

2015 年广东省茂名市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 每小题给出的四个答案, 其中只有一个是正确的)

1. (3 分) (2015•茂名) $|-3|$ 等于 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

2. (3 分) (2015•茂名) 如图是一个正方体的平面展开图, 折叠成正方体后与“建”字所在面相对的面的字是 ()

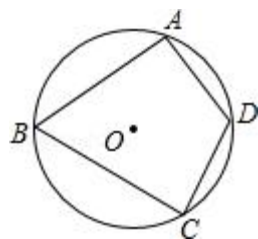


- A. 创 B. 教 C. 强 D. 市

3. (3 分) (2015•茂名) 下列各式计算正确的是 ()

- A. $5a+3a=8a^2$ B. $(a-b)^2=a^2-b^2$ C. $a^3 \cdot a^7=a^{10}$ D. $(a^3)^2=a^7$

4. (3 分) (2015•茂名) 如图, 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\angle B=70^\circ$, 则 $\angle D$ 的度数是 ()



- A. 110° B. 90° C. 70° D. 50°

5. (3 分) (2015•茂名) 在等腰三角形、平行四边形、直角梯形和圆中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等腰三角形 B. 平行四边形 C. 直角梯形 D. 圆

6. (3 分) (2015•茂名) 下列说法正确的是 ()

- A. 面积相等的两个三角形全等
B. 矩形的四条边一定相等

- C. 一个图形和它旋转后所得图形的对应线段相等
D. 随机投掷一枚质地均匀的硬币，落地后一定是正面朝上

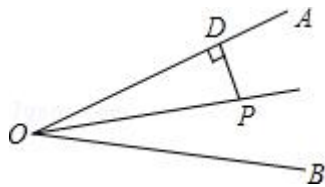
7. (3分) (2015•茂名) 为了帮扶本市一名特困儿童，某班有 20 名同学积极捐款，他们捐款的数额如下表：

捐款的数额 (单位: 元)	20	50	80	100
人数 (单位: 名)	6	7	4	3

对于这 20 名同学的捐款，众数是 ()

- A. 20 元 B. 50 元 C. 80 元 D. 100 元

8. (3分) (2015•茂名) 如图，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上一点， $PD \perp OA$ 于点 D， $PD=6$ ，则点 P 到边 OB 的距离为 ()



- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

9. (3分) (2015•茂名) 在平面直角坐标系中，下列函数的图象经过原点的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = -2x - 3$ C. $y = 2x^2 + 1$ D. $y = 5x$

10. (3分) (2015•茂名) 张三和李四两人加工同一种零件，每小时张三比李四多加工 5 个零件，张三加工 120 个这种零件与李四加工 100 个这种零件所用时间相等，求张三和李四每小时各加工多少个这种零件？若设张三每小时经过这种零件 x 个，则下面列出的方程正确的是 ()

- A. $\frac{120}{x-5} = \frac{100}{x}$ B. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-5}$ C. $\frac{120}{x+5} = \frac{100}{x}$ D. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x+5}$

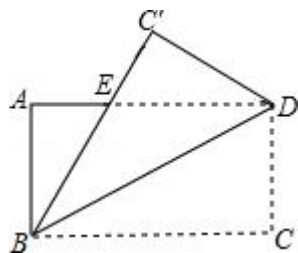
二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

11. (3分) (2015•茂名) -8 的立方根是_____.

12. (3 分) (2015•茂名) 一个多边形的内角和是 720° ，那么这个多边形是_____边形.

13. (3 分) (2015•茂名) 不等式 $x - 4 < 0$ 的解集是_____.

14. (3 分) (2015•茂名) 如图，将矩形 ABCD 沿对角线 BD 折叠，使点 C 与 C' 重合. 若 $AB=3$ ，则 $C'D$ 的长为_____.



15. (3 分) (2015•茂名) 为了求 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$ 的值，可令

$M=1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$ ，则 $3M=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{101}$ ，因此， $3M - M=3^{101} - 1$ ，所

以 $M=\frac{3^{101}-1}{2}$ ，即 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}=\frac{3^{101}-1}{2}$ ，仿照以上推理计算：

$1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$ 的值是_____.

三、用心做一做 (本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

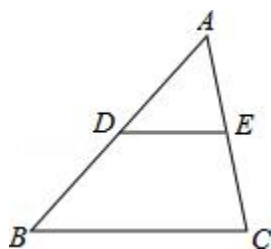
16. (7 分) (2015•茂名) 计算： $(-\frac{1}{3})^{-1} - |-4| + \sqrt{3^2+4^2} + (\sin 30^\circ)^0$.

17. (7 分) (2015•茂名) 设 $y=ax$ ，若代数式 $(x+y)(x-2y)+3y(x+y)$ 化简的结果为 x^2 ，请你求出满足条件的 a 值.

18. (7 分) (2015•茂名) 补充完整三角形中位线定理，并加以证明：

(1) 三角形中位线定理：三角形的中位线_____；

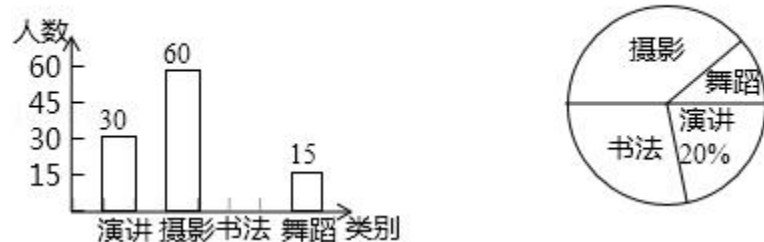
(2) 已知：如图，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，求证： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。



四、沉着冷静，缜密思考（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19. (7 分) (2015·茂名) 某校为了丰富学生的第二课堂，对学生参与演讲、舞蹈、书法和摄影活动的兴趣情况进行调查，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查（每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中最感兴趣的一项），对调查结果进行统计后，绘制了如下两个统计图：

对第二课堂最感兴趣条形统计图 对第二课堂最感兴趣扇形统计图



(1) 此次调查抽取的学生人数 $m =$ _____ 名，其中选择“书法”的学生占抽样人数的百分比 $n =$ _____；

(2) 若该校有 3000 名学生，请根据以上数据估计该校对“书法”最感兴趣的学生人数。

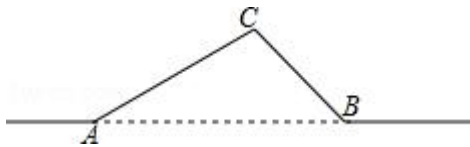
20. (7 分) (2015·茂名) 在一个不透明的袋中装有 2 个黄球，3 个黑球和 5 个红球，它们除颜色外其他都相同。

- (1) 将袋中的球摇均匀后，求从袋中随机摸出一个球是黄球的概率；
- (2) 现在再将若干个红球放入袋中，与原来的 10 个球均匀混合在一起，使从袋中随机摸出一个球是红球的概率是 $\frac{2}{3}$ ，请求出后来放入袋中的红球的个数.

