

# 2009 年广州市初中毕业生学业考试

## 数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共三大题 25 小题，共 4 页，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

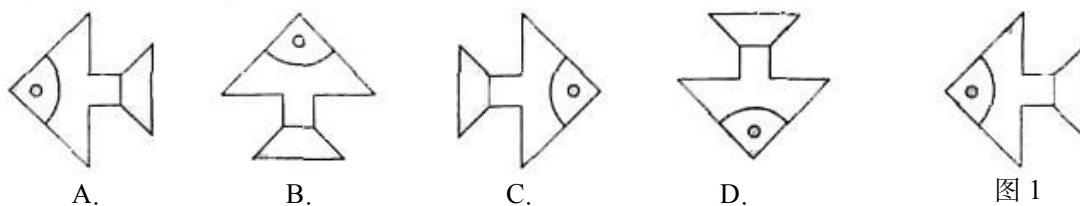
### 注意事项：

1. 答卷前，考生务必在答题卡第 1 面、第 3 面、第 5 面上用黑色字迹的钢笔或签字笔填写自己的考生号、姓名；填写考场试室号、座位号，再用 2B 铅笔把对应这两个号码的标号涂黑。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，涉及作图的题目，用 2B 铅笔画图。答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；改动的答案也不能超出指定的区域。不准使用铅笔、圆珠笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的清洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第一部分 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。)

1. 将图 1 所示的图案通过平移后可以得到的图案是 ( )



2. 如图 2， $AB \parallel CD$ ，直线  $l$  分别与  $AB$ 、 $CD$  相交，若  $\angle 1 = 130^\circ$ ，则  $\angle 2 =$  ( )  
A.  $40^\circ$       B.  $50^\circ$       C.  $130^\circ$       D.  $140^\circ$

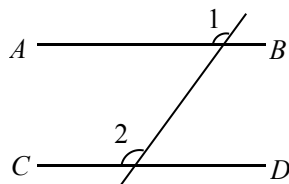


图 2

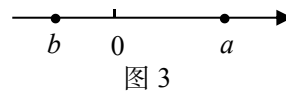


图 3

3. 实数  $a$ 、 $b$  在数轴上的位置如图 3 所示，则  $a$  与  $b$  的大小关系是 ( )  
A.  $a < b$       B.  $a = b$       C.  $a > b$       D. 无法确定
4. 二次函数  $y = (x-1)^2 + 2$  的最小值是 ( )

- A. 2                      B. 1                      C. -1                      D. -2

5. 图 4 是广州市某一天内的气温变化图, 根据图 4 下列说法中错误的是 ( )

- A. 这一天中最高气温是  $24^{\circ}\text{C}$   
 B. 这一天中最高气温与最低气温的差为  $16^{\circ}\text{C}$   
 C. 这一天中 2 时至 14 时之间的气温在逐渐升高  
 D. 这一天中只有 14 时至 24 时之间的气温在逐渐降低

6. 下列运算正确的是 ( )

A.  $(m-n)^2 = m^2 - n^2$                       B.  $m^{-2} = \frac{1}{m^2} (m \neq 0)$

C.  $m^2 \cdot n^2 = (mn)^4$                       D.  $(m^2)^4 = m^6$

7. 下列函数中, 自变量  $x$  的取值范围是  $x \geq 3$  的是 ( )

A.  $y = \frac{1}{x-3}$                       B.  $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$                       C.  $y = x-3$                       D.  $y = \sqrt{x-3}$

8. 只用下列正多边形地砖中的一种, 能够铺满地面的是 ( )

- A. 正十边形                      B. 正八边形                      C. 正六边形                      D. 正五边形

9. 已知圆锥的底面半径为  $5\text{cm}$ , 侧面积为  $65\pi\text{cm}^2$ , 设圆锥的母线与高的夹角为  $\theta$  (如图 5 所示), 则  $\sin \theta$  的值为 ( )

A.  $\frac{5}{12}$                       B.  $\frac{5}{13}$                       C.  $\frac{10}{13}$                       D.  $\frac{12}{13}$

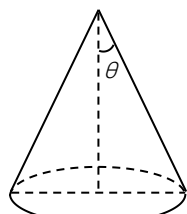


图 5

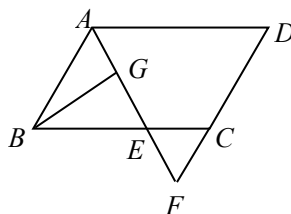


图 6

10. 如图 6, 在  $\square ABCD$  中,  $AB = 6$ ,  $AD = 9$ ,  $\angle BAD$  的平分线交  $BC$  于点  $E$ , 交  $DC$  的延长线于点  $F$ ,  $BG \perp AE$ , 垂足为  $G$ , 若  $BG = 4\sqrt{2}$ , 则  $\triangle CEF$  的周长为 ( )

- A. 8                      B. 9.5                      C. 10                      D. 11.5

## 第二部分 非选择题 (共 120 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分.)

11. 已知函数  $y = \frac{2}{x}$ , 当  $x = 1$  时,  $y$  的值是\_\_\_\_\_.

