

# 2008 年江苏省扬州市中考数学试题

(考试时间: 120 分钟 满分: 150 分)

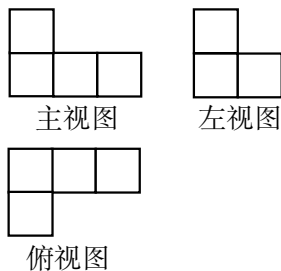
说明:

1. 答卷前, 考生务必将本人的姓名、考试证号、科目填涂在答题卡相应的位置上, 同时在试卷的密封线内也务必将本人的准考证号、考试证号、姓名、学校填写好, 在第 2 页的右下角填写好座位号.
2. 第 I 卷上选择题答案必须填涂在答题卡上相应的答题栏内, 在第 I 卷上答题无效.
3. 非选择题部分用钢笔或圆珠笔直接在第 II 卷相应的位置上作答.
4. 考试结束, 试卷与答题卡一并上交.

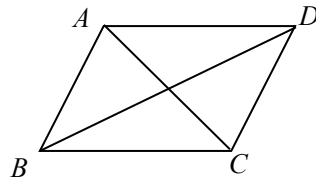
## 第 I 卷 (选择题 共 24 分)

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 共 24 分. 每题的四个选项中, 只有一个选项是符合要求的.)

1. 在平面直角坐标系中, 点  $P(-1, 2)$  的位置在 ( )  
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 估计 68 的立方根的大小在 ( )  
A. 2 与 3 之间 B. 3 与 4 之间 C. 4 与 5 之间 D. 5 与 6 之间
3. 如图是由一些相同的小正方体构成的几何体的三视图, 这些相同的小正方体的个数是 ( )  
A. 7 个 B. 6 个 C. 5 个 D. 4 个

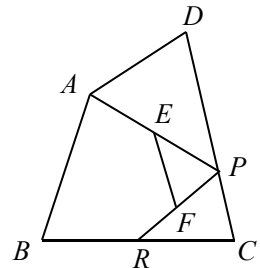


(第 3 题图)



(第 5 题图)

4. 在平面直角坐标系中, 将点  $A(1, 2)$  的横坐标乘以  $-1$ , 纵坐标不变, 得到点  $A'$ , 则点  $A$  与  $A'$  的关系是 ( )  
A. 关于  $x$  轴对称 B. 关于  $y$  轴对称  
C. 关于原点对称 D. 将点  $A$  向  $x$  轴负方向平移一个单位得点  $A'$
5. 如图, 已知四边形  $ABCD$  是平行四边形, 下列结论中不正确的是 ( )  
A. 当  $AB = BC$  时, 它是菱形  
B. 当  $AC \perp BD$  时, 它是菱形  
C. 当  $\angle ABC = 90^\circ$  时, 它是矩形  
D. 当  $AC = BD$  时, 它是正方形
6. 如图, 已知四边形  $ABCD$  中,  $R$ 、 $P$  分别是  $BC$ 、 $CD$  上的点,  $E$ 、 $F$  分别是  $AP$ 、 $RP$  的中点, 当点  $P$  在  $CD$  上从  $C$  向  $D$  移动而点  $R$  不动时, 那么下列结论成立的是 ( )  
A. 线段  $EF$  的长逐渐增大 B. 线段  $EF$  的长逐渐减小



(第 6 题图)

C. 线段  $EF$  的长不变

D. 线段  $EF$  的长与点  $P$  的位置有关

7. 函数  $y = \frac{1-k}{x}$  的图象与直线  $y = x$  没有交点, 那么  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $k > 1$

B.  $k < 1$

C.  $k > -1$

D.  $k < -1$

8. 若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + 2x - 5 = 0$  的两根中有且仅有一根在 0 与 1 之间 (不含 0 和 1), 则  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $a < 3$

B.  $a > 3$

C.  $a < -3$

D.  $a > -3$

## 第 II 卷 (非选择题 共 126 分)

二. 填空题 (本大题共 10 题, 每题 3 分, 共 30 分. 把答案填在题中的横线上.)