五、满怀信心，再接再厉（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

21. (8 分) (2015•茂名) 如图，一条输电线路从 A 地到 B 地需要经过 C 地，图中 $AC=20$ 千米， $\angle CAB=30^\circ$ ， $\angle CBA=45^\circ$ ，因线路整改需要，将从 A 地到 B 地之间铺设一条笔直的输电线路.

- (1) 求新铺设的输电线路 AB 的长度；(结果保留根号)
- (2) 问整改后从 A 地到 B 地的输电线路比原来缩短了多少千米？(结果保留根号)



22. (8 分) (2015•茂名) 在平面直角坐标系中，我们不妨把纵坐标是横坐标的 2 倍的点称之为“理想点”，例如点 $(-2, -4)$ ， $(1, 2)$ ， $(3, 6)$...都是“理想点”，显然这样的“理想点”有无数多个.

- (1) 若点 $M(2, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 图象上的“理想点”, 求这个反比例函数的表达式;
- (2) 函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数, $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点”吗? 若存在, 请求出“理想点”的坐标; 若不存在, 请说明理由.

23. (8 分) (2015•茂名) 某公司生产的某种产品每件成本为 40 元, 经市场调查整理出如下信息:

①该产品 90 天内日销售量 (m 件) 与时间 (第 x 天) 满足一次函数关系, 部分数据如下表:

时间 (第 x 天) 1 3 6 10 ...

日销售量 (m 件) 198 194 188 180 ...

②该产品 90 天内每天的销售价格与时间 (第 x 天) 的关系如下表:

时间 (第 x 天) $1 \leq x < 50$ $50 \leq x \leq 90$

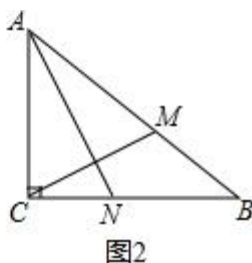
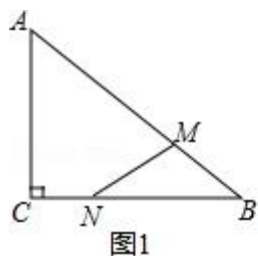
销售价格 (元/件) $x + 60$ 100

- (1) 求 m 关于 x 的一次函数表达式;
- (2) 设销售该产品每天利润为 y 元, 请写出 y 关于 x 的函数表达式, 并求出在 90 天内该产品哪天的销售利润最大? 最大利润是多少? 【提示: 每天销售利润 = 日销售量 $\times$ (每件销售价格 - 每件成本)】
- (3) 在该产品销售的过程中, 共有多少天销售利润不低于 5400 元, 请直接写出结果.

六、灵动管理，超越自我（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

24. (8 分) (2015•茂名) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$. 动点 M 从点 B 出发, 在 BA 边上以每秒 3cm 的速度向定点 A 运动, 同时动点 N 从点 C 出发, 在 CB 边上以每秒 2cm 的速度向点 B 运动, 运动时间为 t 秒 ($0 < t < \frac{10}{3}$), 连接 MN .

- (1) 若 $\triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 t 的值;
- (2) 连接 AN , CM , 若 $AN \perp CM$, 求 t 的值.

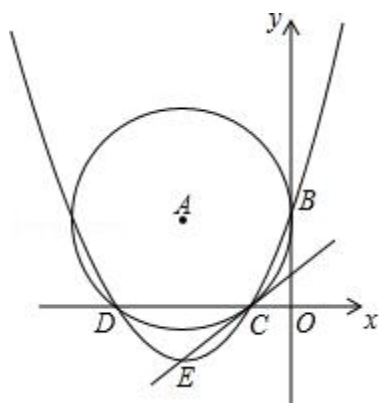


25. (8 分) (2015•茂名) 如图, 在平面直角坐标系中, $\odot A$ 与 x 轴相交于 $C(-2, 0)$, $D(-8, 0)$ 两点, 与 y 轴相切于点 $B(0, 4)$.

(1) 求经过 B, C, D 三点的抛物线的函数表达式;

(2) 设抛物线的顶点为 E , 证明: 直线 CE 与 $\odot A$ 相切;

(3) 在 x 轴下方的抛物线上, 是否存在一点 F , 使 $\triangle BDF$ 面积最大, 最大值是多少? 并求出点 F 的坐标.



2015 年广东省茂名市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 每小题给出的四个答案, 其中只有一个是正确的)

1. (3 分) (2015•茂名) $|-3|$ 等于 ()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

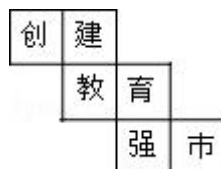
考点: 绝对值.

分析: 绝对值的性质: 负数的绝对值等于它的相反数, 正数的绝对值等于它本身, 0 的绝对值是 0.

解答: 解: 根据负数的绝对值是它的相反数, 得 $|-3| = -(-3) = 3$. 故选 A.

点评: 本题考查了绝对值的意义.

2. (3 分) (2015•茂名) 如图是一个正方体的平面展开图, 折叠成正方体后与“建”字所在面相对的面的字是 ()



A. 创 B. 教 C. 强 D. 市

考点: 专题: 正方体相对两个面上的文字.

分析: 正方体的表面展开图, 相对的面之间一定相隔一个正方形, 根据这一特点作答.

