

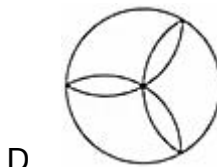
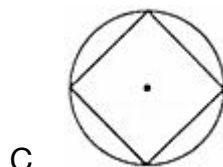
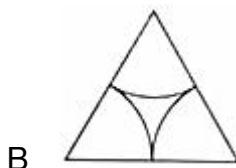
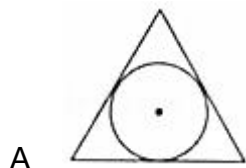
2014 年广东省广州市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

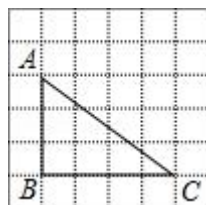
1. (3 分) a ($a \neq 0$) 的相反数是 ()

- A. $-a$ B. a^2 C. $|a|$ D. $\frac{1}{a}$

2. (3 分) 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()



3. (3 分) 如图, 在边长为 1 的小正方形组成的网格中, $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上, 则 $\tan A =$ ()



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

4. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $5ab - ab = 4$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$

C. $a^6 \div a^2 = a^4$

D. $(a^2b)^3 = a^5b^3$

5. (3 分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 2cm 和 3cm, 若 $O_1O_2 = 7$ cm, 则 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的位置关系是 ()

- A. 外离 B. 外切 C. 内切 D. 相交

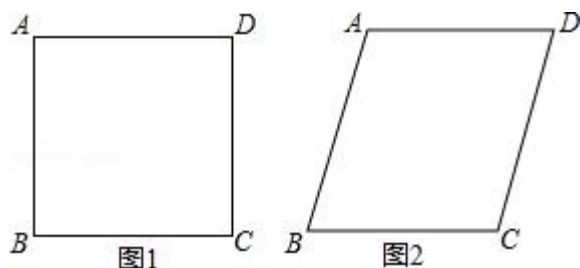
6. (3分) 计算 $\frac{x^2-4}{x-2}$, 结果是 ()

- A. $x-2$ B. $x+2$ C. $\frac{x-4}{2}$ D. $\frac{x+2}{x}$

7. (3分) 在一次科技作品制作比赛中, 某小组八件作品的成绩 (单位: 分) 分别是 7, 10, 9, 8, 7, 9, 9, 8, 对这组数据, 下列说法正确的是 ()

- A. 中位数是 8 B. 众数是 9 C. 平均数是 8 D. 极差是 7

8. (3分) 将四根长度相等的细木条首尾相接, 用钉子钉成四边形 $ABCD$, 转动这个四边形, 使它形状改变, 当 $\angle B=90^\circ$ 时, 如图 1, 测得 $AC=2$, 当 $\angle B=60^\circ$ 时, 如图 2, $AC=$ ()



- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

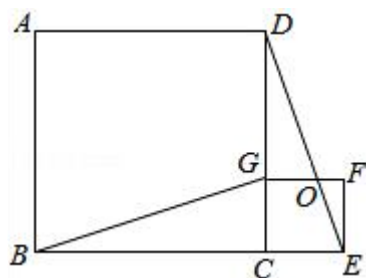
9. (3分) 已知正比例函数 $y=kx$ ($k<0$) 的图象上两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 < x_2$, 则下列不等式中恒成立的是 ()

- A. $y_1+y_2 > 0$ B. $y_1+y_2 < 0$ C. $y_1-y_2 > 0$ D. $y_1-y_2 < 0$

10. (3分) 如图, 四边形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 都是正方形, 点 G 在线段 CD 上, 连接 BG 、 DE , DE 和 FG 相交于点 O , 设 $AB=a$, $CG=b$ ($a>b$). 下列结论:

① $\triangle BCG \cong \triangle DCE$; ② $BG \perp DE$; ③ $\frac{DG}{GC} = \frac{GO}{CE}$; ④ $(a-b)^2 \cdot S_{\triangle EFO} = b^2 \cdot S_{\triangle DGO}$. 其

中结论正确的个数是 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

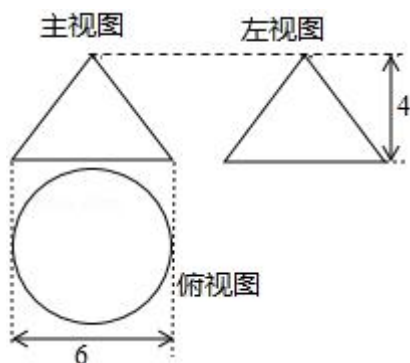
二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

11. (3 分) $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$, 则 $\angle C$ 的外角的度数是_____°.

12. (3 分) 已知 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, 点 P 在 OC 上, $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为点 D 、 E , $PD=10$, 则 PE 的长度为_____.

13. (3 分) 代数式 $\frac{1}{|x|-1}$ 有意义时, x 应满足的条件为_____.

14. (3 分) 一个几何体的三视图如图, 根据图示的数据计算该几何体的全面积为_____. (结果保留 π)



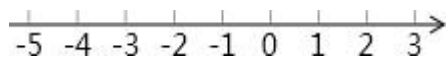
15. (3 分) 已知命题: “如果两个三角形全等, 那么这两个三角形的面积相等.”

写出它的逆命题: _____, 该逆命题是_____命题 (填“真”或“假”).

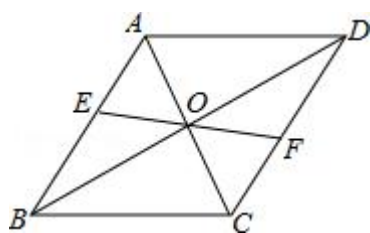
16. (3 分) 若关于 x 的方程 $x^2+2mx+m^2+3m-2=0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 , 则 $x_1(x_2+x_1) + x_2^2$ 的最小值为_____.

三、解答题 (共 9 小题, 满分 102 分)

17. (9 分) 解不等式: $5x - 2 \leq 3x$, 并在数轴上表示解集.



18. (9 分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , EF 过点 O 且与 AB , CD 分别相交于点 E 、 F , 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$.



19. (10 分) 已知多项式 $A = (x+2)^2 + (1-x)(2+x) - 3$.

(1) 化简多项式 A ;

(2) 若 $(x+1)^2 = 6$, 求 A 的值.