9. 如果  $\square + 2 = 0$ , 那么 “ $\square$ ” 内应填的实数是\_\_\_\_\_.

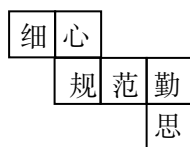
10. 2008 年 5 月 26 日下午, 奥运圣火扬州站的传递在一路 “中国加油” 声中胜利结束, 全程 11.8 千米, 11.8 千米用科学记数法表示是\_\_\_\_\_米.

11. 函数  $y = \sqrt{x+3}$  中, 自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

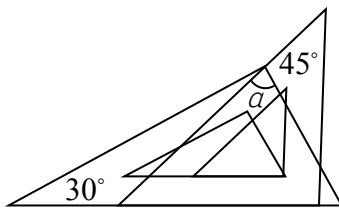
12. 已知  $x + y = 6$ ,  $xy = -3$ , 则  $x^2y + xy^2 =$ \_\_\_\_\_.

13. 我们扬州的旅游宣传口号是 “诗画瘦西湖, 人文古扬州. 给你宁静, 还你活力”. 为了了解广大市民对这一旅游宣传口号的知晓率, 应采用的合适的调查方式为\_\_\_\_\_. (选填 “普查” 或 “抽样调查”)

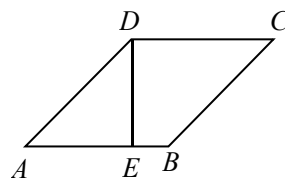
14. 小红将考试时自勉的话 “细心 · 规范 · 勤思” 写在一个正方体的六个面上, 其平面展开图如图所示, 那么在该正方体中, 和 “细” 相对的字是\_\_\_\_\_.



(第 14 题图)



(第 15 题图)

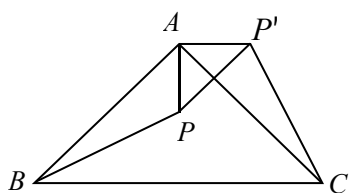


(第 16 题图)

15. 一副三角板如图所示叠放在一起, 则图中  $\angle \alpha$  的度数是\_\_\_\_\_.

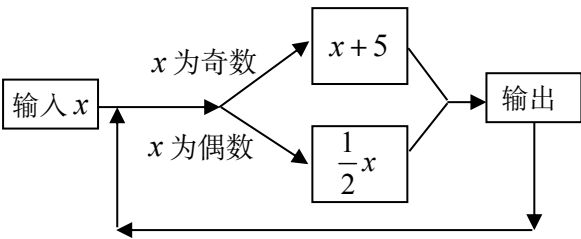
16. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $DE \perp AB$ , 垂足为  $E$ ,  $DE = 6\text{cm}$ ,  $\sin A = \frac{3}{5}$ , 则菱形  $ABCD$  的面积是\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

17. 如图  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形,  $BC$  是斜边,  $P$  为  $\triangle ABC$  内一点, 将  $\triangle ABP$  绕点  $A$  逆时针旋转后与  $\triangle ACP'$  重合, 如果  $AP = 3$ , 那么线段  $PP'$  的长等于\_\_\_\_\_.



(第 17 题图)

18. 按如图所示的程序计算, 若开始输入的  $x$  的值为 48, 我们发现第一次得到的结果为 24, 第 2 次得到的结果为 12, …… , 请你探索第 2009 次得到的结果为\_\_\_\_\_.



(第 18 题图)

三、解答题 (本大题共 8 题, 共 96 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (本题满分 14 分, 每 (1) 题 6 分, 每 (2) 题 8 分)

(1) 计算:  $(-1)^{2008} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \sqrt{16} - \cos 60^\circ$ .

(2) 课堂上, 李老师出了这样一道题:

已知  $x = 2008 - 5\sqrt{3}$ , 求代数式  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \div \left(1 + \frac{x - 3}{x + 1}\right)$  的值.