解答: 解: $\because$ 正方体的表面展开图, 相对的面之间一定相隔一个正方形,

$\therefore$ “建”与“强”是相对面.

故选 C.

点评: 本题主要考查了正方体相对两个面上的文字, 注意正方体的空间图形, 从相对面入手, 分析及解答问题.

3. (3 分) (2015•茂名) 下列各式计算正确的是 ()

A. $5a+3a=8a^2$ B. $(a-b)^2=a^2-b^2$ C. $a^3 \cdot a^7=a^{10}$ D. $(a^3)^2=a^7$

考点： 幂的乘方与积的乘方；合并同类项；同底数幂的乘法；完全平方公式.

分析： 利用幂的运算性质、合并同类项及完全平方公式进行计算后即可确定正确的选项.

解答： 解：A、 $5a+3a=8a$ ，故错误；

B、 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，故错误；

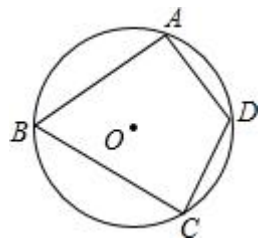
C、 $a^3 \cdot a^7=a^{10}$ ，正确；

D、 $(a^3)^2=a^6$ ，故错误.

故选 C.

点评： 本题考查了幂的运算性质、合并同类项及完全平方公式，解题的关键是能够了解有关幂的运算性质，难度不大.

4. (3 分) (2015•茂名) 如图，四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B=70^\circ$ ，则 $\angle D$ 的度数是 ()



A. 110° B. 90° C. 70° D. 50°

考点： 圆内接四边形的性质.

分析： 先根据圆内接四边形的对角互补得出 $\angle D+\angle B=180^\circ$ ，即可解答.

解答： 解： $\because$ 四边形 ABCD 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle D+\angle B=180^\circ,$$

$$\therefore \angle D=180^\circ-70^\circ=110^\circ,$$

故选：A.

点评： 本题考查的是圆内接四边形的性质，熟知圆内接四边形对角互补的性质是解答此题的关键.

5. (3 分) (2015•茂名) 在等腰三角形、平行四边形、直角梯形和圆中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

A. 等腰三角形 B. 平行四边形 C. 直角梯形 D. 圆

考点： 中心对称图形；轴对称图形.

专题： 计算题.

分析： 利用轴对称图形与中心对称图形的性质判断即可.

解答： 解：在等腰三角形、平行四边形、直角梯形和圆中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是圆.

故选 D.

点评： 此题考查了中心对称图形与轴对称图形，熟练掌握各自的定义是解本题的关键.

6. (3 分) (2015•茂名) 下列说法正确的是 ()

- A. 面积相等的两个三角形全等
- B. 矩形的四条边一定相等
- C. 一个图形和它旋转后所得图形的对应线段相等
- D. 随机投掷一枚质地均匀的硬币，落地后一定是正面朝上

考点： 命题与定理.

分析： 直接根据全等三角形的判定定理、矩形的性质、旋转的性质以及概率的知识对各个选项进行判断即可.

解答： 解：A、面积相等的两个三角形不一定全等，此选项错误；

B、矩形的对边相等，此选项错误；

C、一个图形和它旋转后所得图形的对应线段相等，此选项正确；

D、随机投掷一枚质地均匀的硬币，落地后不一定是正面朝上，此选项错误；
故选 C.

点评： 本题主要考查了命题与定理的知识，解答本题的关键是掌握全等三角形的判定定理、矩形的性质、旋转的性质以及概率的知识，此题难度不大.

7. (3 分) (2015•茂名) 为了帮扶本市一名特困儿童，某班有 20 名同学积极捐款，他们捐款的数额如下表：

捐款的数额 (单位: 元)	20	50	80	100
人数 (单位: 名)	6	7	4	3

对于这 20 名同学的捐款，众数是 ()

A. 20 元 B. 50 元 C. 80 元 D. 100 元

考点： 众数.

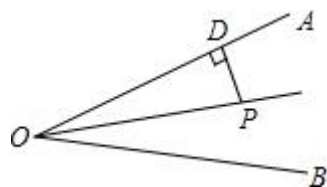
分析： 众数指一组数据中出现次数最多的数据，结合题意即可得出答案.

解答： 解：由题意得，所给数据中，50 元出现了 7 次，次数最多，
即这组数据的众数为 50 元.

故选 B.

点评： 此题考查了众数的定义及求法，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数. 求一组数据的众数的方法：找出频数最多的那个数据，若几个数据频数都是最多且相同，此时众数就是这多个数据.

8. (3 分) (2015•茂名) 如图，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上一点， $PD \perp$ OA 于点 D， $PD=6$ ，则点 P 到边 OB 的距离为 ()

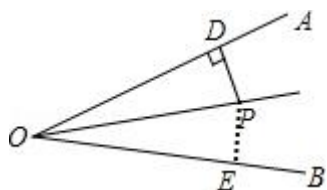


A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

考点：角平分线的性质.

分析：过点 P 作 $PE \perp OB$ 于点 E，根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $PE=PD$ ，从而得解.

解答：解：如图，



过点 P 作 $PE \perp OB$ 于点 E,

$\because OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线, $PD \perp OA$ 于 D,

$\therefore PE=PD$,

$\because PD=6$,

$\therefore PE=6$,

即点 P 到 OB 的距离是 6.

故选：A.

点评：本题考查了角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，是基础题，比较简单，熟记性质是解题的关键.

9. (3 分) (2015•茂名) 在平面直角坐标系中，下列函数的图象经过原点的是 ()

A. $y=\frac{1}{x}$ B. $y=-2x-3$ C. $y=2x^2+1$ D. $y=5x$

考点：二次函数图象上点的坐标特征；一次函数图象上点的坐标特征；反比例函数图象上点的坐标特征.

分析：将 $(0, 0)$ 代入各选项进行判断即可.

解答：解：A、当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{x}$ 无意义，不经过原点，故本选项错误；

B、当 $x=0$ 时, $y=3$ ，不经过原点，故本选项错误；

C、当 $x=0$ 时, $y=1$, 不经过原点, 故本选项错误;

D、当 $x=0$ 时, $y=0$, 经过原点, 故本选项正确.

