

2011 年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分）

1、(2011•常州) 在下列实数中，无理数是（ ）

- A、2 B、0 C、 $\sqrt{5}$ D、 $\frac{1}{3}$

2、(2010•常州) 下列计算正确的是（ ）

- A、 $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B、 $y^3 \div y^3 = y$ C、 $3m + 3n = 6mn$ D、 $(x^3)^2 = x^6$

3、(2011•常州) 已知某几何体的一个视图（如图），则此几何体是（ ）



- A、正三棱柱 B、三棱锥 C、圆锥 D、圆柱

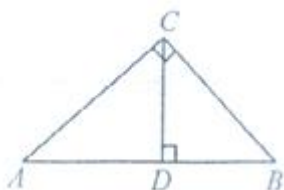
4、(2011•常州) 某地区有 8 所高中和 22 所初中。要了解该地区中学生的视力情况，下列抽样方式获得的数据最能反映该地区中学生视力情况的是（ ）

- A、从该地区随机选取一所中学里的学生 B、从该地区 30 所中学里随机选取 800 名学生
C、从该地区一所高中和一所初中各选取一个年级的学生 D、从该地区的 22 所初中里随机选取 400 名学生

5、(2011•常州) 若 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围（ ）

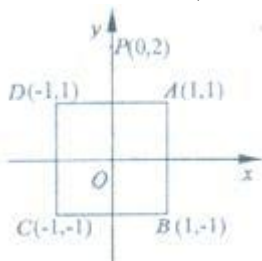
- A、 $x \geq 2$ B、 $x \leq 2$ C、 $x > 2$ D、 $x < 2$

6、(2011•常州) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D 。若 $AC = \sqrt{5}$ ， $BC = 2$ ，则 $\sin \angle ACD$ 的值为（ ）



- A、 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B、 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D、 $\frac{2}{3}$

7、(2011•常州) 在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(1, 1)$ 、 $B(1, -1)$ 、 $C(-1, -1)$ 、 $D(-1, 1)$ ， y 轴上有一点 $P(0, 2)$ 。作点 P 关于点 A 的对称点 P_1 ，作 P_1 关于点 B 的对称点 P_2 ，作点 P_2 关于点 C 的对称点 P_3 ，作 P_3 关于点 D 的对称点 P_4 ，作点 P_4 关于点 A 的对称点 P_5 ，作 P_5 关于点 B 的对称点 P_6 ...，按如此操作下去，则点 P_{2011} 的坐标为（ ）



- A、 $(0, 2)$ B、 $(2, 0)$ C、 $(0, -2)$ D、 $(-2, 0)$

8、(2011•常州) 已知二次函数 $y = -x^2 + x - \frac{1}{5}$ ，当自变量 x 取 m 时对应的值大于 0，当自变量 x 分别取 $m-1$ 、 $m+1$ 时对应的函数值为 y_1 、 y_2 ，则 y_1 、 y_2 必须满足（ ）

- A、 $y_1 > 0$ 、 $y_2 > 0$ B、 $y_1 < 0$ 、 $y_2 < 0$ C、 $y_1 < 0$ 、 $y_2 > 0$ D、 $y_1 > 0$ 、 $y_2 < 0$

二、填空题 (共 9 小题, 每小题 3 分, 满分 27 分)

9、(2011•常州) 计算: $-(-\frac{1}{2}) =$; $|- \frac{1}{2}| =$, ; $(-\frac{1}{2})^0 =$; $(-\frac{1}{2})^{-1} =$.

10、(2011•常州) (1) 计算: $(x+1)^2 =$;
(2) 分解因式: $x^2 - 9 =$.

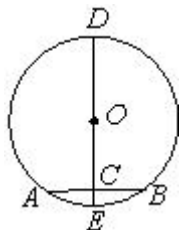
11、(2011•常州) 若 $\angle \alpha$ 的补角为 120° , 则 $\angle \alpha =$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12、(2011•常州) 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根为 2, 则 $m =$, 另一个根是 .

13、(2011•常州) 已知扇形的圆心角为 150° , 它所对应的弧长 20π cm, 则此扇形的半径是 cm, 面积是 cm^2 .

14、(2011•常州) 某市 2007 年 5 月份某一周的日最高气温 (单位: $^\circ\text{C}$) 分别为: 25、28、30、29、31、32、28, 这周的日最高气温的平均值是 $\frac{203}{7}^\circ\text{C}$, 中位数是 $^\circ\text{C}$.

15、(2011•常州) 如图, DE 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $AB \perp CD$, 垂足为 C , 若 $AB = 6$, $CE = 1$, 则 $OC =$,



$CD =$.

16、(2011•常州) 已知关于 x 的一次函数 $y = kx + 4k - 2$ ($k \neq 0$). 若其图象经过原点, 则 $k = \frac{1}{2}$, 若 y 随着 x 的增大而减小, 则 k 的取值范围是 .

17、把棱长为 4 的正方体分割成 29 个棱长为整数的正方体 (且没有剩余), 其中棱长为 1 的正方体的个数为 .

三、解答题 (共 18 分)

18、(2011•常州) ①计算: $\sin 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{8}$; ②化简: $\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$.

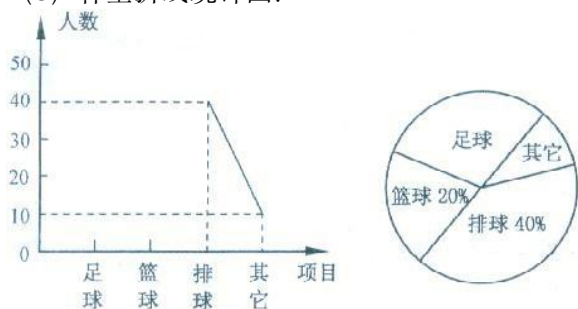
19、(2011•常州) ①解分式方程 $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2}$; ②解不等式组 $\begin{cases} x - 2 < 6(x + 3) \\ 5(x - 1) - 6 \geq 4(x + 1) \end{cases}$.

四、解答题 (共 15 分)

20、(2011•常州) 某中学为了解本校学生对球类运动的爱好情况, 采用抽样的方法, 从足球、篮球、排球、

其它等四个方面调查了若干名学生，并绘制成“折线统计图”与“扇形统计图”。请你根据图中提供的部分信息解答下列问题：

- (1) 在这次调查活动中，一共调查了_____名学生；
- (2) “足球”所在扇形的圆心角是_____度；
- (3) 补全折线统计图。

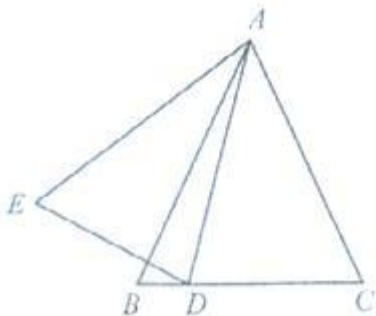


21、(2011•常州) 甲、乙、丙三个布袋都不透明，甲袋中装有 1 个红球和 1 个白球；乙袋中装有一个红球和 2 个白球；丙袋中装有 2 个白球。这些球除颜色外都相同。从这 3 个袋中各随机地取出 1 个球。

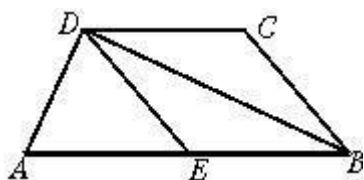
- ①取出的 3 个球恰好是 2 个红球和 1 个白球的概率是多少？
- ②取出的 3 个球全是白球的概率是多少？

五、解答题 (共 12 分)

22、(2011•常州) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上的一点，AD 平分 $\angle EDC$ ，且 $\angle E = \angle B$ ， $DE = DC$ ，求证：AB=AC。



23、(2011•常州) 已知：如图，在梯形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ， $BC = CD$ ， $AD \perp BD$ ，E 为 AB 中点，求证：四边形 BCDE 是菱形。



六. 探究与画图 (共 13 分)

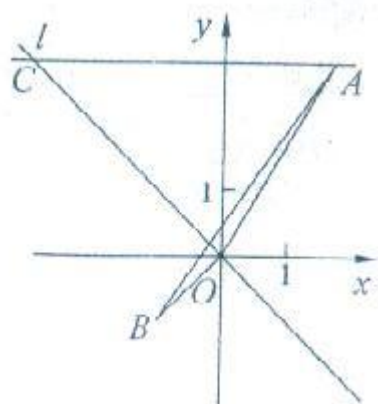
24、(2011·常州) 如图, 在 $\triangle ABO$ 中, 已知点 $A(\sqrt{3}, 3)$ 、 $B(-1, -1)$ 、 $C(0, 0)$, 正比例函数 $y = -x$ 图象是直线 l , 直线 $AC \parallel x$ 轴交直线 l 与点 C .

