

2012 年广州市中考数学试卷（解析版）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的）

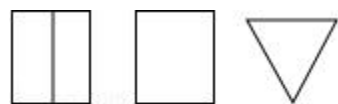
1. (2012•广州) 实数 3 的倒数是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3

2. (2012•广州) 将二次函数 $y=x^2$ 的图象向下平移一个单位，则平移以后的二次函数的解析式为 ()

- A. $y=x^2-1$ B. $y=x^2+1$ C. $y=(x-1)^2$ D. $y=(x+1)^2$

3. (2012•广州) 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体是 ()



主视图 左视图 俯视图

- A. 四棱锥 B. 四棱柱 C. 三棱锥 D. 三棱柱

6. (2012•广州) 已知 $|a-1|+\sqrt{7+b}=0$ ，则 $a+b=$ ()

- A. -8 B. -6 C. 6 D. 8

7. (2012•广州) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=9$ ， $BC=12$ ，则点 C 到 AB 的距离是 ()

- A. $\frac{36}{5}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

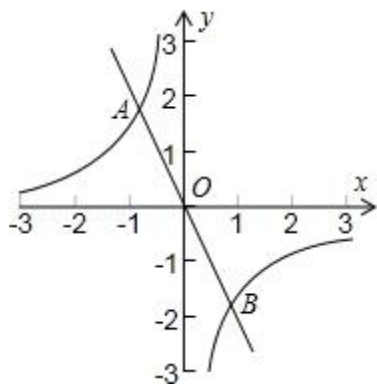
8. (2012•广州) 已知 $a>b$ ，若 c 是任意实数，则下列不等式中总是成立的是 ()

- A. $a+c<b+c$ B. $a-c>b-c$ C. $ac<bc$ D. $ac>bc$

9. (2012•广州) 在平面中，下列命题为真命题的是 ()

- A. 四边相等的四边形是正方形 B. 对角线相等的四边形是菱形 C. 四个角相等的四边形是矩形 D. 对角线互相垂直的四边形是平行四边形

10. (2012•广州) 如图, 正比例函数 $y_1=k_1x$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象交于 A (-1, 2)、B (1, -2) 两点, 若 $y_1 < y_2$, 则 x 的取值范围是 ()



- A. $x < -1$ 或 $x > 1$ B. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ C. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$
D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

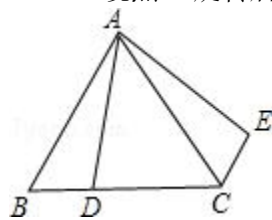
二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

11. (2012•广州) 已知 $\angle ABC=30^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 则 $\angle ABD=$ ____度.

12. (2012•广州) 不等式 $x - 1 \leq 10$ 的解集是_____.

13. (2012•广州) 分解因式: $a^3 - 8a =$ _____

14. (2012•广州) 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB=6$, D 是 BC 上一点, 且 $BC=3BD$, $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$, 则 CE 的长度为_____.



15. (2012•广州) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 值为_____.

16. (2012•广州) 如图, 在标有刻度的直线 l 上, 从点 A 开始,

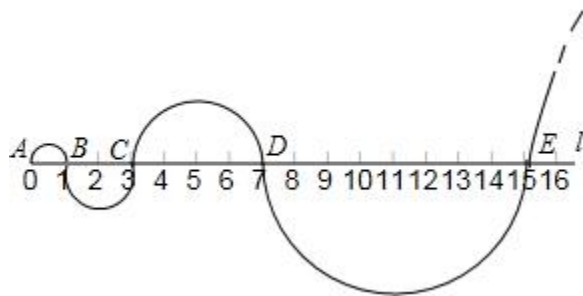
以 $AB=1$ 为直径画半圆, 记为第 1 个半圆;

以 $BC=2$ 为直径画半圆, 记为第 2 个半圆;

以 $CD=4$ 为直径画半圆, 记为第 3 个半圆;

以 $DE=8$ 为直径画半圆, 记为第 4 个半圆,

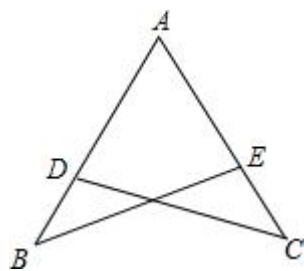
...按此规律, 继续画半圆, 则第 4 个半圆的面积是第 3 个半圆面积的_____倍, 第 n 个半圆的面积为_____ (结果保留 π)



三、解答题（本大题共 9 小题，满分 102 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

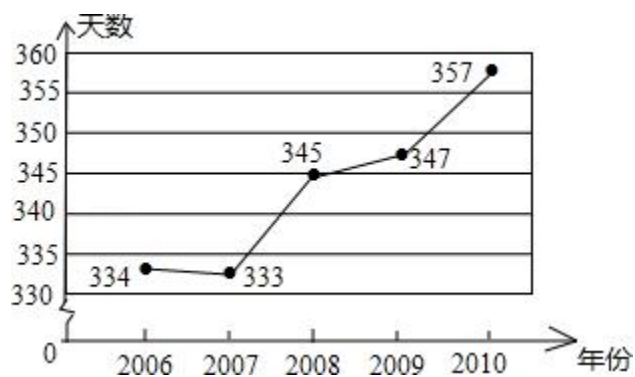
17. (2012•广州) 解方程组
$$\begin{cases} x - y = 8 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$
.

18. (2012•广州) 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，AB=AC， $\angle B = \angle C$. 求证：BE=CD.



19. (2012•广州) 广州市努力改善空气质量，近年来空气质量明显好转，根据广州市环境保护局公布的 2006 - 2010 这五年各年的全年空气质量优良的天数，绘制折线图如图．根据图中信息回答：

- (1) 这五年的全年空气质量优良天数的中位数是____，极差是_____.
- (2) 这五年的全年空气质量优良天数与它前一年相比，增加最多的是____年（填写年份）.
- (3) 求这五年的全年空气质量优良天数的平均数.



