

2014 年广西玉林市、防城港市中考数学试卷

一、单项选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. (3 分) (2014•玉林) 下面的数中，与 -2 的和为 0 的是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. (3 分) (2014•玉林) 将 6.18×10^{-3} 化为小数的是 ()

- A. 0.000618 B. 0.00618 C. 0.0618 D. 0.618

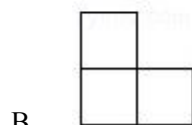
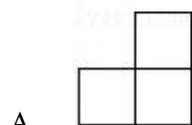
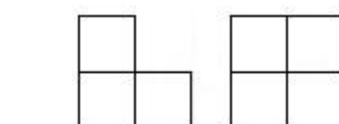
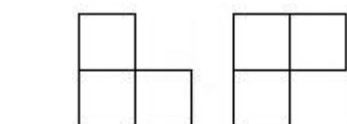
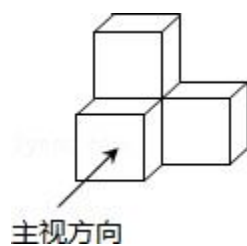
3. (3 分) (2014•玉林) 计算 $(2a^2)^3$ 的结果是 ()

- A. $2a^6$ B. $6a^6$ C. $8a^6$ D. $8a^5$

4. (3 分) (2014•玉林) 下面的多项式在实数范围内能因式分解的是 ()

- A. x^2+y^2 B. x^2-y C. x^2+x+1 D. x^2-2x+1

5. (3 分) (2014•玉林) 如图的几何体的三视图是 ()



6. (3 分) (2014•玉林) 下列命题是假命题的是 ()

- A. 四个角相等的四边形是矩形 B. 对角线相等的平行四边形是矩形
C. 对角线垂直的四边形是菱形 D. 对角线垂直的平行四边形是菱形

7. (3分) (2014•玉林) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比是 1:2, 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 3, 则 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 ()

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

8. (3分) (2014•玉林) 一个盒子内装有大小、形状相同的四个球, 其中红球 1 个、绿球 1 个、白球 2 个, 小明摸出一个球不放入, 再摸出一个球, 则两次都摸到白球的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

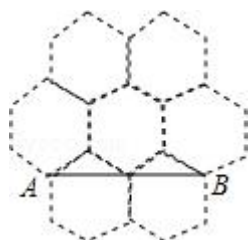
9. (3分) (2014•玉林) x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 的两个实数根, 是否存在实数 m 使 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0$ 成立? 则正确的是结论是 ()

- A. $m=0$ 时成立 B. $m=2$ 时成立 C. $m=0$ 或 2 时成立 D. 不存在

10. (3分) (2014•玉林) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 其周长为 20cm, 则 AB 边的取值范围是 ()

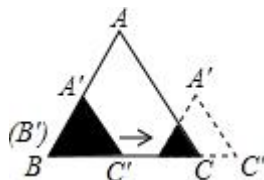
- A. $1\text{cm} < AB < 4\text{cm}$ B. $5\text{cm} < AB < 10\text{cm}$ C. $4\text{cm} < AB < 8\text{cm}$ D. $4\text{cm} < AB < 10\text{cm}$

11. (3分) (2014•玉林) 蜂巢的构造非常美丽、科学, 如图是由 7 个形状、大小完全相同的正六边形组成的网络, 正六边形的顶点称为格点, $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上. 设定 AB 边如图所示, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形的个数有 ()



- A. 4 个 B. 6 个 C. 8 个 D. 10 个

12. (3分) (2014•玉林) 如图, 边长分别为 1 和 2 的两个等边三角形, 开始它们在左边重合, 大三角形固定不动, 然后把小三角形自左向右平移直至移出大三角形外停止. 设小三角形移动的距离为 x , 两个三角形重叠面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象是 ()



- A. B. C. D.

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

13. (3 分) (2014•玉林) 3 的倒数是_____.

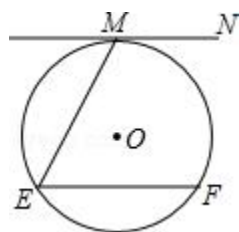
14. (3 分) (2014•玉林) 在平面直角坐标系中，点 $(-4, 4)$ 在第_____象限.

15. (3 分) (2014•玉林) 下表是我市某一天在不同时段测得的气温情况

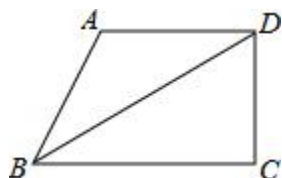
0: 00	4: 00	8: 00	12: 00	16: 00	20: 00
25°C	27°C	29°C	32°C	34°C	30°C

则这一天气温的极差是_____°C.

16. (3 分) (2014•玉林) 如图，直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 M ， $ME=EF$ 且 $EF \parallel MN$ ，则 $\cos \angle E =$ _____.



17. (3 分) (2014•玉林) 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=120^\circ$ ， $AD=2$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，则梯形 $ABCD$ 的周长是_____.



18. (3 分) (2014•玉林) 如图， $OABC$ 是平行四边形，对角线 OB 在轴正半轴上，位于第一象限的点 A 和第二象限的点 C 分别在双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 和 $y=\frac{k_2}{x}$ 的一支上，分别过点 A 、 C 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M 和 N ，则有以下的结论：

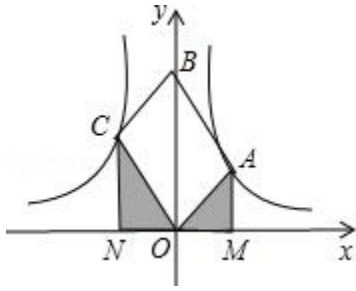
① $\frac{AM}{CN} = \frac{|k_1|}{|k_2|}$;

② 阴影部分面积是 $\frac{1}{2} (k_1+k_2)$;

③ 当 $\angle AOC=90^\circ$ 时， $|k_1|=|k_2|$;

④ 若 $OABC$ 是菱形，则两双曲线既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称.

其中正确的结论是_____ (把所有正确的结论的序号都填上).

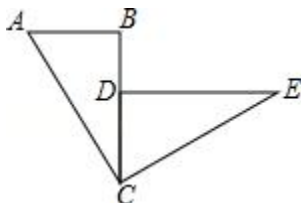


三、解答题（共 8 小题，满分 66 分。解答应写出文字说明过程或演算步骤）

19. (6 分) (2014•玉林) 计算: $(-2)^2 - \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + (\sin 60^\circ - \pi)^0$.