(1) C 点的坐标为_____;

(2) 以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle ABO$ 顺时针旋转角 α ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), 使得点 B 落在直线 l 上的对应点为 B' , 点 A 的对应点为 A' , 得到 $\triangle A'OB'$.

① $\angle \alpha =$ _____; ②画出 $\triangle A'OB'$.

(3) 写出所有满足 $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ 的点 D 的坐标.



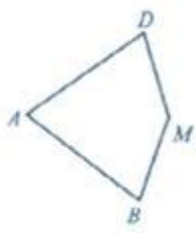
25、(2011·常州) 已知: 如图 1, 图形①满足 $AD=AB$, $MD=MB$, $\angle A=72^\circ$, $\angle M=144^\circ$. 图形②与图形①恰好拼成一个菱形 (如图 2). 记 AB 的长度为 a , BM 的长度为 b .

(1) 图形①中 $\angle B =$ _____°, 图形②中 $\angle E =$ _____°;

(2) 小明有两种纸片各若干张, 其中一种纸片的形状及大小与图形①相同, 这种纸片称为“风筝一号”; 另一种纸片的形状及大小与图形②相同, 这种纸片称为“飞镖一号”.

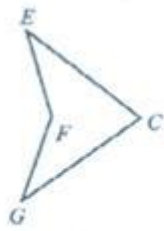
①小明仅用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形, 需要这种纸片_____张;

②小明若用若干张“风筝一号”纸片和“飞镖一号”纸片拼成一个“大风筝” (如图 3), 其中 $\angle P=72^\circ$, $\angle Q=144^\circ$, 且 $PI=PJ=a+b$, $IQ=JQ$. 请在图 3 中画出拼接线并保留画图痕迹. (本题中均为无重叠、无缝隙拼接)



图形①

图 1



图形②

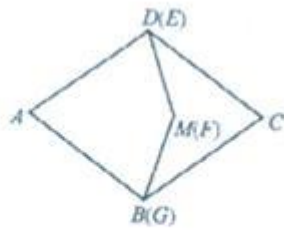


图 2

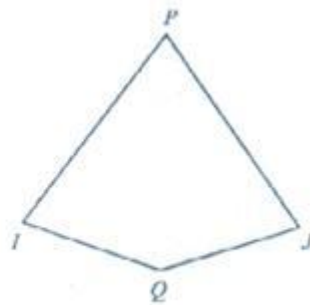


图 3

七、解答题（共 3 小题，共 26 分）

26、(2011·常州) 某商店以 6 元/千克的价格购进某种干果 1140 千克，并对其进行筛选分成甲级干果与乙级干果后同时开始销售．这批干果销售结束后，店主从销售统计中发出：甲级干果与乙级干果在销售过程中每天都有销量，且在同一天卖完；甲级干果从开始销售至销售的第 x 天的总销量 y_1 (千克) 与 x 的关系为 $y_1 = -x^2 + 40x$ ；乙级干果从开始销售至销售的第 t 天的总销量 y_2 (千克) 与 t 的关系为 $y_2 = at^2 + bt$ ，且乙级干果的前三天的销售量的情况见下表：

t	1	2	3
y_2	21	44	69

(1) 求 a 、 b 的值；

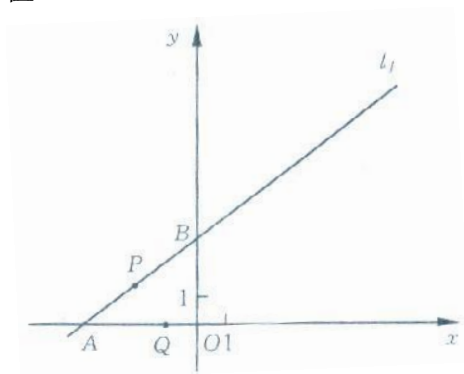
(2) 若甲级干果与乙级干果分别以 8 元/千克的 6 元/千克的零售价出售，则卖完这批干果获得的毛利润是多少元？

(3) 问从第几天起乙级干果每天的销量比甲级干果每天的销量至少多 6 千克？

(说明：毛利润=销售总金额-进货总金额．这批干果进货至卖完的过程中的损耗忽略不计)

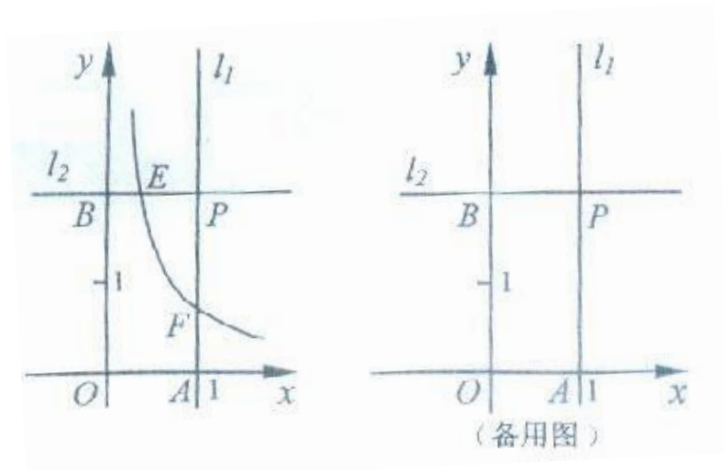
27、(2011·常州) 在平面直角坐标系 XOY 中，一次函数 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 的图象是直线 l_1 ， l_1 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点．直线 l_2 过点 $C(a, 0)$ 且与直线 l_1 垂直，其中 $a > 0$ ．点 P 、 Q 同时从 A 点出发，其中点 P 沿射线 AB 运动，速度为每秒 4 个单位；点 Q 沿射线 AO 运动，速度为每秒 5 个单位．

- (1) 写出 A 点的坐标和 AB 的长；
 (2) 当点 P、Q 运动了多少秒时，以点 Q 为圆心，PQ 为半径的 $\odot Q$ 与直线 l_2 、y 轴都相切，求此时 a 的值.



28、(2011•常州) 在平面直角坐标系 XOY 中，直线 l_1 过点 A (1, 0) 且与 y 轴平行，直线 l_2 过点 B (0, 2) 且与 x 轴平行，直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 P. 点 E 为直线 l_2 上一点，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象过点 E 与直线 l_1 相交于点 F.

- (1) 若点 E 与点 P 重合，求 k 的值；
 (2) 连接 OE、OF、EF. 若 $k > 2$ ，且 $\triangle OEF$ 的面积为 $\triangle PEF$ 的面积 2 倍，求 E 点的坐标；
 (3) 是否存在点 E 及 y 轴上的点 M，使得以点 M、E、F 为顶点的三角形与 $\triangle PEF$ 全等？若存在，求 E 点坐标；若不存在，请说明理由.



2011 年江苏省常州市中考数学试卷—解析版

一、选择题（共 8 小题，每小题 2 分，满分 16 分）

1、(2011•常州) 在下列实数中，无理数是（ ）

A、2 B、0

C、 $\sqrt{5}$ D、 $\frac{1}{3}$

考点：无理数。

专题：存在型。

分析：根据无理数的定义进行解答即可。

解答：解：∵无理数是无限不循环小数，

∴ $\sqrt{5}$ 是无理数，2，0， $\frac{1}{3}$ 是有理数。

故选 C。

点评：本题考查的是无理数的定义，即初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001...，等有这样规律的数。

2、(2011•常州) 下列计算正确的是（ ）

A、 $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B、 $y^3 \div y^3 = y$

C、 $3m+3n=6mn$ D、 $(x^3)^2 = x^6$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方。

分析：根据同底数幂的运算法则、幂的乘方、合并同类项的法则进行计算即可。

解答：解：A、应为 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故本选项错误；

B、应为 $y^3 \div y^3 = 1$ ，故本选项错误；

C、 $3m$ 与 $3n$ 不是同类项，不能合并，故本选项错误；

D、 $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$ ，正确。

故选 D。

点评：考查同底数幂的运算：乘法法则，底数不变，指数相加；除法法则，底数不变，指数相减；乘方，底数不变，指数相乘。

3、(2011•常州) 已知某几何体的一个视图（如图），则此几何体是（ ）



A、正三棱柱 B、三棱锥

C、圆锥 D、圆柱

考点：由三视图判断几何体。

专题：作图题。

分析：主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形。

解答：解：俯视图为圆的几何体为球，圆锥，圆柱，再根据其他视图，可知此几何体为圆锥。

故选 C。

点评：本题考查由三视图确定几何体的形状，主要考查学生空间想象能力。

4、(2011•常州) 某地区有 8 所高中和 22 所初中. 要了解该地区中学生的视力情况, 下列抽样方式获得的数据最能反映该地区中学生视力情况的是 ()

- A、从该地区随机选取一所中学里的学生 B、从该地区 30 所中学里随机选取 800 名学生
C、从该地区一所高中和一所初中各选取一个年级的学生 D、从该地区的 22 所初中里随机选取 400 名学生

考点: 抽样调查的可靠性。

专题: 分类讨论。

分析: 抽取样本注意事项就是要考虑样本具有广泛性与代表性, 所谓代表性, 就是抽取的样本必须是随机的, 即各个方面, 各个层次的对象都要有所体现.