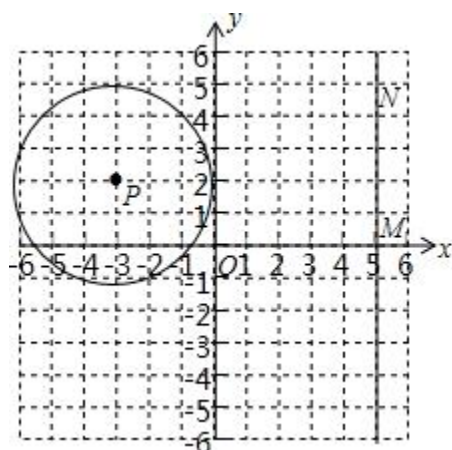
20. (2012•广州) 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{5}$ ($a \neq b$), 求 $\frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}$ 的值.

21. (2012•广州) 甲、乙两个袋中均装有三张除所标数值外完全相同的卡片, 甲袋中的三张卡片上所标有的三个数值为 -7 , -1 , 3 . 乙袋中的三张卡片所标的数值为 -2 , 1 , 6 . 先从甲袋中随机取出一张卡片, 用 x 表示取出的卡片上的数值, 再从乙袋中随机取出一张卡片, 用 y 表示取出卡片上的数值, 把 x 、 y 分别作为点 A 的横坐标和纵坐标.

- (1) 用适当的方法写出点 $A(x, y)$ 的所有情况.
- (2) 求点 A 落在第三象限的概率.

22. (2012•广州) 如图, $\odot P$ 的圆心为 $P(-3, 2)$, 半径为 3 , 直线 MN 过点 $M(5, 0)$ 且平行于 y 轴, 点 N 在点 M 的上方.

- (1) 在图中作出 $\odot P$ 关于 y 轴对称的 $\odot P'$. 根据作图直接写出 $\odot P'$ 与直线 MN 的位置关系.
- (2) 若点 N 在 (1) 中的 $\odot P'$ 上, 求 PN 的长.

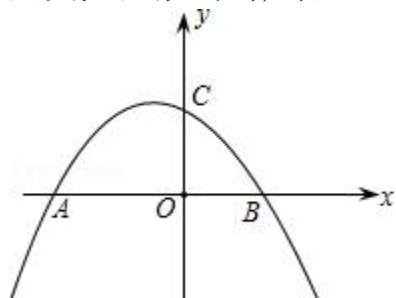


23. (2012•广州) 某城市居民用水实行阶梯收费，每户每月用水量如果未超过 20 吨，按每吨 1.9 元收费．如果超过 20 吨，未超过的部分按每吨 1.9 元收费，超过的部分按每吨 2.8 元收费．设某户每月用水量为 x 吨，应收水费为 y 元．

- (1) 分别写出每月用水量未超过 20 吨和超过 20 吨， y 与 x 间的函数关系式．
- (2) 若该城市某户 5 月份水费平均为每吨 2.2 元，求该户 5 月份用水多少吨？

24. (2012•广州) 如图，抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．

- (1) 求点 A、B 的坐标；
- (2) 设 D 为已知抛物线的对称轴上的任意一点，当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时，求点 D 的坐标；
- (3) 若直线 l 过点 E (4, 0)，M 为直线 l 上的动点，当以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线 l 的解析式．



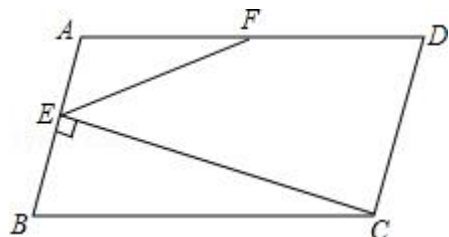
25. (2012•广州) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $BC=10$, F 为 AD 的中点, $CE \perp AB$ 于 E , 设 $\angle ABC = \alpha$ ($60^\circ \leq \alpha < 90^\circ$).

(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 求 CE 的长;

(2) 当 $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时,

① 是否存在正整数 k , 使得 $\angle EFD = k \angle AEF$? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

② 连接 CF , 当 $CE^2 - CF^2$ 取最大值时, 求 $\tan \angle DCF$ 的值.



一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. (2012•广州) 实数 3 的倒数是 ()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3

考点: 实数的性质.

专题: 常规题型.

分析: 根据乘积是 1 的两个数互为倒数解答.

解答: 解: $\because 3 \times \frac{1}{3} = 1$,

$\therefore 3$ 的倒数是 $\frac{1}{3}$.

故选 B.

点评: 本题考查了实数的性质, 熟记倒数的定义是解题的关键.

2. (2012•广州) 将二次函数 $y=x^2$ 的图象向下平移一个单位, 则平移以后的二次函数的解析式为 ()

- A. $y=x^2-1$ B. $y=x^2+1$ C. $y=(x-1)^2$ D. $y=(x+1)^2$

考点: 二次函数图象与几何变换.

专题: 探究型.

分析: 直接根据上加下减的原则进行解答即可.

解答: 解: 由“上加下减”的原则可知, 将二次函数 $y=x^2$ 的图象向下平移一个单位, 则平移以后的二次函数的解析式为: $y=x^2-1$.

故选 A.

点评: 本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

3. (2012•广州) 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体是 ()



主视图 左视图 俯视图

- A. 四棱锥 B. 四棱柱 C. 三棱锥 D. 三棱柱

考点: 由三视图判断几何体.

分析: 主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形.

解答: 解: 由于主视图和左视图为长方形可得此几何体为柱体,

由俯视图为三角形, 可得为棱柱体,

所以这个几何体是三棱柱;

故选 D.

点评: 本题考查了由三视图来判断几何体, 还考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力, 同时也体现了对空间想象能力.

4. (2012•广州) 下面的计算正确的是 ()

- A. $6a - 5a = 1$ B. $a + 2a^2 = 3a^3$ C. $-(a - b) = -a + b$ D. $2(a + b) = 2a + b$

考点: 去括号与添括号; 合并同类项.

分析: 根据合并同类项法则: 把同类项的系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变; 去括号法则: 如果括号外的因数是正数, 去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同; 如果括号外的因数是负数, 去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反, 进行计算, 即可选出答案.

