

2015 年广西贵港市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题四个选项，其中只有一个是正确的）

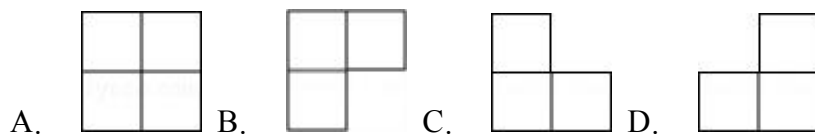
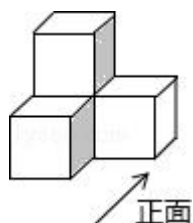
1. (3 分) (2015•贵港) 3 的倒数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. (3 分) (2015•贵港) 计算 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ 的结果是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{15}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{3}$

3. (3 分) (2015•贵港) 如图，是由四个完全相同的小正方形组成的立体图形，它的俯视图是 ()



4. (3 分) (2015•贵港) 下列因式分解错误的是 ()

- A. $2a - 2b = 2(a - b)$ B. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
C. $a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2$ D. $-x^2 - x + 2 = -(x - 1)(x + 2)$

5. (3 分) (2015•贵港) 在平面直角坐标系中，若点 P (m, m - n) 与点 Q (-2,

3) 关于原点对称，则点 M (m, n) 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. (3 分) (2015•贵港) 若关于 x 的一元二次方程 $(a - 1)x^2 - 2x + 2 = 0$ 有实数根，则整数 a 的最大值为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

7. (3 分) (2015•贵港) 下列命题中，属于真命题的是 ()

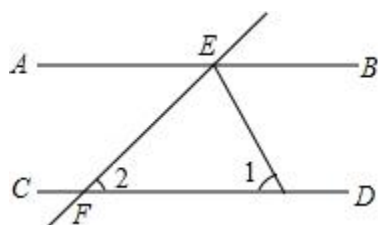
- A. 三点确定一个圆 B. 圆内接四边形对角互余

C. 若 $a^2=b^2$, 则 $a=b$ D. 若 $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$, 则 $a=b$

8. (3 分) (2015•贵港) 若在“正三角形、平行四边形、菱形、正五边形、正六边形”这五种图形中随机抽取一种图形, 则抽到的图形属于中心对称图形的概率是 ()

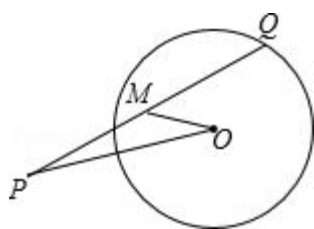
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. (3 分) (2015•贵港) 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 直线 EF 与 AB , CD 相交于点 E , F , $\angle BEF$ 的平分线与 CD 相交于点 N . 若 $\angle 1=63^\circ$, 则 $\angle 2=$ ()



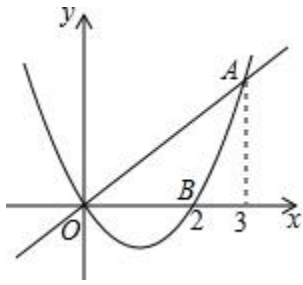
A. 64° B. 63° C. 60° D. 54°

10. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知 P 是 $\odot O$ 外一点, Q 是 $\odot O$ 上的动点, 线段 PQ 的中点为 M , 连接 OP , OM . 若 $\odot O$ 的半径为 2, $OP=4$, 则线段 OM 的最小值是 ()



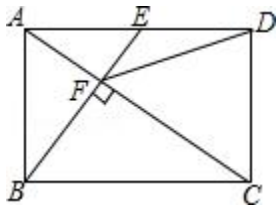
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知二次函数 $y_1=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2=\frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$, 与 x 轴交于点 $B(2, 0)$, 若 $0 < y_1 < y_2$, 则 x 的取值范围是 ()



- A. $0 < x < 2$ B. $0 < x < 3$ C. $2 < x < 3$ D. $x < 0$ 或 $x > 3$

12. (3 分) (2015•贵港) 如图, 在矩形 ABCD 中, E 是 AD 边的中点, $BE \perp AC$ 于点 F, 连接 DF, 分析下列五个结论: ① $\triangle AEF \sim \triangle CAB$; ② $CF = 2AF$; ③ $DF = DC$; ④ $\tan \angle CAD = \sqrt{2}$; ⑤ $S_{\text{四边形 CDEF}} = \frac{5}{2} S_{\triangle ABF}$, 其中正确的结论有 ()



- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

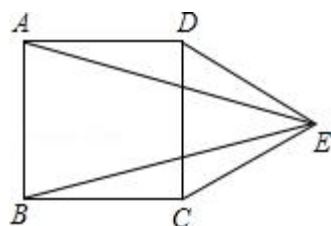
二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

13. (3 分) (2015•贵港) 若 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

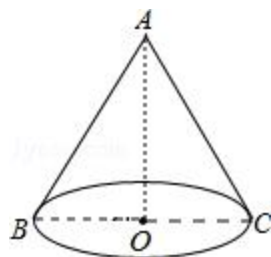
14. (3 分) (2015•贵港) 一种花瓣的花粉颗粒直径约为 0.0000065 米, 将数据 0.0000065 用科学记数法表示为_____.

15. (3 分) (2015•贵港) 在一次数学测试中, 某班 50 名学生的成绩分为六组, 第一组到第四组的频数分别为 6, 8, 9, 12, 第五组的频数是 0.2, 则第六组的频数是_____.

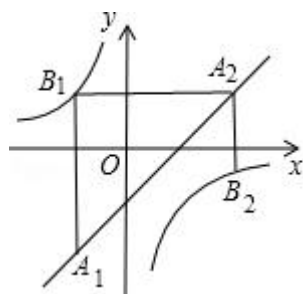
16. (3 分) (2015•贵港) 如图, 在正方形 ABCD 的外侧, 作等边三角形 CDE, 连接 AE, BE, 则 $\angle AEB$ 的度数为_____.



17. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知圆锥的底面 $\odot O$ 的直径 $BC=6$, 高 $OA=4$, 则该圆锥的侧面展开图的面积为_____.



18. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 均在直线 $y=x-1$ 上, 点 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 均在双曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 上, 并且满足: $A_1B_1 \perp x$ 轴, $B_1A_2 \perp y$ 轴, $A_2B_2 \perp x$ 轴, $B_2A_3 \perp y$ 轴, $\dots$, $A_nB_n \perp x$ 轴, $B_nA_{n+1} \perp y$ 轴, $\dots$, 记点 A_n 的横坐标为 a_n (n 为正整数). 若 $a_1=-1$, 则 a_{2015} =_____.



三、解答题 (本大题共 8 小题, 满分 66 分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (10 分) (2015•贵港) (1) 计算: $-2^{-1} + (\sqrt{16} - \pi)^0 - |\sqrt{3} - 2| - 2\cos 30^\circ$;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} 5x < 1+4x \\ \frac{1-x}{2} \leq \frac{x+4}{3} \end{cases}$, 并在数轴上表示不等式组的解集.

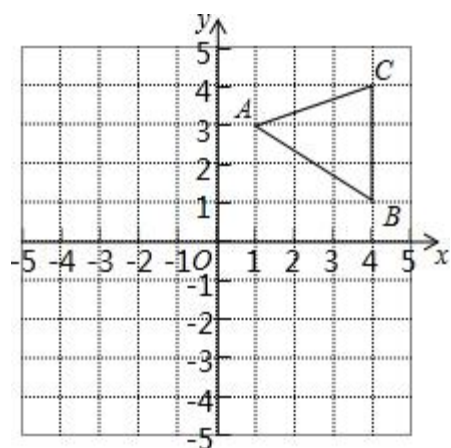
20. (5 分) (2015•贵港) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别是 A (1, 3), B (4, 1), C (4, 4).