12. 在某校举行的“艺术节”的文艺演出比赛中, 九位评委给其中一个表演节目现场打出的分数如下: 9.3, 8.9, 9.3, 9.1, 8.9, 8.8, 9.3, 9.5, 9.3, 则这组数据的众数是\_\_\_\_\_.

13. 绝对值是 6 的数是\_\_\_\_\_.

14. 已知命题“如果一个平行四边形的两条对角线互相垂直，那么这个平行四边形是菱形”，写出它的逆命题：\_\_\_\_\_.

15. 如图 7-①，7-②，7-③，7-④，……是用围棋棋子按照某种规律摆成的一行“广”字，按照这种规律，第 5 个“广”字中的棋子个数是\_\_\_\_\_，第  $n$  个“广”字中的棋子个数是\_\_\_\_\_.



图 7-①

图 7-②

图 7-③

图 7-④

16. 如图 8 是由一些相同长方体的积木块搭成的几何体的三视图，则此几何体共由\_\_\_\_\_块长方体的积木块搭成.

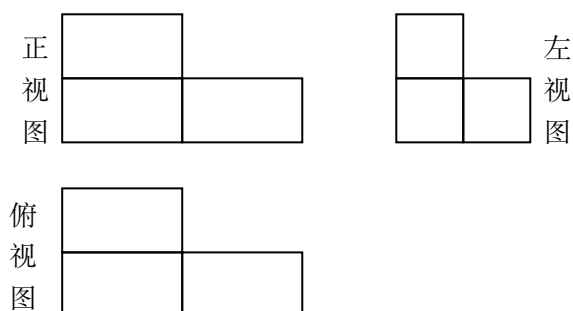


图 8

三、解答题（本大题共 9 小题，满分 102 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. （本小题满分 9 分）

如图 9，在  $\triangle ABC$  中， $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别为边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  的中点.

证明：四边形  $DECF$  是平行四边形.

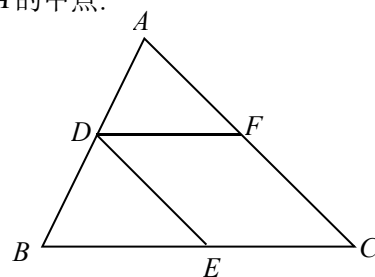


图 9

18. （本小题满分 9 分）

解方程：  $\frac{3}{x} = \frac{2}{x-1}$ .

19. (本小题满分 10 分)

先化简, 再求值:  $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) - a(a - 6)$ , 其中  $a = \sqrt{5} + \frac{1}{2}$ .

20. (本小题满分 10 分)

如图 10, 在  $\odot O$  中,  $\angle ACB = \angle BDC = 60^\circ$ ,  $AC = 2\sqrt{3}\text{cm}$ .

- (1) 求  $\angle BAC$  的度数;
- (2) 求  $\odot O$  的周长.

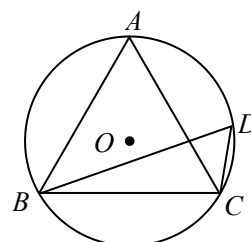


图 10

21. (本小题满分 12 分)

有红、白、蓝三种颜色的小球各一个, 它们除颜色外没有任何其他区别. 现将 3 个小球放入编号为①、②、③的三个盒子里, 规定每个盒子里放一个且只能放一个小球.

- (1) 请用树状图或其它适当的形式列举出 3 个小球放入盒子的所有可能情况;
- (2) 求红球恰好被放入②号盒子的概率.

22. (本小题满分 12 分)

如图 11, 在方格纸上建立平面直角坐标系, 线段  $AB$  的两个端点都在格点上, 直线  $MN$  经过坐标原点, 且点  $M$  的坐标是  $(1, 2)$ .