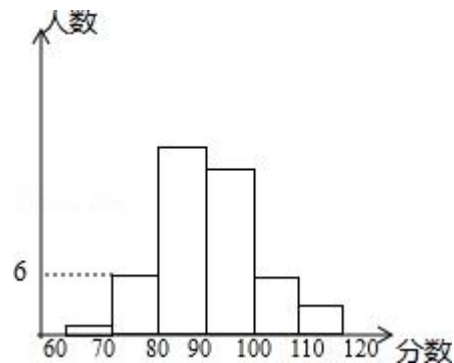
20. (6 分) (2014•玉林) 先化简, 再求值: $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

21. (6 分) (2014•玉林) 如图, 已知: BC 与 CD 重合, $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$, $\triangle ABC \cong \triangle CDE$, 并且 $\triangle CDE$ 可由 $\triangle ABC$ 逆时针旋转而得到. 请你利用尺规作出旋转中心 O (保留作图痕迹, 不写作法, 注意最后用墨水笔加黑), 并直接写出旋转角度是_____.



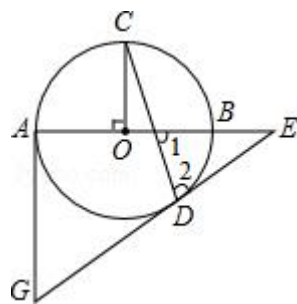
22. (8分) (2014•玉林) 第一次模拟试后，数学科陈老师把一班的数学成绩制成如图的统计图，并给了几个信息：①前两组的频率和是 0.14；②第一组的频率是 0.02；③自左到右第二、三、四组的频数比为 3：9：8，然后布置学生（也请你一起）结合统计图完成下列问题：

- (1) 全班学生是多少人？
- (2) 成绩不少于 90 分为优秀，那么全班成绩的优秀率是多少？
- (3) 若不少于 100 分可以得到 A⁺等级，则小明得到 A⁺的概率是多少？



23. (9分) (2014•玉林) 如图的⊙O 中，AB 为直径，OC⊥AB，弦 CD 与 OB 交于点 F，过点 D、A 分别作⊙O 的切线交于点 G，并与 AB 延长线交于点 E.

- (1) 求证：∠1=∠2.
- (2) 已知：OF：OB=1：3，⊙O 的半径为 3，求 AG 的长.



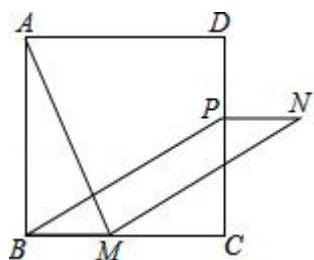
24. (9分) (2014•玉林) 我市市区去年年底电动车拥有量是 10 万辆，为了缓解城区交通拥堵状况，今年年初，市交通部门要求我市到明年年底控制电动车拥有量不超过 11.9 万辆，

估计每年报废的电动车数量是上一年年底电动车拥有量的 10%，假定每年新增电动车数量相同，问：

- (1) 从今年年初起每年新增电动车数量最多是多少万辆？
- (2) 在 (1) 的结论下，今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是多少？（结果精确到 0.1%）

25. (10 分) (2014•玉林) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 M 是 BC 边上的任一点，连接 AM 并将线段 AM 绕 M 顺时针旋转 90° 得到线段 MN ，在 CD 边上取点 P 使 $CP=BM$ ，连接 NP ， BP 。

- (1) 求证：四边形 $BMNP$ 是平行四边形；
- (2) 线段 MN 与 CD 交于点 Q ，连接 AQ ，若 $\triangle MCQ \sim \triangle AMQ$ ，则 BM 与 MC 存在怎样的数量关系？请说明理由。



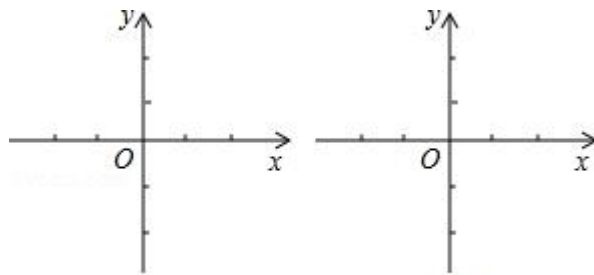
26. (12 分) (2014•玉林) 给定直线 $l: y=kx$ ，抛物线 $C: y=ax^2+bx+1$ 。

(1) 当 $b=1$ 时, l 与 C 相交于 A, B 两点, 其中 A 为 C 的顶点, B 与 A 关于原点对称, 求 a 的值;

(2) 若把直线 l 向上平移 k^2+1 个单位长度得到直线 r , 则无论非零实数 k 取何值, 直线 r 与抛物线 C 都只有一个交点.

①求此抛物线的解析式;

②若 P 是此抛物线上任一点, 过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴且与直线 $y=2$ 交于 Q 点, O 为原点. 求证: $OP=PQ$.



备用图1

备用图2

2014 年广西玉林市、防城港市中考数学试卷

一、单项选择题 (共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分)

1. (3 分) (2014•玉林) 下面的数中, 与 -2 的和为 0 的是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

考点: 有理数的加法.

分析: 设这个数为 x , 根据题意可得方程 $x + (-2) = 0$, 再解方程即可.

解答: 解: 设这个数为 x , 由题意得:

$$x + (-2) = 0,$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2,$$

故选: A.

点评: 此题主要考查了有理数的加法, 解答本题的关键是理解题意, 根据题意列出方程.

2. (3 分) (2014•玉林) 将 6.18×10^{-3} 化为小数的是 ()

- A. 0.000618 B. 0.00618 C. 0.0618 D. 0.618

考点: 科学记数法—原数.

分析: 科学记数法的标准形式为 $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$, n 为整数). 本题把数据“ 6.18×10^{-3} ”中 6.18 的小数点向左移动 3 位就可以得到.

解答: 解: 把数据“ 6.18×10^{-3} ”中 6.18 的小数点向左移动 3 位就可以得到为 0.00618 .

故选 B.

点评: 本题考查写出用科学记数法表示的原数.

将科学记数法 $a \times 10^{-n}$ 表示的数, “还原”成通常表示的数, 就是把 a 的小数点向左移动 n 位所得到的数.

把一个数表示成科学记数法的形式及把科学记数法还原是两个互逆的过程, 这也可以作为检查用科学记数法表示一个数是否正确的方法.

3. (3 分) (2014•玉林) 计算 $(2a^2)^3$ 的结果是 ()

- A. $2a^6$ B. $6a^6$ C. $8a^6$ D. $8a^5$

考点: 幂的乘方与积的乘方.

分析: 利用幂的乘方与积的乘方的性质求解即可求得答案.

解答: 解: $(2a^2)^3 = 8a^6$.

故选 C.

点评: 此题考查了幂的乘方与积的乘方的性质. 此题比较简单, 注意掌握指数的变化是解此题的关键.