(1) 请按要求画图:

①画出 $\triangle ABC$ 向左平移 5 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$;

②画出 $\triangle ABC$ 绕着原点 O 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$.

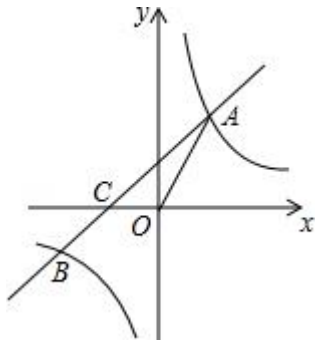
(2) 请写出直线 B_1C_1 与直线 B_2C_2 的交点坐标.



21. (7 分) (2015•贵港) 如图, 一次函数 $y=x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于点 A 和点 B (-2, n), 与 x 轴交于点 C (-1, 0), 连接 OA.

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式;

(2) 若点 P 在坐标轴上, 且满足 $PA=OA$, 求点 P 的坐标.



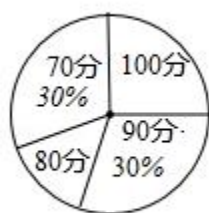
22. (8 分) (2015•贵港) 某市团委举办“我的中国梦”为主题的知识竞赛，甲、乙两所学校参赛人数相等，比赛结束后，发现学生成绩分别为 70 分，80 分，90 分，100 分，并根据统计数据绘制了如下不完整的统计图表：

乙校成绩统计表

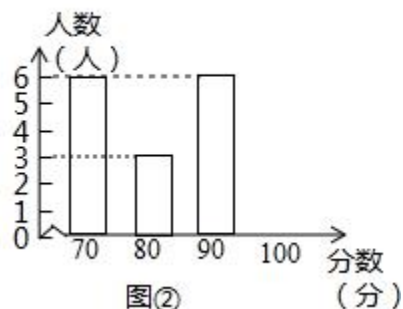
分数 (分)	人数 (人)
70	7
80	
90	1
100	8

- (1) 在图①中，“80 分”所在扇形的圆心角度数为_____；
- (2) 请你将图②补充完整；
- (3) 求乙校成绩的平均分；
- (4) 经计算知 $S_{\text{甲}}^2=135$ ， $S_{\text{乙}}^2=175$ ，请你根据这两个数据，对甲、乙两校成绩作出合理评价.

甲校成绩扇形统计图 甲校成绩条形统计图



图①



图②

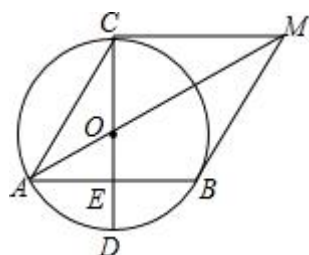
23. (8 分) (2015•贵港) 某工厂通过科技创新, 生产效率不断提高. 已知去年月平均生产量为 120 台机器, 今年一月份的生产量比去年月平均生产量增长了 $m\%$, 二月份的生产量又比一月份生产量多 50 台机器, 而且二月份生产 60 台机器所需要时间与一月份生产 45 台机器所需时间相同, 三月份的生产量恰好是去年月平均生产量的 2 倍.

问: 今年第一季度生产总量是多少台机器? m 的值是多少?

24. (8 分) (2015•贵港) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, CD 是 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AB$, 垂足为 E , 且点 E 是 OD 的中点, $\odot O$ 的切线 BM 与 AO 的延长线相交于点 M , 连接 AC , CM .

(1) 若 $AB=4\sqrt{3}$, 求 $\widehat{AB}$ 的长; (结果保留 π)

(2) 求证: 四边形 $ABMC$ 是菱形.



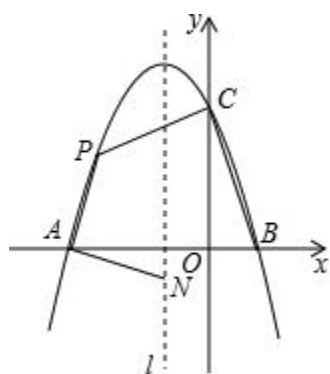
25. (10 分) (2015•贵港) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 其对称轴 l 为 $x=-1$.

(1) 求抛物线的解析式并写出其顶点坐标;

(2) 若动点 P 在第二象限内的抛物线上, 动点 N 在对称轴 l 上.

①当 $PA \perp NA$, 且 $PA=NA$ 时, 求此时点 P 的坐标;

②当四边形 $PABC$ 的面积最大时, 求四边形 $PABC$ 面积的最大值及此时点 P 的坐标.



26. (10 分) (2015•贵港) 已知: $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 动点 P 在斜边 AB 所在的直线上, 以 PC 为直角边作等腰三角形 PCQ , 其中 $\angle PCQ=90^\circ$, 探究并解决下列问题:

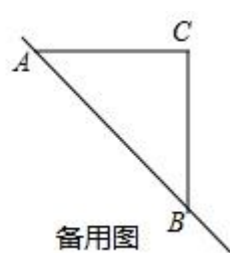
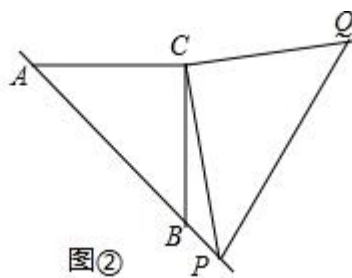
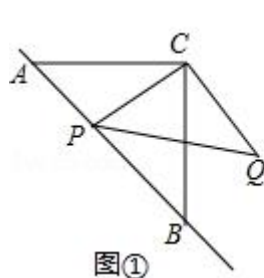
(1) 如图①, 若点 P 在线段 AB 上, 且 $AC=1+\sqrt{3}$, $PA=\sqrt{2}$, 则:

①线段 $PB=$ _____, $PC=$ _____;

②猜想: PA^2 , PB^2 , PQ^2 三者之间的数量关系为 _____;

(2) 如图②, 若点 P 在 AB 的延长线上, 在 (1) 中所猜想的结论仍然成立, 请你利用图②给出证明过程;

(3) 若动点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{3}$, 求 $\frac{PC}{AC}$ 的值. (提示: 请利用备用图进行探求)



2015 年广西贵港市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题四个选项，其中只有一个是正确的）

1. (3 分) (2015•贵港) 3 的倒数是 ()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

考点： 倒数.

分析： 根据乘积是 1 的两个数互为倒数，可得一个数的倒数.

解答： 解：有理数 3 的倒数是 $\frac{1}{3}$.

故选： C.

点评： 本题考查了倒数，分子分母交换位置是求一个数的倒数的关键.

2. (3 分) (2015•贵港) 计算 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ 的结果是 ()

A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{15}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{3}$

考点： 二次根式的乘除法.

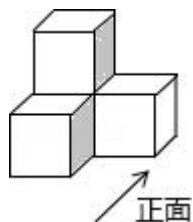
分析： 根据二次根式的乘法计算即可.

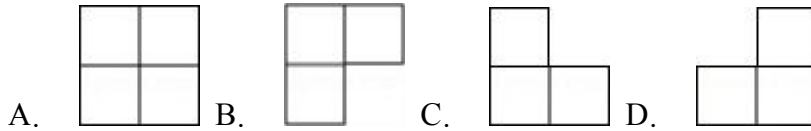
解答： 解： $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$.

故选 B.

点评： 此题考查二次根式的乘法，关键是根据二次根式的乘法法则进行计算.

3. (3 分) (2015•贵港) 如图，是由四个完全相同的小正方形组成的立体图形，它的俯视图是 ()





考点：简单组合体的三视图.

分析：根据俯视图是从上边看得到的图形，可得答案.