解答: 解: A、 $6a - 5a = a$, 故此选项错误;

B、 a 与 $2a^2$ 不是同类项, 不能合并, 故此选项错误;

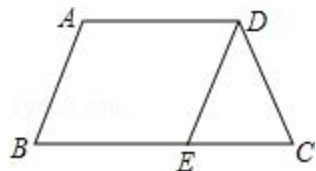
C、 $-(a - b) = -a + b$, 故此选项正确;

D、 $2(a + b) = 2a + 2b$, 故此选项错误;

故选: C.

点评: 此题主要考查了合并同类项, 去括号, 关键是注意去括号时注意符号的变化, 注意乘法分配律的应用, 不要漏乘.

5. (2012•广州) 如图, 在等腰梯形 ABCD 中, $BC \parallel AD$, $AD = 5$, $DC = 4$, $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E, 且 $EC = 3$, 则梯形 ABCD 的周长是 ()



- A. 26 B. 25 C. 21 D. 20

考点: 等腰梯形的性质; 平行四边形的判定与性质.

分析: 由 $BC \parallel AD$, $DE \parallel AB$, 即可得四边形 ABED 是平行四边形, 根据平行四边形的对边相等, 即可求得 BE 的长, 继而求得 BC 的长, 由等腰梯形 ABCD, 可求得 AB 的长, 继而求得梯形 ABCD 的周长.

解答: 解: $\because BC \parallel AD$, $DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 ABED 是平行四边形,

$\therefore BE = AD = 5$,

$\because EC = 3$,

$\therefore BC = BE + EC = 8$,

$\because$ 四边形 ABCD 是等腰梯形,

$\therefore AB = DC = 4$,

$\therefore$ 梯形 ABCD 的周长为: $AB + BC + CD + AD = 4 + 8 + 4 + 5 = 21$.

故选 C.

点评: 此题考查了等腰梯形的性质与平行四边形的判定与性质. 此题比较简单, 注意判定出四边形 ABED 是平行四边形是解此题的关键, 同时注意数形结合思想的应用.

6. (2012•广州) 已知 $|a-1|+\sqrt{7+b}=0$, 则 $a+b=$ ()
 A. -8 B. -6 C. 6 D. 8

考点: 非负数的性质: 算术平方根; 非负数的性质: 绝对值。

专题: 常规题型。

分析: 根据非负数的性质列式求出 a 、 b 的值, 然后代入代数式进行计算即可得解。

解答: 解: 根据题意得, $a-1=0$, $7+b=0$,

解得 $a=1$, $b=-7$,

所以, $a+b=1+(-7)=-6$.

故选 B.

点评: 本题考查了非负数的性质: 几个非负数的和为 0 时, 这几个非负数都为 0.

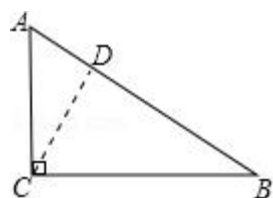
7. (2012•广州) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=9$, $BC=12$, 则点 C 到 AB 的距离是 ()
 A. $\frac{36}{5}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

考点: 勾股定理; 点到直线的距离; 三角形的面积。

专题: 计算题。

分析: 根据题意画出相应的图形, 如图所示, 在直角三角形 ABC 中, 由 AC 及 BC 的长, 利用勾股定理求出 AB 的长, 然后过 C 作 CD 垂直于 AB, 由直角三角形的面积可以由两直角边乘积的一半来求, 也可以由斜边 AB 乘以斜边上的高 CD 除以 2 来求, 两者相等, 将 AC, AB 及 BC 的长代入求出 CD 的长, 即为 C 到 AB 的距离。

解答: 解: 根据题意画出相应的图形, 如图所示:



在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC=9$, $BC=12$,

根据勾股定理得: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=15$,

过 C 作 $CD\perp AB$, 交 AB 于点 D,

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$,

$\therefore CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{9\times 12}{15}=\frac{36}{5}$,

则点 C 到 AB 的距离是 $\frac{36}{5}$.

故选 A

点评: 此题考查了勾股定理, 点到直线的距离, 以及三角形面积的求法, 熟练掌握勾股定理是解本题的关键。

8. (2012•广州) 已知 $a > b$, 若 c 是任意实数, 则下列不等式中总是成立的是 ()

- A. $a+c < b+c$ B. $a-c > b-c$ C. $ac < bc$ D. $ac > bc$

考点: 不等式的性质.

分析: 根据不等式的性质, 分别将个选项分析求解即可求得答案; 注意排除法在解选择题中的应用.

解答: 解: A、 $\because a > b$, c 是任意实数, $\therefore a+c > b+c$, 故本选项错误;

B、 $\because a > b$, c 是任意实数, $\therefore a-c > b-c$, 故本选项正确;

C、当 $a > b$, $c < 0$ 时, $ac < bc$, 而此题 c 是任意实数, 故本选项错误;

D、当 $a > b$, $c > 0$ 时, $ac > bc$, 而此题 c 是任意实数, 故本选项错误.

故选 B.

点评: 此题考查了不等式的性质. 此题比较简单, 注意解此题的关键是掌握不等式的性质:

- (1) 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号的方向不变.
- (2) 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向不变.
- (3) 不等式两边乘 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向改变.

9. (2012•广州) 在平面中, 下列命题为真命题的是 ()

- A. 四边相等的四边形是正方形 B. 对角线相等的四边形是菱形 C. 四个角相等的四边形是矩形 D. 对角线互相垂直的四边形是平行四边形

考点: 正方形的判定; 平行四边形的判定; 菱形的判定; 矩形的判定; 命题与定理.

分析: 分析是否为真命题, 需要分别分析各题设是否能推出结论, 从而利用排除法得出答案, 不是真命题的可以举出反例.

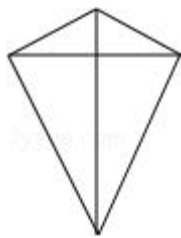
解答: 解: A、四边相等的四边形不一定是正方形, 例如菱形, 故此选项错误;

B、对角线相等的四边形不是菱形, 例如矩形, 等腰梯形, 故此选项错误;

C、四个角相等的四边形是矩形, 故此选项正确;

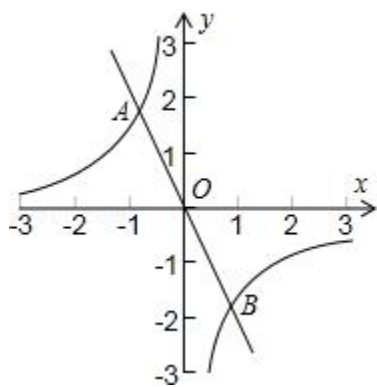
D、对角线互相垂直的四边形不一定是平行四边形, 如右图所示, 故此选项错误.