解答: 解: 某地区有 8 所高中和 22 所初中. 要了解该地区中学生的视力情况, A, C, D 中进行抽查是, 不具有普遍性, 对抽取的对象划定了范围, 因而不具有代表性.

B、本题中为了了解该地区中学生的视力情况, 从该地区 30 所中学里随机选取 800 名学生就具有代表性. 故选 B.

点评: 本题主要考查抽样调查的可靠性, 样本具有代表性是指抽取的样本必须是随机的, 即各个方面, 各个层次的对象都要有所体现.

5、(2011•常州) 若 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围 ()

- A、 $x \geq 2$ B、 $x \leq 2$
C、 $x > 2$ D、 $x < 2$

考点: 二次根式有意义的条件。

专题: 计算题。

分析: 二次根式有意义, 被开方数为非负数, 即 $x-2 \geq 0$, 解不等式求 x 的取值范围.

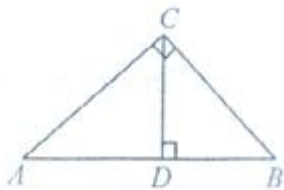
解答: 解: $\because \sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义,

$\therefore x-2 \geq 0$, 解得 $x \geq 2$.

故选 A.

点评: 本题考查了二次根式有意义的条件. 关键是明确二次根式有意义时, 被开方数为非负数.

6、(2011•常州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D. 若 $AC=\sqrt{5}$, $BC=2$, 则 $\sin \angle ACD$ 的值为 ()



- A、 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B、 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D、 $\frac{2}{3}$

考点: 锐角三角函数的定义; 勾股定理。

专题: 应用题。

分析：在直角△ABC 中，根据勾股定理即可求得 AB，而∠B=∠ACD，即可把求 sin∠ACD 转化为求 sinB.

解答：在直角△ABC 中，根据勾股定理可得： $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$.

∵ ∠B+∠BCD=90°， ∠ACD+∠BCD=90°，

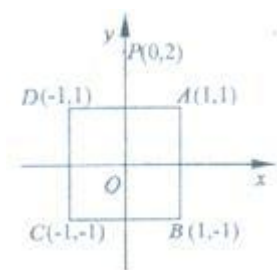
∴ ∠B=∠ACD.

∴ $\sin \angle ACD = \sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

故选 A.

点评：本题考查了解直角三角形中三角函数的应用，要熟练掌握好边角之间的关系，难度适中.

7、(2011•常州) 在平面直角坐标系中，正方形 ABCD 的顶点分别为 A (1, 1)、B (1, -1)、C (-1, -1)、D (-1, 1)，y 轴上有一点 P (0, 2). 作点 P 关于点 A 的对称点 P₁，作 P₁ 关于点 B 的对称点 P₂，作点 P₂ 关于点 C 的对称点 P₃，作 P₃ 关于点 D 的对称点 P₄，作点 P₄ 关于点 A 的对称点 P₅，作 P₅ 关于点 B 的对称点 P₆---，按如此操作下去，则点 P₂₀₁₁ 的坐标为 ()



A、(0, 2) B、(2, 0)

C、(0, -2) D、(-2, 0)

考点：坐标与图形变化-对称；正方形的性质.

专题：规律型.

分析：根据正方形的性质以及坐标变化得出对应点的坐标，再利用变化规律得出点 P₂₀₁₁ 的坐标与 P₃ 坐标相同，即可得出答案.

解答：解：∵ 作点 P 关于点 A 的对称点 P₁，作 P₁ 关于点 B 的对称点 P₂，作点 P₂ 关于点 C 的对称点 P₃，作 P₃ 关于点 D 的对称点 P₄，作点 P₄ 关于点 A 的对称点 P₅，作 P₅ 关于点 B 的对称点 P₆---，按如此操作下去，

∴ 每变换 4 次一循环，

∴ 点 P₂₀₁₁ 的坐标为：2011÷4=502...3，

点 P₂₀₁₁ 的坐标与 P₃ 坐标相同，

∴ 点 P₂₀₁₁ 的坐标为：(-2, 0)，

故选：D.

点评：此题主要考查了坐标与图形的变化以及正方形的性质，根据图形的变化得出点 P₂₀₁₁ 的坐标与 P₃ 坐标相同是解决问题的关键.

8、(2011•常州) 已知二次函数 $y = -x^2 + x - \frac{1}{5}$ ，当自变量 x 取 m 时对应的值大于 0，当自变量

x 分别取 m-1、m+1 时对应的函数值为 y₁、y₂，则 y₁、y₂ 必须满足 ()

A、y₁>0、y₂>0 B、y₁<0、y₂<0

C、y₁<0、y₂>0 D、y₁>0、y₂<0

考点：抛物线与 x 轴的交点；二次函数图象上点的坐标特征.

专题：计算题.

分析：根据函数的解析式求得函数与 x 轴的交点坐标，利用自变量 x 取 m 时对应的值大于 0，确定 $m-1$ 、 $m+1$ 的位置，进而确定函数值为 y_1 、 y_2 。

解答：解：令 $y = -x^2 + x - \frac{1}{5} = 0$,

解得： $x = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{10}$,

$\therefore$ 当自变量 x 取 m 时对应的值大于 0,

$$\therefore \frac{5-3\sqrt{3}}{10} < m < \frac{5+\sqrt{3}}{10},$$

$$\therefore m-1 < \frac{5-3\sqrt{3}}{10}, m+1 > \frac{5+3\sqrt{3}}{10},$$

$$\therefore y_1 < 0, y_2 < 0.$$

故选 B.

点评：本题考查了抛物线与 x 轴的交点和二次函数图象上的点的特征，解题的关键是求得抛物线与横轴的交点坐标。

二、填空题（共 9 小题，每小题 3 分，满分 27 分）

9、(2011•常州) 计算： $-(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; $(-\frac{1}{2})^0 = 1$; $(-\frac{1}{2})^{-1} = -2$.

考点：负整数指数幂；相反数；绝对值；零指数幂。

专题：计算题。

分析：分别根据绝对值、0 指数幂及负整数指数幂的运算法则进行计算即可。

解答：解： $-(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$;

$$|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}; \quad (-\frac{1}{2})^0 = 1;$$

$$(-\frac{1}{2})^{-1} = -2.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, -2.

点评：本题考查的是绝对值、0 指数幂及负整数指数幂的运算法则，熟知以上知识是解答此题的关键。

10、(2011•常州) (1) 计算： $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;

(2) 分解因式： $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

考点：因式分解-提公因式法；完全平方公式。

分析：根据完全平方公式进行计算。

解答：解：① $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$;

② $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

点评：本题考查了完全平方公式，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

11、(2011•常州) 若 $\angle \alpha$ 的补角为 120° ，则 $\angle \alpha = \underline{60^\circ}$ ， $\sin \alpha = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

考点：特殊角的三角函数值；余角和补角。

专题：计算题。

分析：根据补角的定义，即可求出 $\angle \alpha$ 的度数，从而求出 $\sin \alpha$ 的值。

解答：解：根据补角定义， $\angle \alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

于是 $\sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为 60° ， $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点评：此题考查了特殊角的三角函数值和余角和补角的定义，要熟记特殊角的三角函数值.

12、(2011•常州) 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根为2，则 $m = \underline{1}$ ，另一个根是 $\underline{-3}$.