- (1) 写出点  $A$ 、 $B$  的坐标;
- (2) 求直线  $MN$  所对应的函数关系式;
- (3) 利用尺规作出线段  $AB$  关于直线  $MN$  的对称图形 (保留作图痕迹, 不写作法).

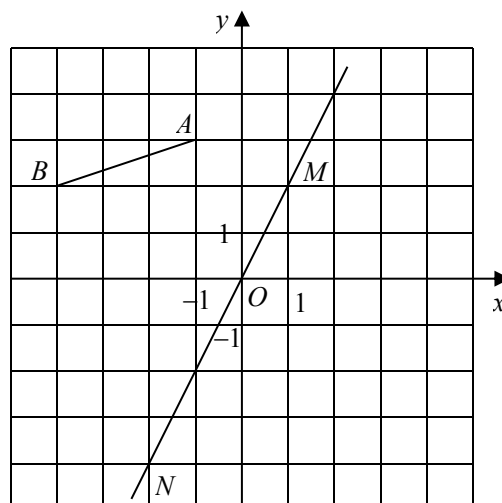


图 11

23. (本小题满分 12 分)

为了拉动内需, 广东启动“家电下乡”活动. 某家电公司销售给农户的 I 型冰箱和 II 型冰箱在启动活动前一个月共售出 960 台, 启动活动后的第一个月销售给农户的 I 型冰箱和 II 型冰箱的销售量分别比启动活动前一个月增长 30%、25%, 这两种型号的冰箱共售出 1228 台.

(1) 在启动活动前一个月, 销售给农户的 I 型冰箱和 II 型冰箱分别为多少台?

(2) 若 I 型冰箱每台价格是 2298 元, II 型冰箱每台价格是 1999 元. 根据“家电下乡”的有关政策, 政府按每台冰箱价格的 13% 给购买冰箱的农户补贴, 问启动活动后的第一个月销售给农户的 1228 台 I 型和 II 型冰箱, 政府共补贴了多少元? (结果保留 2 个有效数字)

24. (本小题满分 14 分)

如图 12, 边长为 1 的正方形  $ABCD$  被两条与边平行的线段  $EF$ 、 $GH$  分割成四个小矩形,  $EF$  与  $GH$  交于点  $P$ .

(1) 若  $AG = AE$ , 证明:  $AF = AH$ ;

(2) 若  $\angle FAH = 45^\circ$ , 证明:  $AG + AE = FH$ ;

(3) 若  $\text{Rt}\triangle GBF$  的周长为 1, 求矩形  $EPHD$  的面积.

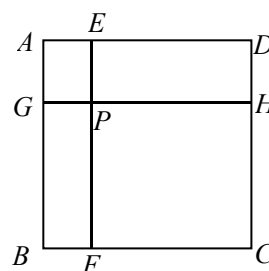


图 12

25. (本小题满分 14 分)

如图 13, 二次函数  $y = x^2 + px + q$  ( $p < 0$ ) 的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴交于点

$C(0, -1)$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{5}{4}$ .

(1) 求该二次函数的关系式;

(2) 过  $y$  轴上的一点  $M(0, m)$  作  $y$  轴的垂线, 若该垂线与  $\triangle ABC$  的外接圆有公共点, 求  $m$  的取值范围;

(3) 在该二次函数的图象上是否存在点  $D$ , 使四边形  $ACBD$  为直角梯形? 若存在, 求出点  $D$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

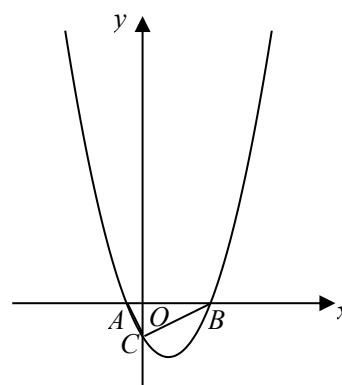


图 13

## 2009 年广州市初中毕业生学业考试

### 数学试题参考答案

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题 3 分，满分 30 分.

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | A | C | C | A | D | B | D | C | B | A  |

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题 3 分，满分 18 分.

11. 2                      12. 9.3                      13.  $\pm 6$

14. 如果一个平行四边形是菱形，那么这个平行四边形的两条对角线互相垂直

15. 15;  $2n+5$                       16. 4

三、解答题：本大题考查基础知识和基本运算，及数学能力，满分 102 分.

17. 本小题主要考查平行四边形的判定、中位线等基础知识，考查几何推理能力和空间观念. 满分 9 分.

证法 1:  $\because D、F$  分别是边  $AB、AC$  的中点,

$\therefore DF \parallel BC$ .