4. (3 分) (2014•玉林) 下面的多项式在实数范围内能因式分解的是 ()

- A. $x^2 + y^2$ B. $x^2 - y$ C. $x^2 + x + 1$ D. $x^2 - 2x + 1$

考点: 实数范围内分解因式.

分析：利用因式分解的方法，分别判断得出即可．

解答：解：A、 x^2+y^2 ，无法因式分解，故此选项错误；

B、 x^2-y ，无法因式分解，故此选项错误；

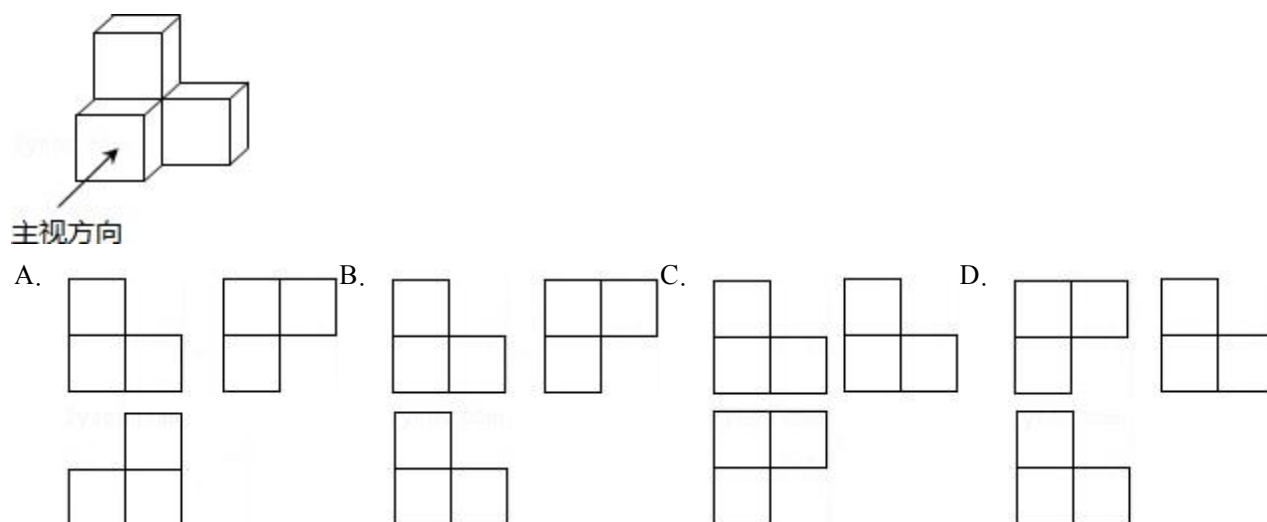
C、 x^2+x+1 ，无法因式分解，故此选项错误；

D、 $x^2-2x+1=(x-1)^2$ ，故此选项正确．

故选：D．

点评：此题主要考查了公式法分解因式，熟练应用公式是解题关键．

5. (3 分) (2014•玉林) 如图的几何体的三视图是 ()



考点：简单组合体的三视图．

分析：分别找出图形从正面、左面、和上面看所得到的图形即可．

解答：解：从几何体的正面看可得有 2 列小正方形，左面有 2 个小正方形，右面下边有 1 个小正方形；

从几何体的正面看可得有 2 列小正方形，左面有 2 个小正方形，右面下边有 1 个小正方形；

从几何体的上面看可得有 2 列小正方形，左面有 2 个小正方形，右上角有 1 个小正方形；

故选：C．

点评：本题考查了三视图的知识，注意所有的看到的棱都应表现在三视图中．

6. (3 分) (2014•玉林) 下列命题是假命题的是 ()

A. 四个角相等的四边形是矩形

B. 对角线相等的平行四边形是矩形

C. 对角线垂直的四边形是菱形

D. 对角线垂直的平行四边形是菱形

考点：命题与定理．

分析：根据矩形的判定对 A、B 进行判断；根据菱形的判定方法对 C、D 进行判断．

解答：解：A、四个角相等的四边形是矩形，所以 A 选项为真命题；

B、对角线相等的平行四边形是矩形，所以 B 选项为真命题；

C、对角线垂直的平行四边形是菱形，所以 C 选项为假命题；

D、对角线垂直的平行四边形是菱形，所以 D 选项为真命题．

故选 C.

点评: 本题考查了命题与定理: 判断事物的语句叫命题; 正确的命题称为真命题, 错误的命题称为假命题; 经过推理论证的真命题称为定理.

7. (3 分) (2014•玉林) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比是 1: 2, 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 3, 则 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 ()

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

考点: 位似变换.

分析: 利用位似图形的面积比等于位似比的平方, 进而得出答案.

解答: 解: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似图形, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的位似比是 1: 2, $\triangle ABC$ 的面积是 3,

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积比为: 1: 4,

则 $\triangle A'B'C'$ 的面积是: 12.

故选: D.

点评: 此题主要考查了位似图形的性质, 利用位似图形的面积比等于位似比的平方得出是解题关键.

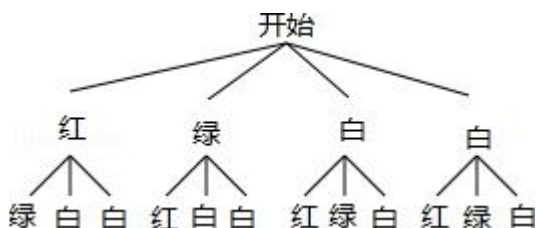
8. (3 分) (2014•玉林) 一个盒子内装有大小、形状相同的四个球, 其中红球 1 个、绿球 1 个、白球 2 个, 小明摸出一个球不放入, 再摸出一个球, 则两次都摸到白球的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

考点: 列表法与树状图法.

分析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两次都摸到白球的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

解答: 解: 画树状图得:



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果, 两次都摸到白球的有 2 种情况,

$\therefore$ 两次都摸到白球的概率是: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

故答案为: C.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

9. (3 分) (2014•玉林) x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 的两个实数根,

是否存在实数 m 使 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0$ 成立? 则正确的是结论是 ()

- A. $m=0$ 时成立 B. $m=2$ 时成立 C. $m=0$ 或 2 时成立 D. 不存在

考点: 根与系数的关系.

分析: 先由一元二次方程根与系数的关系得出, $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m-2$. 假设存在实数 m 使

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \text{ 成立, 则 } \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = 0, \text{ 求出 } m=0, \text{ 再用判别式进行检验即可.}$$

解答: 解: $\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 的两个实数根,
 $\therefore x_1+x_2=m, x_1x_2=m-2$.

$$\text{假设存在实数 } m \text{ 使 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0 \text{ 成立, 则 } \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = 0,$$

$$\therefore \frac{m}{m-2} = 0,$$

$$\therefore m=0.$$

当 $m=0$ 时, 方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 即为 $x^2 - 2 = 0$, 此时 $\Delta = 8 > 0$,

$\therefore m=0$ 符合题意.