20. (10 分) 某校初三 (1) 班 50 名学生需要参加体育“五选一”自选项目测试, 班上学生所报自选项目的情况统计表如下:

自选项目	人数	频率
立定跳远	9	0.18
三级蛙跳	12	a

一分钟跳绳	8	0.16
投掷实心球	b	0.32
推铅球	5	0.10
合计	50	1

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 若将各自选项目的人数所占比例绘制成扇形统计图, 求“一分钟跳绳”对应扇形的圆心角的度数;
- (3) 在选报“推铅球”的学生中, 有 3 名男生, 2 名女生, 为了了解学生的训练效果, 从这 5 名学生中随机抽取两名学生进行推铅球测试, 求所抽取的两名学生中至多有一名女生的概率.

21. (12 分) 已知一次函数 $y=kx-6$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{2k}{x}$ 的图象交于 A、B 两点, 点 A 的横坐标为 2.

- (1) 求 k 的值和点 A 的坐标;
- (2) 判断点 B 所在象限, 并说明理由.

22. (12 分) 从广州到某市, 可乘坐普通列车或高铁, 已知高铁的行驶路程是 400 千米, 普通列车的行驶路程是高铁的行驶路程的 1.3 倍.

(1) 求普通列车的行驶路程;

(2) 若高铁的平均速度 (千米/时) 是普通列车平均速度 (千米/时) 的 2.5 倍, 且乘坐高铁所需时间比乘坐普通列车所需时间缩短 3 小时, 求高铁的平均速度.

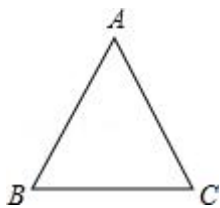
23. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=4\sqrt{5}$, $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 动手操作: 利用尺规作以 AC 为直径的 $\odot O$, 并标出 $\odot O$ 与 AB 的交点 D , 与 BC 的交点 E (保留作图痕迹, 不写作法);

(2) 综合应用: 在你所作的图中,

①求证: $\widehat{DE}=\widehat{CE}$;

②求点 D 到 BC 的距离.



24. (14 分) 已知平面直角坐标系中两定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ ($a \neq 0$) 过点 A 、 B ，顶点为 C ，点 $P(m, n)$ ($n < 0$) 为抛物线上一点.

(1) 求抛物线的解析式和顶点 C 的坐标;

(2) 当 $\angle APB$ 为钝角时，求 m 的取值范围;

(3) 若 $m > \frac{3}{2}$ ，当 $\angle APB$ 为直角时，将该抛物线向左或向右平移 t ($0 < t < \frac{5}{2}$)

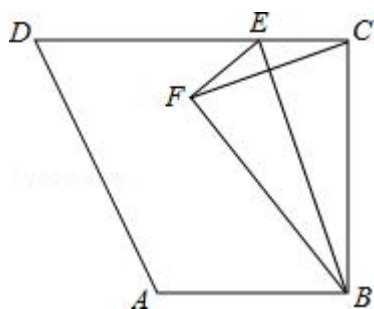
个单位，点 C 、 P 平移后对应的点分别记为 C' 、 P' ，是否存在 t ，使得首位依次连接 A 、 B 、 P' 、 C' 所构成的多边形的周长最短？若存在，求 t 的值并说明抛物线平移的方向；若不存在，请说明理由.

25. (14 分) 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $CD = 5$. 点 E 为线段 CD 上一动点 (不与点 C 重合)， $\triangle BCE$ 关于 BE 的轴对称图形为 $\triangle BFE$ ，连接 CF . 设 $CE = x$ ， $\triangle BCF$ 的面积为 S_1 ， $\triangle CEF$ 的面积为 S_2 .

(1) 当点 F 落在梯形 $ABCD$ 的中位线上时, 求 x 的值;

(2) 试用 x 表示 $\frac{S_2}{S_1}$, 并写出 x 的取值范围;

(3) 当 $\triangle BFE$ 的外接圆与 AD 相切时, 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值.



2014 年广东省广州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) a ($a \neq 0$) 的相反数是 ()

A. $-a$

B. a^2

C. $|a|$

D. $\frac{1}{a}$

【考点】14: 相反数.

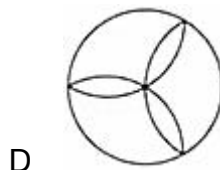
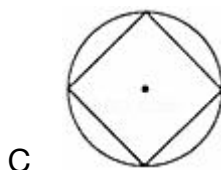
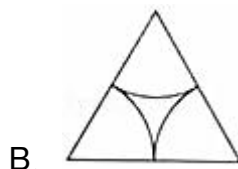
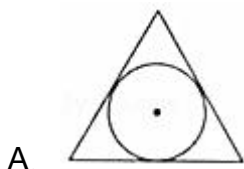
【分析】直接根据相反数的定义求解.

【解答】解: a 的相反数为 $-a$.

故选: A.

【点评】本题考查了相反数: a 的相反数为 $-a$, 正确掌握相反数的定义是解题关键.

2. (3 分) 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()



【考点】R5: 中心对称图形.

【分析】根据中心对称图形的定义逐个判断即可.

【解答】解: A、不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

B、不是中心对称图形, 故本选项不符合题意;

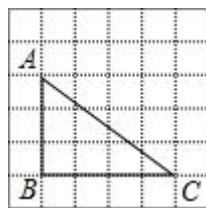
C、是中心对称图形, 故本选项符合题意;

D、不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查了对中心对称图形的定义，能熟知中心对称图形的定义是解此题的关键.

3. (3分) 如图，在边长为1的小正方形组成的网格中， $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上，则 $\tan A =$ ()



A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】24: 网格型.

【分析】在直角 $\triangle ABC$ 中利用正切的定义即可求解.

【解答】解：在直角 $\triangle ABC$ 中， $\because \angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

故选：D.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

4. (3分) 下列运算正确的是 ()

A. $5ab - ab = 4$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$

C. $a^6 \div a^2 = a^4$

D. $(a^2b)^3 = a^5b^3$

【考点】35: 合并同类项；47: 幂的乘方与积的乘方；48: 同底数幂的除法；

6B: 分式的加减法.

【专题】11: 计算题.

【分析】A、原式合并同类项得到结果，即可做出判断；

B、原式通分并利用同分母分式的加法法则计算得到结果，即可做出判断；

C、原式利用同底数幂的除法法则计算得到结果，即可做出判断；

D、原式利用幂的乘方与积的乘方运算法则计算得到结果，即可做出判断.

【解答】解：A、原式 $=4ab$ ，故 A 选项错误；

B、原式 $=\frac{a+b}{ab}$ ，故 B 选项错误；

C、原式 $=a^4$ ，故 C 选项正确；

D、原式 $=a^6b^3$ ，故 D 选项错误.

故选：C.

【点评】此题考查了同底数幂的乘除法，合并同类项，以及完全平方公式，熟练掌握公式及法则是解本题的关键.