小明觉得直接代入计算太繁了, 请你来帮他解决, 并写出具体过程.

20. (本题满分 10 分)

星期天上午, 茱萸湾动物园熊猫馆来了甲、乙两队游客, 两队游客的年龄如下表所示:

甲队:

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 年龄 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 人数 | 2  | 1  | 4  | 7  | 2  |

乙队:

|    |   |   |   |   |    |    |
|----|---|---|---|---|----|----|
| 年龄 | 3 | 4 | 5 | 6 | 54 | 57 |
| 人数 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1  | 1  |

(1) 根据上述数据完成下表:

|        | 平均数 | 中位数 | 众数 | 方差    |
|--------|-----|-----|----|-------|
| 甲队游客年龄 |     | 15  | 15 |       |
| 乙队游客年龄 | 15  |     |    | 471.4 |

(2) 根据前面的统计分析, 回答下列问题:

①能代表甲队游客一般年龄的统计量是\_\_\_\_\_;

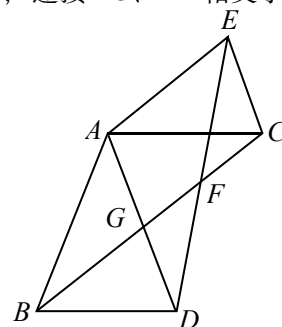
②平均数能较好地反映乙队游客的年龄特征吗? 为什么?

21. (本题满分 10 分)

如图, 在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACE$  中,  $AB=AD$ ,  $AC=AE$ ,  $\angle BAD=\angle CAE$ , 连接  $BC$ 、 $DE$  相交于点  $F$ ,  $BC$  与  $AD$  相交于点  $G$ .

(1) 试判断线段  $BC$ 、 $DE$  的数量关系, 并说明理由;

(2) 如果  $\angle ABC=\angle CBD$ , 那么线段  $FD$  是线段  $FG$  和  $FB$  的比例中项吗? 为什么?



22. (本题满分 12 分)

一只不透明的袋子中, 装有 2 个白球和 1 个红球, 这些球除颜色外都相同.

(1) 小明认为, 搅均后从中任意摸出一个球, 不是白球就是红球, 因此摸出白球和摸出红球是等可能的. 你同意他的说法吗? 为什么?

(2) 搅均后从中一把摸出两个球, 请通过列表或画树状图求两个球都是白球的概率;

(3) 搅均后从中任意摸出一个球, 要使摸出红球的概率为  $\frac{2}{3}$ , 应如何添加红球?

23. (本题满分 12 分)

某校师生积极为汶川地震灾区捐款, 在得知灾区急需帐篷后, 立即到当地的一家帐篷厂采购, 帐篷有两种规格: 可供 3 人居住的小帐篷, 价格每顶 160 元; 可供 10 人居住的大帐篷, 价格每顶 400 元. 学校花去捐款 96000 元, 正好可供 2300 人临时居住.

(1) 求该校采购了多少顶 3 人小帐篷, 多少顶 10 人大帐篷;

(2) 学校现计划租用甲、乙两种型号的卡车共 20 辆将这批帐篷紧急运往灾区, 已知甲型卡车每辆可同时装运 4 顶小帐篷和 11 顶大帐篷, 乙型卡车每辆可同时装运 12 顶小帐篷和 7 顶大帐篷. 如何安排甲、乙两种卡车可一次性地将这批帐篷运往灾区? 有哪几种方案?

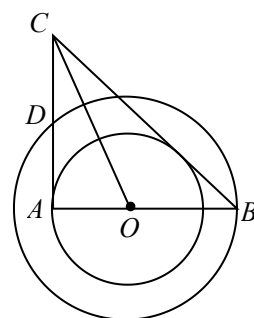
24. (本题满分 12 分)

如图, 在以  $O$  为圆心的两个同心圆中,  $AB$  经过圆心  $O$ , 且与小圆相交于点  $A$ 、与大圆相交于点  $B$ . 小圆的切线  $AC$  与大圆相交于点  $D$ , 且  $CO$  平分  $\angle ACB$ .