考点：一元二次方程的解；根与系数的关系。

专题：方程思想。

分析：根据一元二次方程的解定义，将 $x=2$ 代入关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ ，然后解关于 m 的一元一次方

程；再根据根与系数的关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 解出方程的另一个根。

解答：解：根据题意，得

$4 + 2m - 6 = 0$ ，即 $2m - 2 = 0$ ，

解得， $m = 1$ ；

由韦达定理，知

$x_1 + x_2 = -m$ ；

$\therefore 2 + x_2 = -1$ ，

解得， $x_2 = -3$ 。

故答案是：1、-3。

点评：本题主要考查了一元二次方程的解、根与系数的关系。在利用根与系数的关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 、 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

来计算时，要弄清楚 a 、 b 、 c 的意义。

13、(2011•常州) 已知扇形的圆心角为 150° ，它所对应的弧长 $20\pi\text{cm}$ ，则此扇形的半径是 $\underline{24}\text{cm}$ ，面积是 $\underline{240\pi}\text{cm}^2$ 。

考点：扇形面积的计算；弧长的计算。

分析：根据弧长公式即可得到关于扇形半径的方程，然后根据扇形的面积公式即可求解。

解答：解：设扇形的半径是 r ，则 $\frac{150\pi r}{180} = 20\pi$

解得： $r = 24$ 。

扇形的面积是： $\frac{1}{2} \times 20\pi \times 24 = 240\pi$ 。

故答案是：24 和 240π 。

点评：本题主要考查了扇形的面积和弧长，正确理解公式是解题的关键.

14、(2011•常州) 某市 2007 年 5 月份某一周的日最高气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 分别为: 25、28、30、29、31、

32、28, 这周的日最高气温的平均值是 $\frac{203}{7}^{\circ}\text{C}$, 中位数是 29 $^{\circ}\text{C}$.

考点: 中位数; 算术平均数.

专题: 计算题.

分析: 先求出各数的和, 再除以数据总个数即可得到周日的最高气温平均值. 将该组数据按从小到大依次排列, 即可得到中间位置的数——中位数.

解答: 解: $\bar{x} = \frac{25+28+30+29+31+32+28}{7} = \frac{203}{7}$,

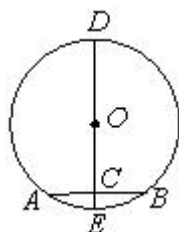
将该组数据按从小到大依次排列得到: 25, 28, 28, 29, 30, 31, 32;

处在中间位置的数为 29, 故中位数为 29.

故答案为 $\frac{203}{7}$, 29.

点评: 本题考查了中位数和算术平均数, 尤其要注意, 将一组数据从小到大依次排列, 把中间数据 (或中间两数据的平均数) 叫做中位数

15、(2011•常州) 如图, DE 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $AB \perp CD$, 垂足为 C, 若 $AB=6$, $CE=1$, 则 $OC=$ 4,



$CD=$ 9.

考点: 垂径定理; 勾股定理.

专题: 数形结合; 方程思想.

分析: 连接 OA 构成直角三角形, 先根据垂径定理, 由 DE 垂直 AB 得到点 C 为 AB 的中点, 由 $AB=6$ 可求出 AC 的长, 再设出圆的半径 OA 为 x, 表示出 OC, 根据勾股定理建立关于 x 的方程, 求出方程的解即可得到 x 的值, 即为圆的半径, 通过观察图形可知, OC 等于半径减 1, CD 等于半径加 OC, 把求出的半径代入即可得到答案.

解答:

解: 连接 OA,

$\because$ 直径 $DE \perp AB$, 且 $AB=6$

$\therefore AC=BC=3$,

设圆 O 的半径 OA 的长为 x, 则 $OE=OD=x$

$\because CE=1$,

$\therefore OC=x-1$,

在直角三角形 AOC 中, 根据勾股定理得:

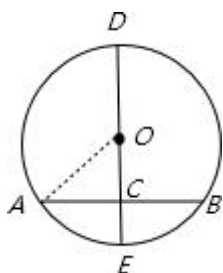
$x^2 - (x-1)^2 = 3^2$, 化简得: $x^2 - x^2 + 2x - 1 = 9$,

即 $2x=10$,

解得: $x=5$

所以 $OE=5$, 则 $OC=OE-CE=5-1=4$, $CD=OD+OC=9$.

故答案为: 4; 9



点评：此题考查了学生对垂径定理的运用与掌握，注意利用圆的半径，弦的一半及弦心距所构成的直角三角形来解决问题，做此类题时要多观察，多分析，才能发现线段之间的联系。

16、(2011·常州) 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+4k-2$ ($k \neq 0$)。若其图象经过原点，则 $k=\frac{1}{2}$ ，若 y 随着 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是 $k < 0$ 。

考点：一次函数的性质；待定系数法求一次函数解析式。

分析：(1) 若其图象经过原点，则 $4k-2=0$ ，即可求出 k 的值；(2) 若 y 随着 x 的增大而减小，则一次项系数当 $k < 0$ 时，图象经过二、四象限。

解答：解：(1) 当其图象经过原点时：

$$4k - 2 = 0,$$

$$k = \frac{1}{2};$$

(2) 当 y 随着 x 的增大而减小时：

$$k < 0.$$

故答案为： $k = \frac{1}{2}; k < 0$ 。

点评：本题主要考查一次函数的性质，解题的关键是熟练掌握一次函数的性质、正确的确定一次函数的一次项系数和常数项。

17、把棱长为 4 的正方体分割成 29 个棱长为整数的正方体 (且没有剩余)，其中棱长为 1 的正方体的个数为 24。

考点：一元一次方程的应用；截一个几何体。

专题：分类讨论；方程思想。

分析：从三种情况进行分析：(1) 只有棱长为 1 的正方体；(2) 分成棱长为 3 的正方体和棱长为 1 的正方体；(3) 分成棱长为 2 的正方体和棱长为 1 的正方体。

解答：解：棱长为 4 的正方体的体积为 64，

如果只有棱长为 1 的正方体就是 64 个不符合题意排除；

如果有一个 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体 (体积 27)，就只能是 $1 \times 1 \times 1$ 的立方体 37 个， $37+1 > 29$ ，不符合题意排除；所以应该是有 $2 \times 2 \times 2$ 和 $1 \times 1 \times 1$ 两种立方体。

则设棱长为 1 的有 x 个，则棱长为 2 的有 $(29 - x)$ 个，

$$\text{解方程： } x + 8 \times (29 - x) = 64,$$

$$\text{解得： } x = 24.$$

所以小明分割的立方体应为：棱长为 1 的 24 个，棱长为 2 的 5 个。

故答案为：24。

点评：本题考查了一元一次方程组的应用，立体图形的求解，解题的关键是分三种情况考虑，得到符合题意的可能，再列方程求解。

三、解答题 (共 18 分)

18、(2011•常州) ①计算: $\sin 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{8}$;

②化简: $\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$.

考点: 分式的加减法; 立方根; 实数的运算; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题.

分析: ①先计算 45 度的正弦值, 再将分式化简, 计算出立方根, 合并同类项可得答案;

②先通分, 将分子合并同类项以后再约分得到最简值.

解答: 解: ①原式 $= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{8}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$= 2$$

$$\text{②原式} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} - \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2x - x + 2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x-2}$$

点评: 这两题考查了分式的加减运算, 也涉及特殊的正弦值和立方根的求法, 题目比较容易.

19、(2011•常州) ①解分式方程 $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2}$;

②解不等式组 $\begin{cases} x - 2 < 6(x + 3) \\ 5(x - 1) - 6 \geq 4(x + 1) \end{cases}$.

考点: 解分式方程; 解一元一次不等式组.

专题: 计算题.

分析: ①公分母为 $(x+2)(x-2)$, 去分母, 转化为整式方程求解, 结果要检验;

②先分别解每一个不等式, 再求解集的公共部分, 即为不等式组解.

解答: 解: ①去分母, 得 $2(x-2) = 3(x+2)$,

去括号, 得 $2x - 4 = 3x + 6$,

移项, 得 $2x - 3x = 4 + 6$,

解得 $x = -10$,

检验: 当 $x = -10$ 时, $(x+2)(x-2) \neq 0$,

∴原方程的解为 $x = -10$;

②不等式①化为 $x - 2 < 6x + 18$,

解得 $x > -4$,

不等式②化为 $5x - 5 - 6 \geq 4x + 4$,

解得 $x \geq 15$,

∴不等式组的解集为 $x \geq 15$.

点评: 本题考查了分式方程, 不等式组的解法. (1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. (2) 解分式方程一定要注意验根. 解不等式组时, 先解每一个不等式, 再求解集的公共部分.