故选: C.



点评: 此题主要考查命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

10. (2012•广州) 如图, 正比例函数 $y_1 = k_1x$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ 的图象交于 A (-1, 2)、B (1, -2) 两点, 若 $y_1 < y_2$, 则 x 的取值范围是 ()



- A. $x < -1$ 或 $x > 1$ B. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ C. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$ D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

专题: 数形结合.

分析: 根据图象找出直线在双曲线下方的 x 的取值范围即可.

解答: 解: 由图象可得, $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $y_1 < y_2$.

故选 D.

点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 数形结合是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

11. (2012•广州) 已知 $\angle ABC = 30^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 则 $\angle ABD =$ 15 度.

考点: 角平分线的定义.

专题: 常规题型.

分析: 根据角平分线的定义解答.

解答: 解: $\because \angle ABC = 30^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ.$$

故答案为: 15.

点评: 本题考查了角平分线的定义, 熟记定义是解题的关键.

12. (2012•广州) 不等式 $x - 1 \leq 10$ 的解集是 $x \leq 11$.

考点: 解一元一次不等式.

分析: 首先移项, 然后合并同类项即可求解.

解答: 解: 移项, 得: $x \leq 10 + 1$,

则不等式的解集是: $x \leq 11$.

故答案是: $x \leq 11$.

点评: 本题考查了解简单不等式的能力, 解答这类题学生往往在解题时不注意移项要改变符号这一点而出错.

13. (2012•广州) 分解因式: $a^3 - 8a = \underline{a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})}$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

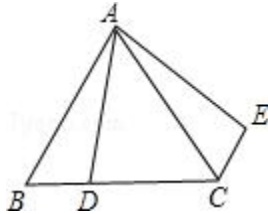
专题: 常规题型.

分析: 先提取公因式 a , 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

解答: 解: $a^3 - 8a$,
 $=a(a^2 - 8)$,
 $=a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$.
故答案为: $a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$.

点评: 本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

14. (2012•广州) 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB=6$, D 是 BC 上一点, 且 $BC=3BD$, $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$, 则 CE 的长度为 2.



考点: 旋转的性质; 等边三角形的性质.

分析: 由在等边三角形 ABC 中, $AB=6$, D 是 BC 上一点, 且 $BC=3BD$, 根据等边三角形的性质, 即可求得 BD 的长, 然后由旋转的性质, 即可求得 CE 的长度.

解答: 解: $\because$ 在等边三角形 ABC 中, $AB=6$,
 $\therefore BC=AB=6$,
 $\because BC=3BD$,
 $\therefore BD=\frac{1}{3}BC=2$,
 $\because \triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$,
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$,
 $\therefore CE=BD=2$.

故答案为: 2.

点评: 此题考查了旋转的性质与等边三角形的性质. 此题难度不大, 注意旋转中的对应关系.

15. (2012•广州) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 值为 3.

考点: 根的判别式.

分析: 因为方程有两个相等的实数根, 则 $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4k = 0$, 解关于 k 的方程即可.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根,
 $\therefore \Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4k = 0$,

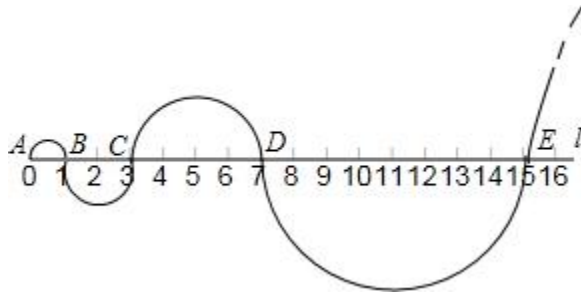
$$\therefore 12 - 4k = 0,$$

解得 $k=3$.

故答案为: 3.

点评: 本题考查了一元二次方程根的判别式, 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

16. (2012•广州) 如图, 在标有刻度的直线 l 上, 从点 A 开始, 以 $AB=1$ 为直径画半圆, 记为第 1 个半圆; 以 $BC=2$ 为直径画半圆, 记为第 2 个半圆; 以 $CD=4$ 为直径画半圆, 记为第 3 个半圆; 以 $DE=8$ 为直径画半圆, 记为第 4 个半圆, ... 按此规律, 继续画半圆, 则第 4 个半圆的面积是第 3 个半圆面积的 4 倍, 第 n 个半圆的面积为 $2^{2n-5}\pi$ (结果保留 π)



考点: 规律型: 图形的变化类.

分析: 根据已知图形得出第 4 个半圆的半径是第 3 个半圆的半径, 进而得出第 4 个半圆的面积与第 3 个半圆面积的关系, 得出第 n 个半圆的半径, 进而得出答案.

解答: 解: $\because$ 以 $AB=1$ 为直径画半圆, 记为第 1 个半圆;

以 $BC=2$ 为直径画半圆, 记为第 2 个半圆;

以 $CD=4$ 为直径画半圆, 记为第 3 个半圆;

以 $DE=8$ 为直径画半圆, 记为第 4 个半圆,

$$\therefore \text{第 4 个半圆的面积为: } \frac{\pi \times 4^2}{2} = 8\pi,$$

$$\text{第 3 个半圆面积为: } \frac{\pi \times 2^2}{2} = 2\pi,$$

$$\therefore \text{第 4 个半圆的面积是第 3 个半圆面积的 } \frac{8\pi}{2\pi} = 4 \text{ 倍;}$$

根据已知可得出第 n 个半圆的直径为: 2^{n-1} ,

$$\text{则第 } n \text{ 个半圆的半径为: } \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2},$$

$$\text{第 } n \text{ 个半圆的面积为: } \frac{\pi \times (2^{n-2})^2}{2} = 2^{2n-5}\pi.$$

故答案为: 4, $2^{2n-5}\pi$.