故选 A.

点评: 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系: 如果 x_1, x_2 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根时, 那么 $x_1+x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

10. (3 分) (2014•玉林) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 其周长为 20cm, 则 AB 边的取值范围是 ()

- A. $1\text{cm} < AB < 4\text{cm}$ B. $5\text{cm} < AB < 10\text{cm}$ C. $4\text{cm} < AB < 8\text{cm}$ D. $4\text{cm} < AB < 10\text{cm}$

考点: 等腰三角形的性质; 解一元一次不等式组; 三角形三边关系.

分析: 设 $AB=AC=x$, 则 $BC=20-2x$, 根据三角形的三边关系即可得出结论.

解答: 解: $\because$ 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 其周长为 20cm,

$\therefore$ 设 $AB=AC=x\text{cm}$, 则 $BC = (20 - 2x) \text{ cm}$,

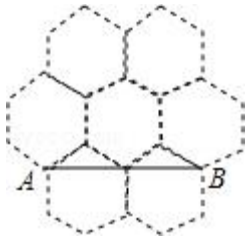
$$\therefore \begin{cases} 2x > 20 - 2x \\ 20 - 2x > 0 \end{cases},$$

解得 $5\text{cm} < x < 10\text{cm}$.

故选 B.

点评: 本题考查的是等腰三角形的性质, 熟知等腰三角形的两腰相等是解答此题的关键.

11. (3 分) (2014•玉林) 蜂巢的构造非常美丽、科学, 如图是由 7 个形状、大小完全相同的正六边形组成的网络, 正六边形的顶点称为格点, $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上. 设定 AB 边如图所示, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形的个数有 ()



- A. 4个 B. 6个 C. 8个 D. 10个

考点: 正多边形和圆.

分析: 根据正六边形的性质, 分 AB 是直角边和斜边两种情况确定出点 C 的位置即可得解.

解答: 解: 如图, AB 是直角边时, 点 C 共有 6 个位置,

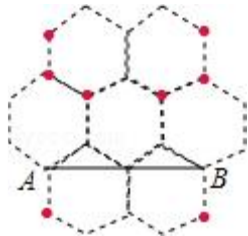
即, 有 6 个直角三角形,

AB 是斜边时, 点 C 共有 2 个位置,

即有 2 个直角三角形,

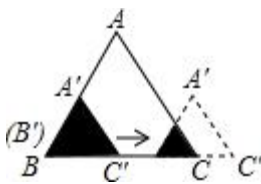
综上所述, $\triangle ABC$ 是直角三角形的个数有 $6+2=8$ 个.

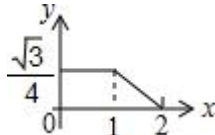
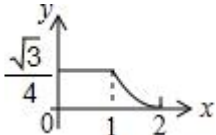
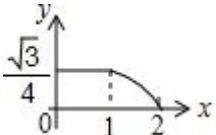
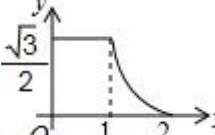
故选 C.



点评: 本题考查了正多边形和圆, 难点在于分 AB 是直角边和斜边两种情况讨论, 熟练掌握正六边形的性质是解题的关键, 作出图形更形象直观.

12. (3分) (2014•玉林) 如图, 边长分别为 1 和 2 的两个等边三角形, 开始它们在左边重合, 大三角形固定不动, 然后把小三角形自左向右平移直至移出大三角形外停止. 设小三角形移动的距离为 x , 两个三角形重叠面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象是 ()



- A.  B.  C.  D. 

考点: 动点问题的函数图象.

分析: 根据题目提供的条件可以求出函数的解析式, 根据解析式判断函数的图象的形状.

解答: 解: ① $t \leq 1$ 时, 两个三角形重叠面积为小三角形的面积,

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

②当 $1 < x \leq 2$ 时，重叠三角形的边长为 $2 - x$ ，高为 $\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}$ ，

$$y = \frac{1}{2}(2-x) \times \frac{\sqrt{3}(2-x)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3},$$

③当 $x \geq 2$ 时两个三角形重叠面积为小三角形的面积为 0，

故选：B.

点评：本题主要考查了本题考查了动点问题的函数图象，此类题目的图象往往是几个函数的组合体.

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

13. (3 分) (2014•玉林) 3 的倒数是 $-\frac{1}{3}$.

考点：倒数.

分析：根据倒数的定义可知.

解答：解：3 的倒数是 $\frac{1}{3}$.

点评：主要考查倒数的定义，要求熟练掌握. 需要注意的是：

倒数的性质：负数的倒数还是负数，正数的倒数是正数，0 没有倒数.

倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

14. (3 分) (2014•玉林) 在平面直角坐标系中，点 $(-4, 4)$ 在第 二 象限.

考点：点的坐标.

分析：根据各象限内点的坐标特征解答.

解答：解：点 $(-4, 4)$ 在第二象限.

故答案为：二.

点评：本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键，四个象限的符号特点分别是：第一象限 $(+, +)$ ；第二象限 $(-, +)$ ；第三象限 $(-, -)$ ；第四象限 $(+, -)$.

15. (3 分) (2014•玉林) 下表是我市某一天在不同时段测得的气温情况

0: 00	4: 00	8: 00	12: 00	16: 00	20: 00
25°C	27°C	29°C	32°C	34°C	30°C

则这一天气温的极差是 9 °C.

考点：极差.

分析：根据极差的定义即极差就是这组数中最大值与最小值的差，即可得出答案.

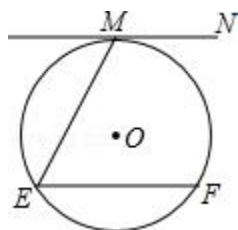
解答：解：这组数据的最大值是 34°C，最小值是 25°C，

则极差是 $34 - 25 = 9$ (°C).

故答案为：9.

点评：此题考查了极差，极差反映了一组数据变化范围的大小，求极差的方法是用一组数据中的最大值减去最小值. 注意：极差的单位与原数据单位一致.

16. (3 分) (2014•玉林) 如图, 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 M, $ME=EF$ 且 $EF \parallel MN$, 则 $\cos \angle E = \frac{1}{2}$.



考点: 切线的性质; 等边三角形的判定与性质; 特殊角的三角函数值.

专题: 计算题.

分析: 连结 OM, OM 的反向延长线交 EF 与 C, 由直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 M, 根据切线的性质得 $OM \perp MN$, 而 $EF \parallel MN$, 根据平行线的性质得到 $MC \perp EF$, 于是根据垂径定理有 $CE=CF$, 再利用等腰三角形的判定得到 $ME=MF$, 易证得 $\triangle MEF$ 为等边三角形, 所以 $\angle E=60^\circ$, 然后根据特殊角的三角函数值求解.