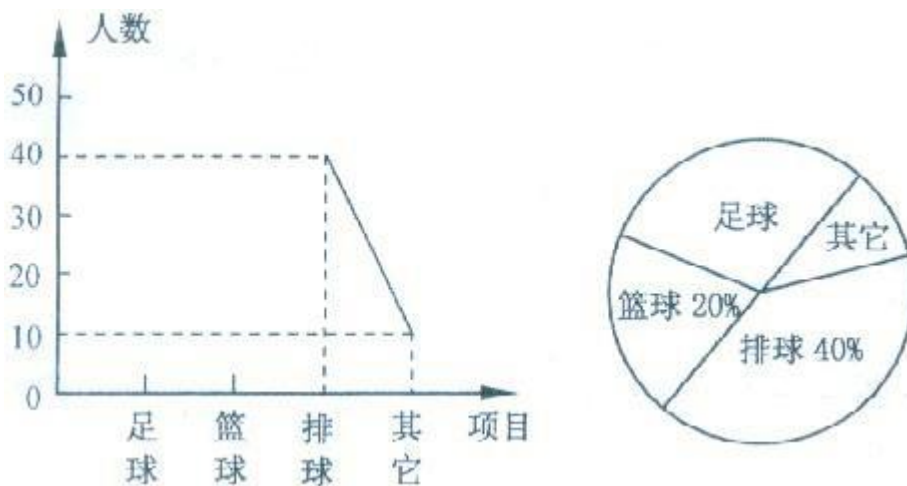
四、解答题 (共 15 分)

20、(2011•常州) 某中学为了解本校学生对球类运动的爱好情况, 采用抽样的方法, 从足球、篮球、排球、其它等四个方面调查了若干名学生, 并绘制成“折线统计图”与“扇形统计图”. 请你根据图中提供的部分信息解答下列问题:

(1) 在这次调查活动中, 一共调查了 100 名学生;

(2) “足球”所在扇形的圆心角是 108 度;

(3) 补全折线统计图.



考点: 折线统计图; 扇形统计图.

专题: 数形结合.

分析: (1) 读图可知喜欢乒乓球的有 40 人, 占 40%. 所以一共调查了 $40 \div 40\% = 100$ 人;

(2) 喜欢其他的 10 人, 应占 $\frac{10}{100} \times 100\% = 10\%$, 喜欢足球的应占统计图的 $1 - 20\% - 40\% - 10\% = 30\%$,

所占的圆心角为 $360^\circ \times 20\% = 108$ 度;

(3) 进一步计算出喜欢足球的人数: $30\% \times 100 = 30$ (人), 喜欢蓝的人数: $20\% \times 100 = 20$ (人). 可作出折线图.

解答: 解: (1) $40 \div 40\% = 100$ (人). (1 分)

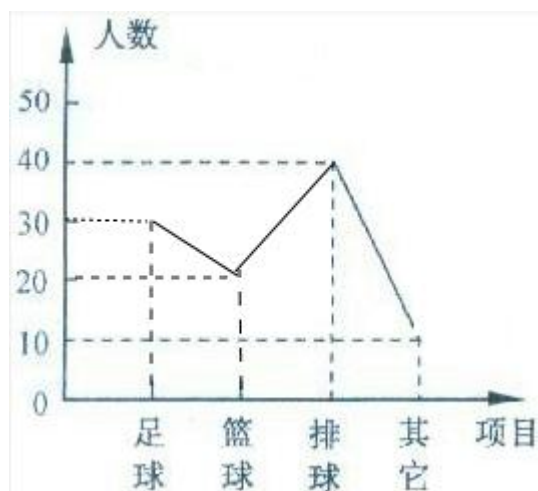
(2) $\frac{10}{100} \times 100\% = 10\%$, (2 分)

$1 - 20\% - 40\% - 30\% = 30\%$,

$360^\circ \times 30\% = 108$ 度. (3 分)

(3) 喜欢篮球的人数: $20\% \times 100 = 20$ (人), (4 分)

喜欢足球的人数: $30\% \times 100 = 30$ (人). (5 分)



点评: 本题考查学生的读图能力以及频率、频数的计算. 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

21、(2011·常州) 甲、乙、丙三个布袋都不透明, 甲袋中装有 1 个红球和 1 个白球; 乙袋中装有一个红球和 2 个白球; 丙袋中装有 2 个白球. 这些球除颜色外都相同. 从这 3 个袋中各随机地取出 1 个球.

①取出的 3 个球恰好是 2 个红球和 1 个白球的概率是多少?

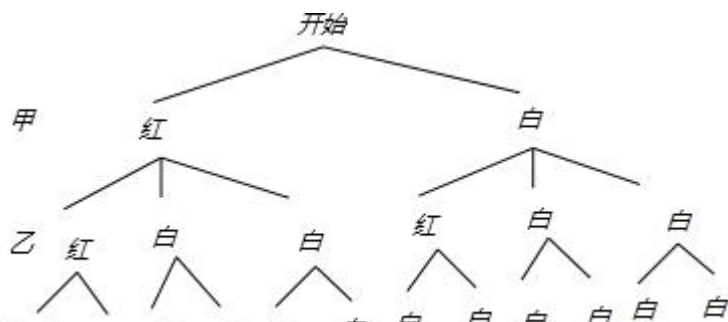
②取出的 3 个球全是白球的概率是多少?

考点: 列表法与树状图法.

专题: 计算题.

分析: (1) 此题需要三步完成, 所以采用树状图法比较简单, 然后树状图分析所有等可能的出现结果, 根据概率公式即可求出该事件的概率;

(2) 求得取出的 3 个球全是白球的所有情况, 然后根据概率公式即可求出该事件的概率.



解答: 解: 丙白 白 白 白 白 白 白 白 白 白 白 白 (1) 画树状图得:

$\therefore$ 一共有 12 种等可能的结果,

取出的 3 个球恰好是 2 个红球和 1 个白球的有 2 种情况,

$\therefore$ 取出的 3 个球恰好是 2 个红球和 1 个白球的概率是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

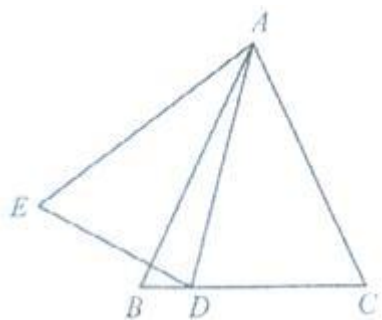
(2) $\therefore$ 取出的 3 个球全是白球的有 4 种情况,

$\therefore$ 取出的 3 个球全是白球的概率是 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合于两步完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

五、解答题 (共 12 分)

22、(2011•常州) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上的一点, AD 平分 $\angle EDC$, 且 $\angle E = \angle B$, $DE = DC$, 求证: $AB = AC$.



考点: 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的判定。

专题: 证明题。

分析: 根据在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上的一点, AD 平分 $\angle EDC$, 且 $\angle E = \angle B$, $DE = DC$, 求证 $\triangle AED \cong \triangle ADC$, 然后利用等量代换即可求的结论.

解答: 证明: $\because AD$ 平分 $\angle EDC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle ADC,$$

$$\because DE = DC,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle ADC,$$

$$\therefore \angle C = \angle E,$$

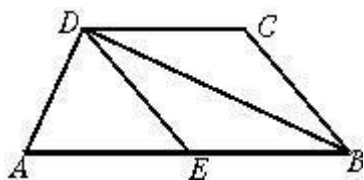
$$\because \angle E = \angle B.$$

$$\therefore \angle C = \angle B,$$

$$\therefore AB = AC.$$

点评: 此题主要考查学生对全等三角形的判定与性质和等腰三角形的判定的理解和掌握, 难度不大, 属于基础题.

23、(2011•常州) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $BC = CD$, $AD \perp BD$, E 为 AB 中点, 求证: 四边形 $BCDE$ 是菱形.



考点: 菱形的判定。

专题: 证明题。

分析: 由题意易得 $DE = BE$, 再证四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 即证四边形 $BCDE$ 是菱形.

解答: 证明: $\because AD \perp BD$,

$$\therefore \triangle ABD \text{ 是 Rt}\triangle$$

$$\because E \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB, DE = \frac{1}{2}AB \quad (\text{直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半}),$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD,$$

$$\because CB = CD,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore \angle EBD = \angle CDB$,
 $\therefore \angle EDB = \angle EBD = \angle CDB = \angle CBD$,
 $\therefore BD = BD$,
 $\therefore \triangle EBD \cong \triangle CBD$ (SAS),
 $\therefore BE = BC$,
 $\therefore CB = CD = BE = DE$,
 $\therefore$ 菱形 BCDE. (四边相等的四边形是菱形)

点评: 此题主要考查菱形的判定, 综合利用了直角三角形的性质和平行线的性质.