(1) 试判断  $BC$  所在直线与小圆的位置关系, 并说明理由;

(2) 试判断线段  $AC$ 、 $AD$ 、 $BC$  之间的数量关系, 并说明理由;

(3) 若  $AB=8\text{cm}$ ,  $BC=10\text{cm}$ , 求大圆与小圆围成的圆环的面积. (结果保留  $\pi$ )



25. (本题满分 12 分)

红星公司生产的某种时令商品每件成本为 20 元，经过市场调研发现，这种商品在未来 40 天内的日销售量  $m$  (件) 与时间  $t$  (天) 的关系如下表：

|              |    |    |    |    |    |     |
|--------------|----|----|----|----|----|-----|
| 时间 $t$ (天)   | 1  | 3  | 5  | 10 | 36 | ... |
| 日销售量 $m$ (件) | 94 | 90 | 84 | 76 | 24 | ... |

未来 40 天内，前 20 天每天的价格  $y_1$  (元/件) 与时间  $t$  (天) 的函数关系式为  $y_1 = \frac{1}{4}t - 25$

( $1 \leq t \leq 20$  且  $t$  为整数)，后 20 天每天的价格  $y_2$  (元/件) 与时间  $t$  (天) 的函数关系式为

$y_2 = -\frac{1}{2}t + 40$  ( $21 \leq t \leq 40$  且  $t$  为整数). 下面我们就来研究销售这种商品的有关问题：

(1) 认真分析上表中的数据，用所学过的一次函数、二次函数、反比例函数的知识确定一个满足这些数据的  $m$  (件) 与  $t$  (天) 之间的关系式；

(2) 请预测未来 40 天中哪一天的日销售利润最大，最大日销售利润是多少？

(3) 在实际销售的前 20 天中，该公司决定每销售一件商品就捐赠  $a$  元利润 ( $a < 4$ ) 给希望工程. 公司通过销售记录发现，前 20 天中，每天扣除捐赠后的日销售利润随时间  $t$  (天) 的增大而增大，求  $a$  的取值范围.

26. (本题满分 14 分)

已知：矩形  $ABCD$  中， $AB=1$ ，点  $M$  在对角线  $AC$  上，直线  $l$  过点  $M$  且与  $AC$  垂直，与  $AD$  相交于点  $E$ .

(1) 如果直线  $l$  与边  $BC$  相交于点  $H$  (如图 1)， $AM = \frac{1}{3}AC$  且  $AD=a$ ，求  $AE$  的长；(用含  $a$  的代数式表示)

(2) 在 (1) 中，又直线  $l$  把矩形分成的两部分面积比为  $2:5$ ，求  $a$  的值；

(3) 若  $AM = \frac{1}{4}AC$ ，且直线  $l$  经过点  $B$  (如图 2)，求  $AD$  的长；

(4) 如果直线  $l$  分别与边  $AD$ 、 $AB$  相交于点  $E$ 、 $F$ ， $AM = \frac{1}{4}AC$ . 设  $AD$  长为  $x$ ， $\triangle AEF$  的面积为  $y$ ，求  $y$  与  $x$  的函数关系式，并指出  $x$  的取值范围. (求  $x$  的取值范围可不写过程)