解答: 解: 连结 OM, OM 的反向延长线交 EF 与 C, 如图,

$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 M,

$\therefore OM \perp MN$,

$\because EF \parallel MN$,

$\therefore MC \perp EF$,

$\therefore CE=CF$,

$\therefore ME=MF$,

而 $ME=EF$,

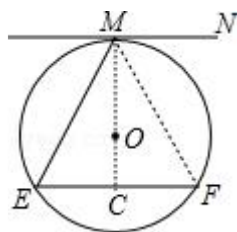
$\therefore ME=EF=MF$,

$\therefore \triangle MEF$ 为等边三角形,

$\therefore \angle E=60^\circ$,

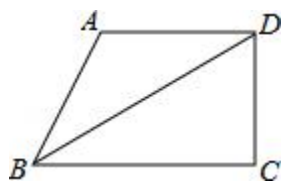
$\therefore \cos \angle E = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

故答案为 $\frac{1}{2}$.



点评: 本题考查了切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径. 也考查了垂径定理、等边三角形的判定与性质和特殊角的三角函数值.

17. (3 分) (2014•玉林) 如图, 在直角梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=120^\circ$, $AD=2$, BD 平分 $\angle ABC$, 则梯形 ABCD 的周长是 $7+\sqrt{3}$.



考点: 直角梯形.

分析: 根据题意得出 $AB=AD$, 进而得出 BD 的长, 再利用在直角三角形中 30° 所对的边等于斜边的一半, 进而求出 CD 以及利用勾股定理求出 BC 的长, 即可得出梯形 $ABCD$ 的周长.

解答: 解: 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于点 E ,

$$\because AD \parallel BC, \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 1,$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}, \text{ 则 } BD = 2\sqrt{3},$$

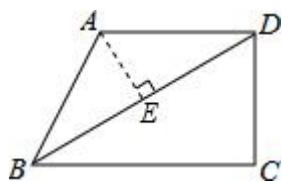
$$\because \angle C = 90^\circ, \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore DC = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的周长是: } AB + AD + CD + BC = 2 + 2 + \sqrt{3} + 3 = 7 + \sqrt{3}.$$

故答案为: $7 + \sqrt{3}$.



点评: 此题主要考查了直角梯形的性质以及勾股定理和直角三角形中 30° 所对的边等于斜边的一半等知识, 得出 $\angle DBC$ 的度数是解题关键.

18. (3 分) (2014•玉林) 如图, $OABC$ 是平行四边形, 对角线 OB 在轴正半轴上, 位于第一象限的点 A 和第二象限的点 C 分别在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = \frac{k_2}{x}$ 的一支上, 分别过点 A 、 C 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 M 和 N , 则有以下的结论:

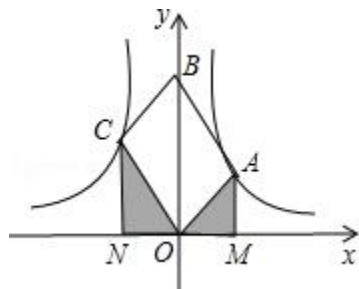
$$\textcircled{1} \frac{AM}{CN} = \frac{|k_1|}{|k_2|};$$

$$\textcircled{2} \text{阴影部分面积是 } \frac{1}{2} (k_1 + k_2);$$

③当 $\angle AOC=90^\circ$ 时, $|k_1|=|k_2|$;

④若 OABC 是菱形, 则两双曲线既关于 x 轴对称, 也关于 y 轴对称.

其中正确的结论是 ①④ (把所有正确的结论的序号都填上).



考点: 反比例函数综合题.

专题: 综合题.

分析: 作 $AE \perp y$ 轴于 E, $CF \perp y$ 轴于 F, 根据平行四边形的性质得 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}$, 利用三角形面积公式得到 $AE=CF$, 则有 $OM=ON$, 再利用反比例函数 k 的几何意义和三角形

面积公式得到 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|=\frac{1}{2}OM \cdot AM$, $S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|=\frac{1}{2}ON \cdot CN$, 所以有 $\frac{AM}{CN}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$;

由 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|$, $S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|$, 得到 $S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}(|k_1|+|k_2|)=\frac{1}{2}(k_1$

$-k_2)$; 当 $\angle AOC=90^\circ$, 得到四边形 OABC 是矩形, 由于不能确定 OA 与 OC 相等, 则不能判断 $\triangle AOM \cong \triangle CNO$, 所以不能判断 $AM=CN$, 则不能确定 $|k_1|=|k_2|$; 若 OABC 是菱形, 根据菱形的性质得 $OA=OC$, 可判断 $Rt\triangle AOM \cong Rt\triangle CNO$, 则 $AM=CN$, 所以 $|k_1|=|k_2|$, 即 $k_1=-k_2$, 根据反比例函数的性质得两双曲线既关于 x 轴对称, 也关于 y 轴对称.

解答: 解: 作 $AE \perp y$ 轴于 E, $CF \perp y$ 轴于 F, 如图,

$\because$ 四边形 OABC 是平行四边形,

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}$,

$\therefore AE=CF$,

$\therefore OM=ON$,

$\therefore S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|=\frac{1}{2}OM \cdot AM$, $S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|=\frac{1}{2}ON \cdot CN$,

$\therefore \frac{AM}{CN}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$, 所以①正确;

$\therefore S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|$, $S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|$,

$\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}(|k_1|+|k_2|)$,

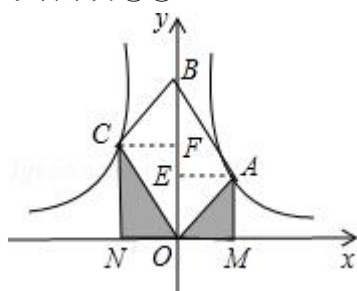
而 $k_1 > 0$, $k_2 < 0$,

$\therefore S_{\text{阴影部分}}=\frac{1}{2}(k_1 - k_2)$, 所以②错误;

当 $\angle AOC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 OABC 是矩形,

$\therefore$ 不能确定 OA 与 OC 相等,
 而 $OM=ON$,
 $\therefore$ 不能判断 $\triangle AOM \cong \triangle CNO$,
 $\therefore$ 不能判断 $AM=CN$,
 $\therefore$ 不能确定 $|k_1|=|k_2|$, 所以③错误;
 若 $OABC$ 是菱形, 则 $OA=OC$,
 而 $OM=ON$,
 $\therefore \text{Rt}\triangle AOM \cong \text{Rt}\triangle CNO$,
 $\therefore AM=CN$,
 $\therefore |k_1|=|k_2|$,
 $\therefore k_1 = -k_2$,
 $\therefore$ 两双曲线既关于 x 轴对称, 也关于 y 轴对称, 所以④正确.
 故答案为①④.