点评: 此题主要考查了数字变化规律, 注意数字之间变化规律, 根据已知得出第 n 个半圆的直径为: 2^{n-1} 是解题关键.

三、解答题（本大题共 9 小题，满分 102 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (2012•广州) 解方程组 $\begin{cases} x - y = 8 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$.

考点：解二元一次方程组。

专题：计算题。

分析：根据 y 的系数互为相反数，利用加减消元法求解即可．

解答：

$$\text{解：} \begin{cases} x - y = 8 \text{①} \\ 3x + y = 12 \text{②} \end{cases},$$

$$\text{①} + \text{②} \text{得, } 4x = 20,$$

$$\text{解得 } x = 5,$$

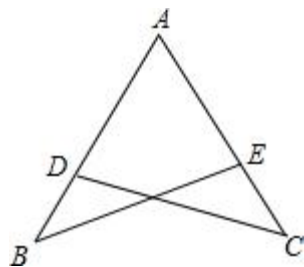
$$\text{把 } x = 5 \text{ 代入①得, } 5 - y = 8,$$

$$\text{解得 } y = -3,$$

$$\text{所以方程组的解是 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}.$$

点评：本题考查了解二元一次方程组，有加减法和代入法两种，根据 y 的系数互为相反数确定选用加减法解二元一次方程组是解题的关键．

18. (2012•广州) 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，AB=AC， $\angle B = \angle C$ ．求证：BE=CD．



考点：全等三角形的判定与性质。

专题：证明题。

分析：已知图形 $\angle A = \angle A$ ，根据 ASA 证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，根据全等三角形的性质即可求出答案．

解答：证明： $\because$ 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ AB = AC \\ \angle B = \angle C \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD,$$

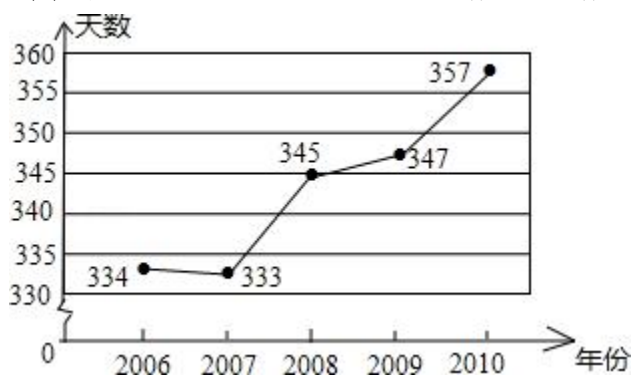
$$\therefore BE = CD.$$

点评：本题考查了全等三角形的性质和判定的应用，全等三角形的判定方法有：SAS，ASA，

AAS, SSS, 用 ASA (还有 $\angle A = \angle A$) 即可证出 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$.

19. (2012•广州) 广州市努力改善空气质量, 近年来空气质量明显好转, 根据广州市环境保护局公布的 2006 – 2010 这五年各年的全年空气质量优良的天数, 绘制折线图如图. 根据图中信息回答:

- (1) 这五年的全年空气质量优良天数的中位数是 345, 极差是 24.
- (2) 这五年的全年空气质量优良天数与它前一年相比, 增加最多的是 2008 年 (填写年份).
- (3) 求这五年的全年空气质量优良天数的平均数.



考点: 折线统计图; 算术平均数; 中位数; 极差.

专题: 图表型.

分析: (1) 把这五年的全年空气质量优良天数按照从小到大排列, 根据中位数的定义解答; 根据极差的定义, 用最大的数减去最小的数即可;
(2) 分别求出相邻两年下一年比前一年多的优良天数, 然后即可得解;
(3) 根据平均数的求解方法列式计算即可得解.

解答: 解: (1) 这五年的全年空气质量优良天数按照从小到大排列如下:

333、334、345、347、357,

所以中位数是 345;

极差是: $357 - 333 = 24$;

(2) 2007 年与 2006 年相比, $333 - 334 = -1$,

2008 年与 2007 年相比, $345 - 333 = 12$,

2009 年与 2008 年相比, $347 - 345 = 2$,

2010 年与 2009 年相比, $357 - 347 = 10$,

所以增加最多的是 2008 年;

(3) 这五年的全年空气质量优良天数的平均数

$$= \frac{334 + 333 + 345 + 347 + 357}{5} = \frac{1716}{5} = 343.2 \text{ 天}.$$

点评: 本题考查了折线统计图, 要理解极差的概念, 中位数的定义, 以及算术平均数的求解方法, 能够根据计算的数据进行综合分析, 熟练掌握对统计图的分析 and 平均数的计算是解题的关键.

20. (2012•广州) 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{5}$ ($a \neq b$), 求 $\frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}$ 的值.

考点: 分式的化简求值; 约分; 通分; 分式的加减法.

专题: 计算题.

分析:

求出 $\frac{a+b}{ab} = \sqrt{5}$, 通分得出 $\frac{a^2}{ab(a-b)} - \frac{b^2}{ab(a-b)}$, 推出 $\frac{a^2 - b^2}{ab(a-b)}$, 化简得

出 $\frac{a+b}{ab}$, 代入求出即可.

解答:

解: $\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{5}$,

$\therefore \frac{a+b}{ab} = \sqrt{5}$,

$\therefore \frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}$,

$= \frac{a^2}{ab(a-b)} - \frac{b^2}{ab(a-b)}$,

$= \frac{a^2 - b^2}{ab(a-b)}$,

$= \frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}$,

$= \frac{a+b}{ab}$,

$= \sqrt{5}$.

点评: 本题考查了通分, 约分, 分式的加减的应用, 能熟练地运用分式的加减法则进行计算是解此题的关键, 用了整体代入的方法 (即把 $\frac{a+b}{ab}$ 当作一个整体进行代入).

