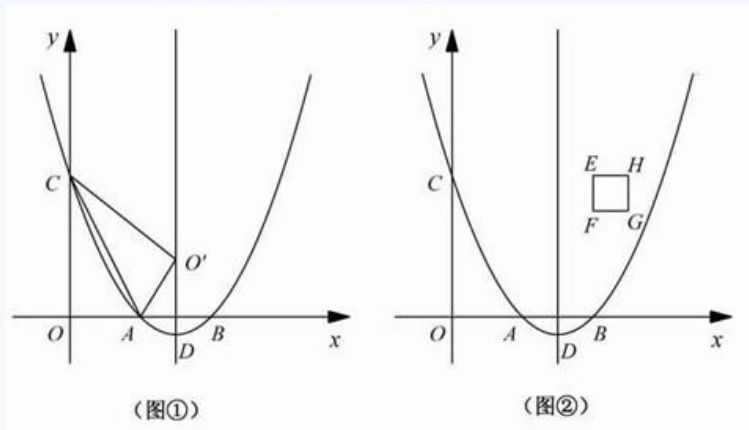
【分析】求出正方形OABC翻转时点O的轨迹弧长，再求面积即可。要理解的是第 $4n$ 次旋转，顶点O没有移动经。

29. (本题满分10分) 已知二次函数 $y = a(x^2 - 6x + 8)$ ($a > 0$) 的图象与x轴分别交于点A、B，与y轴交于点C. 点D是抛物线的顶点.

(1)如图①，连接AC，将 $\triangle OAC$ 沿直线AC翻折，若点O的对应点O'恰好落在该抛物线的对称轴上，求实数a的值；

(2)如图②，在正方形EFGH中，点E、F的坐标分别是(4, 4)、(4, 3)，边HG位于边EF的右侧. 小林同学经过探索后发现了一个正确的命题：“若点P是边EH或边HG上的任意一点，则四条线段PA、PB、PC、PD不能与任何一个平行四边形的四条边对应相等（即这四条线段不能构成平行四边形）.”若点P是边EF或边FG上的任意一点，刚才的结论是否也成立？请你积极探索，并写出探索过程；

(3)如图②，当点P在抛物线对称轴上时，设点P的纵坐标t是大于3的常数，试问：是否存在一个正数a，使得四条线段PA、PB、PC、PD与一个平行四边形的四条边对应相等（即这四条线段能构成平行四边形）？请说明理由.



【答案】

解：（1）令 $y=0$ ，由 $a(x^2-6x+8)=0$ 解得 $x_1=2, x_2=4$ ；

令 $x=0$ ，解得 $y=8a$ ．

∴点 A 、 B 、 C 的坐标分别是 $(2, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(0, 8a)$ ，

该抛物线对称轴为直线 $x=3$ ．

∴ $OA=2$ ．

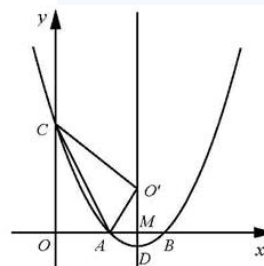
如图①，设抛物线对称轴与 x 轴的交点为 M ，则 $AM=1$ ．

由题意得： $O'A=OA=2$ ．

∴ $O'A=2AM$ ，∴ $\angle O'AM=60^\circ$ ．

∴ $\angle OAC=\angle O'AC=60^\circ$ ．

∴ $OC=\sqrt{3} \cdot AO=2\sqrt{3}$ ，即 $8a=2\sqrt{3}$ ，∴ $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ．



（图①）

（2）若点 P 是边 EF 或边 FG 上的任意一点，结论同样成立．

（Ⅰ）如图②，设 P 是边 EF 上的任意一点（不与点 E 重合），连接 PM ．

∵点 $E(4, 4)$ 、 $F(4, 3)$ 与点 $B(4, 0)$ 在一直线上，点 C 在 y 轴上，

∴ $PB < 4$ ， $PC \geq 4$ ，∴ $PC > PB$ ．

又 $PD > PM > PB$ ， $PA > PM > PB$ ，

∴ $PB \neq PA$ ， $PB \neq PC$ ， $PB \neq PD$ ．

∴此时线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 不能构成平行四边形．

（Ⅱ）设 P 是边 FG 上的任意一点（不与点 G 重合），

∵点 F 的坐标是 $(4, 3)$ ，点 G 的坐标是 $(5, 3)$ ．

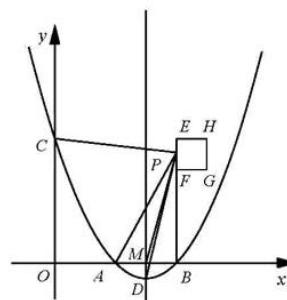
∴ $FB=3$ ， $GB=\sqrt{10}$ ，∴ $3 \leq PB < \sqrt{10}$ ，

∴ $PC \geq 4$ ，∴ $PC > PB$ ．

又 $PD > PM > PB$ ， $PA > PM > PB$ ，

∴ $PB \neq PA$ ， $PB \neq PC$ ， $PB \neq PD$ ．

∴此时线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 也不能构成平行四边形．



（图②）

(3) 存在一个正数 a , 使得线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 能构成一个平行四边形.

如图③, $\because$ 点 A 、 B 是抛物线与 x 轴交点, 点 P 在抛物线对称轴上,

$$\therefore PA=PB.$$

$\therefore$ 当 $PC=PD$ 时, 线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 能构成一个平行四边形.

$\because$ 点 C 的坐标是 $(0, 8a)$, 点 D 的坐标是 $(3, -a)$,

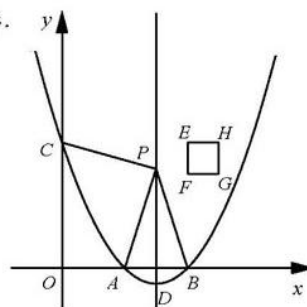
点 P 的坐标是 $(3, t)$,

$$\therefore PC^2 = 3^2 + (t-8a)^2, PD^2 = (t+a)^2,$$

由 $PC=PD$ 得 $PC^2=PD^2$, $\therefore 3^2 + (t-8a)^2 = (t+a)^2$,

$$\text{整理得 } 7a^2 - 2ta + 1 = 0, \therefore \Delta = 4t^2 - 28.$$

$\because t$ 是一个常数且 $t > 3$, $\therefore \Delta = 4t^2 - 28 > 0$,



(图③)

$$\therefore \text{方程 } 7a^2 - 2ta + 1 = 0 \text{ 有两个不相等的实数根 } a = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 28}}{14} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 7}}{7},$$

显然 $a = \frac{t + \sqrt{t^2 - 7}}{7} > 0$, 满足题意.

$\therefore$ 当 t 是一个大于 3 的常数时, 存在一个正数 $a = \frac{t + \sqrt{t^2 - 7}}{7}$, 使得线段 PA 、 PB 、 PC 、 PD 能

构成一个平行四边形.

【考点】 二次函数, 图形的翻转, 30° 角的直角三角形的性质, 平行四边形的判定, 一元二次方程.

【分析】 (1) 先利用点在二次函数上点的坐标满足方程和 30° 角的直角三角形 30° 角所对的直角边是斜边的一半, 求出点 A 、 B 、 C 的坐标, 再求出 a .

(2) 比较四线段的长短来得出结论.

(3) 由点 A 、 B 是抛物线与 x 轴的交点, 点 P 在抛物线对称轴上, 所以 $PA=PB$, 要 PA 、 PB 、 PC 、 PD 构成一个平行四边形的四条边, 只要 $PC=PD$, 从而推出 a .