解答：解：从上边看第一层一个小正方形，第二层在第一层的正上方一个小正方形，右边一个小正方形，

故选：B.

点评：本题考查了简单组合体的三视图，从上边看得到的图形是俯视图.

4. (3 分) (2015•贵港) 下列因式分解错误的是 ()

A. $2a - 2b = 2(a - b)$ B. $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

C. $a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2$ D. $-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$

考点：因式分解-运用公式法；因式分解-提公因式法；因式分解-十字相乘法等.

分析：根据公式法分解因式的特点判断，然后利用排除法求解.

解答：解：A、 $2a - 2b = 2(a - b)$ ，正确；

B、 $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ ，正确；

C、 $a^2 + 4a - 4$ 不能因式分解，错误；

D、 $-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$ ，正确；

故选 C.

点评：本题主要考查了因式分解，关键是对于完全平方公式和平方差公式的理解.

5. (3 分) (2015•贵港) 在平面直角坐标系中，若点 P (m, m - n) 与点 Q (-2, 3) 关于原点对称，则点 M (m, n) 在 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

考点：关于原点对称的点的坐标.

分析：根据平面内两点关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数，则 $m=2$ 且 $n=-3$ ，从而得出点 M (m, n) 所在的象限.

解答： 解：根据平面内两点关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数，

$$\therefore m=2 \text{ 且 } m-n=-3,$$

$$\therefore m=2, n=5$$

$\therefore$ 点 M (m, n) 在第一象限，

故选 A.

点评： 本题考查了平面内两点关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数，该题比较简单.

6. (3 分) (2015•贵港) 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2x + 2 = 0$ 有实数根，则整数 a 的最大值为 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

考点： 根的判别式；一元二次方程的定义.

分析： 由关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2x + 2 = 0$ 有实数根，则 $a-1 \neq 0$ ，且 $\Delta \geq 0$ ，即 $\Delta = (-2)^2 - 8(a-1) = 12 - 8a \geq 0$ ，解不等式得到 a 的取值范围，最后确定 a 的最大整数值.

解答： 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 - 2x + 2 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 8(a-1) = 12 - 8a \geq 0 \text{ 且 } a-1 \neq 0,$$

$$\therefore a \leq \frac{3}{2} \text{ 且 } a \neq 1,$$

$\therefore$ 整数 a 的最大值为 0.

故选：B.

点评： 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$ ，a, b, c 为常数) 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根. 也考查了一元二次方程的定义和不等式的特殊解.

7. (3 分) (2015•贵港) 下列命题中, 属于真命题的是 ()

A. 三点确定一个圆 B. 圆内接四边形对角互余

C. 若 $a^2=b^2$, 则 $a=b$ D. 若 $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$, 则 $a=b$

考点: 命题与定理.

分析: 根据确定圆的条件对 A 进行判断;

根据圆内接四边形的性质对 B 进行判断;

根据 $a^2=b^2$, 得出两数相等或相反对 C 进行判断;

根据立方根对 D 进行判断.

解答: 解: A、任意不共线的三点确定一个圆, 所以错误;

B、圆的内接四边形的对角互补, 错误;

C、若 $a^2=b^2$, 则 $a=b$ 或 $a=-b$, 错误;

D、若 $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$, 则 $a=b$, 正确;

故选 D.

点评: 本题考查了命题: 判断事物的语句叫命题; 正确的命题称为真命题; 错误的命题称为假命题.

8. (3 分) (2015•贵港) 若在“正三角形、平行四边形、菱形、正五边形、正六边形”这五种图形中随机抽取一种图形, 则抽到的图形属于中心对称图形的概率是 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

考点: 概率公式; 中心对称图形.

专题: 计算题.

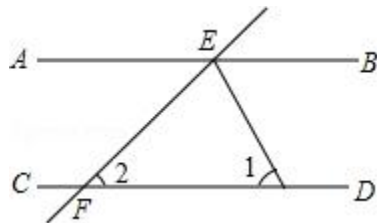
分析: 根据中心对称图形的定义得到平行四边形、菱形和正六边形是中心对称图形, 于是利用概率公式可计算出抽到的图形属于中心对称图形的概率.

解答： 解：这五种图形中随机抽取一种图形，则抽到的图形属于中心对称图形的概率= $\frac{3}{5}$.

故选 C.

点评： 本题考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A)$ = 事件 A 可能出现的结果数除以所有可能出现的结果数. 也考查了中心对称图形.

9. (3 分) (2015•贵港) 如图，直线 $AB \parallel CD$ ，直线 EF 与 AB，CD 相交于点 E，F， $\angle BEF$ 的平分线与 CD 相交于点 N. 若 $\angle 1 = 63^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ ()



A. 64° B. 63° C. 60° D. 54°

考点： 平行线的性质.

分析： 先根据平行线的性质求出 $\angle BEN$ 的度数，再由角平分线的定义得出 $\angle BEF$ 的度数，根据平行线的性质即可得出 $\angle 2$ 的度数.

解答： 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 63^\circ$ ，

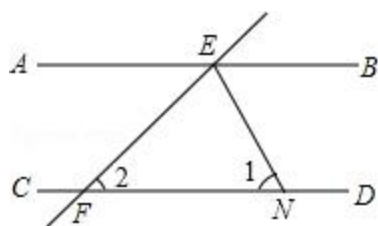
$$\therefore \angle BEN = \angle 1 = 63^\circ.$$

$\because EN$ 平分 $\angle BEF$ ，

$$\therefore \angle BEF = 2\angle BEN = 126^\circ,$$

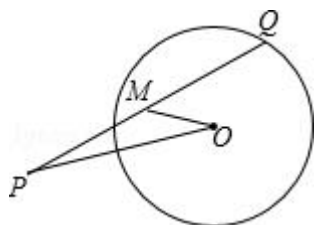
$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle BEF = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ.$$

故选 D.



点评： 本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补．也考查了角平分线定义．

10. (3 分) (2015•贵港) 如图，已知 P 是 $\odot O$ 外一点，Q 是 $\odot O$ 上的动点，线段 PQ 的中点为 M，连接 OP，OM．若 $\odot O$ 的半径为 2，OP=4，则线段 OM 的最小值是 ()



A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

考点： 点与圆的位置关系；三角形中位线定理；轨迹．

专题： 计算题．

分析： 取 OP 的中点 N，连结 MN，OQ，如图可判断 MN 为 $\triangle POQ$ 的中位线，则 $MN = \frac{1}{2}OQ = 1$ ，则点 M 在以 N 为圆心，1 为半径的圆上，当点 M 在 ON 上时，OM 最小，最小值为 1．

解答： 解：取 OP 的中点 N，连结 MN，OQ，如图，

$\because$ M 为 PQ 的中点，

$\therefore$ MN 为 $\triangle POQ$ 的中位线，

$\therefore MN = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

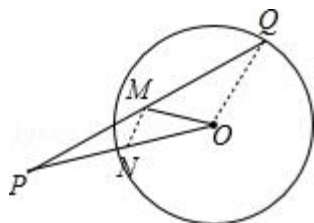
$\therefore$ 点 M 在以 N 为圆心，1 为半径的圆上，

在 $\triangle OMN$ 中， $1 < OM < 3$ ，

当点 M 在 ON 上时, OM 最小, 最小值为 1,

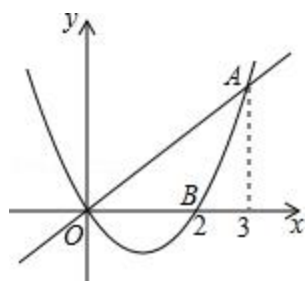
∴ 线段 OM 的最小值为 1.

故选 B.