5. (3 分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 2cm 和 3cm，若 $O_1O_2=7cm$ ，则 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的位置关系是 ()

A. 外离

B. 外切

C. 内切

D. 相交

【考点】MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】由 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 3cm、2cm，且圆心距 $O_1O_2=7cm$ ，根据两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R ， r 的数量关系间的联系即可得出两圆位置关系.

【解答】解： $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 3cm、2cm，且圆心距 $O_1O_2=7cm$ ，

又 $\because 3+2 < 7$ ，

$\therefore$ 两圆的位置关系是外离.

故选：A.

【点评】此题考查了圆与圆的位置关系. 解题的关键是掌握两圆位置关系与圆心

距 d ，两圆半径 R, r 的数量关系间的联系.

6. (3分) 计算 $\frac{x^2-4}{x-2}$, 结果是 ()

- A. $x-2$ B. $x+2$ C. $\frac{x-4}{2}$ D. $\frac{x+2}{x}$

【考点】53: 因式分解 – 提公因式法; 66: 约分.

【专题】11: 计算题; 44: 因式分解.

【分析】首先利用平方差公式分解分子, 再约去分子分母中得公因式.

【解答】解: $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$,

故选: B.

【点评】此题主要考查了约分, 关键是正确把分子分解因式.

7. (3分) 在一次科技作品制作比赛中, 某小组八件作品的成绩 (单位: 分) 分别是 7, 10, 9, 8, 7, 9, 9, 8, 对这组数据, 下列说法正确的是 ()

- A. 中位数是 8 B. 众数是 9 C. 平均数是 8 D. 极差是 7

【考点】W2: 加权平均数; W4: 中位数; W5: 众数; W6: 极差.

【专题】11: 计算题.

【分析】由题意可知: 总数个数是偶数的, 按从小到大的顺序, 取中间两个数的平均数为中位数, 则中位数为 8.5; 一组数据中, 出现次数最多的数就叫这组数据的众数, 则这组数据的众数为 9; 这组数据的平均数 = $(7+10+9+8+7+9+9+8) \div 8 = 8.375$; 一组数据中最大数据与最小数据的差为极差, 据此求出极差为 3.

【解答】解: A、按从小到大排列为: 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 中位数是:

$(8+9) \div 2 = 8.5$, 故 A 选项错误;

B、9 出现了 3 次, 次数最多, 所以众数是 9, 故 B 选项正确;

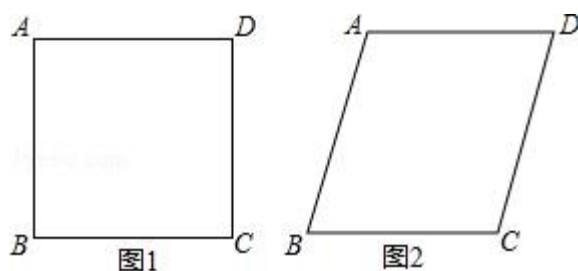
C、平均数 = $(7+10+9+8+7+9+9+8) \div 8 = 8.375$, 故 C 选项错误;

D、极差是： $10 - 7 = 3$ ，故 D 选项错误.

故选： B.

【点评】考查了中位数、众数、平均数与极差的概念，是基础题，熟记定义是解决本题的关键.

8. (3 分) 将四根长度相等的细木条首尾相接，用钉子钉成四边形 $ABCD$ ，转动这个四边形，使它形状改变，当 $\angle B = 90^\circ$ 时，如图 1，测得 $AC = 2$ ，当 $\angle B = 60^\circ$ 时，如图 2， $AC =$ ()



- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

【考点】 KM：等边三角形的判定与性质； KU：勾股定理的应用； LE：正方形的性质.

【分析】图 1 中根据勾股定理即可求得正方形的边长，图 2 根据有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形即可求得.

【解答】解：如图 1，

$$\because AB = BC = CD = DA, \quad \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

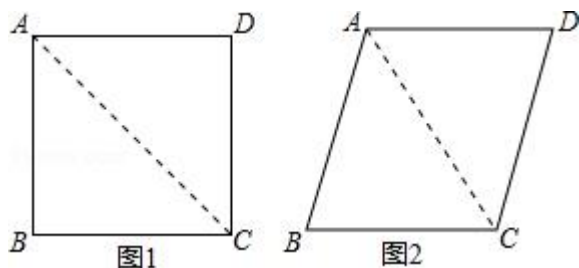
连接 AC ，则 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ，

$$\therefore AB = BC = \sqrt{\frac{1}{2} AC^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 2^2} = \sqrt{2},$$

如图 2， $\angle B = 60^\circ$ ，连接 AC ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AC = AB = BC = \sqrt{2}.$$



【点评】 本题考查了正方形的性质，勾股定理以及等边三角形的判定和性质，利用勾股定理得出正方形的边长是关键.

9. (3 分) 已知正比例函数 $y=kx$ ($k<0$) 的图象上两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则下列不等式中恒成立的是 ()

- A. $y_1+y_2 > 0$ B. $y_1+y_2 < 0$ C. $y_1 - y_2 > 0$ D. $y_1 - y_2 < 0$

【考点】 F4: 正比例函数的图象; F8: 一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 根据 $k < 0$ ，正比例函数的函数值 y 随 x 的增大而减小解答.

【解答】 解: $\because$ 直线 $y=kx$ 的 $k < 0$,

$\therefore$ 函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\because x_1 < x_2$,

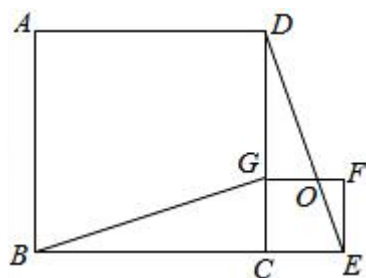
$\therefore y_1 > y_2$,

$\therefore y_1 - y_2 > 0$.

故选: C.

【点评】 本题考查了正比例函数图象上点的坐标特征，主要利用了正比例函数的增减性.

10. (3 分) 如图，四边形 $ABCD$ 、 $CEFG$ 都是正方形，点 G 在线段 CD 上，连接 BG 、 DE ， DE 和 FG 相交于点 O ，设 $AB=a$ ， $CG=b$ ($a > b$)。下列结论：
① $\triangle BCG \cong \triangle DCE$ ；② $BG \perp DE$ ；③ $\frac{DG}{GC} = \frac{GO}{CE}$ ；④ $(a-b)^2 \cdot S_{\triangle EFO} = b^2 \cdot S_{\triangle DGO}$ 。其中结论正确的个数是 ()



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 由四边形 ABCD 和四边形 CEFG 是正方形, 根据正方形的性质, 即可得 $BC=DC$, $CG=CE$, $\angle BCD=\angle ECG=90^\circ$, 则可根据 SAS 证得① $\triangle BCG \cong \triangle DCE$; 然后延长 BG 交 DE 于点 H, 根据全等三角形的对应角相等, 求得 $\angle CDE + \angle DGH = 90^\circ$, 则可得② $BH \perp DE$. 由 $\triangle DGF$ 与 $\triangle DCE$ 相似即可判定③ 错误, 由 $\triangle GOD$ 与 $\triangle FOE$ 相似即可求得④.