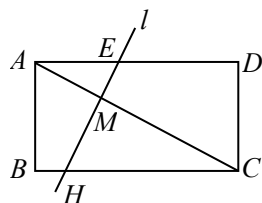


图 1

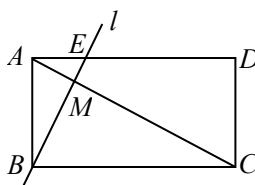


图 2

# 扬州市 2008 年初中毕业、升学统一考试数学试题

## 参考答案及评分标准

说明：若有本参考答案没有提及的解法，只要解答正确，请参照给分。

### 第 I 卷（选择题 共 24 分）

一、选择题（本大题共 8 题，每题 3 分，共 24 分）

1. B 2. C 3. C 4. B 5. D 6. C 7. A 8. B

### 第 II 卷（非选择题 共 126 分）

二、填空题：（每题 3 分，共 30 分）

9. -2; 10.  $1.18 \times 10^4$ ; 11.  $x \geq -3$ ; 12. -18; 13. 抽样调查

14. 范; 15.  $75^\circ$ ; 16. 60; 17.  $3\sqrt{2}$ ; 18. 8

说明：第 11 题若答案是  $x > -3$  不给分；第 17 题若答案是  $\sqrt{18}$  给 2 分。

三、解答题：（本大题共 8 题，共 96 分）

19. (1) 解：原式  $= 1 - 4 + 4 - \frac{1}{2}$   
 $= \frac{1}{2}.$

说明：第一步中每对一个运算给 1 分，第二步 2 分。

(2) 解：原式  $= \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \div \left( \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-3}{x+1} \right)$   
 $= \frac{x-1}{x+1} \div \frac{2(x-1)}{x+1}$   
 $= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{2(x-1)}$   
 $= \frac{1}{2}.$

20. 解：(1) 15    5.5    6    1.8.

(2) ① 平均数或中位数或众数；

② 平均数不能较好地反映乙队游客的年龄特征。

因为乙队游客年龄中含有两个极端值，受两个极端值的影响，导致乙队游客年龄方差较大，平均数高于大部分成员的年龄。

说明：第 (1) 题中平均数、中位数、众数各 1 分，方差 2 分，第 (2) 题中学生说理只要说出受“极端值影响”的大意即可给分。

21. 解: (1)  $BC, DE$  的数量关系是  $BC = DE$ .

理由如下:  $\because \angle BAD = \angle CAE, \therefore \angle BAC = \angle DAE$ .

又  $\because AB = AD, AC = AE$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE$  (SAS).

$\therefore BC = DE$ .

(2) 线段  $FD$  是线段  $FG$  和  $FB$  的比例中项.

理由如下:  $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE, \therefore \angle ABC = \angle ADE$ .

$\because \angle ABC = \angle CBD, \therefore \angle ADE = \angle CBD$ .

又  $\because \angle BFD = \angle DFG$ ,

$\therefore \triangle BFD \sim \triangle DFG$ .

$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{DF}{GF}, \therefore FD^2 = FG \cdot FB$ .

即线段  $FD$  是线段  $FG$  和  $FB$  的比例中项.

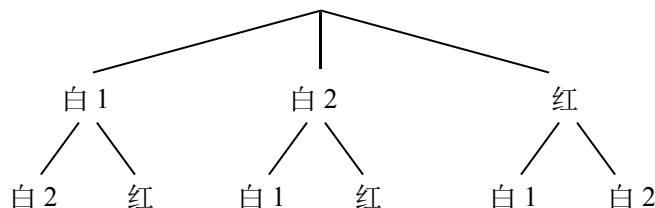
说明: 若第 (1)、(2) 题中结论已证出, 但在证明前未作判断的不扣分.

22. 解: (1) 不同意小明的说法.

因为摸出白球的概率是  $\frac{2}{3}$ , 摸出红球的概率是  $\frac{1}{3}$ ,

因此摸出白球和摸出红球不是等可能的.

(2) 树状图如图 (列表略)



$\therefore P$  (两个球都是白球)  $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(3) (法一) 设应添加  $x$  个红球,

由题意得  $\frac{1+x}{3+x} = \frac{2}{3}$

解得  $x = 3$  (经检验是原方程的解)

答: 应添加 3 个红球.

(法二)  $\because$  添加后  $P$  (摸出红球)  $= \frac{2}{3}$

$\therefore$  添加后  $P$  (摸出白球)  $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$  添加后球的总个数  $= 2 + \frac{1}{3} = 6$ .