点评: 本题考查了点与圆的位置关系: 点的位置可以确定该点到圆心距离与半径的关系, 反过来已知点到圆心距离与半径的关系可以确定该点与圆的位置关系.

11. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 A (3, 2), 与 x 轴交于点 B (2, 0), 若 $0 < y_1 < y_2$, 则 x 的取值范围是 ()



A. $0 < x < 2$ B. $0 < x < 3$ C. $2 < x < 3$ D. $x < 0$ 或 $x > 3$

考点: 二次函数与不等式 (组).

分析: 由二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 A (3, 2), 与 x 轴交于点 B (2, 0), 然后观察图象, 即可求得答案.

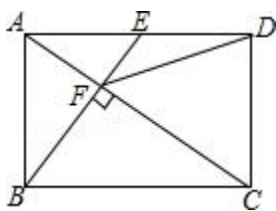
解答: 解: ∵ 二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 A (3, 2), 与 x 轴交于点 B (2, 0),

∴ 由图象得: 若 $0 < y_1 < y_2$, 则 x 的取值范围是: $2 < x < 3$.

故选 C.

点评： 此题考查了二次函数与不等式的关系，注意掌握数形结合思想的应用是关键.

12. (3 分) (2015•贵港) 如图，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 边的中点，BE ⊥ AC 于点 F，连接 DF，分析下列五个结论：①△AEF ∽ △CAB；②CF = 2AF；③DF = DC；④tan∠CAD = √2；⑤S_{四边形 CDEF} = $\frac{5}{2}$ S_{△ABF}，其中正确的结论有 ()



A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

考点： 相似三角形的判定与性质；矩形的性质.

分析： ①四边形 ABCD 是矩形，BE ⊥ AC，则∠ABC = ∠AFB = 90°，又∠BAF = ∠

CAB，于是△AEF ∽ △CAB，故①正确；

②由 AE = $\frac{1}{2}$ AD = $\frac{1}{2}$ BC，又 AD ∥ BC，所以 $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，故②正确；

③过 D 作 DM ∥ BE 交 AC 于 N，得到四边形 BMDE 是平行四边形，求出 BM = DE = $\frac{1}{2}$ BC，得到 CN = NF，根据线段的垂直平分线的性质可得结论，故③正确；

④而 CD 与 AD 的大小不知道，于是 tan∠CAD 的值无法判断，故④错误；

⑤根据△AEF ∽ △CBF 得到 $\frac{EF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2}$ ，求出 S_{△AEF} = $\frac{1}{2}$ S_{△ABF}，S_{△ABF} = $\frac{1}{6}$ S_{矩形 ABCD}，S_{四边形 CDEF} = S_{△ACD} - S_{△AEF} = $\frac{1}{2}$ S_{矩形 ABCD} - $\frac{1}{12}$ S_{矩形 ABCD} = $\frac{5}{12}$ S_{矩形 ABCD}，即可得到 S_{四边形 CDEF} = $\frac{5}{2}$ S_{△ABF}，故⑤正确.

解答： 解：过 D 作 DM ∥ BE 交 AC 于 N，

∵ 四边形 ABCD 是矩形，

$\therefore AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = BC$,

$\therefore BE \perp AC$ 于点 F,

$\therefore \angle EAC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle AFE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CAB$, 故①正确;

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF$,

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AF}{CF},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2},$$

$\therefore CF = 2AF$, 故②正确,

$\therefore DE \parallel BM$, $BE \parallel DM$,

$\therefore$ 四边形 BMDE 是平行四边形,

$$\therefore BM = DE = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore BM = CM$,

$\therefore CN = NF$,

$\therefore BE \perp AC$ 于点 F, $DM \parallel BE$,

$\therefore DN \perp CF$,

$\therefore DF = DC$, 故③正确;

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD},$$

而 CD 与 AD 的大小不知道,

$\therefore \tan \angle CAD$ 的值无法判断, 故④错误;

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF$,

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABF}, \quad S_{\triangle ABF} = \frac{1}{6} S_{\text{矩形} ABCD}$$

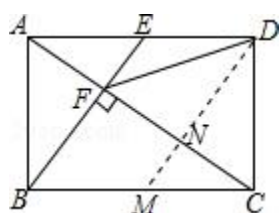
$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{4} S_{\text{矩形} ABCD}, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABCD},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{12} S_{\text{四边形} ABCD},$$

$$\text{又} \because S_{\text{四边形} CDEF} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABCD} - \frac{1}{12} S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{5}{12} S_{\text{矩形} ABCD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} CDEF} = \frac{5}{2} S_{\triangle ABF}, \quad \text{故⑤正确};$$

故选 B.



点评： 本题考查了相似三角形的判定和性质，矩形的性质，图形面积的计算，正确的作出辅助线是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. (3 分) (2015•贵港) 若 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 $x \geq -2$.

考点： 二次根式有意义的条件.

分析： 根据二次根式有意义的条件：被开方数为非负数可得 $x+2 \geq 0$ ，再解不等式即可.

解答： 解： $\because$ 二次根式 $\sqrt{x+2}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore$ 被开方数 $x+2$ 为非负数，

$$\therefore x+2 \geq 0,$$

解得： $x \geq -2$.

故答案为： $x \geq -2$.

点评： 此题主要考查了二次根式中被开方数的取值范围，关键把握二次根式中的被开方数是非负数.

14. (3 分) (2015•贵港) 一种花瓣的花粉颗粒直径约为 0.0000065 米，将数据 0.0000065 用科学记数法表示为 6.5×10^{-6} .

考点： 科学记数法—表示较小的数.

分析： 根据科学记数法和负整数指数的意义求解.

解答： 解： $0.0000065 = 6.5 \times 10^{-6}$.

故答案为 6.5×10^{-6} .

点评： 本题考查了科学记数法—表示较小的数，关键是用 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, n 为负整数) 表示较小的数.

15. (3 分) (2015•贵港) 在一次数学测试中，某班 50 名学生的成绩分为六组，第一组到第四组的频数分别为 6, 8, 9, 12, 第五组的频数是 0.2, 则第六组的频数是 5.

考点： 频数与频率.

分析： 一个容量为 50 的样本，把它分成 6 组，第一组到第四组的频数分别为 6, 8, 9, 12, 根据第五组的频率是 0.2, 求出第五组的频数，用样本容量减去前五组的频数，得到第六组的频数.

解答： 解： $\because$ 一个容量为 50 的样本，

把它分成 6 组，

第一组到第四组的频数分别为 6, 8, 9, 12,

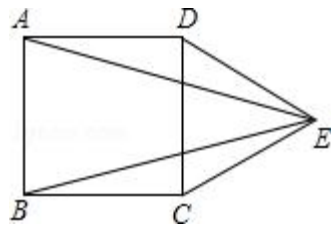
第五组的频率是 0.2, 则第五组的频数是 $0.2 \times 50 = 10$,

$\therefore$ 第六组的频数是 $50 - 6 - 8 - 9 - 10 - 12 = 5$.

故答案为：5.

点评： 此题考查频数与频率问题，关键是利用频数、频率和样本容量三者之间的关系进行分析.

16. (3 分) (2015•贵港) 如图，在正方形 ABCD 的外侧，作等边三角形 CDE，连接 AE，BE，则 $\angle AEB$ 的度数为 30° .



考点： 全等三角形的判定与性质；等腰三角形的性质；正方形的性质.

分析： 由正方形和等边三角形的性质得出 $\angle ADE = \angle BCE = 150^\circ$ ， $AD = DE = BC = CE$ ，得出 $\angle DEA = \angle CEB = 15^\circ$ ，即可得出 $\angle AEB$ 的度数.