21. (2012•广州) 甲、乙两个袋中均装有三张除所标数值外完全相同的卡片, 甲袋中的三张卡片上所标有的三个数值为 -7 , -1 , 3 . 乙袋中的三张卡片所标的数值为 -2 , 1 , 6 . 先从甲袋中随机取出一张卡片, 用 x 表示取出的卡片上的数值, 再从乙袋中随机取出一张卡片, 用 y 表示取出卡片上的数值, 把 x 、 y 分别作为点 A 的横坐标和纵坐标.

(1) 用适当的方法写出点 $A(x, y)$ 的所有情况.

(2) 求点 A 落在第三象限的概率.

考点: 列表法与树状图法; 点的坐标.

分析: (1) 直接利用表格列举即可解答;

(2) 利用(1)中的表格求出点 A 落在第三象限共有两种情况, 再除以点 A 的所有情况即可.

解答: 解: (1) 如下表,

	-7	-1	3
-2	-7, -2	-1, -2	3, -2
1	-7, 1	-1, 1	3, 1
6	-7, 6	-1, 6	3, 6

点 A (x, y) 共 9 种情况;

(2) $\because$ 点 A 落在第三象限共有 (-7, -2) (-1, -2) 两种情况,

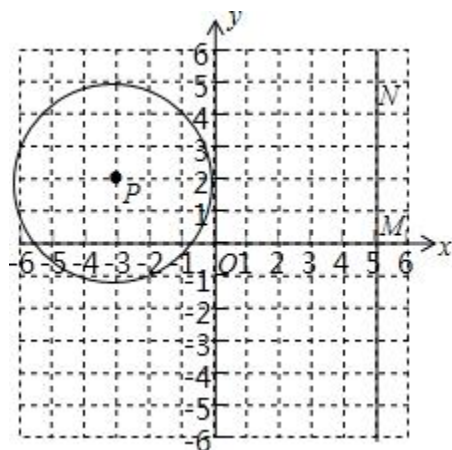
$\therefore$ 点 A 落在第三象限的概率是 $\frac{2}{9}$.

点评: 此题主要考查利用列表法求概率, 关键是列举出事件发生的所有情况, 并通过概率公式进行计算, 属于基础题.

22. (2012•广州) 如图, $\odot P$ 的圆心为 P (-3, 2), 半径为 3, 直线 MN 过点 M (5, 0) 且平行于 y 轴, 点 N 在点 M 的上方.

(1) 在图中作出 $\odot P$ 关于 y 轴对称的 $\odot P'$. 根据作图直接写出 $\odot P'$ 与直线 MN 的位置关系.

(2) 若点 N 在 (1) 中的 $\odot P'$ 上, 求 PN 的长.



考点: 作图-轴对称变换; 直线与圆的位置关系.

专题: 作图题.

分析: (1) 根据关于 y 轴对称的点的横坐标互为相反数, 纵坐标相等找出点 P' 的位置, 然后以 3 为半径画圆即可; 再根据直线与圆的位置关系解答;

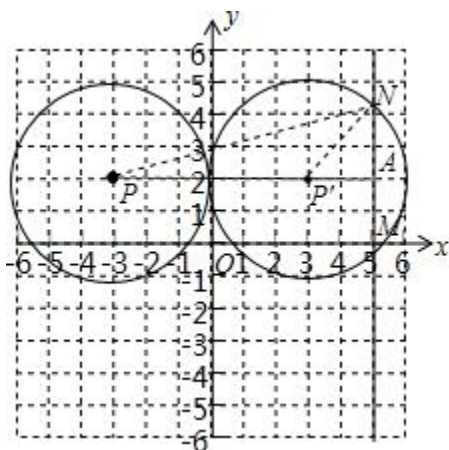
(2) 设直线 PP' 与 MN 相交于点 A, 在 $\text{Rt}\triangle AP'N$ 中, 利用勾股定理求出 AN 的长度, 在 $\text{Rt}\triangle APN$ 中, 利用勾股定理列式计算即可求出 PN 的长度.

解答: 解: (1) 如图所示, $\odot P'$ 即为所求作的圆, $\odot P'$ 与直线 MN 相交;

(2) 设直线 PP' 与 MN 相交于点 A,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AP'N \text{ 中, } AN = \sqrt{P'N^2 - AP'^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle APN \text{ 中, } PN = \sqrt{AP^2 + AN^2} = \sqrt{8^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{69}.$$



点评: 本题考查了利用轴对称变换作图, 直线与圆的位置关系, 勾股定理的应用, 熟练掌握网格结构, 准确找出点 P' 的位置是解题的关键.

23. (2012•广州) 某城市居民用水实行阶梯收费, 每户每月用水量如果未超过 20 吨, 按每吨 1.9 元收费. 如果超过 20 吨, 未超过的部分按每吨 1.9 元收费, 超过的部分按每吨 2.8 元收费. 设某户每月用水量为 x 吨, 应收水费为 y 元.

- (1) 分别写出每月用水量未超过 20 吨和超过 20 吨, y 与 x 间的函数关系式.
- (2) 若该城市某户 5 月份水费平均为每吨 2.2 元, 求该户 5 月份用水多少吨?

考点: 一次函数的应用.

专题: 经济问题.

分析: (1) 未超过 20 吨时, 水费 $y=1.9 \times$ 相应吨数;

超过 20 吨时, 水费 $y=1.9 \times 20 +$ 超过 20 吨的吨数 $\times 2.8$;

(2) 该户的水费超过了 20 吨, 关系式为: $1.9 \times 20 +$ 超过 20 吨的吨数 $\times 2.8 =$ 用水吨数 $\times 2.2$.

解答: 解: (1) 当 $x \leq 20$ 时, $y=1.9x$;

当 $x > 20$ 时, $y=1.9 \times 20 + (x - 20) \times 2.8 = 2.8x - 18$;

(2) $\because$ 5 月份水费平均为每吨 2.2 元, 用水量如果未超过 20 吨, 按每吨 1.9 元收费.
 $\therefore$ 用水量超过了 20 吨.

$2.8x - 18 = 2.2x$,

解得 $x=30$.

答: 该户 5 月份用水 30 吨.