$\therefore$  应添加  $6 - 3 = 3$  个红球.

23. 解: (1) 设该校采购了  $x$  顶小帐篷,  $y$  顶大帐篷.

根据题意, 得 
$$\begin{cases} 3x + 10y = 2300, \\ 160x + 400y = 96000. \end{cases}$$

解这个方程组, 得 
$$\begin{cases} x = 100, \\ y = 200. \end{cases}$$

(2) 设甲型卡车安排了  $a$  辆, 则乙型卡车安排了  $(20-a)$  辆.

根据题意, 得 
$$\begin{cases} 4a + 12(20-a) \geq 100, \\ 11a + 7(20-a) \geq 200. \end{cases}$$

解这个不等式组, 得  $15 \leq a \leq 17.5$ .

$\because$  车辆数  $a$  为正整数,  $\therefore a = 15$  或  $16$  或  $17$ .

$\therefore 20-a = 5$  或  $4$  或  $3$ .

答: (1) 该校采购了 100 顶小帐篷, 200 顶大帐篷.

(2) 安排方案有: ①甲型卡车 15 辆, 乙型卡车 5 辆; ②甲型卡车 16 辆, 乙型卡车 4 辆; ③甲型卡车 17 辆, 乙型卡车 3 辆.

24. 解: (1)  $BC$  所在直线与小圆相切,

理由如下: 过圆心  $O$  作  $OE \perp BC$ , 垂足为  $E$ ,

$\because AC$  是小圆的切线,  $AB$  经过圆心  $O$ ,

$\therefore OA \perp AC$ , 又  $\because CO$  平分  $\angle ACB$ ,  $OE \perp BC$ .

$\therefore OE = OA$ .

$\therefore BC$  所在直线是小圆的切线.

(2)  $AC + BD = BC$

理由如下: 连接  $OD$ .

$\because AC$  切小圆  $O$  于点  $A$ ,  $BC$  切小圆  $O$  于点  $E$ ,

$\therefore CE = CA$ .

$\because$  在  $Rt\triangle OAD$  与  $Rt\triangle OEB$  中,

$OA = OE$ ,  $OD = OB$ ,  $\angle OAD = \angle OEB = 90^\circ$ ,

$\therefore Rt\triangle OAD \cong Rt\triangle OEB$  (HL)  $\therefore EB = AD$ .

$\because BC = CE + EB$ ,  $\therefore BC = AC + AD$ .

(3)  $\because \angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 10$ ,  $\therefore AC = 6$ .

$\because BC = AC + AD$ ,  $\therefore AD = BC - AC = 4$ .

$\therefore$  圆环的面积  $S = \pi \cdot OD^2 - \pi \cdot OA^2 = \pi(OD^2 - OA^2)$

又  $\because OD^2 - OA^2 = AD^2$ ,  $\therefore S = 4^2 \cdot \pi = 16\pi \text{cm}^2$ .

说明: 若第 (1)、(2) 题中结论已证出, 但在证明前未作判断的不扣分.

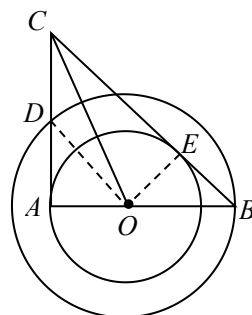
25. 解: (1) 将  $\begin{cases} t=1, \\ m=94 \end{cases}$  和  $\begin{cases} t=3, \\ m=90 \end{cases}$  代入一次函数  $m = kt + b$  中, 有 
$$\begin{cases} 94 = k + b, \\ 90 = 3k + b \end{cases}$$

$\therefore \begin{cases} k = -2, \\ b = 96. \end{cases} \therefore m = -2t + 96.$

经检验, 其它点的坐标均适合以上解析式,

故所求函数解析式为  $m = -2t + 96$ .