六. 探究与画图 (共 13 分)

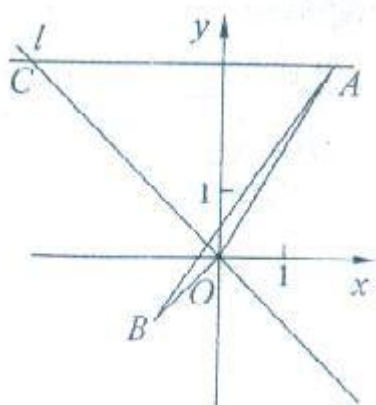
24、(2011•常州) 如图, 在 $\triangle ABO$ 中, 已知点 $A(\sqrt{3}, 3)$ 、 $B(-1, -1)$ 、 $C(0, 0)$, 正比例函数 $y = -x$ 图象是直线 l , 直线 $AC \parallel x$ 轴交直线 l 与点 C .

(1) C 点的坐标为 $(-3, 3)$;

(2) 以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle ABO$ 顺时针旋转角 α ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), 使得点 B 落在直线 l 上的对应点为 B' , 点 A 的对应点为 A' , 得到 $\triangle A'OB'$.

① $\angle \alpha =$ 90° ; ② 画出 $\triangle A'OB'$.

(3) 写出所有满足 $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ 的点 D 的坐标.



考点: 作图-旋转变换; 一次函数的性质; 相似三角形的判定与性质.

专题: 作图题.

分析: (1) 直线 $AC \parallel x$ 轴交直线 l 于点 C , 可知 A 、 C 两点纵坐标相等, 直线 l 解析式为 $y = -x$, 可知 C 点横、纵坐标互为相反数, 可求 C 点坐标;

(2) 已知 $B(-1, -1)$ 可知 OB 为第三象限角平分线, 又直线 l 为二、四象限角平分线, 故旋转角为 90° , 依题意画出 $\triangle A'OB'$ 即可;

(3) 根据 A 点坐标可知 OA 与 x 轴正半轴夹角为 60° , 可知 $\angle AOB = 165^\circ$, 根据对应关系, 则 $\angle DOC = 165^\circ$, 故 OD 在第四象限, 与 x 轴正半轴夹角为 30° 或与 y 轴负半轴夹角为 30° , 根据 A 、 B 、 C 三点坐标求 OA 、

OB 、 OC , 利用 $\frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB}$ 求 OD , 再确定 D 点坐标.

解答: 解: (1) $\because$ 直线 $AC \parallel x$ 轴交直线 l 于点 C ,

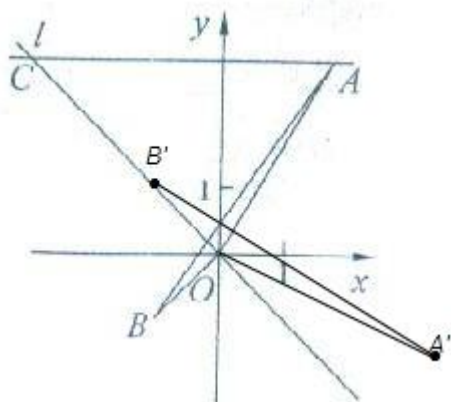
$\therefore C$ 两点纵坐标为 3, 代入直线 $y = -x$ 中, 得 C 点横坐标为 -3 ,

$\therefore C(-3, 3)$;

(2) 由 $B(-1, -1)$ 可知, OB 为第三象限角平分线, 又直线 l 为二、四象限角平分线,

∴ 旋转角为 $\angle \alpha = \angle BOB' = 90^\circ$, $\triangle A'OB'$ 如图所示;

(3) D 点坐标为 $(9, -3\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}, -9)$.



点评: 本题考查了旋转变换的作图, 一次函数图象的性质, 相似三角形的判定与性质. 关键是根据点的坐标, 直线解析式的特点求相关线段的长, 角的度数, 利用形数结合求解.

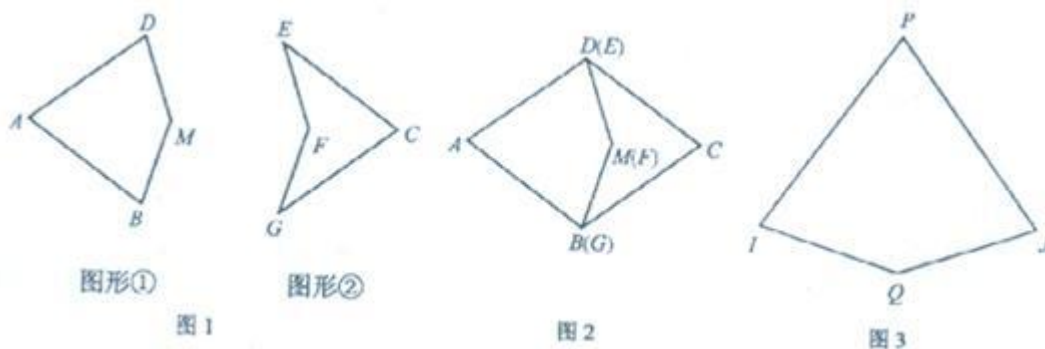
25、(2011·常州) 已知: 如图 1, 图形①满足 $AD=AB$, $MD=MB$, $\angle A=72^\circ$, $\angle M=144^\circ$. 图形②与图形①恰好拼成一个菱形 (如图 2). 记 AB 的长度为 a , BM 的长度为 b .

(1) 图形①中 $\angle B = 72^\circ$, 图形②中 $\angle E = 36^\circ$;

(2) 小明有两种纸片各若干张, 其中一种纸片的形状及大小与图形①相同, 这种纸片称为“风筝一号”; 另一种纸片的形状及大小与图形②相同, 这种纸片称为“飞镖一号”.

①小明仅用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形, 需要这种纸片 5 张;

②小明若用若干张“风筝一号”纸片和“飞镖一号”纸片拼成一个“大风筝” (如图 3), 其中 $\angle P=72^\circ$, $\angle Q=144^\circ$, 且 $PI=PJ=a+b$, $IQ=JQ$. 请在图 3 中画出拼接线并保留画图痕迹. (本题中均为无重叠、无缝隙拼接)



考点: 菱形的性质; 正多边形和圆; 作图—应用与设计作图.

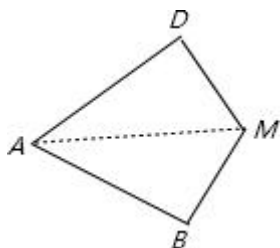
专题: 操作型.

分析: (1) 连接 AM , 根据三角形 ADM 和三角形 ABM 的三边对应相等, 得到两三角形全等, 根据全等三角形的对应角相等得到角 B 和角 D 相等, 根据四边形的内角和为 360° , 由角 DAB 和角 DMB 的度数, 即可求出角 B 的度数; 根据菱形的对边平行, 得到 AB 与 DC 平行, 得到同旁内角互补, 即角 A 加角 ADB 加角 MDC 等于 180° , 由角 A 和角 ADB 的度数即可求出角 FEC 的度数;

(2) ①由题意可知, “风筝一号”纸片中的点 A 与正十边形的中心重合, 由角 DAB 为 72° , 根据周角为 360° , 利用 360° 除以 72° 即可得到需要“风筝一号”纸片的张数;

②以 P 为圆心, a 长为半径画弧, 与 PI 和 PJ 分别交于两点, 然后以两交点为圆心, 以 b 长为半径在角 IPJ 的内部画弧, 两弧交于一点, 连接这点与点 Q , 画出满足题意的拼接线.

解答：解：（1）连接 AM，如图所示：



$\because AD=AB$, $DM=BM$, AM 为公共边,

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ABM$,

$\therefore \angle D = \angle B$,

又因为四边形 ABMD 的内角和等于 360° , $\angle DAB=72^\circ$, $\angle DMB=144^\circ$,

$$\therefore \angle B = \frac{360^\circ - 72^\circ - 144^\circ}{2} = 72^\circ;$$

在图 2 中, 因为四边形 ABCD 为菱形, 所以 $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A + \angle ADC = \angle A + \angle ADM + \angle CEF = 180^\circ$, $\angle A = 72^\circ$, $\angle ADM = 72^\circ$,

$\therefore \angle CEF = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$;

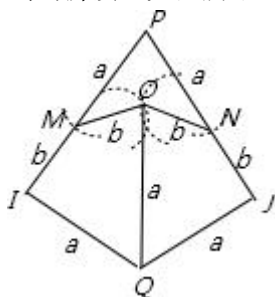
(2) ①用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形,

得到“风筝一号”纸片的点 A 与正十边形的中心重合, 又 $\angle A = 72^\circ$,

则需要这种纸片的数量 $= \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$;

②根据题意可知: “风筝一号”纸片用两张和“飞镖一号”纸片用一张,

画出拼接线如图所示:



故答案为: (1) 72° ; 36° ; (2) ①、5.