解答： 解： $\because$ 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ, AD = BC = DC,$$

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD = \angle DEC = 60^\circ, DE = DC = CE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BCE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ, AD = DE = BC = CE,$$

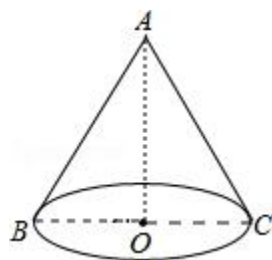
$$\therefore \angle DEA = \angle CEB = \frac{1}{2} (180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 60^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 30^\circ;$$

故答案为： 30° .

点评： 本题考查了正方形的性质、等边三角形的性质、等腰三角形的判定与性质、三角形内角和定理；熟练掌握正方形和等边三角形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

17. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知圆锥的底面 $\odot O$ 的直径 $BC=6$, 高 $OA=4$, 则该圆锥的侧面展开图的面积为 15π .



考点: 圆锥的计算.

分析: 根据已知和勾股定理求出 AB 的长, 根据扇形面积公式求出侧面展开图的面积.

解答: 解: $\because OB = \frac{1}{2}BC = 3$, $OA = 4$,

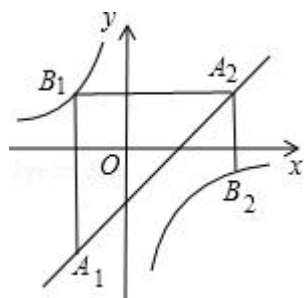
由勾股定理, $AB = 5$,

侧面展开图的面积为: $\frac{1}{2} \times 6\pi \times 5 = 15\pi$.

故答案为: 15π .

点评: 本题考查的是圆锥的计算, 理解圆锥的侧面展开图是扇形, 掌握扇形的面积的计算公式是解题的关键.

18. (3 分) (2015•贵港) 如图, 已知点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 均在直线 $y = x - 1$ 上, 点 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 均在双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ 上, 并且满足: $A_1B_1 \perp x$ 轴, $B_1A_2 \perp y$ 轴, $A_2B_2 \perp x$ 轴, $B_2A_3 \perp y$ 轴, $\dots$, $A_nB_n \perp x$ 轴, $B_nA_{n+1} \perp y$ 轴, $\dots$, 记点 A_n 的横坐标为 a_n (n 为正整数). 若 $a_1 = -1$, 则 $a_{2015} =$ 2 .



考点：反比例函数图象上点的坐标特征；一次函数图象上点的坐标特征.

专题：规律型.

分析：首先根据 $a_1 = -1$ ，求出 $a_2 = 2$ ， $a_3 = \frac{1}{2}$ ， $a_4 = -1$ ， $a_5 = 2$ ，...，所以 a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 ， a_5 ，...，每 3 个数一个循环，分别是 -1 、 $\frac{1}{2}$ 、 2 ；然后用 2015 除以 3，根据商和余数的情况，判断出 a_{2015} 是第几个循环的第几个数，进而求出它的值是多少即可.

解答：解：∵ $a_1 = -1$ ，

∴ B_1 的坐标是 $(-1, 1)$ ，

∴ A_2 的坐标是 $(2, 1)$ ，

即 $a_2 = 2$ ，

∴ $a_2 = 2$ ，

∴ B_2 的坐标是 $(2, -\frac{1}{2})$ ，

∴ A_3 的坐标是 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ，

即 $a_3 = \frac{1}{2}$ ，

∴ $a_3 = \frac{1}{2}$ ，

∴ B_3 的坐标是 $(\frac{1}{2}, -2)$ ，

∴ A_4 的坐标是 $(-1, -2)$ ，

即 $a_4 = -1$ ，

∴ $a_4 = -1$ ，

∴ B_4 的坐标是 $(-1, 1)$ ，

∴ A_5 的坐标是 $(2, 1)$ ，

即 $a_5 = 2$ ，

...，

∴ a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 ， a_5 ，...，每 3 个数一个循环，分别是 -1 、 $\frac{1}{2}$ 、 2 ，

$\therefore 2015 \div 3 = 671 \dots 2$,

$\therefore a_{2015}$ 是第 672 个循环的第 2 个数,

$\therefore a_{2015} = 2$.

故答案为: 2.

点评: (1) 此题主要考查了反比例函数图象上点的坐标的特征, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k , 即 $xy=k$; ②双曲线是关于原点对称的, 两个分支上的点也是关于原点对称; ③在 $xy=k$ 图象中任取一点, 过这一点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

(2) 此题还考查了一次函数图象上的点的坐标特征, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 一次函数 $y=kx+b$, ($k \neq 0$, 且 k, b 为常数) 的图象是一条直线. 它与 x 轴的交点坐标是 $(-\frac{b}{k}, 0)$; 与 y 轴的交点坐标是 $(0, b)$. 直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=kx+b$.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 满分 66 分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (10 分) (2015•贵港) (1) 计算: $-2^{-1} + (\sqrt{16} - \pi)^0 - |\sqrt{3} - 2| - 2\cos 30^\circ$;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} 5x < 1+4x \\ \frac{1-x}{2} \leq \frac{x+4}{3} \end{cases}$, 并在数轴上表示不等式组的解集.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 在数轴上表示不等式的解集; 解一元一次不等式组; 特殊角的三角函数值.

分析: (1) 根据负整数指数幂、零指数幂、绝对值、特殊角的三角函数值四个考点进行计算结果即可;

(2) 先解每一个不等式, 再把解集画在数轴上即可.

解答: 解: (1) 原式 $= -\frac{1}{2} + 1 + \sqrt{3} - 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}$$

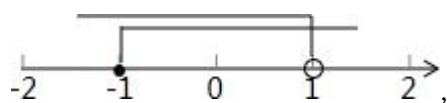
$$= -\frac{3}{2};$$

$$(2) \begin{cases} 5x < 1+4x & \textcircled{1} \\ \frac{1-x}{2} \leq \frac{x+4}{3} & \textcircled{2} \end{cases},$$

解①得 $x < 1$,

解②得 $x \geq -1$,

把解集表示在数轴上为:



不等式组的解集为 $-1 \leq x < 1$.

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 以及不等式组的解集, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

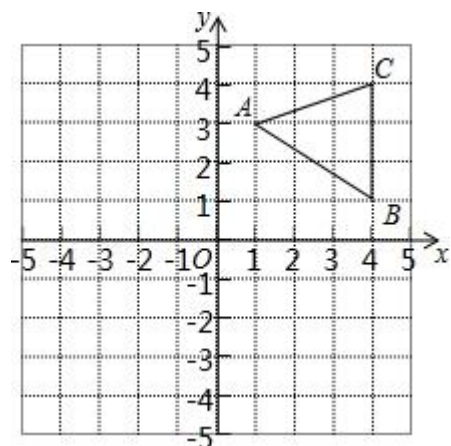
20. (5 分) (2015•贵港) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别是 $A(1, 3)$, $B(4, 1)$, $C(4, 4)$.

(1) 请按要求画图:

①画出 $\triangle ABC$ 向左平移 5 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$;

②画出 $\triangle ABC$ 绕着原点 O 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$.

(2) 请写出直线 B_1C_1 与直线 B_2C_2 的交点坐标.



考点： 作图-旋转变换；两条直线相交或平行问题；作图-平移变换.