故选: D.

点评: 本题考查了一次函数图象、反比例函数图象及二次函数图象上点的坐标特征, 注意代入判断, 难度一般

10. (3 分) (2015•茂名) 张三和李四两人加工同一种零件, 每小时张三比李四多加工 5 个零件, 张三加工 120 个这种零件与李四加工 100 个这种零件所用时间相等, 求张三和李四每小时各加工多少个这种零件? 若设张三每小时经过这种零件 x 个, 则下面列出的方程正确的是 ()

A. $\frac{120}{x-5} = \frac{100}{x}$ B. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-5}$ C. $\frac{120}{x+5} = \frac{100}{x}$ D. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x+5}$

考点: 由实际问题抽象出分式方程.

分析: 根据每小时张三比李四多加工 5 个零件和张三每小时加工这种零件 x 个, 可知李四每小时加工这种零件的个数, 根据张三加工 120 个这种零件与李四加工 100 个这种零件所用时间相等, 列出方程即可.

解答: 解: 设张三每小时加工这种零件 x 个, 则李四每小时加工这种零件 $(x-5)$ 个,

由题意得, $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-5}$,

故选 B.

点评: 本题考查的是列分式方程解应用题, 根据题意准确找出等量关系是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3 分) (2015•茂名) -8 的立方根是 -2 .

考点: 立方根.

分析: 利用立方根的定义即可求解.

解答： 解： $\because (-2)^3 = -8$,

$\therefore -8$ 的立方根是 -2 .

故答案为： -2 .

点评： 本题主要考查了平方根和立方根的概念. 如果一个数 x 的立方等于 a , 即 x 的三次方等于 a ($x^3=a$), 那么这个数 x 就叫做 a 的立方根, 也叫做三次方根. 读作“三次根号 a ”其中, a 叫做被开方数, 3 叫做根指数.

12. (3 分) (2015•茂名) 一个多边形的内角和是 720° , 那么这个多边形是六边形.

考点： 多边形内角与外角.

分析： n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 设这个正多边形的边数是 n , 就得到方程, 从而求出边数.

解答： 解： 这个正多边形的边数是 n , 则

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ,$$

解得： $n=6$.

则这个正多边形的边数是六,

故答案为： 六.

点评： 考查了多边形内角和定理, 此题比较简单, 只要结合多边形的内角和公式, 寻求等量关系, 构建方程求解.

13. (3 分) (2015•茂名) 不等式 $x-4 < 0$ 的解集是 $x < 4$.

考点： 解一元一次不等式; 不等式的性质.

专题： 计算题.

分析： 根据不等式的性质移项后即可得到答案.

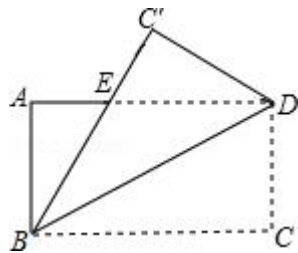
解答： 解： $x-4 < 0$,

移项得： $x < 4$.

故答案为： $x < 4$.

点评： 本题主要考查对不等式的性质，解一元一次不等式等知识点的理解和掌握，能根据不等式的性质正确解一元一次不等式是解此题的关键.

14. (3 分) (2015•茂名) 如图，将矩形 ABCD 沿对角线 BD 折叠，使点 C 与 C' 重合. 若 $AB=3$ ，则 $C'D$ 的长为 3.



考点： 翻折变换（折叠问题）.

分析： 根据矩形的对边相等可得 $CD=AB$ ，再根据翻折变换的性质可得 $C'D=CD$ ，代入数据即可得解.

解答： 解：在矩形 ABCD 中， $CD=AB$ ，

$\because$ 矩形 ABCD 沿对角线 BD 折叠后点 C 和点 C' 重合，

$\therefore C'D=CD$ ，

$\therefore C'D=AB$ ，

$\because AB=3$ ，

$\therefore C'D=3$.

故答案为 3.

点评： 本题考查了矩形的对边相等的性质，翻折变换的性质，是基础题，熟记性质是解题的关键.

15. (3分) (2015•茂名) 为了求 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$ 的值, 可令

$M=1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}$, 则 $3M=3+3^2+3^3+3^4+\dots+3^{101}$, 因此, $3M-M=3^{101}-1$, 所

以 $M=\frac{3^{101}-1}{2}$, 即 $1+3+3^2+3^3+\dots+3^{100}=\frac{3^{101}-1}{2}$, 仿照以上推理计算:

$1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$ 的值是 $\frac{5^{2016}-1}{4}$.

考点: 有理数的乘方.

分析: 根据题目信息, 设 $M=1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$, 求出 $5M$, 然后相减计算即可得解.

解答: 解: 设 $M=1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2015}$,

则 $5M=5+5^2+5^3+5^4+\dots+5^{2016}$,

两式相减得: $4M=5^{2016}-1$,

则 $M=\frac{5^{2016}-1}{4}$.

故答案为 $\frac{5^{2016}-1}{4}$.

点评: 本题考查了有理数的乘方, 读懂题目信息, 理解求和的运算方法是解题的关键.

三、用心做一做 (本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

16. (7分) (2015•茂名) 计算: $(-\frac{1}{3})^{-1}-|-4|+\sqrt{3^2+4^2}+(\sin 30^\circ)^0$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂; 特殊角的三角函数值.