点评: 此题考查掌握菱形的性质, 灵活运用两三角形的全等得到对应的角相等, 掌握密铺地面的秘诀, 锻炼学生的动手操作能力, 培养学生的发散思维, 是一道中档题.

七、解答题 (共 3 小题, 共 26 分)

26、(2011•常州) 某商店以 6 元/千克的价格购进某种干果 1140 千克, 并对其进行筛选分成甲级干果与乙级干果后同时开始销售. 这批干果销售结束后, 店主从销售统计中发出: 甲级干果与乙级干果在销售过程中每天都有销量, 且在同一天卖完; 甲级干果从开始销售至销售的第 x 天的总销量 y_1 (千克) 与 x 的关系为 $y_1 = -x^2 + 40x$; 乙级干果从开始销售至销售的第 t 天的总销量 y_2 (千克) 与 t 的关系为 $y_2 = at^2 + bt$, 且乙级干果的前三天的销售量的情况见下表:

t	1	2	3
y_2	21	44	69

(1) 求 a 、 b 的值;

(2) 若甲级干果与乙级干果分别以 8 元/千克的 6 元/千克的零售价出售, 则卖完这批干果获得的毛利润是多少元?

(3) 问从第几天起乙级干果每天的销量比甲级干果每天的销量至少多 6 千克?

(说明: 毛利润=销售总金额-进货总金额. 这批干果进货至卖完的过程中的损耗忽略不计)

考点: 一元二次方程的应用; 二元一次方程组的应用; 一元一次不等式的应用.

专题: 销售问题.

分析: (1) 根据表中的数据代入后, $y_2=at^2+bt$, 得到关于 a, b 的二元一次方程, 从而可求出解.

(2) 设干果用 n 天卖完, 根据两个关系式和干果共有 1140 千克可列方程求解. 然后用售价-进价, 得到利润.

(3) 设第 m 天乙级干果每天的销量比甲级干果每天的销量至少多 6 千克, 从而可列出不等式求解.

解答: 解: (1) 根据表中的数据可得
$$\begin{cases} 21 = a + b \\ 44 = 4a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 20 \end{cases}$$

(2) 甲级干果和乙级干果 n 天售完这批货.

$$-n^2+4n+n^2+20n=1140$$

$$n=19,$$

当 $n=19$ 时, $y_1=399$, $y_2=741$,

毛利润= $399 \times 8 + 741 \times 6 - 1140 \times 6 = 798$ (元).

(3) 设第 m 天甲级干果的销售量为 $-2m+19$.

$$(2m+19) - (-2m+41) \geq 6$$

$$n \geq 7$$

第 7 天起乙级干果每天的销量比甲级干果每天的销量至少多 6 千克.

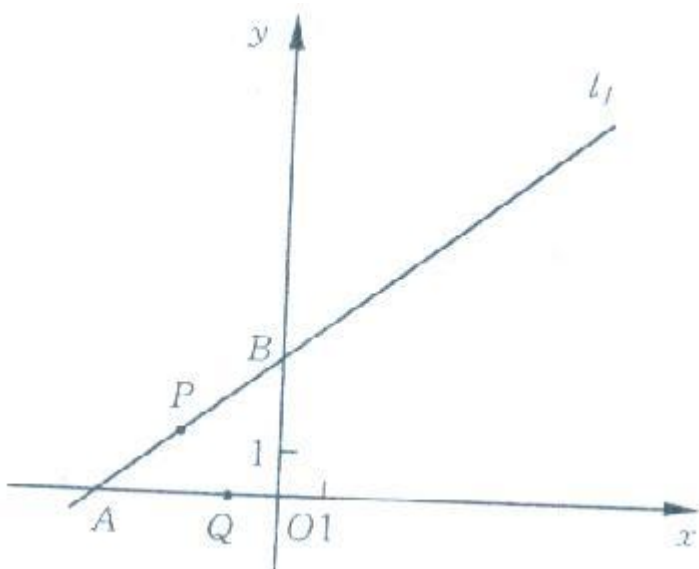
点评: 本题考查理解题意的能力, 关键是根据表格代入数列出二元一次方程组求出 a 和 b , 确定函数式, 然后根据等量关系和不等量关系分别列方程和不等式求解.

27、(2011·常州) 在平面直角坐标系 XOY 中, 一次函数 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 的图象是直线 l_1 , l_1 与 x 轴、 y

轴分别相交于 A、B 两点. 直线 l_2 过点 C ($a, 0$) 且与直线 l_1 垂直, 其中 $a > 0$. 点 P、Q 同时从 A 点出发, 其中点 P 沿射线 AB 运动, 速度为每秒 4 个单位; 点 Q 沿射线 AO 运动, 速度为每秒 5 个单位.

(1) 写出 A 点的坐标和 AB 的长;

(2) 当点 P、Q 运动了多少秒时, 以点 Q 为圆心, PQ 为半径的 $\odot Q$ 与直线 l_2 、 y 轴都相切, 求此时 a 的值.



考点：一次函数综合题；切线的性质；相似三角形的判定与性质。

专题：几何动点问题；分类讨论。

分析：（1）根据一次函数图象与坐标轴的交点求法，分别求出坐标即可；

（2）根据相似三角形的判定得出 $\triangle APQ \sim \triangle AOB$ ，以及当 $\odot Q$ 在 y 轴右侧与 y 轴相切时，当 $\odot Q$ 在 y 轴的左侧与 y 轴相切时，分别分析得出答案。

解答：解：（1） $\because$ 一次函数 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 的图象是直线 l_1 ， l_1 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点，

$\therefore y=0$ 时， $x=-4$ ，

$\therefore A(-4, 0)$ ， $AO=4$ ，

$\therefore$ 图象与 y 轴交点坐标为： $(0, 3)$ ， $BO=3$ ，

$\therefore AB=5$ ；

（2）由题意得： $AP=4t$ ， $AQ=5t$ ， $\frac{AP}{AO} = \frac{AQ}{BO} = t$ ，

又 $\angle PAQ = \angle OAB$ ，

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle AOB$ ，

$\therefore \angle APQ = \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 P 在 l_1 上，

$\therefore \odot Q$ 在运动过程中保持与 l_1 相切，

①当 $\odot Q$ 在 y 轴右侧与 y 轴相切时，设 l_2 与 $\odot Q$ 相切于 F ，由 $\triangle APQ \sim \triangle AOB$ ，得：

$$\therefore \frac{PQ}{3} = \frac{4+PQ}{5},$$

$\therefore PQ=6$ ；

连接 QF ，则 $QF=PQ$ ，由 $\triangle QFC \sim \triangle APQ \sim \triangle AOB$ ，

得： $\frac{QF}{AO} = \frac{QC}{AB}$ ，

$$\therefore \frac{PQ}{AO} = \frac{QC}{AB},$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{QC}{5},$$

$$\therefore QC = \frac{15}{2},$$

$$\therefore a = OQ + QC = \frac{27}{2},$$

②当 $\odot Q$ 在 y 轴的左侧与 y 轴相切时, 设 l_2 与 $\odot Q$ 相切于 E , 由 $\triangle APQ \sim \triangle AOB$ 得: $\frac{PQ}{3} = \frac{4 - PQ}{5},$

$$\therefore PQ = \frac{3}{2},$$

连接 QE , 则 $QE = PQ$, 由 $\triangle QEC \sim \triangle APQ \sim \triangle AOB$ 得: $\frac{QE}{OA} = \frac{QC}{AB},$

$$\therefore \frac{PQ}{AO} = \frac{QC}{AB}, \quad \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{QC}{5},$$

$$\therefore QC = \frac{15}{8}, \quad a = QC - OQ = \frac{3}{8},$$

$$\therefore a \text{ 的值为 } \frac{27}{2} \text{ 和 } \frac{3}{8},$$

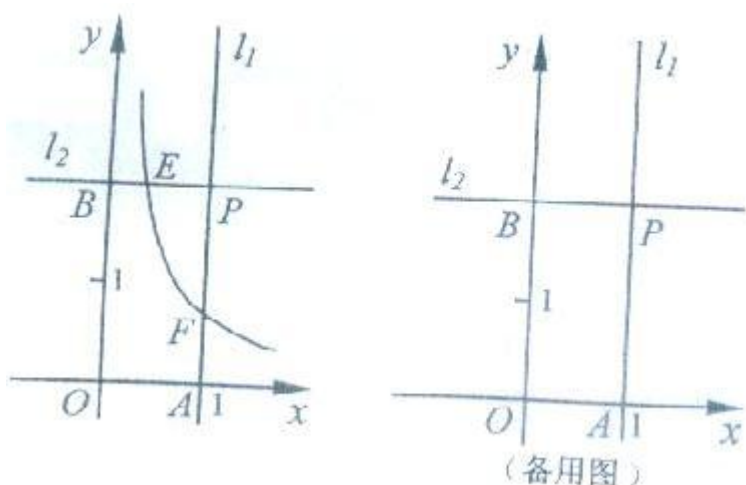
点评: 此题主要考查了切线的性质以及相似三角形的判定与性质, 利用数形结合进行分析注意分类讨论才能得出正确答案.