分析： (1) 根据网格结构找出点 A、B、C 平移后的对应点 A_1 、 B_1 、 C_1 的位置，然后顺次连接即可；

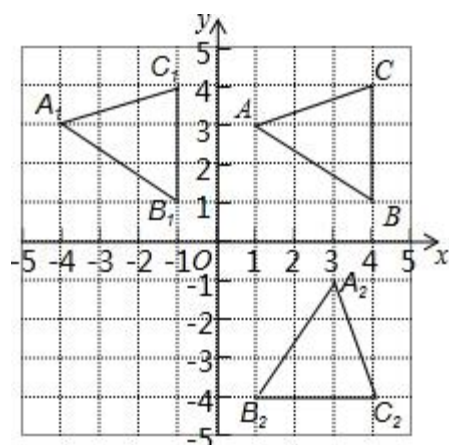
(2) 根据旋转角度，旋转方向，分别找到 A、B、C 的对应点，顺次连接可得 $\triangle A_2B_2C_2$ ；

(3) 由图形可知交点坐标；

解答： 解：(1) 如图所示： $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求；

(2) 如图所示： $\triangle A_2B_2C_2$ ，即为所求；

(3) 由图形可知：交点坐标为 $(-1, -4)$.

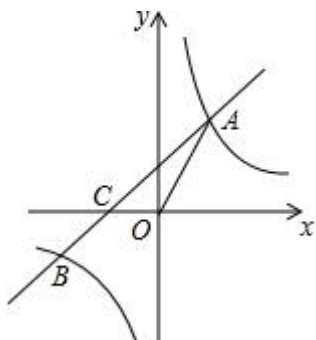


点评： 此题主要考查了平移变换以及旋转变换，得出对应点位置是解题关键.

21. (7 分) (2015•贵港) 如图，一次函数 $y=x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于点 A 和点 B $(-2, n)$ ，与 x 轴交于点 C $(-1, 0)$ ，连接 OA.

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式；

(2) 若点 P 在坐标轴上，且满足 $PA=OA$ ，求点 P 的坐标.



考点：反比例函数与一次函数的交点问题.

分析： (1) 把 $C(-1, 0)$ 代入 $y=x+b$, 求出 b 的值, 得到一次函数的解析式; 再求出 B 点坐标, 然后将 B 点坐标代入 $y=\frac{k}{x}$, 利用待定系数法即可求出反比例函数的解析式;

(2) 先将反比例函数与一次函数的解析式联立, 求出 A 点坐标, 再分①点 P 在 x 轴上; ②点 P 在 y 轴上; 两种情况进行讨论.

解答： 解: (1) $\because$ 一次函数 $y=x+b$ 的图象与 x 轴交于点 $C(-1, 0)$,

$\therefore -1+b=0$, 解得 $b=1$,

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=x+1$,

$\because$ 一次函数 $y=x+1$ 的图象过点 $B(-2, n)$,

$\therefore n=-2+1=-1$,

$\therefore B(-2, -1)$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象过点 $B(-2, -1)$,

$\therefore k=-2 \times (-1)=2$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$;

(2) 由 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$,

$\therefore B(-2, -1)$,

$\therefore A(1, 2)$.

分两种情况:

①如果点 P 在 x 轴上, 设点 P 的坐标为 $(x, 0)$,

$\therefore PA=OA$,

$$\therefore (x-1)^2 + 2^2 = 1^2 + 2^2,$$

解得 $x_1=2$, $x_2=0$ (不合题意舍去),

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, 0)$;

②如果点 P 在 y 轴上, 设点 P 的坐标为 $(0, y)$,

$\therefore PA=OA$,

$$\therefore 1^2 + (y-2)^2 = 1^2 + 2^2,$$

解得 $y_1=4$, $y_2=0$ (不合题意舍去),

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, 4)$;

综上所述, 所求点 P 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $(0, 4)$.

点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点. 利用待定系数法正确求出反比例函数与一次函数的解析式是解题的关键.

22. (8 分) (2015•贵港) 某市团委举办“我的中国梦”为主题的知识竞赛, 甲、乙两所学校参赛人数相等, 比赛结束后, 发现学生成绩分别为 70 分, 80 分, 90 分, 100 分, 并根据统计数据绘制了如下不完整的统计图表:

乙校成绩统计表

分数 (分) 人数 (人)

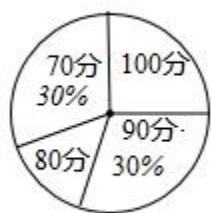
70 7

80

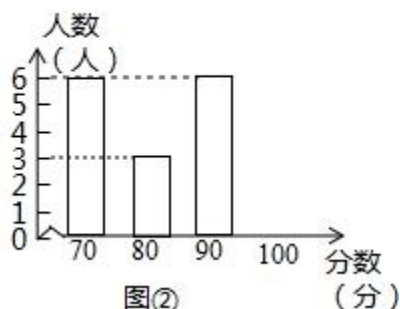
90 1

- (1) 在图①中, “80 分”所在扇形的圆心角度数为 54° ;
- (2) 请你将图②补充完整;
- (3) 求乙校成绩的平均分;
- (4) 经计算知 $S_{\text{甲}}^2=135$, $S_{\text{乙}}^2=175$, 请你根据这两个数据, 对甲、乙两校成绩作出合理评价.

甲校成绩扇形统计图 甲校成绩条形统计图



图①



图②

考点: 条形统计图; 扇形统计图; 加权平均数; 方差.

分析: (1) 根据统计图可知甲班 70 分的有 6 人, 从而可求得总人数, 然后可求得成绩为 80 分的同学所占的百分比, 最后根据圆心角的度数 $= 360^\circ \times \text{百分比}$ 即可求得答案;

(2) 用总人数减去成绩为 70 分、80 分、90 分的人数即可求得成绩为 100 分的人数, 从而可补全统计图;

(3) 先求得乙班成绩为 80 分的人数, 然后利用加权平均数公式计算平均数;

(4) 根据方差的意义即可做出评价.

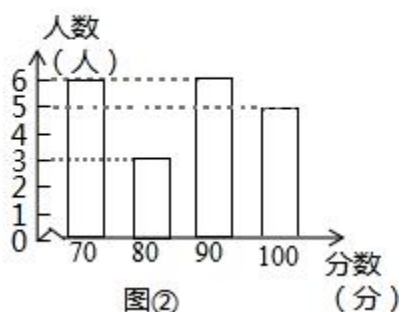
解答: 解: (1) $6 \div 30\% = 20$,

$3 \div 20 = 15\%$,

$360^\circ \times 15\% = 54^\circ$;

(2) $20 - 6 - 3 - 6 = 5$, 统计图补充如下:

甲校成绩条形统计图



$$(3) 20 - 1 - 7 - 8 = 4, \quad \bar{x}_乙 = \frac{70 \times 7 + 80 \times 4 + 90 \times 1 + 100 \times 8}{20} = 85;$$

$$(4) \because S_{甲}^2 < S_{乙}^2,$$

$\therefore$ 甲班 20 同名同学的成绩比较整齐.

点评: 本题主要考查的是统计图和统计表的应用, 属于基础题目, 解答本题需要同学们, 数量掌握方差的意义、加权平均数的计算公式以及频数、百分比、数据总数之间的关系.

23. (8 分) (2015•贵港) 某工厂通过科技创新, 生产效率不断提高. 已知去年月平均生产量为 120 台机器, 今年一月份的生产量比去年月平均生产量增长了 $m\%$, 二月份的生产量又比一月份生产量多 50 台机器, 而且二月份生产 60 台机器所需要时间与一月份生产 45 台机器所需时间相同, 三月份的生产量恰好是去年月平均生产量的 2 倍.

问: 今年第一季度生产总量是多少台机器? m 的值是多少?

考点: 分式方程的应用.

分析: 今年一月份生产量为: $120(1+m\%)$; 二月份生产量: $120(1+m\%) + 50$; 根据“二月份生产 60 台机器所需要时间与一月份生产 45 台机器所需时间相同, 三月份的生产量恰好是去年月平均生产量的 2 倍”列出方程并解答.

解答: 解: 设去年月平均生产效率为 1, 则今年一月份的生产效率为 $(1+m\%)$, 二月份的生产效率为 $1+m\%+\frac{5}{12}$.