【解答】 证明: ① $\because$ 四边形 ABCD 和四边形 CEFG 是正方形,

$$\therefore BC=DC, CG=CE, \angle BCD=\angle ECG=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCG=\angle DCE,$$

在 $\triangle BCG$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} BC=DC \\ \angle BCG=\angle DCE, \\ CG=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE \text{ (SAS)},$$

故①正确;

② 延长 BG 交 DE 于点 H,

$$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore \angle CBG = \angle CDE,$$

$$\text{又} \because \angle CBG + \angle BGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle DGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHG = 90^\circ,$$

$$\therefore BH \perp DE;$$

$$\therefore BG \perp DE.$$

故②正确;

③ $\because$ 四边形 GCEF 是正方形,

$$\therefore GF \parallel CE,$$

$$\therefore \frac{DG}{DC} = \frac{GO}{CE},$$

$$\therefore \frac{DG}{GC} = \frac{GO}{CE} \text{ 是错误的.}$$

故③错误;

④ $\because DC \parallel EF,$

$$\therefore \angle GDO = \angle OEF,$$

$$\because \angle GOD = \angle FOE,$$

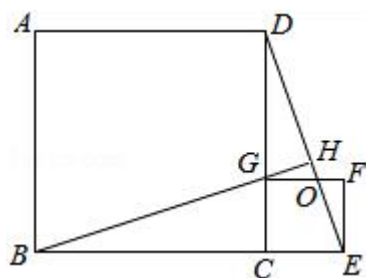
$$\therefore \triangle OGD \sim \triangle OFE,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DGO}}{S_{\triangle EFO}} = \left(\frac{DG}{EF}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{b^2},$$

$$\therefore (a-b)^2 \cdot S_{\triangle EFO} = b^2 \cdot S_{\triangle DGO}.$$

故④正确;

故选: B.



【点评】此题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定和性质，直角三角形的判定和性质.

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

11. (3 分) $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$, 则 $\angle C$ 的外角的度数是 140 $^\circ$.

【考点】K8: 三角形的外角性质.

【分析】根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式计算即可得解.

【解答】解: $\because \angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$,

$\therefore \angle C$ 的外角 $= \angle A + \angle B = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$.

故答案为: 140.

【点评】本题考查了三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质, 熟记性质是解题的关键.

12. (3 分) 已知 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线, 点 P 在 OC 上, $PD \perp OA$, $PE \perp OB$, 垂足分别为点 D 、 E , $PD=10$, 则 PE 的长度为 10.

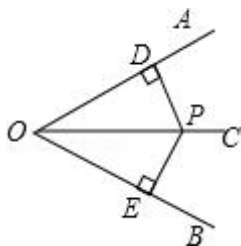
【考点】KF: 角平分线的性质.

【分析】根据角平分线上的点到角的两边距离相等可得 $PE=PD$.

【解答】解: $\because OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线, $PD \perp OA$, $PE \perp OB$,

$\therefore PE=PD=10$.

故答案为: 10.



【点评】本题考查了角平分线上的点到角的两边距离相等的性质，熟记性质是解题的关键，作出图形更形象直观.

13. (3分) 代数式 $\frac{1}{|x|-1}$ 有意义时, x 应满足的条件为 $x \neq \pm 1$.

【考点】62: 分式有意义的条件.

【分析】根据分式有意义, 分母等于 0 列出方程求解即可.

【解答】解: 由题意得, $|x| - 1 \neq 0$,

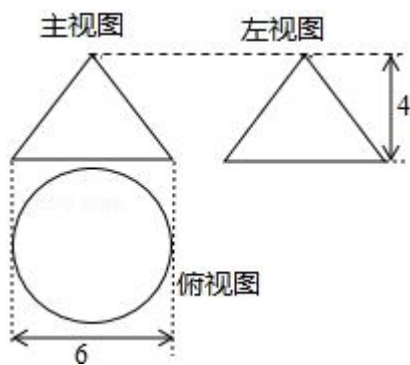
解得 $x \neq \pm 1$.

故答案为: $x \neq \pm 1$.

【点评】本题考查了分式有意义的条件, 从以下三个方面透彻理解分式的概念:

- (1) 分式无意义 $\Leftrightarrow$ 分母为零;
- (2) 分式有意义 $\Leftrightarrow$ 分母不为零;
- (3) 分式值为零 $\Leftrightarrow$ 分子为零且分母不为零.

14. (3分) 一个几何体的三视图如图, 根据图示的数据计算该几何体的全面积为 24π . (结果保留 π)



【考点】MP: 圆锥的计算; U3: 由三视图判断几何体.

【分析】根据圆锥侧面积公式首先求出圆锥的侧面积，再求出底面圆的面积，即可得出表面积.

【解答】解：∵如图所示可知，圆锥的高为 4，底面圆的直径为 6，

∴圆锥的母线为：5，

∴根据圆锥的侧面积公式： $\pi rl = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ ，

底面圆的面积为： $\pi r^2 = 9\pi$ ，

∴该几何体的表面积为 24π .

故答案为： 24π .

【点评】此题主要考查了圆锥侧面积公式，根据已知得母线长，再利用圆锥侧面积公式求出是解决问题的关键.

15. (3 分) 已知命题：“如果两个三角形全等，那么这两个三角形的面积相等.”

写出它的逆命题：如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等，

该逆命题是假命题（填“真”或“假”）.

【考点】O1：命题与定理.

【分析】交换原命题的题设和结论即可得到该命题的逆命题.

【解答】解：“如果两个三角形全等，那么这两个三角形的面积相等.”写成它的逆命题：如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等，该逆命题是假命题，

故答案为：如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形全等；假.

【点评】本题考查逆命题的概念，以及判断真假命题的能力以及全等三角形的判定和性质.

16. (3 分) 若关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ，则 $x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$ 的最小值为 $\frac{5}{4}$.

【考点】AB：根与系数的关系；H7：二次函数的最值.

【专题】16：压轴题；45：判别式法.