分析: 本题涉及负整数指数幂、零指数幂、特殊角的三角函数值、二次根式化简四个考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答： 解： $(-\frac{1}{3})^{-1} - |-4| + \sqrt{3^2 + 4^2} + (\sin 30^\circ)^0$

$$= -3 - 4 + 5 + 1$$

$$= -1.$$

点评： 本题考查实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型。解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值，熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、二次根式、绝对值等考点的运算。

17. (7 分) (2015•茂名) 设 $y=ax$ ，若代数式 $(x+y)(x-2y)+3y(x+y)$ 化简的结果为 x^2 ，请你求出满足条件的 a 值。

考点： 整式的混合运算；平方根。

分析： 先利用因式分解得到原式 $(x+y)(x-2y)+3y(x+y) = (x+y)^2$ ，再把当 $y=ax$ 代入得到原式 $= (a+1)^2 x^2$ ，所以当 $(a+1)^2=1$ 满足条件，然后解关于 a 的方程即可。

解答： 解： 原式 $= (x+y)(x-2y)+3y(x+y) = (x+y)^2$ ，

当 $y=ax$ ，代入原式得 $(1+a)^2 x^2 = x^2$ ，

即 $(1+a)^2 = 1$ ，

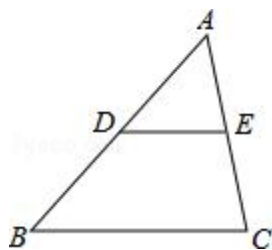
解得： $a = -2$ 或 0 。

点评： 本题考查了因式分解的运用：利用因式分解解决求值问题；利用因式分解解决证明问题；利用因式分解简化计算问题。

18. (7 分) (2015•茂名) 补充完整三角形中位线定理，并加以证明：

(1) 三角形中位线定理：三角形的中位线 平行于第三边，且等于第三边的一半；

(2) 已知：如图， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，求证： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。



考点： 三角形中位线定理.

分析： （1） 根据三角形的中位线定理填写即可；

（2） 延长 DE 到 F， 使 $FE=DE$ ， 连接 CF， 利用“边角边”证明 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 全等， 根据全等三角形对应角相等可得 $\angle A=\angle ECF$ ， 全等三角形对应边相等可得 $AD=CF$ ， 然后求出四边形 BCFD 是平行四边形， 根据平行四边形的性质证明即可.

解答： （1） 解： 三角形中位线定理： 三角形的中位线平行于第三边， 且等于第三边的一半；

故答案为： 平行于第三边， 且等于第三边的一半；

（2） 证明： 如图， 延长 DE 到 F， 使 $FE=DE$ ， 连接 CF，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中，
$$\begin{cases} AE=EC \\ \angle AED=\angle CEF, \\ DE=EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$ (SAS),

$\therefore \angle A=\angle ECF$, $AD=CF$,

$\therefore CF \parallel AB$,

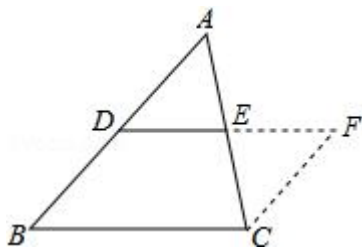
又 $\because AD=BD$,

$\therefore CF=BD$,

$\therefore$ 四边形 BCFD 是平行四边形,

$\therefore DF \parallel BC$, $DF=BC$,

$\therefore DE \parallel BC$, $DE=\frac{1}{2}BC$.

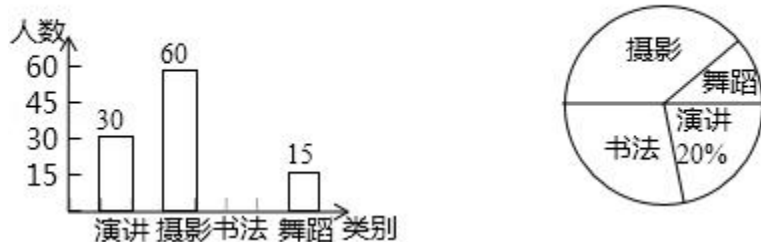


点评： 本题考查了三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半，熟记定理是解题的关键，难点在于作辅助线构造出全等三角形和平行四边形.

四、沉着冷静，缜密思考（本大题共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分）

19. (7 分) (2015•茂名) 某校为了丰富学生的第二课堂，对学生参与演讲、舞蹈、书法和摄影活动的兴趣情况进行调查，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查（每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中最感兴趣的一项），对调查结果进行统计后，绘制了如下两个统计图：

对第二课堂最感兴趣条形统计图 对第二课堂最感兴趣扇形统计图



(1) 此次调查抽取的学生人数 $m = \underline{150}$ 名，其中选择“书法”的学生占抽样人数的百分比 $n = \underline{30\%}$ ；

(2) 若该校有 3000 名学生，请根据以上数据估计该校对“书法”最感兴趣的学生人数.

考点： 条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析： (1) 利用扇形统计图和条形统计图得出参与演讲的人数和所占百分比，进而求出总人数，再求出参加书法的人数，进而求出占抽样人数的百分比；

(2) 利用 (1) 中所求得出该校对“书法”最感兴趣的学生人数.

解答： 解：(1) 由题意可得：此次调查抽取的学生人数 $m = 30 \div 20\% = 150$,

选择“书法”的学生占抽样人数的百分比 $n = (150 - 30 - 60 - 15) \div 150 \times 100\% = 30\%$;

故答案为：150，30%；

(2) 由 (1) 得： $3000 \times 30\% = 900$ (名)，

答：该校对“书法”最感兴趣的学生人数为 900 名.

点评： 此题主要考查了条形统计图与扇形统计图的综合应用，根据已知图形得出正确信息是解题关键.

20. (7 分) (2015•茂名) 在一个不透明的袋中装有 2 个黄球，3 个黑球和 5 个红球，它们除颜色外其他都相同.

(1) 将袋中的球摇均匀后，求从袋中随机摸出一个球是黄球的概率；

(2) 现在再将若干个红球放入袋中，与原来的 10 个球均匀混合在一起，使从袋中随机摸出一个球是红球的概率是 $\frac{2}{3}$ ，请求出后来放入袋中的红球的个数.

考点： 概率公式.

分析： (1) 用黄球的个数除以所有球的个数即可求得概率；

(2) 根据概率公式列出方程求得红球的个数即可.

解答： 解：(1) $\because$ 共 10 个球，有 2 个黄球，

$$\therefore P(\text{黄球}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$

(2) 设有 x 个红球，根据题意得： $\frac{5+x}{10+x} = \frac{2}{3}$,

解得： $x=5$.

故后来放入袋中的红球有 5 个.