(2) 设前 20 天日销售利润为  $p_1$  元, 后 20 天日销售利润为  $p_2$  元.



$$\text{由 } p_1 = (-2t + 96) \left( \frac{1}{4}t + 5 \right) = -\frac{1}{2}t^2 + 14t + 480 = -\frac{1}{2}(t - 14)^2 + 578 ,$$

$\because 1 \leq t \leq 20$ ,  $\therefore$  当  $t = 14$  时,  $p_1$  有最大值 578 (元).

$$\text{由 } p_2 = (-2t + 96) \left( -\frac{1}{2}t + 20 \right) = t^2 - 88t + 1920 = (t - 44)^2 - 16 .$$

$\because 21 \leq t \leq 40$  且对称轴为  $t = 44$ ,  $\therefore$  函数  $p_2$  在  $21 \leq t \leq 40$  上随  $t$  的增大而减小.

$\therefore$  当  $t = 21$  时,  $p_2$  有最大值为  $(21 - 44)^2 - 16 = 529 - 16 = 513$  (元).

$\because 578 > 513$ , 故第 14 天时, 销售利润最大, 为 578 元.

$$(3) \quad p_1 = (-2t + 96) \left( \frac{1}{4}t + 5 - a \right) = -\frac{1}{2}t^2 + (14 + 2a)t + 480 - 96a$$

$$\text{对称轴为 } t = \frac{-(14 + 2a)}{2 \times \left( -\frac{1}{2} \right)} = 14 + 2a .$$

$\because 1 \leq t \leq 20$ ,  $\therefore$  当  $14 + 2a \geq 20$  即  $a \geq 3$  时,  $p_1$  随  $t$  的增大而增大.

又  $\because a < 4$ ,  $\therefore 3 \leq a < 4$ .

26. 解: (1)  $\because$  在矩形  $ABCD$  中,  $\angle D = 90^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $AD = a$ ,

$$\therefore AC = \sqrt{1 + a^2}, \quad AM = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{1 + a^2}$$

$\because \angle AME = \angle D = 90^\circ$ ,  $\angle MAE = \angle DAC$ ,  $\therefore \text{Rt} \triangle AME \sim \text{Rt} \triangle ADC$ ,

$$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AC}{AD} .$$

$$\therefore AE = \frac{AC \cdot AM}{AD} = \frac{\sqrt{1 + a^2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{1 + a^2}}{a} = \frac{1 + a^2}{3a} .$$

(2) (法一)  $\because AD \parallel BC$ , 易得  $\triangle AME \sim \triangle CMH$ ,  $\therefore \frac{HC}{AE} = \frac{MC}{AM} = 2$ .

$$\therefore HC = 2AE = \frac{2(1 + a^2)}{3a}, \therefore BH = a - \frac{2(1 + a^2)}{3a} = \frac{a^2 - 2}{3a} .$$

$$\therefore \text{梯形面积 } S_{ABHE} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1 + a^2}{3a} + \frac{a^2 - 2}{3a} \right) = \frac{2a^2 - 1}{6a} .$$

$$\therefore \frac{S_{ABNE}}{S_{EHCD}} = \frac{2}{5}, \therefore S_{AHNE} = \frac{2}{7}S_{ABCD}, \therefore \frac{2a^2 - 1}{6a} = \frac{2}{7}a .$$

$$\therefore 7(2a^2 - 1) = 12a^2, \therefore a = \frac{\sqrt{14}}{2}. \text{ (负值舍去, 经检验是原方程的解)}$$

$$\text{(法二)} \because \text{由 (1) 得 } AE = \frac{1+a^2}{3a}, \therefore DE = a - \frac{1+a^2}{3a} = \frac{2a^2-1}{3a}.$$

$$\because AD \parallel BC, \text{ 易得 } \triangle AME \sim \triangle CMH, \therefore \frac{CH}{AE} = \frac{MC}{AM} = 2.$$

$$\therefore HC = 2AC = \frac{2(1+a^2)}{3a}, \therefore BH = a - \frac{2(1+a^2)}{3a} = \frac{a^2-2}{3a},$$