点评: 本题考查了反比例函数的综合题: 熟练掌握反比例函数的图象、反比例函数 k 的几何意义、平行四边形的性质、矩形的性质和菱形的性质.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分. 解答应写出文字说明过程或演算步骤)

19. (6 分) (2014·玉林) 计算: $(-2)^2 - \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + (\sin 60^\circ - \pi)^0$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 特殊角的三角函数值.

分析: 本题涉及零指数幂、乘方、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答: 解: 原式 $= 4 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$$= 4 - 2 + 1$$

$$= 3.$$

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值, 熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算.

20. (6 分) (2014·玉林) 先化简, 再求值: $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

考点: 分式的化简求值.

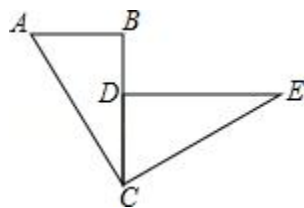
专题: 计算题.

分析：原式通分并利用同分母分式的减法法则计算，约分得到最简结果，将 x 的值代入计算即可求出值．

解答：解：原式 $= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$ ，
当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时，原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ．

点评：此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

21. (6分) (2014•玉林) 如图，已知：BC 与 CD 重合， $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ ， $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ ，并且 $\triangle CDE$ 可由 $\triangle ABC$ 逆时针旋转而得到．请你利用尺规作出旋转中心 O (保留作图痕迹，不写作法，注意最后用墨水笔加黑)，并直接写出旋转角度是 90° ．

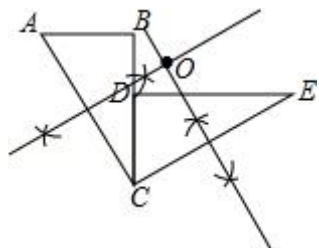


考点：作图-旋转变换．

分析：分别作出 AC，CE 的垂直平分线进而得出其交点 O，进而得出答案．

解答：解：如图所示：旋转角度是 90° ．

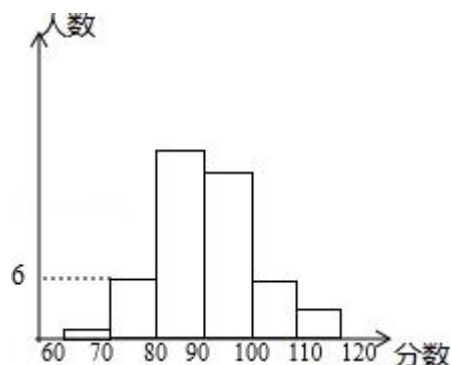
故答案为： 90° ．



点评：此题主要考查了旋转变换，得出旋转中心的位置是解题关键．

22. (8分) (2014•玉林) 第一次模拟试后，数学科陈老师把一班的数学成绩制成如图的统计图，并给了几个信息：①前两组的频率和是 0.14；②第一组的频率是 0.02；③自左到右第二、三、四组的频数比为 3：9：8，然后布置学生（也请你一起）结合统计图完成下列问题：

- (1) 全班学生是多少人？
- (2) 成绩不少于 90 分为优秀，那么全班成绩的优秀率是多少？
- (3) 若不少于 100 分可以得到 A⁺等级，则小明得到 A⁺的概率是多少？



考点: 频数 (率) 分布直方图; 概率公式.

分析: (1) 首先求得第二组的频率, 然后根据第二组的频数是 6, 即可求得总人数;

(2) 利用 1 减去前两组的频率即可求解;

(3) 求得第三、四组的频率, 则利用 1 减去前四组的频率即可求解.

解答: 解: (1) 第二组的频率是: $0.14 - 0.02 = 0.12$,

则全班的学生数是: $6 \div 0.12 = 50$;

(2) 全班成绩的优秀率是 $1 - 0.14 = 0.86 = 86\%$;

(3) 第三、四组的频率是: $0.12 \times \frac{9+8}{3} = 0.68$,

则最后两组的频率的和是: $1 - 0.14 - 0.68 = 0.18$,

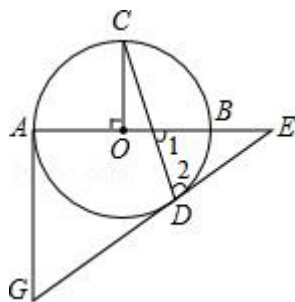
则小明得到 A^+ 的概率是 0.18.

点评: 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力; 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

23. (9 分) (2014·玉林) 如图的 $\odot O$ 中, AB 为直径, $OC \perp AB$, 弦 CD 与 OB 交于点 F , 过点 D 、 A 分别作 $\odot O$ 的切线交于点 G , 并与 AB 延长线交于点 E .

(1) 求证: $\angle 1 = \angle 2$.

(2) 已知: $OF:OB=1:3$, $\odot O$ 的半径为 3, 求 AG 的长.



考点: 切线的性质; 相似三角形的判定与性质.

专题: 证明题.

分析: (1) 连结 OD , 根据切线的性质得 $OD \perp DE$, 则 $\angle 2 + \angle ODC = 90^\circ$, 而 $\angle C = \angle ODC$, 则 $\angle 2 + \angle C = 90^\circ$, 由 $OC \perp OB$ 得 $\angle C + \angle 3 = 90^\circ$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$, 而 $\angle 1 = \angle 3$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$;

(2) 由 $OF:OB=1:3$, $\odot O$ 的半径为 3 得到 $OF=1$, 由 (1) 中 $\angle 1 = \angle 2$ 得 $EF=ED$, 在 $Rt\triangle ODE$ 中, $DE=x$, 则 $EF=x$, $OE=1+x$, 根据勾股定理得 $3^2 + t^2 = (t+1)^2$, 解得 $t=4$, 则 $DE=4$, $OE=5$, 根据切线的性质由 AG 为 $\odot O$ 的切线得 $\angle GAE=90^\circ$, 再证明 $Rt\triangle EOD \sim Rt\triangle EGA$, 利用相似比可计算出 AG .