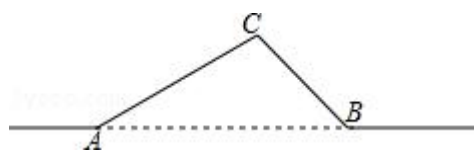
点评： 此题考查了概率公式的应用. 注意用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

五、满怀信心，再接再厉 (本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分)

21. (8分) (2015•茂名) 如图, 一条输电线路从 A 地到 B 地需要经过 C 地, 图中 $AC=20$ 千米, $\angle CAB=30^\circ$, $\angle CBA=45^\circ$, 因线路整改需要, 将从 A 地到 B 地之间铺设一条笔直的输电线路.

(1) 求新铺设的输电线路 AB 的长度; (结果保留根号)

(2) 问整改后从 A 地到 B 地的输电线路比原来缩短了多少千米? (结果保留根号)



考点: 解直角三角形的应用.

专题: 应用题.

分析: (1) 过 C 作 $CD \perp AB$, 交 AB 于点 D, 在直角三角形 ACD 中, 利用锐角三角函数定义求出 CD 与 AD 的长, 在直角三角形 BCD 中, 利用锐角三角函数定义求出 BD 的长, 由 $AD+DB$ 求出 AB 的长即可;

(2) 在直角三角形 BCD 中, 利用勾股定理求出 BC 的长, 由 $AC+CB-AB$ 即可求出输电线路比原来缩短的千米数.

解答: 解: (1) 过 C 作 $CD \perp AB$, 交 AB 于点 D,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD=AC \cdot \sin \angle CAD=20 \times \frac{1}{2}=10$ (千米), $AD=AC \cdot \cos \angle$

$CAD=20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ (千米),

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD=\frac{CD}{\tan \angle CBD}=\frac{10}{1}=10$ (千米),

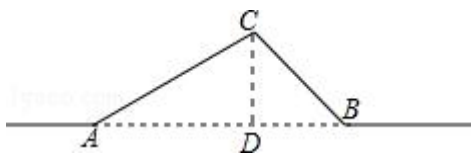
$\therefore AB=AD+DB=10\sqrt{3}+10=10(\sqrt{3}+1)$ (千米),

则新铺设的输电线路 AB 的长度 $10(\sqrt{3}+1)$ (千米);

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 根据勾股定理得: $BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=10\sqrt{2}$ (千米),

$\therefore AC+CB-AB=20+10\sqrt{2}-(10\sqrt{3}+10)=10(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ (千米),

则整改后从 A 地到 B 地的输电线路比原来缩短了 $10(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ 千米.



点评： 此题考查了解直角三角形的应用，涉及的知识有：锐角三角函数定义，勾股定理，熟练掌握勾股定理是解本题的关键.

22. (8 分) (2015•茂名) 在平面直角坐标系中，我们不妨把纵坐标是横坐标的 2 倍的点称之为“理想点”，例如点 $(-2, -4)$ ， $(1, 2)$ ， $(3, 6)$...都是“理想点”，显然这样的“理想点”有无数个.

(1) 若点 $M(2, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 图象上的“理想点”，求这个反比例函数的表达式；

(2) 函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数， $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点”吗？若存在，请求出“理想点”的坐标；若不存在，请说明理由.

考点： 反比例函数图象上点的坐标特征；一次函数图象上点的坐标特征.

专题： 新定义.

分析： (1) 根据“理想点”，确定 a 的值，即可确定 M 点的坐标，代入反比例函数解析式，即可解答；

(2) 假设函数 $y = 3mx - 1$ (m 为常数， $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点” $(x, 2x)$ ，则有 $3mx - 1 = 2x$ ，整理得： $(3m - 2)x = 1$ ，分两种情况讨论：当 $3m - 2 \neq 0$ ，即 $m \neq \frac{2}{3}$ 时，解得： $x = \frac{1}{3m - 2}$ ，当 $3m - 2 = 0$ ，即 $m = \frac{2}{3}$ 时， x 无解，即可解答.

解答： 解： $\because$ 点 $M(2, a)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 图象上的“理想点”，

$\therefore a = 4$,

$\therefore$ 点 $M(2, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 图象上，

$$\therefore k=2 \times 4=8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y=\frac{8}{x}.$$

(2) 假设函数 $y=3mx-1$ (m 为常数, $m \neq 0$) 的图象上存在“理想点” $(x, 2x)$, 则有 $3mx-1=2x$,

$$\text{整理得: } (3m-2)x=1,$$

$$\text{当 } 3m-2 \neq 0, \text{ 即 } m \neq \frac{2}{3} \text{ 时, 解得: } x=\frac{1}{3m-2},$$

$$\text{当 } 3m-2=0, \text{ 即 } m=\frac{2}{3} \text{ 时, } x \text{ 无解,}$$

综上所述, 当 $m \neq \frac{2}{3}$ 时, 函数图象上存在“理想点”, 为 $(\frac{1}{3m-2}, \frac{2}{3m-2})$;

当 $m=\frac{2}{3}$ 时, 函数图象上不存在“理想点”.

点评: 本题考查了反比例函数图形上点的坐标特征, 解决本题的关键是理解“理想点”的定义, 确定点的坐标.

23. (8 分) (2015•茂名) 某公司生产的某种产品每件成本为 40 元, 经市场调查整理出如下信息:

①该产品 90 天内日销售量 (m 件) 与时间 (第 x 天) 满足一次函数关系, 部分数据如下表:

时间 (第 x 天) 1 3 6 10 ...

日销售量 (m 件) 198 194 188 180 ...

②该产品 90 天内每天的销售价格与时间 (第 x 天) 的关系如下表:

时间 (第 x 天) $1 \leq x < 50$ $50 \leq x \leq 90$

销售价格 (元/件) $x+60$ 100

(1) 求 m 关于 x 的一次函数表达式;

(2) 设销售该产品每天利润为 y 元, 请写出 y 关于 x 的函数表达式, 并求出在 90 天内该产品哪天的销售利润最大? 最大利润是多少? 【提示: 每天销售利润=日销售量 $\times$ (每件销售价格-每件成本)】

(3) 在该产品销售的过程中, 共有多少天销售利润不低于 5400 元, 请直接写出结果.

考点: 二次函数的应用.

分析: (1) 根据待定系数法解出一次函数解析式即可;

(2) 设利润为 y 元, 则当 $1 \leq x < 50$ 时, $y = -2x^2 + 160x + 4000$; 当 $50 \leq x \leq 90$ 时, $y = -120x + 12000$, 分别求出各段上的最大值, 比较即可得到结论;

(3) 直接写出在该产品销售的过程中, 共有 46 天销售利润不低于 5400 元.