【分析】由题意可得 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，然后根据不等式的最小值计算即可得到结论.

【解答】解：由题意知，方程 $x^2 + 2mx + m^2 + 3m - 2 = 0$ 有两个实数根，

$$\text{则 } \Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4(m^2 + 3m - 2) = 8 - 12m \geq 0,$$

$$\therefore m \leq \frac{2}{3},$$

$$\therefore x_1(x_2 + x_1) + x_2^2$$

$$= (x_2 + x_1)^2 - x_1x_2$$

$$= (-2m)^2 - (m^2 + 3m - 2)$$

$$= 3m^2 - 3m + 2$$

$$= 3\left(m^2 - m + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2$$

$$= 3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4};$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, 有最小值 } \frac{5}{4};$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \frac{2}{3},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 成立};$$

$$\therefore \text{最小值为 } \frac{5}{4};$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{4}.$$

【点评】本题考查了一元二次方程根与系数关系，考查了一元二次不等式的最值问题.

总结一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

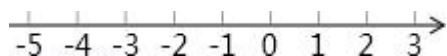
(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

三、解答题 (共 9 小题, 满分 102 分)

17. (9 分) 解不等式: $5x - 2 \leq 3x$, 并在数轴上表示解集.



【考点】C4: 在数轴上表示不等式的解集; C6: 解一元一次不等式.

【分析】移项, 合并同类项, 系数化成 1 即可.

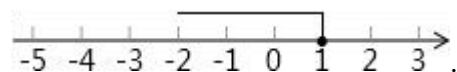
【解答】解: $5x - 2 \leq 3x$,

移项, 得 $5x - 3x \leq 2$,

合并同类项, 得 $2x \leq 2$,

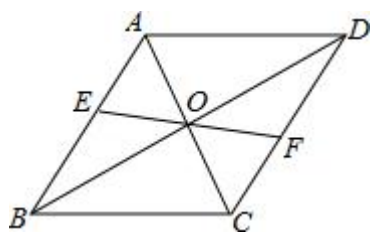
系数化成 1, $x \leq 1$,

在数轴上表示为:



【点评】本题考查了解一元一次不等式, 在数轴上表示不等式的解集的应用, 注意: 解一元一次不等式的步骤是: 去分母, 去括号, 移项, 合并同类项, 系数化成 1.

18. (9 分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , EF 过点 O 且与 AB , CD 分别相交于点 E 、 F , 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$.



【考点】KB: 全等三角形的判定; L5: 平行四边形的性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】根据平行四边形的性质得出 $OA = OC$, $AB \parallel CD$, 推出 $\angle EAO = \angle FCO$, 证出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ 即可.

【解答】 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA=OC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle FCO,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ AO = CO \\ \angle EOA = \angle FOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)}.$$

【点评】 本题考查了平行四边形的性质，平行线的性质，全等三角形的判定的应用，关键是根据平行四边形的性质得出 $AO=CO$.

19. (10 分) 已知多项式 $A = (x+2)^2 + (1-x)(2+x) - 3$.

(1) 化简多项式 A ;

(2) 若 $(x+1)^2=6$ ，求 A 的值.

【考点】 21：平方根；4J：整式的混合运算—化简求值.

【专题】 11：计算题.

【分析】 (1) 先算乘法，再合并同类项即可；

(2) 求出 $x+1$ 的值，再整体代入求出即可.

【解答】 解：(1) $A = (x+2)^2 + (1-x)(2+x) - 3$

$$= x^2 + 4x + 4 + 2 + x - 2x - x^2 - 3$$

$$= 3x + 3;$$

$$(2) \because (x+1)^2 = 6,$$

$$\therefore x+1 = \pm \sqrt{6},$$

$$\therefore A = 3x + 3$$

$$=3(x+1)$$

$$=\pm 3\sqrt{6}.$$

$$\therefore A=\pm 3\sqrt{6}.$$

【点评】 本题考查了整式的混合运算和求值的应用，主要考查学生的化简和计算能力，题目比较好.

20. (10 分) 某校初三 (1) 班 50 名学生需要参加体育“五选一”自选项目测试，班上学生所报自选项目的情况统计表如下:

自选项目	人数	频率
立定跳远	9	0.18
三级蛙跳	12	a
一分钟跳绳	8	0.16
投掷实心球	b	0.32
推铅球	5	0.10
合计	50	1

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 若将各自选项目的人数所占比例绘制成扇形统计图, 求“一分钟跳绳”对应扇形的圆心角的度数;
- (3) 在选报“推铅球”的学生中, 有 3 名男生, 2 名女生, 为了了解学生的训练效果, 从这 5 名学生中随机抽取两名学生进行推铅球测试, 求所抽取的两名学生中至多有一名女生的概率.

【考点】 !6: 简单的枚举法; VB: 扇形统计图; X7: 游戏公平性.

【专题】 27: 图表型.

【分析】 (1) 根据表格求出 a 与 b 的值即可;

(2) 根据表示做出扇形统计图, 求出“一分钟跳绳”对应扇形的圆心角的度数即

可;

(3) 列表得出所有等可能的情况数, 找出抽取的两名学生中至多有一名女生的情况, 即可求出所求概率.

【解答】 解: (1) 根据题意得: $a=1-(0.18+0.16+0.32+0.10)=0.24$;

$$b=\frac{9}{0.18} \times 0.32=16;$$

(2) 作出扇形统计图, 如图所示:



根据题意得: $360^{\circ} \times 0.16=57.6^{\circ}$;

(3) 男生编号为 A、B、C, 女生编号为 D、E,

由枚举法可得: AB、AC、AD、AE、BC、BD、BE、CD、CE、DE 共 10 种,

其中 DE 为女女组合,

$\therefore$ 抽取的两名学生中至多有一名女生的概率为: $\frac{9}{10}$.

【点评】 此题考查了游戏公平性, 扇形统计图, 列表法与树状图法, 弄清题意是解本题的关键.

21. (12 分) 已知一次函数 $y=kx-6$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{2k}{x}$ 的图象交于 A、

B 两点, 点 A 的横坐标为 2.

(1) 求 k 的值和点 A 的坐标;

(2) 判断点 B 所在象限, 并说明理由.

【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 先把 $x=2$ 代入反比例函数解析式得到 $y=-k$, 则 A 点坐标表示为

$(2, -k)$, 再把 A $(2, -k)$ 代入 $y=kx-6$ 可计算出 k , 从而得到 A 点坐标;

(2) 由 (1) 得到一次函数与反比例函数的解析式分别为 $y=2x-6$, $y=-\frac{4}{x}$, 根

据反比例函数与一次函数的交点问题, 解方程组 $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=-\frac{4}{x} \end{cases}$ 即可得到 B 点坐标.