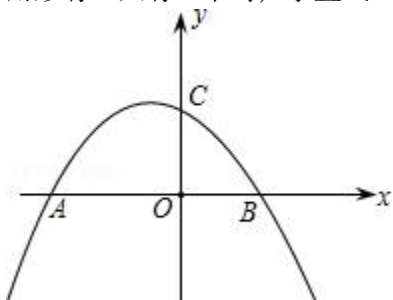
点评: 考查一次函数的应用; 得到用水量超过 20 吨的水费的关系式是解决本题的关键.

24. (2012•广州) 如图, 抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C.

(1) 求点 A、B 的坐标;

(2) 设 D 为已知抛物线的对称轴上的任意一点, 当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时, 求点 D 的坐标;

(3) 若直线 l 过点 $E(4, 0)$, M 为直线 l 上的动点, 当以 A 、 B 、 M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时, 求直线 l 的解析式.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) A 、 B 点为抛物线与 x 轴交点, 令 $y=0$, 解一元二次方程即可求解.

(2) 根据题意求出 $\triangle ACD$ 中 AC 边上的高, 设为 h . 在坐标平面内, 作 AC 的平行线, 平行线之间的距离等于 h . 根据等底等高面积相等的原理, 则平行线与坐标轴的交点即为所求的 D 点.

从一次函数的观点来看, 这样的平行线可以看做是直线 AC 向上或向下平移而形成. 因此先求出直线 AC 的解析式, 再求出平移距离, 即可求得所作平行线的解析式, 从而求得 D 点坐标.

注意: 这样的平行线有两条, 如答图 1 所示.

(3) 本问关键是理解“以 A 、 B 、 M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个”的含义. 因为过 A 、 B 点作 x 轴的垂线, 其与直线 l 的两个交点均可以与 A 、 B 点构成直角三角形, 这样已经有符合题意的两个直角三角形; 第三个直角三角形从直线与圆的位置关系方面考虑, 以 AB 为直径作圆, 当直线与圆相切时, 根据圆周角定理, 切点与 A 、 B 点构成直角三角形. 从而问题得解.

注意: 这样的切线有两条, 如答图 2 所示.

解答: 解: (1) 令 $y=0$, 即 $-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 = 0$,

解得 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$,

$\therefore A$ 、 B 点的坐标为 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$.

$$(2) S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 9,$$

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

设 $\triangle ACD$ 中 AC 边上的高为 h , 则有 $\frac{1}{2}AC \cdot h = 9$, 解得 $h = \frac{18}{5}$.

如答图 1, 在坐标平面内作直线平行于 AC , 且到 AC 的距离 $= h = \frac{18}{5}$, 这样的直线有 2 条, 分别是 l_1 和 l_2 , 则直线与对称轴 $x = -1$ 的两个交点即为所求的点 D .

设 l_1 交 y 轴于 E , 过 C 作 $CF \perp l_1$ 于 F , 则 $CF = h = \frac{18}{5}$,

$$\therefore CE = \frac{CF}{\sin \angle CEF} = \frac{CF}{\sin \angle OCA} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{2}.$$

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$ ，将 A (-4, 0), B (0, 3) 坐标代入，

$$\text{得到} \begin{cases} -4k+b=0 \\ b=3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}, \therefore \text{直线 AC 解析式为 } y=\frac{3}{4}x+3.$$

直线 l_1 可以看做直线 AC 向下平移 CE 长度单位 ($\frac{9}{2}$ 个长度单位) 而形成的，

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的解析式为 } y=\frac{3}{4}x+3-\frac{9}{2}=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}.$$

$$\text{则 } D_1 \text{ 的纵坐标为 } \frac{3}{4} \times (-1) - \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}, \therefore D_1 (-4, -\frac{9}{4}).$$

同理，直线 AC 向上平移 $\frac{9}{2}$ 个长度单位得到 l_2 ，可求得 $D_2 (-1, \frac{27}{4})$

综上所述，D 点坐标为： $D_1 (-4, -\frac{9}{4})$, $D_2 (-1, \frac{27}{4})$.

(3) 如答图 2，以 AB 为直径作 $\odot F$ ，圆心为 F. 过 E 点作 $\odot F$ 的切线，这样的切线有 2 条.

连接 FM，过 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N.

$\because A (-4, 0), B (2, 0), \therefore F (-1, 0), \odot F$ 半径 $FM=FB=3$.

又 $FE=5$ ，则在 $Rt\triangle MEF$ 中，

$$ME = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \sin \angle MFE = \frac{4}{5}, \cos \angle MFE = \frac{3}{5}.$$

$$\text{在 } Rt\triangle FMN \text{ 中, } MN = FM \cdot \sin \angle MFE = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5},$$

$$FN = FM \cdot \cos \angle MFE = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}, \text{ 则 } ON = \frac{4}{5},$$

$$\therefore M \text{ 点坐标为 } (\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$$

直线 l 过 $M (\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$, $E (4, 0)$,

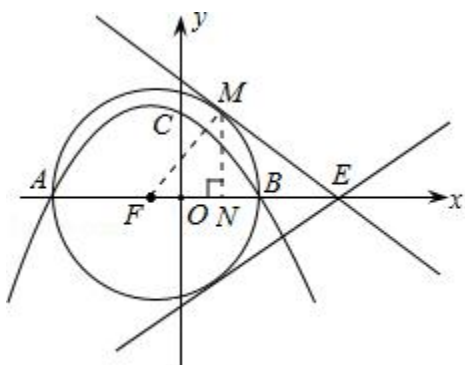
设直线 l 的解析式为 $y=kx+b$ ，则有

$$\begin{cases} \frac{4}{5}k+b=\frac{12}{5} \\ 4k+b=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases},$$

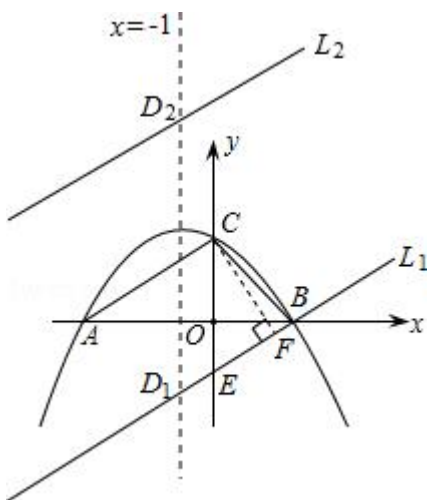
所以直线 l 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x+3$.