$$\therefore \frac{S_{ABHE}}{S_{NHCD}} = \frac{2}{5}, \therefore \frac{\frac{1+a^2}{3a} + \frac{a^2-2}{3a}}{\frac{2+2a^2}{3a} + \frac{2a^2-1}{3a}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a^2 = \frac{7}{2}, \therefore a = \frac{\sqrt{14}}{2}. \text{ (负值舍去, 经检验是原方程的解)}$$

$$(3) \text{ (法一) 与 (1)、(2) 同理得 } AE = \frac{1+a^2}{4a}, \frac{HC}{AE} = 3, \therefore HC = 3AE = \frac{3(1+a^2)}{4a},$$

$$\therefore BH = a - \frac{3(1+a^2)}{4a} = \frac{a^2-3}{4a}.$$

$$\because \text{直线 } l \text{ 过点 } B, \therefore BH = \frac{a^2-3}{4a} = 0.$$

$$\therefore a^2 - 3 = 0, \therefore a = \sqrt{3}. \text{ (负值舍去, 经检验是原方程的解)}$$

$$\text{(法二) 连接 } BD \text{ 交 } AC \text{ 于点 } O, \text{ 则 } AO = CO = \frac{1}{2} AC.$$

$$\text{又} \because AM = \frac{1}{4} AC, \therefore AM = MO = \frac{1}{2} AO.$$

$$\because BE \perp AO, \therefore AB = BO = AO. \therefore \triangle ABO \text{ 是等边三角形,}$$

$$\because AB = 1, \therefore BD = 2, \therefore AD = \sqrt{3}.$$

$$(4) \text{ (法一) 在 Rt} \triangle ACD \text{ 中, } \because AD = x, CD = 1, \therefore AC = \sqrt{1+x^2}, AM = \frac{1}{4} \sqrt{1+x^2},$$

$$\text{由 } \triangle AME \sim \triangle ADC \text{ 有: } \frac{AE}{AM} = \frac{AC}{AD}, \therefore AE = \frac{1+x^2}{4x}.$$

$$\because \angle FAE = \angle AME = 90^\circ, \therefore \angle AFE + \angle FAM = \angle FAM + \angle MAE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AFE = \angle MAE, \text{ 又} \because \angle FAE = \angle ADC = 90^\circ, \therefore \text{Rt} \triangle AFE \sim \text{Rt} \triangle DAC.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle DAC}} = \left( \frac{AE}{DC} \right)^2$$

$$\therefore \frac{y}{\frac{1}{2}x} = \left( \frac{1+x^2}{4x} \right)^2, \quad \therefore y = \frac{(1+x^2)^2}{32x} = \frac{1+2x^2+x^4}{32x}$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式是 } y = \frac{1+2x^2+x^4}{32x}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

(法二) 在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中,  $\because AD = x, CD = 1, \therefore AC = \sqrt{1+x^2}, AM = \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}$ .

由  $\triangle AME \sim \triangle ADC$ , 有  $\frac{AE}{AM} = \frac{AC}{AD}, \therefore AE = \frac{1+x^2}{4x}$ .

$$\because \angle FAE = \angle AME = 90^\circ, \quad \therefore \angle AFE + \angle FAM = \angle FAM + \angle MAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle MAE, \quad \text{又} \because \angle FAE = \angle ADC = 90^\circ, \therefore \text{Rt}\triangle AFE \sim \text{Rt}\triangle DAC.$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{AD}{DC} = x, \quad \therefore AF = x \cdot AE = \frac{x^2+1}{4},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x^2}{4x} \cdot \frac{1+x^2}{4} = \frac{(1+x^2)^2}{32x} = \frac{1+2x^2+x^4}{32x}.$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式是 } y = \frac{1+2x^2+x^4}{32x}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

说明: 写出  $x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$  和  $x \leq \sqrt{3}$  各得 1 分.