解答: 解: (1) $\because m$ 与 x 成一次函数,

$\therefore$ 设 $m = kx + b$, 将 $x=1$, $m=198$, $x=3$, $m=194$ 代入, 得:

$$\begin{cases} k+b=198 \\ 3k+b=194 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k=-2 \\ b=200 \end{cases}.$

所以 m 关于 x 的一次函数表达式为 $m = -2x + 200$;

(2) 设销售该产品每天利润为 y 元, y 关于 x 的函数表达式为:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 160x + 4000 & (1 \leq x < 50) \\ y = -120x + 12000 & (50 \leq x \leq 90) \end{cases},$$

当 $1 \leq x < 50$ 时, $y = -2x^2 + 160x + 4000 = -2(x-40)^2 + 7200$,

$\because -2 < 0$,

$\therefore$ 当 $x=40$ 时, y 有最大值, 最大值是 7200;

当 $50 \leq x \leq 90$ 时, $y = -120x + 12000$,

$\because -120 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 增大而减小, 即当 $x=50$ 时, y 的值最大, 最大值是 6000;

综上所述，当 $x=40$ 时， y 的值最大，最大值是 7200，即在 90 天内该产品第 40 天的销售利润最大，最大利润是 7200 元；

(3) 在该产品销售的过程中，共有 46 天销售利润不低于 5400 元.

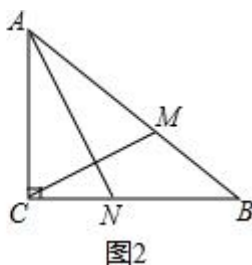
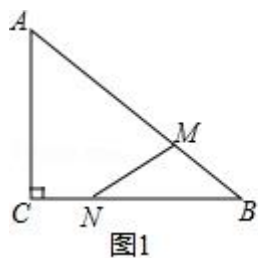
点评： 本题考查分段函数，考查函数的最值，解题的关键是正确写出分段函数的解析式，属于中档题.

六、灵动管理，超越自我（本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

24. (8 分) (2015·茂名) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6\text{cm}$ ， $BC=8\text{cm}$. 动点 M 从点 B 出发，在 BA 边上以每秒 3cm 的速度向定点 A 运动，同时动点 N 从点 C 出发，在 CB 边上以每秒 2cm 的速度向点 B 运动，运动时间为 t 秒 ($0 < t < \frac{10}{3}$)，连接 MN .

(1) 若 $\triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求 t 的值；

(2) 连接 AN ， CM ，若 $AN \perp CM$ ，求 t 的值.



考点： 相似三角形的判定与性质；解直角三角形.

专题： 动点型.

分析： (1) 根据题意得出 BM ， CN ，易得 BN ， BA ，分类讨论当 $\triangle BMN \sim \triangle BAC$ 时，利用相似三角形的性质得 $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$ ，解得 t ；当 $\triangle BMN \sim \triangle BCA$ 时， $\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA}$ ，解得 t ，综上所述， $\triangle BMN$ 与 $\triangle ABC$ 相似，得 t 的值；

(2) 过点 M 作 $MD \perp CB$ 于点 D ，利用锐角三角函数易得 DM ， BD ，由 $BM=3t\text{cm}$ ， $CN=2t\text{cm}$ ，易得 CD ，利用三角形相似的判定定理得 $\triangle CAN \sim \triangle DCM$ ，由三角形相似的性质得 $\frac{AC}{CN} = \frac{CD}{DM}$ ，解得 t .

解答： 解：（1）由题意知， $BM=3t\text{cm}$ ， $CN=2t\text{cm}$ ，

$$\therefore BN = (8 - 2t) \text{ cm}, \quad BA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)},$$

$$\text{当 } \triangle BMN \sim \triangle BAC \text{ 时, } \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC},$$

$$\therefore \frac{3t}{10} = \frac{8-2t}{8}, \quad \text{解得: } t = \frac{20}{11};$$

$$\text{当 } \triangle BMN \sim \triangle BCA \text{ 时, } \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{BA},$$

$$\therefore \frac{3t}{8} = \frac{8-2t}{10}, \quad \text{解得: } t = \frac{32}{23};$$

$$\therefore \triangle BMN \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 相似时, } t \text{ 的值为 } \frac{20}{11} \text{ 或 } \frac{32}{23};$$

（2）过点 M 作 $MD \perp CB$ 于点 D，由题意得：

$$DM = BM \sin B = 3t \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{5}t \text{ (cm)}, \quad BD = BM \cos B = 3t \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{5}t \text{ (cm)},$$

$$BM = 3t\text{cm}, \quad CN = 2t\text{cm},$$

$$\therefore CD = (8 - \frac{12}{5}t) \text{ cm},$$

$$\because AN \perp CM, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAN + \angle ACM = 90^\circ, \quad \angle MCD + \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAN = \angle MCD,$$

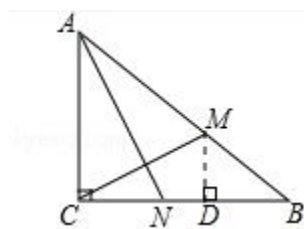
$$\because MD \perp CB,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CAN \sim \triangle DCM,$$

$$\therefore \frac{AC}{CN} = \frac{CD}{DM},$$

$$\therefore \frac{6}{2t} = \frac{8 - \frac{12}{5}t}{\frac{9}{5}t}, \quad \text{解得 } t = \frac{13}{12}.$$



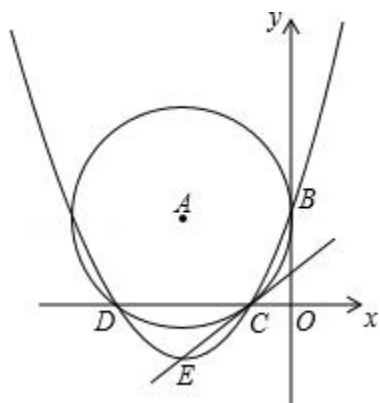
点评： 本题主要考查了动点问题，相似三角形的判定及性质等，分类讨论，数形结合是解答此题的关键.