【解答】 解: (1) 把 $x=2$ 代入 $y=-\frac{2k}{x}$,

得: $y=-k$,

把 A $(2, -k)$ 代入 $y=kx-6$,

得: $2k-6=-k$,

解得 $k=2$,

所以一次函数与反比例函数的解析式分别为 $y=2x-6$, $y=-\frac{4}{x}$,

则 A 点坐标为 $(2, -2)$;

(2) B 点在第四象限. 理由如下:

一次函数与反比例函数的解析式分别为 $y=2x-6$, $y=-\frac{4}{x}$,

解方程组 $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=-\frac{4}{x} \end{cases}$,

得: $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$,

所以 B 点坐标为 $(1, -4)$,

所以 B 点在第四象限.

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 反比例函数与一次函数图象的交点坐标满足两函数解析式.

22. (12 分) 从广州到某市, 可乘坐普通列车或高铁, 已知高铁的行驶路程是

400 千米，普通列车的行驶路程是高铁的行驶路程的 1.3 倍.

(1) 求普通列车的行驶路程;

(2) 若高铁的平均速度 (千米/时) 是普通列车平均速度 (千米/时) 的 2.5 倍, 且乘坐高铁所需时间比乘坐普通列车所需时间缩短 3 小时, 求高铁的平均速度.

【考点】 B7: 分式方程的应用.

【专题】 127: 行程问题.

【分析】 (1) 根据高铁的行驶路程是 400 千米和普通列车的行驶路程是高铁的行驶路程的 1.3 倍, 两数相乘即可得出答案;

(2) 设普通列车平均速度是 x 千米/时, 根据高铁所需时间比乘坐普通列车所需时间缩短 3 小时, 列出分式方程, 然后求解即可;

【解答】 解: (1) 根据题意得:

$$400 \times 1.3 = 520 \text{ (千米)},$$

答: 普通列车的行驶路程是 520 千米;

(2) 设普通列车平均速度是 x 千米/时, 则高铁平均速度是 $2.5x$ 千米/时, 根据题意得:

$$\frac{520}{x} - \frac{400}{2.5x} = 3,$$

解得: $x = 120$,

经检验 $x = 120$ 是原方程的解,

则高铁的平均速度是 $120 \times 2.5 = 300$ (千米/时),

答: 高铁的平均速度是 300 千米/时.

【点评】 此题考查了分式方程的应用, 关键是分析题意, 找到合适的数量关系列

出方程，解分式方程时要注意检验.

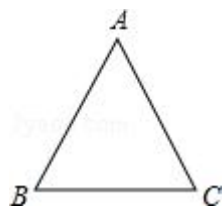
23. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=4\sqrt{5}$, $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 动手操作: 利用尺规作以 AC 为直径的 $\odot O$, 并标出 $\odot O$ 与 AB 的交点 D , 与 BC 的交点 E (保留作图痕迹, 不写作法);

(2) 综合应用: 在你所作的图中,

①求证: $\widehat{DE}=\widehat{CE}$;

②求点 D 到 BC 的距离.



【考点】 KU: 勾股定理的应用; N3: 作图—复杂作图; SA: 相似三角形的应用.

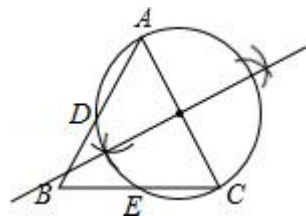
【专题】 13: 作图题; 14: 证明题.

【分析】 (1) 先作出 AC 的中垂线, 再画圆.

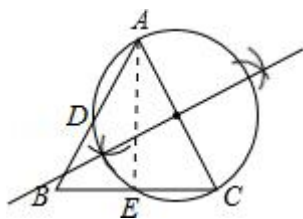
(2) 边接 AE , AE 是 BC 的中垂线, $\angle DAE=\angle CAE$, 得出 $\widehat{DE}=\widehat{CE}$;

(3) 利用 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ 求出 BD , 再利用余弦求出 BM , 用勾股定理求出 DM .

【解答】 解: (1) 如图



(2) 如图, 连接 AE ,



$\because AC$ 为直径,

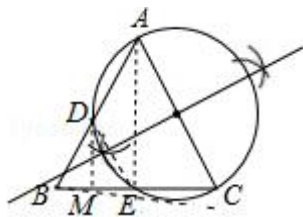
$\therefore \angle AEC = 90^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle DAE = \angle CAE$,

$\therefore \widehat{DE} = \widehat{CE}$;

(3) 如图, 连接 AE , DE , 作 $DM \perp BC$ 交 BC 于点 M ,



$\because AC$ 为直径,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$,

$\because AB = AC = 4\sqrt{5}$, $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore EC = BE = 4$,

$\therefore BC = 8$,

$\because$ 点 A 、 D 、 E 、 C 共圆

$\therefore \angle ADE + \angle C = 180^\circ$,

又 $\because \angle ADE + \angle BDE = 180^\circ$,

$\therefore \angle BDE = \angle C$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA$,

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB}, \text{ 即 } BD \cdot BA = BE \cdot BC$$

$$\therefore BD \times 4\sqrt{5} = 4 \times 8$$

$$\therefore BD = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\therefore \cos \angle C = \cos \angle B = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \frac{BM}{\frac{8\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BM = \frac{8}{5},$$

$$\therefore DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{16}{5}.$$

【点评】 本题主要考查了复杂的作图，相似三角形以及勾股定理的应用，解题的关键是运用 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ 求出线段的长.

24. (14 分) 已知平面直角坐标系中两定点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ ($a \neq 0$) 过点 A 、 B ，顶点为 C ，点 $P(m, n)$ ($n < 0$) 为抛物线上一点.

(1) 求抛物线的解析式和顶点 C 的坐标;

(2) 当 $\angle APB$ 为钝角时，求 m 的取值范围;

(3) 若 $m > \frac{3}{2}$ ，当 $\angle APB$ 为直角时，将该抛物线向左或向右平移 t ($0 < t < \frac{5}{2}$)

个单位，点 C 、 P 平移后对应的点分别记为 C' 、 P' ，是否存在 t ，使得首次依次连接 A 、 B 、 P' 、 C' 所构成的多边形的周长最短？若存在，求 t 的值并说明抛物线平移的方向；若不存在，请说明理由.

【考点】 HF：二次函数综合题.

【专题】 153：代数几何综合题；16：压轴题；41：待定系数法.

【分析】 (1) 待定系数法求解析式即可，求得解析式后转换成顶点式即可.