根据题意得： $\frac{60}{1+m\%+\frac{5}{12}}=\frac{45}{1+m\%}$ ，

解得： $m\%=\frac{1}{4}$ 。

经检验可知 $m\%=\frac{1}{4}$ 是原方程的解。

$\therefore m=25$ 。

$\therefore$ 第一季度的总产量 $=120 \times 1.25 + 120 \times 1.25 + 50 + 120 \times 2 = 590$ 。

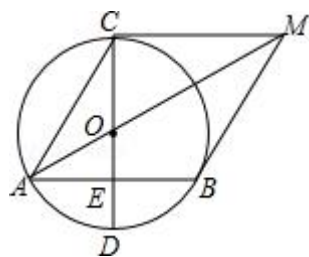
答：今年第一季度生产总量是 590 台， m 的值是 25。

点评： 本题主要考查的是分式方程的应用，表示出一月份和二月份的生产效率是解题的关键。

24. (8 分) (2015•贵港) 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦， CD 是 $\odot O$ 的直径， $CD \perp AB$ ，垂足为 E ，且点 E 是 OD 的中点， $\odot O$ 的切线 BM 与 AO 的延长线相交于点 M ，连接 AC ， CM 。

(1) 若 $AB=4\sqrt{3}$ ，求 $\widehat{AB}$ 的长；(结果保留 π)

(2) 求证：四边形 $ABMC$ 是菱形。



考点： 切线的性质；菱形的判定；弧长的计算。

专题： 计算题。

分析： (1) 连接 OB ，由 E 为 OD 中点，得到 OE 等于 OA 的一半，在直角三角形 AOE 中，得出 $\angle OAB=30^\circ$ ，进而求出 $\angle AOE$ 与 $\angle AOB$ 的度数，设 $OA=x$ ，利用勾股定理求出 x 的值，确定出圆的半径，利用弧长公式即可求出 $\widehat{AB}$ 的长；

(2) 由第一问得到 $\angle BAM = \angle BMA$, 利用等角对等边得到 $AB = MB$, 利用 SAS 得到三角形 OCM 与三角形 OBM 全等, 利用全等三角形对应边相等得到 $CM = BM$, 等量代换得到 $CM = AB$, 再利用全等三角形对应角相等及等量代换得到一对内错角相等, 进而确定出 CM 与 AB 平行, 利用一组对边平行且相等的四边形为平行四边形得到 ABMC 为平行四边形, 最后由邻边相等的平行四边形为菱形即可得证.

解答: (1) 解: $\because OA = OB$, E 为 AB 的中点,

$\therefore \angle AOE = \angle BOE$, $OE \perp AB$,

$\because OE \perp AB$, E 为 OD 中点,

$\therefore OE = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}OA$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOE$ 中, $\angle OAB = 30^\circ$, $\angle AOE = 60^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$,

设 $OA = x$, 则 $OE = \frac{1}{2}x$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$,

$\therefore AB = 2AE = \sqrt{3}x = 4\sqrt{3}$,

解得: $x = 4$,

则 $\widehat{AB}$ 的长 $l = \frac{120\pi \times 4}{180} = \frac{8\pi}{3}$;

(2) 证明: 由 (1) 得 $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$, $\angle BOM = \angle COM = 60^\circ$, $\angle AMB = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAM = \angle BMA = 30^\circ$,

$\therefore AB = BM$,

$\therefore BM$ 为圆 O 的切线,

$\therefore OB \perp BM$,

在 $\triangle COM$ 和 $\triangle BOM$ 中,

$$\begin{cases} OC = OB \\ \angle COM = \angle BOM, \\ OM = OM \end{cases}$$

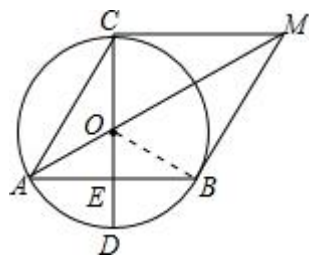
$\therefore \triangle COM \cong \triangle BOM$ (SAS),

$\therefore CM = BM, \angle CMO = \angle BMO = 30^\circ,$

$\therefore CM = AB, \angle CMO = \angle MAB,$

$\therefore CM \parallel AB,$

$\therefore$ 四边形 ABMC 为菱形.



点评: 此题考查了切线的性质，菱形的判断，全等三角形的判定与性质，以及弧长公式，熟练掌握切线的性质是解本题的关键.

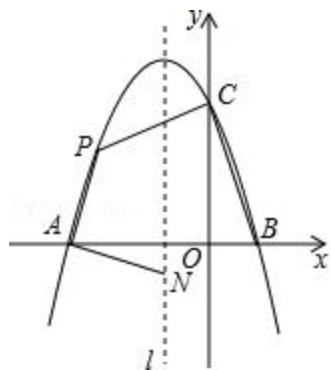
25. (10 分) (2015•贵港) 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (1, 0)，与 y 轴交于点 C (0, 3)，其对称轴 l 为 $x = -1$.

(1) 求抛物线的解析式并写出其顶点坐标;

(2) 若动点 P 在第二象限内的抛物线上，动点 N 在对称轴 l 上.

①当 $PA \perp NA$ ，且 $PA = NA$ 时，求此时点 P 的坐标;

②当四边形 PABC 的面积最大时，求四边形 PABC 面积的最大值及此时点 P 的坐标.



考点: 二次函数综合题.

分析：（1）将已知点的坐标代入已知的抛物线的解析式，利用待定系数法确定抛物线的解析式即可；

（2）①首先求得抛物线与 x 轴的交点坐标，然后根据已知条件得到 $PE=OA$ ，从而得到方程求得 x 的值即可求得点 P 的坐标；

②用分割法将四边形的面积 $S_{\text{四边形BCPA}}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}$ ，得到二次函数，求得最值即可.

解答： 解：（1） $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，其对称轴 l 为 $x=-1$ ，

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=0 \\ c=3 \\ -\frac{b}{2a}=-1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}.$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-1, 4)$;

（2）令 $y=-x^2-2x+3=0$ ，解得 $x=-3$ 或 $x=1$ ，

$\therefore$ 点 $A(-3, 0)$ ， $B(1, 0)$ ，

作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，

$\because$ 点 P 在 $y=-x^2-2x+3$ 上，

$\therefore$ 设点 $P(x, -x^2-2x+3)$

① $\because PA \perp NA$ ，且 $PA=NA$ ，

$\therefore \triangle PAD \cong \triangle AND$ ，

$\therefore OA=PD$

即 $y=-x^2-2x+3=2$ ，

解得 $x = \sqrt{2} - 1$ (舍去) 或 $x = -\sqrt{2} - 1$,

$\therefore$ 点 $P(-\sqrt{2} - 1, 2)$;

② $\because S_{\text{四边形BCPA}} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} = 2 + S_{\triangle APC}$

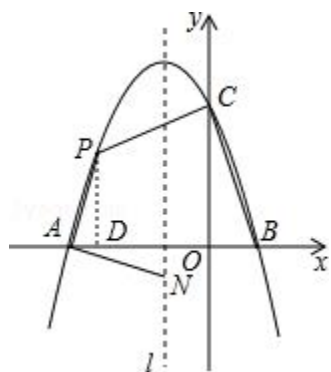
$$\because S_{\triangle AOC} = \frac{9}{2}, S_{\triangle OCP} = \frac{3}{2}x, S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |y_P| = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle OAP} + S_{\triangle OCP} - S_{\triangle AOC} = \frac{3}{2}x + \left(-\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right) - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}$$

$\therefore$ 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $S_{\triangle APC}$ 最大值 $= \frac{3}{8}$,

此时 $M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$,

$$S_{\text{四边形PABC}} \text{ 最大} = \frac{15}{8}.$$



点评: 本题考查了二次函数综合题. 用待定系数法求函数的解析式时要灵活地根据已知条件选择配方法和公式法. 求抛物线的最值的方法是配方法.