解答: (1) 证明: 连结 OD , 如图,

$\because DE$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$,

$\therefore \angle ODE = 90^\circ$, 即 $\angle 2 + \angle ODC = 90^\circ$,

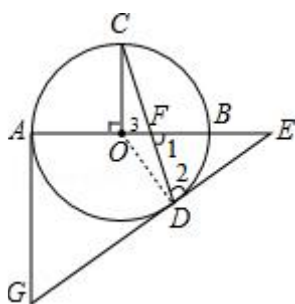
$\because OC = OD$,

$\therefore \angle C = \angle ODC$,

$\therefore \angle 2 + \angle C = 90^\circ$,

而 $OC \perp OB$,
 $\therefore \angle C + \angle 3 = 90^\circ$,
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$;

(2) 解: $\because OF:OB=1:3$, $\odot O$ 的半径为 3,
 $\therefore OF=1$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore EF=ED$,
 在 $Rt\triangle ODE$ 中, $OD=3$, $DE=x$, 则 $EF=x$, $OE=1+x$,
 $\therefore OD^2 + DE^2 = OE^2$,
 $\therefore 3^2 + t^2 = (t+1)^2$, 解得 $t=4$,
 $\therefore DE=4$, $OE=5$,
 $\therefore AG$ 为 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore AG \perp AE$,
 $\therefore \angle GAE = 90^\circ$,
 而 $\angle OED = \angle GEA$,
 $\therefore Rt\triangle EOD \sim Rt\triangle EGA$,
 $\therefore \frac{OD}{AG} = \frac{DE}{AE}$, 即 $\frac{3}{AG} = \frac{4}{3+5}$,
 $\therefore AG=6$.



点评: 本题考查了切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径. 也考查了勾股定理和相似三角形的判定与性质.

24. (9 分) (2014•玉林) 我市市区去年年底电动车拥有量是 10 万辆, 为了缓解城区交通拥堵状况, 今年年初, 市交通部门要求我市到明年年底控制电动车拥有量不超过 11.9 万辆, 估计每年报废的电动车数量是上一年年底电动车拥有量的 10%, 假定每年新增电动车数量相同, 问:

(1) 从今年年初起每年新增电动车数量最多是多少万辆?

(2) 在 (1) 的结论下, 今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是多少? (结果精确到 0.1%)

考点: 一元二次方程的应用; 一元一次不等式的应用.

分析: (1) 根据题意分别求出今年将报废电动车的数量, 进而得出明年报废的电动车数量, 进而得出不等式求出即可;

(2) 分别求出今年年底电动车数量, 进而求出今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率.

解答: 解: (1) 设从今年年初起每年新增电动车数量是 x 万辆,

由题意可得出: 今年将报废电动车: $10 \times 10\% = 1$ (万辆),

$$\therefore [(10 - 1) + x] (1 - 10\%) + x \leq 11.9,$$

解得: $x \leq 2$.

答: 从今年年初起每年新增电动车数量最多是 2 万辆;

(2) $\because$ 今年年底电动车拥有量为: $(10 - 1) + x = 11$ (万辆),

明年年底电动车拥有量为: 11.9 万辆,

$\therefore$ 设今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是 y , 则 $11(1 + y) = 11.9$,

解得: $y \approx 0.082 = 8.2\%$.

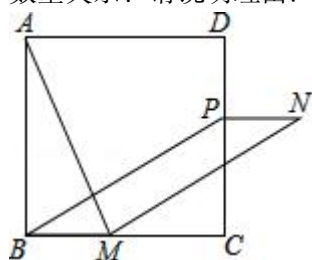
答: 今年年底到明年年底电动车拥有量的年增长率是 8.2%.

点评: 此题主要考查了一元一次不等式的应用以及一元一次方程的应用, 分别表示出今年与明年电动车数量是解题关键.

25. (10 分) (2014•玉林) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 M 是 BC 边上的任一点, 连接 AM 并将线段 AM 绕 M 顺时针旋转 90° 得到线段 MN , 在 CD 边上取点 P 使 $CP = BM$, 连接 NP , BP .

(1) 求证: 四边形 $BMNP$ 是平行四边形;

(2) 线段 MN 与 CD 交于点 Q , 连接 AQ , 若 $\triangle MCQ \sim \triangle AMQ$, 则 BM 与 MC 存在怎样的数量关系? 请说明理由.



考点: 相似三角形的判定与性质; 平行四边形的判定与性质; 正方形的性质.

分析: (1) 根据正方形的性质可得 $AB = BC$, $\angle ABC = \angle B$, 然后利用“边角边”证明 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BCP$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $AM = BP$, $\angle BAM = \angle CBP$, 再求出 $AM \perp BP$, 从而得到 $MN \parallel BP$, 然后根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明即可;

(2) 根据同角的余角相等求出 $\angle BAM = \angle CMQ$, 然后求出 $\triangle ABM$ 和 $\triangle MCQ$ 相似,

根据相似三角形对应边成比例可得 $\frac{AB}{MC} = \frac{AM}{MQ}$, 再求出 $\triangle AMQ \sim \triangle ABM$, 根据相似三角

形对应边成比例可得 $\frac{AB}{BM} = \frac{AM}{MQ}$, 从而得到 $\frac{AB}{MC} = \frac{AB}{BM}$, 即可得解.

解答: (1) 证明: 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = \angle B$,

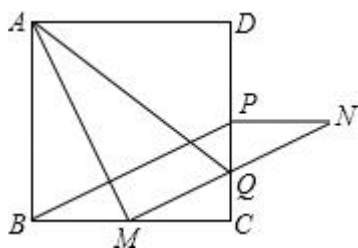
在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BCP$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABC = \angle B \\ CP = BM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle BCP$ (SAS),
 $\therefore AM=BP$, $\angle BAM=\angle CBP$,
 $\therefore \angle BAM+\angle AMB=90^\circ$,
 $\therefore \angle CBP+\angle AMB=90^\circ$,
 $\therefore AM \perp BP$,
 $\therefore AM$ 并将线段 AM 绕 M 顺时针旋转 90° 得到线段 MN ,
 $\therefore AM \perp MN$, 且 $AM=MN$,
 $\therefore MN \parallel BP$,
 $\therefore$ 四边形 $BMNP$ 是平行四边形;

(2) 解: $BM=MC$.

理由如下: $\because \angle BAM+\angle AMB=90^\circ$, $\angle AMB+\angle CMQ=90^\circ$,
 $\therefore \angle BAM=\angle CMQ$,
 又 $\because \angle B=\angle C=90^\circ$,
 $\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCQ$,
 $\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{AM}{MQ}$,
 $\therefore \triangle MCQ \sim \triangle AMQ$,
 $\therefore \triangle AMQ \sim \triangle ABM$,
 $\therefore \frac{AB}{BM} = \frac{AM}{MQ}$,
 $\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{AB}{BM}$,
 $\therefore BM=MC$.



点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质, 正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 平行四边形的判定, (1) 求出两个三角形全等是解题的关键, (2) 根据相似于同一个三角形的两个三角形相似求出 $\triangle AMQ \sim \triangle ABM$ 是解题的关键.