(2) 因为 AB 为直径，所以当抛物线上的点 P 在 $\odot C$ 的内部时，满足 $\angle APB$ 为

钝角，所以 $-1 < m < 0$ ，或 $3 < m < 4$ 。

(3) 左右平移时，使 $A'D+DB''$ 最短即可，那么作出点 C' 关于 x 轴对称点的坐标为 C'' ，得到直线 $P''C''$ 的解析式，然后把 A 点的坐标代入即可。

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx-2$ ($a \neq 0$) 过点 A, B ,

$$\therefore \begin{cases} a-b-2=0 \\ 16a+4b-2=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

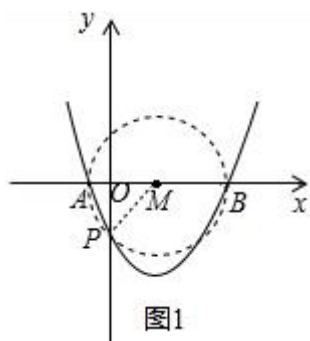
$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2;$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{8},$$

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{8}\right).$$

(2) 如图 1，以 AB 为直径作圆 M ，则抛物线在圆内的部分，能使 $\angle APB$ 为钝角，

$$\therefore M\left(\frac{3}{2}, 0\right), \odot M \text{ 的半径}=\frac{5}{2}.$$



$\therefore P'$ 是抛物线与 y 轴的交点，

$$\therefore OP'=2,$$

$$\therefore MP'=\sqrt{OP'^2+OM^2}=\frac{5}{2},$$

$\therefore P'$ 在 $\odot M$ 上，

$\therefore P'$ 的对称点 $(3, -2)$,

$\therefore$ 当 $-1 < m < 0$ 或 $3 < m < 4$ 时, $\angle APB$ 为钝角.

(3) 方法一:

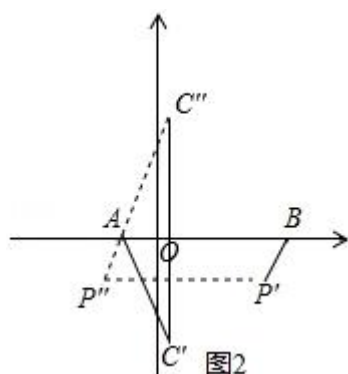
存在;

抛物线向左或向右平移, 因为 AB 、 $P'C'$ 是定值, 所以 A 、 B 、 P' 、 C' 所构成的

多边形的周长最短, 只要 $AC' + BP'$ 最小;

第一种情况: 抛物线向右平移, $AC' + BP' > AC + BP$,

第二种情况: 向左平移, 如图 2 所示, 由 (2) 可知 $P(3, -2)$,



又 $\because C(\frac{3}{2}, -\frac{25}{8})$

$\therefore C'(\frac{3}{2} - t, -\frac{25}{8}), P'(3 - t, -2),$

$\therefore AB = 5,$

$\therefore P''(-2 - t, -2),$

要使 $AC' + BP'$ 最短, 只要 $AC' + AP''$ 最短即可,

点 C' 关于 x 轴的对称点 $C''(\frac{3}{2} - t, \frac{25}{8}),$

设直线 $P''C''$ 的解析式为: $y = kx + b,$

$$\begin{cases} -2 = (-2 - t)k + b \\ \frac{25}{8} = (\frac{3}{2} - t)k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{41}{28} \\ b = \frac{41}{28}t + \frac{13}{14} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } y = \frac{41}{28}x + \frac{41}{28}t + \frac{13}{14},$$

当 P'' 、 A 、 C'' 在一条直线上时，周长最小，

$$\therefore -\frac{41}{28} + \frac{41}{28}t + \frac{13}{14} = 0$$

$$\therefore t = \frac{15}{41}.$$

故将抛物线向左平移 $\frac{15}{41}$ 个单位连接 A 、 B 、 P' 、 C' 所构成的多边形的周长最短.

方法二:

$\therefore AB$ 、 $P'C'$ 是定值，

$\therefore A$ 、 B 、 P' 、 C' 所构成的四边形的周长最短，只需 $AC' + BP'$ 最小，

①若抛物线向左平移，设平移 t 个单位，

$$\therefore C' \left(\frac{3}{2} - t, -\frac{25}{8} \right), P'' (-2 - t, -2),$$

$\therefore$ 四边形 $P''ABP'$ 为平行四边形，

$$\therefore AP'' = BP',$$

$AC' + BP'$ 最短，即 $AC' + AP''$ 最短，

$$C' \text{ 关于 } x \text{ 轴的对称点为 } C'' \left(\frac{3}{2} - t, \frac{25}{8} \right),$$

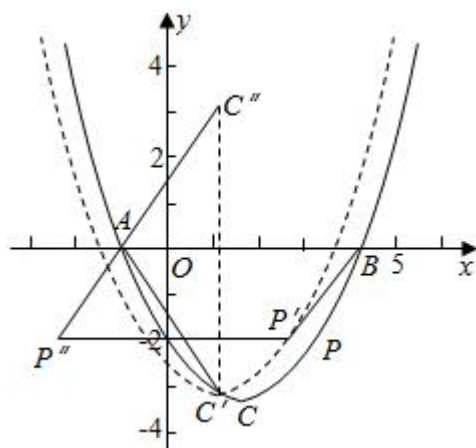
C'' 、 A 、 P'' 三点共线时， $AC' + AP''$ 最短，

$$K_{AC'} = K_{AP''}, \quad \frac{\frac{25}{8}}{\frac{3}{2} - t + 1} = \frac{0 + 2}{-1 + 2 + t},$$

$$\therefore t = \frac{15}{41}.$$

②若抛物线向右平移，同理可得 $t = -\frac{15}{41}$,

$\therefore$ 将抛物线向左平移 $\frac{15}{41}$ 个单位时， A 、 B 、 P' 、 C' 所构成的多边形周长最短.



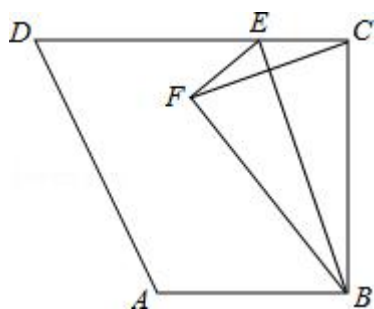
【点评】 本题考查了待定系数法求解析式，顶点坐标，二次函数的对称性，以及距离之和最小的问题，涉及考点较多，有一定的难度.