26. (10 分) (2015•贵港) 已知: $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 动点 P 在斜边 AB 所在的直线上, 以 PC 为直角边作等腰三角形 PCQ , 其中 $\angle PCQ = 90^\circ$, 探究并解决下列问题:

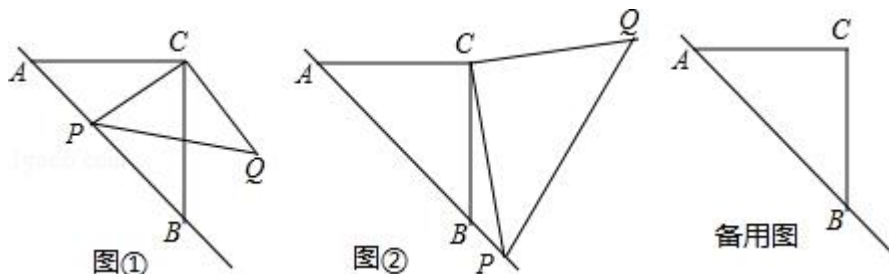
(1) 如图①, 若点 P 在线段 AB 上, 且 $AC = 1 + \sqrt{3}$, $PA = \sqrt{2}$, 则:

① 线段 $PB = \underline{\sqrt{6}}$, $PC = \underline{2}$;

② 猜想: PA^2 , PB^2 , PQ^2 三者之间的数量关系为 $\underline{PA^2 + PB^2 = PQ^2}$;

(2) 如图②, 若点 P 在 AB 的延长线上, 在 (1) 中所猜想的结论仍然成立, 请你利用图②给出证明过程;

(3) 若动点 P 满足 $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{PC}{AC}$ 的值. (提示: 请利用备用图进行探究)



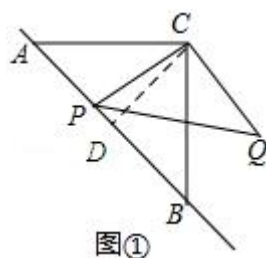
考点: 相似形综合题.

分析: (1) ①在等腰直角三角形 ACB 中, 由勾股定理先求得 AB 的长, 然后根据 PA 的长, 可求得 PB 的长; 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D, 从而可求得 CD、PD 的长, 然后在 Rt 三角形 CDP 中依据勾股定理可求得 PC 的长; ② $\triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$, 从而可求得: $CD=AD=DB$, 然后根据 $AP=DC-PD$, $PB=DC+PD$, 可证明 $AP^2+BP^2=2PC^2$, 因为在 Rt $\triangle PCQ$ 中, $PQ^2=2CP^2$, 所以可得出 $AP^2+BP^2=PQ^2$ 的结论;

(2) 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D, 则 $AP=(AD+PD)=(DC+PD)$, $PB=(DP-BD)=(PD-DC)$, 可证明 $AP^2+BP^2=2PC^2$, 因为在 Rt $\triangle PCQ$ 中, $PQ^2=2CP^2$, 所以可得出 $AP^2+BP^2=PQ^2$ 的结论;

(3) 根据点 P 所在的位置画出图形, 然后依据题目中的比值关系求得 PD 的长 (用含有 CD 的式子表示), 然后在 Rt $\triangle ACP$ 和 Rt $\triangle DCP$ 中由勾股定理求得 AC 和 PC 的长度即可.

解答: 解: (1) 如图①:



① $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AC=1+\sqrt{3}$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2}AC = \sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$$\therefore PA = \sqrt{2},$$

$$\therefore PB = \sqrt{6},$$

作 $CD \perp AB$ 于 D , 则 $AD = CD = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$,

$$\therefore PD = AD - PA = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中, $PC = \sqrt{PD^2 + CD^2} = 2$,

故答案为 $\sqrt{6}, 2$;

②如图 1.

$\because \triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$,

$$\therefore CD = AD = DB.$$

$$\therefore AP^2 = (AD - PD)^2 = (DC - PD)^2 = DC^2 - 2DC \cdot PD + PD^2, PB^2 = (DB + PD)^2 = (DC + DP)^2$$

$$= DC^2 + 2DC \cdot PD + PD^2$$

$$\therefore AP^2 + BP^2 = 2CD^2 + 2PD^2,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中, 由勾股定理可知: $PC^2 = DC^2 + PD^2$,

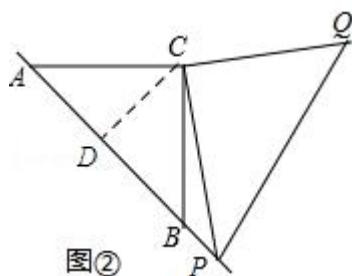
$$\therefore AP^2 + BP^2 = 2PC^2.$$

$\because \triangle CPQ$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore 2PC^2 = PQ^2.$$

$$\therefore AP^2 + BP^2 = PQ^2$$

(2) 如图②: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D.



$\because \triangle ACB$ 为等腰直角三角形, $CD \perp AB$,

$\therefore CD = AD = DB$.

$\because AP^2 = (AD + PD)^2 = (DC + PD)^2 = CD^2 + 2DC \cdot PD + PD^2$, $PB^2 = (DP - BD)^2 = (PD - DC)^2 = DC^2 - 2DC \cdot PD + PD^2$,

$\therefore AP^2 + BP^2 = 2CD^2 + 2PD^2$,

$\because$ 在 $Rt\triangle PCD$ 中, 由勾股定理可知: $PC^2 = DC^2 + PD^2$,

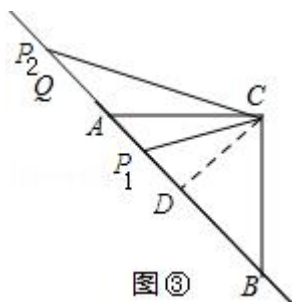
$\therefore AP^2 + BP^2 = 2PC^2$.

$\because \triangle CPQ$ 为等腰直角三角形,

$\therefore 2PC^2 = PQ^2$.

$\therefore AP^2 + BP^2 = PQ^2$.

(3) 如图③: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D.



①当点 P 位于点 P_1 处时.

$$\therefore \frac{P_1A}{P_1B} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P_1A = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}DC.$$

$$\therefore P_1D = \frac{1}{2}DC.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CP_1D \text{ 中, 由勾股定理得: } CP_1 = \sqrt{DC^2 + P_1D^2} = \sqrt{DC^2 + \left(\frac{1}{2}DC\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}DC,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, 由勾股定理得: } AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2DC^2} = \sqrt{2}DC,$$

$$\therefore \frac{P_1C}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}PC}{\sqrt{2}PC} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

②当点 P 位于点 P_2 处时.

$$\therefore \frac{P_2A}{P_2B} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P_2A = \frac{1}{2}AB = CD.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CP_2D \text{ 中, 由勾股定理得: } P_2C = \sqrt{DC^2 + P_2D^2} = \sqrt{DC^2 + (2DC)^2} = \sqrt{5}DC,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, 由勾股定理得: } AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2DC^2} = \sqrt{2}DC,$$

$$\therefore \frac{P_2C}{AC} = \frac{\sqrt{5}DC}{\sqrt{2}DC} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

综上所述, $\frac{PC}{AC}$ 的比值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点评: 本题主要考查的是等腰直角三角形的性质和勾股定理的应用, 根据等腰直角三角形的性质证得: $CD=AD=DB$, 将 PA 、 PA 、 PQ 、 AC 、 PC 用含 DC 的式子表示出来是解题的关键.