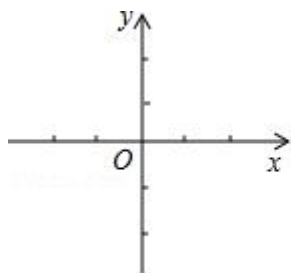
26. (12 分) (2014•玉林) 给定直线 $l: y=kx$, 抛物线 $C: y=ax^2+bx+1$.

(1) 当 $b=1$ 时, l 与 C 相交于 A, B 两点, 其中 A 为 C 的顶点, B 与 A 关于原点对称, 求 a 的值;

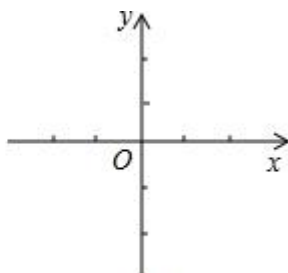
(2) 若把直线 l 向上平移 k^2+1 个单位长度得到直线 r , 则无论非零实数 k 取何值, 直线 r 与抛物线 C 都只有一个交点.

①求此抛物线的解析式;

②若 P 是此抛物线上任一点, 过 P 作 $PQ \parallel y$ 轴且与直线 $y=2$ 交于 Q 点, O 为原点. 求证: $OP=PQ$.



备用图1



备用图2

考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 直线与抛物线的交点 B 与 A 关于原点对称, 即横纵坐标对应互为相反数, 即相加为零, 这很适用于韦达定理. 由其中有涉及顶点, 考虑顶点式易得 a 值.

(2) ①直线 l: $y=kx$ 向上平移 k^2+1 , 得直线 r: $y=kx+k^2+1$. 根据无论非零实数 k 取何值, 直线 r 与抛物线 C: $y=ax^2+bx+1$ 都只有一个交点, 得 $ax^2+(b-k)x-k^2=0$ 中

$\Delta=\sqrt{(b-k)^2+4ak^2}=0$. 这虽然是个方程, 但无法求解. 这里可以考虑一个数学

技巧, 既然 k 取任何值都成立, 那么代入最简单的 1, 2 肯定是成立的, 所以可以代入试验, 进而可求得关于 a, b 的方程组, 则 a, b 可能的值易得. 但要注意答案中, 可能有的只能满足 $k=1, 2$ 时, 并不满足任意实数 k, 所以可以再代回

$\Delta=\sqrt{(b-k)^2+4ak^2}$ 中, 若不能使其结果为 0, 则应舍去.

②求证 $OP=PQ$, 那么首先应画出大致的示意图. 发现图中几何条件较少, 所以考虑用坐标转化求出 OP, PQ 的值, 再进行比较. 这里也有数学技巧, 讨论动点 P 在抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ 上, 则可设其坐标为 $(x, -\frac{1}{4}x^2+1)$, 进而易求 OP, PQ.

解答: (1) 解:

$\because l: y=kx, C: y=ax^2+bx+1$, 当 $b=1$ 时有 A, B 两交点,

$\therefore$ A, B 两点的横坐标满足 $kx=ax^2+x+1$, 即 $ax^2+(1-k)x+1=0$.

$\because$ B 与 A 关于原点对称,

$$\therefore 0=x_A+x_B=\frac{k-1}{a},$$

$$\therefore k=1.$$

$$\because y=ax^2+x+1=a\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2+1-\frac{1}{4a},$$

$$\therefore \text{顶点}\left(-\frac{1}{2a}, 1-\frac{1}{4a}\right) \text{在 } y=x \text{ 上},$$

$$\therefore -\frac{1}{2a}=1-\frac{1}{4a},$$

$$\text{解得 } a=-\frac{1}{4}.$$

(2)

①解: $\because$ 无论非零实数 k 取何值, 直线 r 与抛物线 C 都只有一个交点,

$\therefore k=1$ 时, $k=2$ 时, 直线 r 与抛物线 C 都只有一个交点.

当 $k=1$ 时, $r: y=x+2$,

$\therefore$ 代入 $C: y=ax^2+bx+1$ 中, 有 $ax^2+(b-1)x-1=0$,

$$\therefore \Delta = \sqrt{(b-1)^2 + 4a} = 0,$$

$$\therefore (b-1)^2 + 4a = 0,$$

当 $k=2$ 时, $r: y=2x+5$,

$\therefore$ 代入 $C: y=ax^2+bx+1$ 中, 有 $ax^2+(b-2)x-4=0$,

$$\therefore \Delta = \sqrt{(b-2)^2 + 16a} = 0,$$

$$\therefore (b-2)^2 + 16a = 0,$$

$$\therefore \text{联立得关于 } a, b \text{ 的方程组 } \begin{cases} (b-1)^2 + 4a = 0 \\ (b-2)^2 + 16a = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{1}{36} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$\therefore r: y=kx+k^2+1$ 代入 $C: y=ax^2+bx+1$, 得 $ax^2+(b-k)x-k^2=0$,

$$\therefore \Delta = \sqrt{(b-k)^2 + 4ak^2}.$$

$$\text{当 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases} \text{ 时, } \Delta = \sqrt{(-k)^2 + 4 \cdot (-\frac{1}{4})k^2} = \sqrt{k^2 - k^2} = 0, \text{ 故无论 } k \text{ 取何值,}$$

直线 r 与抛物线 C 都只有一个交点.

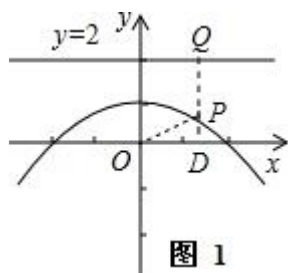
$$\text{当 } \begin{cases} a = -\frac{1}{36} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ 时, } \Delta = \sqrt{(\frac{4}{3}-k)^2 + 4 \cdot (-\frac{1}{36})k^2} = \sqrt{\frac{8}{9}k^2 - \frac{8}{3}k + \frac{16}{9}}, \text{ 显然虽 } k$$

值的变化, Δ 不恒为 0, 所以不合题意舍去.

$$\therefore C: y = -\frac{1}{4}x^2 + 1.$$

②证明:

根据题意, 画出图象如图 1,



由 P 在抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ 上, 设 P 坐标为 $(x, -\frac{1}{4}x^2 + 1)$, 连接 OP , 过 P 作 $PQ \perp$ 直线 $y=2$ 于 Q , 作 $PD \perp x$ 轴于 D ,

$$\therefore PD = |-\frac{1}{4}x^2 + 1|, \quad OD = |x|,$$

$$\therefore OP = \sqrt{PD^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 + x^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

$$PQ = 2 - y_P = 2 - (-\frac{1}{4}x^2 + 1) = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

$$\therefore OP = PQ.$$

点评: 本题考查了二次函数、一次函数及图象，图象平移解析式变化，韦达定理及勾股定理等知识，另涉及一些数学技巧，学生解答有一定难度，需要好好理解掌握。