25. (8 分) (2015•茂名) 如图，在平面直角坐标系中， $\odot A$ 与 x 轴相交于 $C(-2, 0)$ ， $D(-8, 0)$ 两点，与 y 轴相切于点 $B(0, 4)$.

(1) 求经过 B ， C ， D 三点的抛物线的函数表达式；

(2) 设抛物线的顶点为 E ，证明：直线 CE 与 $\odot A$ 相切；

(3) 在 x 轴下方的抛物线上，是否存在一点 F ，使 $\triangle BDF$ 面积最大，最大值是多少？并求出点 F 的坐标.



考点： 二次函数综合题.

分析： (1) 把 $B(0, 4)$ ， $C(-2, 0)$ ， $D(-8, 0)$ 代入二次函数的解析式即可得到结果；

(2) 由 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 4 = \frac{1}{4}(x+5)^2 - \frac{9}{4}$ ，得到顶点坐标 $E(-5, -\frac{9}{4})$ ，求得直线 CE 的函数解析式 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ，在 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 中，令 $x=0$ ， $y = \frac{3}{2}$ ，得到 $G(0, \frac{3}{2})$ ，如图 1，连接 AB ， AC ， AG ，得 $BG = OB - OG = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ ， $CG = \frac{5}{2}$ ，得到 $BG = CG$ ， $AB = AC$ ，

证得 $\triangle ABG \cong \triangle ACG$ ，得到 $\angle ACG = \angle ABG$ ，由于 $\odot A$ 与 y 轴相切于点 $B(0, 4)$ ，于是得到 $\angle ABG = 90^\circ$ ，即可求得结论；

(3) 如图2，连接 BD ， BF ， DF ，设 $F(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4)$ ，过 F 作 $FN \parallel y$ 轴交 BD 于点 N ，求得直线 BD 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 4$ ，得到点 N 的坐标为 $(t, \frac{1}{2}t + 4)$ ，于是得到 $FN = \frac{1}{2}t + 4 - (\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4) = -\frac{1}{4}t^2 - 2t$ ，推出 $S_{\triangle DBF} = S_{\triangle DNF} + S_{\triangle BNF} = \frac{1}{2}OD \cdot FN = \frac{1}{2} \times 8 \times (-\frac{1}{4}t^2 - 2t) = -t^2 - 8t = -(t+4)^2 + 16$ ，即可得到结论。

解答：解：(1) 设抛物线的解析式为： $y = ax^2 + bx + c$ ，

把 $B(0, 4)$ ， $C(-2, 0)$ ， $D(-8, 0)$ 代入得：
$$\begin{cases} 4 = c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ 0 = 64a - 8b + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{2} \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 经过 B ， C ， D 三点的抛物线的函数表达式为： $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 4$ ；

$$(2) \because y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 4 = \frac{1}{4}(x+5)^2 - \frac{9}{4},$$

$$\therefore E(-5, -\frac{9}{4}),$$

设直线 CE 的函数解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\text{直线 } CE \text{ 与 } y \text{ 轴交于点 } G, \text{ 则 } \begin{cases} 0 = -2m + n \\ -\frac{9}{4} = -5m + n \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{在 } y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \text{ 中, 令 } x=0, y = \frac{3}{2},$$

$$\therefore G(0, \frac{3}{2}),$$

如图 1, 连接 AB, AC, AG,

$$\text{则 } BG = OB - OG = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$CG = \sqrt{OC^2 + OG^2} = \sqrt{2^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BG = CG, AB = AC,$$

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ACG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ BG = CG, \\ AG = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ACG,$$

$$\therefore \angle ACG = \angle ABG,$$

$$\because \odot A \text{ 与 } y \text{ 轴相切于点 } B(0, 4),$$

$$\therefore \angle ABG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = \angle ABG = 90^\circ$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 在 } \odot A \text{ 上},$$

$$\therefore \text{直线 } CE \text{ 与 } \odot A \text{ 相切};$$

(3) 存在点 F, 使 $\triangle BDF$ 面积最大,

$$\text{如图 2 连接 } BD, BF, DF, \text{ 设 } F(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4),$$

过 F 作 $FN \parallel y$ 轴交 BD 于点 N,

$$\text{设直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = kx + d, \text{ 则 } \begin{cases} 4 = d \\ 0 = -8k + d \end{cases},$$

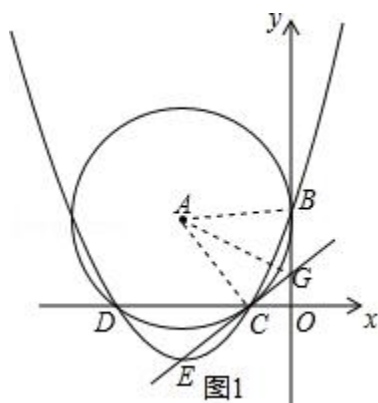
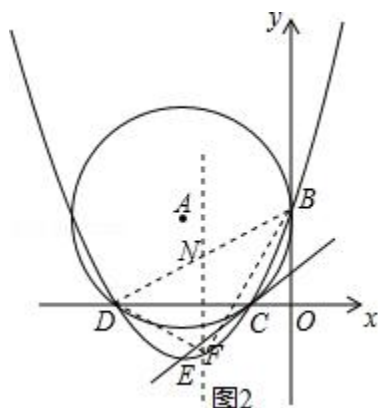
$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ d = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x + 4,$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的坐标为 } (t, \frac{1}{2}t + 4),$$

$$\therefore S_{\Delta DBF} = S_{\Delta DNF} + S_{\Delta BNF} = \frac{1}{2} OD \cdot FN = \frac{1}{2} \times 8 \times \left(-\frac{1}{4}t^2 - 2t \right) = -t^2 - 8t = -(t+4)^2 + 16,$$

当 $t = -4$ 时, $\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + 4 = -2$,

$$\therefore F(-4, -2).$$


点评: 本题考查了待定系数法求函数的解析式, 全等三角形的判定和性质, 切线的判定, 三角形面积的求法, 勾股定理, 根据题意正确的画出图形是解题的关键.