28、(2011•常州) 在平面直角坐标系 XOY 中, 直线 l_1 过点 $A(1, 0)$ 且与 y 轴平行, 直线 l_2 过点 $B(0,$

2) 且与 x 轴平行, 直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 P . 点 E 为直线 l_2 上一点, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图

象过点 E 与直线 l_1 相交于点 F .

- (1) 若点 E 与点 P 重合, 求 k 的值;
- (2) 连接 OE 、 OF 、 EF . 若 $k > 2$, 且 $\triangle OEF$ 的面积为 $\triangle PEF$ 的面积2倍, 求 E 点的坐标;
- (3) 是否存在点 E 及 y 轴上的点 M , 使得以点 M 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle PEF$ 全等? 若存在, 求 E 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



考点：相似三角形的判定与性质；反比例函数综合题；全等三角形的判定与性质；勾股定理。

专题：分类讨论。

分析：(1) 根据反比例函数中 $k=xy$ 进行解答即可；

(2) 当 $k > 2$ 时，点 E、F 分别在 P 点的右侧和上方，过 E 作 x 轴的垂线 EC，垂足为 C，过 F 作 y 轴的垂线 FD，垂足为 D，EC 和 FD 相交于点 G，则四边形 OCGD 为矩形，再求出 $S_{\triangle FPE} = \frac{1}{4}k^2 - k + 1$ ，根据 $S_{\triangle OEF} = S_{\text{矩形 OCGD}} - S_{\triangle DOF} - S_{\triangle EGD} - S_{\triangle OCE}$ 即可求出 k 的值，进而求出 E 点坐标；

(3) ①当 $k < 2$ 时，只可能是 $\triangle MEF \cong \triangle PEF$ ，作 $FH \perp y$ 轴于 H，由 $\triangle FHM \sim \triangle MBE$ 可求出 BM 的值，

再在 $\text{Rt}\triangle MBE$ 中，由勾股定理得， $EM^2 = EB^2 + MB^2$ ，求出 k 的值，进而可得出 E 点坐标；

②当 $k > 2$ 时，只可能是 $\triangle MFE \cong \triangle PEF$ ，作 $FQ \perp y$ 轴于 Q， $\triangle FQM \sim \triangle MBE$ 得， $\frac{BM}{FQ} = \frac{EM}{FM}$ ，可求出 BM

的值，再在 $\text{Rt}\triangle MBE$ 中，由勾股定理得， $EM^2 = EB^2 + MB^2$ ，求出 k 的值，进而可得出 E 点坐标。

解答：解：(1) 若点 E 与点 D 重合，则 $k = 1 \times 2 = 2$ ；

(2) 当 $k > 2$ 时，如图 1，点 E、F 分别在 P 点的右侧和上方，过 E 作 x 轴的垂线 EC，垂足为 C，过 F 作 y 轴的垂线 FD，垂足为 D，EC 和 FD 相交于点 G，则四边形 OCGD 为矩形，
 $\therefore PF \perp PE$,

$$\therefore S_{\triangle FPE} = \frac{1}{2} PE \cdot PF = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) (k - 2) = \frac{1}{4} k^2 - k + 1,$$

$\therefore$ 四边形 PFGE 是矩形，

$$\therefore S_{\triangle PFE} = S_{\triangle GEF},$$

$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\text{矩形 OCGD}} - S_{\triangle DOF} - S_{\triangle EGD} - S_{\triangle OCE} = \frac{k}{2} \cdot k - \left(\frac{1}{4} k^2 - k + 1 \right) - k = \frac{1}{4} k^2 - 1$$

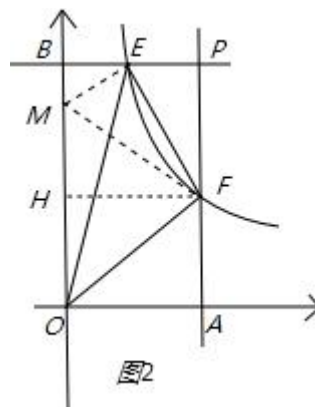
$$\therefore S_{\triangle OEF} = 2S_{\triangle PEF},$$

$$\therefore \frac{1}{4} k^2 - 1 = 2 \left(\frac{1}{4} k^2 - k + 1 \right),$$

解得 $k = 6$ 或 $k = 2$,

$\therefore k = 2$ 时，E、F 重合，

$\therefore E$ 点坐标为: $(3, 2)$;

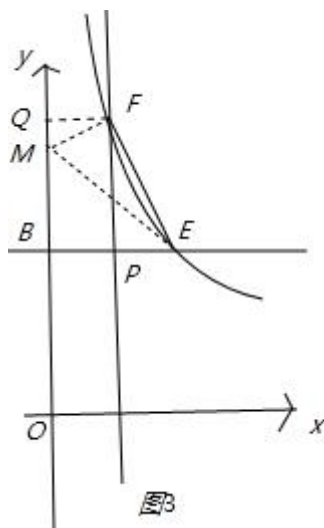


①当 $k < 2$ 时, 如图 2, 只可能是 $\triangle MEF \cong \triangle PEF$, 作 $FH \perp y$ 轴于 H ,
 $\therefore \triangle FHM \sim \triangle MBE$,

$$\therefore \frac{BM}{FH} = \frac{EM}{FM},$$

$$\therefore FH=1, \quad EM=PE=1-\frac{k}{2}, \quad FM=PF=2-k,$$

$$\therefore \frac{BM}{1} = \frac{1 - \frac{k}{2}}{2 - k}, \quad BM = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \left(1 - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$


解得 $k=\frac{3}{4}$, 此时 E 点坐标为 $(\frac{3}{8}, 2)$,

②当 $k > 2$ 时, 如图 3, 只可能是 $\triangle MFE \cong \triangle PEF$, 作 $FQ \perp y$ 轴于 Q , $\triangle FQM \sim \triangle MBE$ 得, $\frac{BM}{FQ} = \frac{EM}{FM}$,

$$\therefore FQ=1, EM=PF=k-2, FM=PE=\frac{k}{2}-1,$$

$$\therefore \frac{BM}{1}=\frac{k-2}{\frac{k}{2}-1}, BM=2,$$

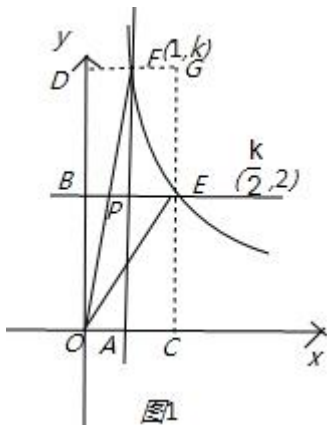
在 $Rt\triangle MBE$ 中, 由勾股定理得, $EM^2=EB^2+MB^2$,

$$\therefore (k-2)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 2^2, \text{ 解得 } k=\frac{16}{3} \text{ 或 } 0, \text{ 但 } k=0 \text{ 不符合题意,}$$

$$\therefore k=\frac{16}{3}.$$

此时 E 点坐标为 $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$,

$\therefore$ 符合条件的 E 点坐标为 $\left(\frac{3}{8}, 2\right)$ $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$.



点评: 本题考查的是相似三角形的判定与性质, 涉及到反比例函数的性质、全等三角形的判定与性质及勾股定理, 解答此题的关键是根据题意作出辅助线, 构造出相似三角形, 利用相似三角形的性质解答.