25. (14 分) 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=3$ ， $BC=4$ ， $CD=5$. 点 E 为线段 CD 上一动点 (不与点 C 重合)， $\triangle BCE$ 关于 BE 的轴对称图形为 $\triangle BFE$ ，连接 CF . 设 $CE=x$ ， $\triangle BCF$ 的面积为 S_1 ， $\triangle CEF$ 的面积为 S_2 .

(1) 当点 F 落在梯形 $ABCD$ 的中位线上时，求 x 的值；

(2) 试用 x 表示 $\frac{S_2}{S_1}$ ，并写出 x 的取值范围；

(3) 当 $\triangle BFE$ 的外接圆与 AD 相切时，求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值.



【考点】 LO: 四边形综合题.

【专题】 152: 几何综合题; 16: 压轴题.

【分析】 (1) 利用梯形中位线的性质，证明 $\triangle BCF$ 是等边三角形；然后解直角

三角形求出 x 的值;

(2) 利用相似三角形 (或射影定理) 求出线段 EG 与 BE 的比, 然后利用 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{EG}{BG}$

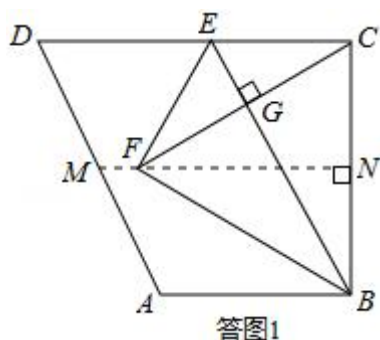
求解;

(3) 依题意作出图形, 当 $\triangle BFE$ 的外接圆与 AD 相切时, 线段 BE 的中点 O 成为圆心. 作辅助线, 如答图 3, 构造一对相似三角形 $\triangle OMP \sim \triangle ADH$, 利用

比例关系列方程求出 x 的值, 进而求出 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值.

【解答】 解: (1) 当点 F 落在梯形 $ABCD$ 中位线上时,

如答图 1, 过点 F 作出梯形中位线 MN , 分别交 AD 、 BC 于点 M 、 N .



由题意, 可知 $ABCD$ 为直角梯形, 则 $MN \perp BC$, 且 $BN = CN = \frac{1}{2}BC$.

由轴对称性质, 可知 $BF = BC$,

$$\therefore BN = \frac{1}{2}BF,$$

$$\therefore \angle BFN = 30^\circ, \therefore \angle FBC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BFC$ 为等边三角形.

$$\therefore CF = BC = 4, \angle FCB = 60^\circ,$$

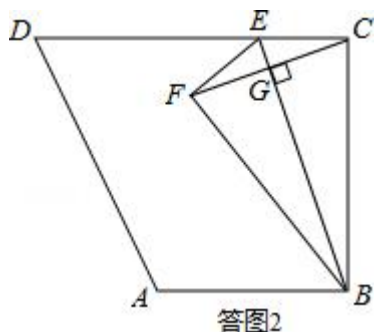
$$\therefore \angle ECF = 30^\circ.$$

设 BE 、 CF 交于点 G , 由轴对称性质可知 $CG = \frac{1}{2}CF = 2$, $CF \perp BE$.

$$\text{在 Rt}\triangle CEG \text{ 中, } x = CE = \frac{CG}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

∴ 当点 F 落在梯形 ABCD 的中位线上时, x 的值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(2) 如答图 2, 由轴对称性质, 可知 $BE \perp CF$.



$$\because \angle GEC + \angle ECG = 90^\circ, \quad \angle GEC + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCE = \angle CBE,$$

$$\text{又} \because \angle CGE = \angle ECB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BCE \sim \text{Rt} \triangle CGE,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{CE}{EG},$$

$$\therefore CE^2 = EG \cdot BE \quad \text{①}$$

$$\text{同理可得: } BC^2 = BG \cdot BE \quad \text{②}$$

$$\text{①} \div \text{②} \text{ 得: } \frac{EG}{BG} = \frac{CE^2}{BC^2} = \frac{x^2}{16}.$$

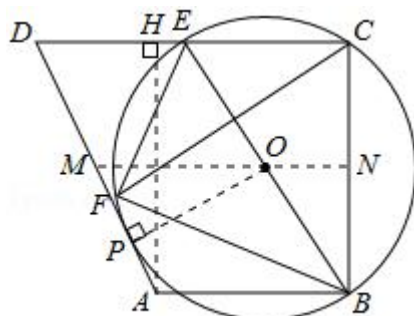
$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{\frac{1}{2}CF \cdot EG}{\frac{1}{2}CF \cdot BG} = \frac{EG}{BG} = \frac{x^2}{16}.$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{16} \quad (0 < x \leq 5).$$

(3) 当 $\triangle BFE$ 的外接圆与 AD 相切时, 依题意画出图形, 如答图 3 所示.

$$\text{设圆心为 } O, \text{ 半径为 } r, \text{ 则 } r = \frac{1}{2}BE = \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2}.$$

设切点为 P, 连接 OP, 则 $OP \perp AD$, $OP=r=\frac{\sqrt{x^2+16}}{2}$.



答图3

过点 O 作梯形中位线 MN, 分别交 AD、BC 于点 M、N,

则 OM 为梯形 ABED 的中位线, $\therefore OM = \frac{1}{2} (AB+DE) = \frac{1}{2} (3+5-x) = \frac{1}{2} (8-x)$.

过点 A 作 $AH \perp CD$ 于点 H, 则四边形 ABCH 为矩形,

$\therefore AH=BC=4$, $CH=AB=3$, $\therefore DH=CD-CH=2$.

在 $Rt\triangle ADH$ 中, 由勾股定理得: $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

$\therefore MN \parallel CD$,

$\therefore \angle ADH = \angle OMP$, 又 $\because \angle AHD = \angle OPM = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OMP \sim \triangle ADH$,

$$\therefore \frac{OM}{AD} = \frac{OP}{AH}, \text{ 即 } \frac{\frac{1}{2}(8-x)}{2\sqrt{5}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+16}}{2}}{4},$$

化简得: $16-2x = \sqrt{5x^2+80}$,

两边平方后, 整理得: $x^2+64x-176=0$,

解得: $x_1 = -32+20\sqrt{3}$, $x_2 = -32-20\sqrt{3}$ (舍去)

$\therefore 0 < -32+20\sqrt{3} < 5$

$\therefore x = -32+20\sqrt{3}$ 符合题意,

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{16} = 139 - 80\sqrt{3}.$$

【点评】 本题是几何综合题，考查了直角梯形、相似、勾股定理、等边三角形、矩形、中位线、圆的切线、解方程、解直角三角形等知识点，考查了轴对称变换与动点型问题，涉及考点较多，有一定的难度.