同理，可以求得另一条切线的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x-3$.

综上所述，直线 l 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x+3$ 或 $y = -\frac{3}{4}x-3$.



答图2



答图1

点评：本题解题关键是二次函数、一次函数以及圆等知识的综合运用．难点在于第（3）问中对于“以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个”条件的理解，这可以从直线与圆的位置关系方面入手解决．本题难度较大，需要同学们对所学知识融会贯通、灵活运用．

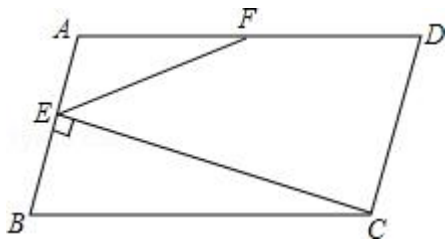
25. (2012•广州) 如图，在平行四边形 ABCD 中，AB=5，BC=10，F 为 AD 的中点，CE⊥AB 于 E，设 $\angle ABC = \alpha$ ($60^\circ \leq \alpha < 90^\circ$)．

(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，求 CE 的长；

(2) 当 $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时，

①是否存在正整数 k，使得 $\angle EFD = k\angle AEF$ ？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由．

②连接 CF，当 $CE^2 - CF^2$ 取最大值时，求 $\tan \angle DCF$ 的值．



考点：平行四边形的性质；二次函数的最值；全等三角形的判定与性质；直角三角形斜边上的中线；勾股定理．

专题：代数几何综合题。

分析：（1）利用 60° 角的正弦值列式计算即可得解；

（2）①连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 G，利用“角边角”证明 $\triangle AFG$ 和 $\triangle CFD$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $CF=GF$ ， $AG=CD$ ，再利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $EF=GF$ ，再根据 AB、BC 的长度可得 $AG=AF$ ，然后利用等边对等角的性质可得 $\angle AEF=\angle G=\angle AFG$ ，根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得 $\angle EFC=2\angle G$ ，然后推出 $\angle EFD=3\angle AEF$ ，从而得解；

②设 $BE=x$ ，在 $Rt\triangle BCE$ 中，利用勾股定理表示出 CE^2 ，表示出 EG 的长度，在 $Rt\triangle CEG$ 中，利用勾股定理表示出 CG^2 ，从而得到 CF^2 ，然后相减并整理，再根据二次函数的最值问题解答。

解答：解：（1） $\because \alpha=60^\circ$ ， $BC=10$ ，

$$\therefore \sin \alpha = \frac{CE}{BC},$$

$$\text{即 } \sin 60^\circ = \frac{CE}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } CE=5\sqrt{3};$$

（2）①存在 $k=3$ ，使得 $\angle EFD=k\angle AEF$ 。

理由如下：连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 G，

$\because F$ 为 AD 的中点，

$\therefore AF=FD$ ，

在平行四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle G=\angle DCF$ ，

在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle CFD$ 中，
$$\begin{cases} \angle G=\angle DCF \\ \angle AFG=\angle DFC \text{ (对顶角相等)} \\ AF=FD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFG \cong \triangle CFD$ (AAS)，

$\therefore CF=GF$ ， $AG=CD$ ，

$\because CE \perp AB$ ，

$\therefore EF=GF$ (直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)，

$\therefore \angle AEF=\angle G$ ，

$\because AB=5$ ， $BC=10$ ，点 F 是 AD 的中点，

$$\therefore AG=5, AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=5,$$

$\therefore AG=AF$ ，

$\therefore \angle AFG=\angle G$ ，

在 $\triangle AFG$ 中， $\angle EFC=\angle AEF+\angle G=2\angle AEF$ ，

又 $\because \angle CFD=\angle AFG$ (对顶角相等)，

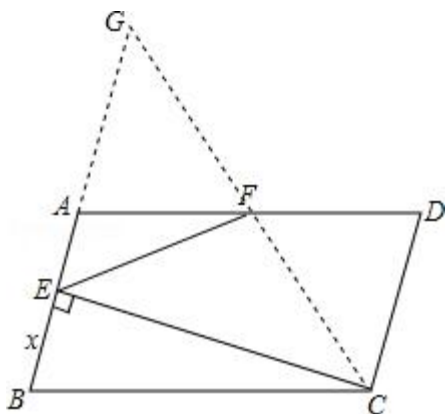
$\therefore \angle CFD=\angle AEF$ ，

$\therefore \angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=2\angle AEF+\angle AEF=3\angle AEF$ ，

因此，存在正整数 $k=3$ ，使得 $\angle EFD=3\angle AEF$ ；

②设 $BE=x$ ， $\because AG=CD=AB=5$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore EG=AE+AG=5-x+5=10-x, \\
&\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } CE^2=BC^2-BE^2=100-x^2, \\
&\text{在 Rt}\triangle CEG \text{ 中, } CG^2=EG^2+CE^2=(10-x)^2+100-x^2=200-20x, \\
&\therefore CF=GF \text{ (①中已证),} \\
&\therefore CF^2=\left(\frac{1}{2}CG\right)^2=\frac{1}{4}CG^2=\frac{1}{4}(200-20x)=50-5x, \\
&\therefore CE^2-CF^2=100-x^2-50+5x=-x^2+5x+50=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+50+\frac{25}{4}, \\
&\therefore \text{当 } x=\frac{5}{2}, \text{ 即点 } E \text{ 是 } AB \text{ 的中点时, } CE^2-CF^2 \text{ 取最大值,} \\
&\text{此时, } EG=10-x=10-\frac{5}{2}=\frac{15}{2}, \\
&CE=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{15}}{2}, \\
&\text{所以, } \tan \angle DCF=\tan \angle G=\frac{CE}{EG}=\frac{\frac{5\sqrt{15}}{2}}{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.
\end{aligned}$$



点评: 本题考查了平行四边形的性质, 全等三角形的判定与性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质, 勾股定理的应用, 二次函数的最值问题, 作出辅助线构造出全等三角形是解题的关键, 另外根据数据的计算求出相等的边长也很重要.