同理  $DE \parallel AC$ .

$\therefore$  四边形  $DECF$  是平行四边形.

证法 2:  $\because D、F$  分别是边  $AB、AC$  的中点,

$\therefore DF \parallel \frac{1}{2}BC$ .

$\because E$  为  $BC$  的中点,

$\therefore EC = \frac{1}{2}BC$ .

$\therefore DF \parallel EC$ .

$\therefore$  四边形  $DECF$  是平行四边形.

18. 本小题主要考查分式方程等基本运算技能，考查基本的代数计算能力. 满分 9 分.

解: 由原方程得  $3(x-1) = 2x$ ,

即  $3x-3 = 2x$ ,

即  $3x-2x = 3$ ,

$\therefore x = 3$ .

检验: 当  $x = 3$  时,  $x-1 = 2 \neq 0$

$\therefore x = 3$  是原方程的根.

19. 本小题主要考查整式的运算、平方差公式等基础知识，考查基本的代数计算能力. 满分 10 分.

解:  $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})-a(a-6)$

$= a^2 - 3 - a(a-6)$

$= a^2 - 3 - a^2 + 6a$

$= 6a - 3$ .

将  $a = \sqrt{5} + \frac{1}{2}$  代入  $6a - 3$ , 得

$$6a - 3 = 6\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right) - 3$$

$$= 6\sqrt{5}.$$

20. 本小题主要考查圆、等边三角形等基础知识, 考查计算能力、推理能力和空间观念. 满分 10 分.

解: (1)  $\because BC = BC$ ,

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC = 60^\circ.$$

$$(2) \because \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形.

求  $O$  的半径给出以下四种方法:

方法 1: 连结  $AO$  并延长交  $BC$  于点  $E$  (如图 1).

$\because \triangle ABC$  是等边三角形,

$\therefore$  圆心  $O$  既是  $\triangle ABC$  的外心又是重心, 还是垂心.

在  $\text{Rt}\triangle AEC$  中  $AC = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ,  $CE = \sqrt{3}\text{cm}$ ,

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = 3\text{cm}.$$

$$\therefore AO = \frac{2}{3}AE = 2\text{cm}, \text{ 即 } O \text{ 的半径为 } 2\text{cm}.$$

方法 2: 连结  $OC$ 、 $OA$ , 作  $OE \perp AC$  交  $AC$  于点  $E$  (如图 2)

$\because OA = OC$ ,  $OE \perp AC$ ,

$$\therefore CE = EA.$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}.$$

$$\because \angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ, OE \perp AC,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle AOE \text{ 中, } \angle AOE = 60^\circ.$$

在  $\text{Rt}\triangle AOE$  中,  $\sin \angle AOE = \frac{AE}{OA}$ ,

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{AE}{OA}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{OA}.$$

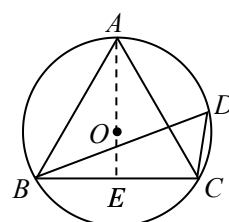
$$\therefore OA = 2\text{cm}, \text{ 即 } O \text{ 的半径为 } 2\text{cm}.$$

方法 3: 连结  $OC$ 、 $OA$ , 作  $OE \perp AC$  交  $AC$  于点  $E$  (如图 2).

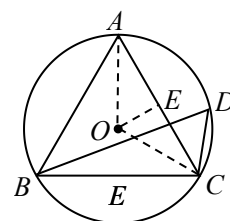
$\because O$  是等边三角形  $ABC$  的外心, 也是  $\triangle ABC$  的角平分线的交点,

$$\therefore \angle OAE = 30^\circ, AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}.$$

在  $\text{Rt}\triangle AEO$  中,  $\cos \angle OAE = \frac{AE}{OA}$ , 即  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{OA}$ .



20 题 (2) 图 1



20 题 (2) 图 2

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{OA}.$$

$\therefore OA = 2\text{cm}$ ，即  $O$  的半径为  $2\text{cm}$ 。

方法 4：连结  $OC$ 、 $OA$ ，作  $OE \perp AC$  交  $AC$  于点  $E$ （如图 2）。

$\therefore O$  是等边三角形的外心，也是  $\triangle ABC$  的角平分线的交点，

$$\therefore \angle OAE = 30^\circ; AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}.$$

在  $\text{Rt}\triangle AEO$  中，设  $OE = x\text{cm}$ ，则  $OA = 2x\text{cm}$ ，

$$\therefore AE^2 + OE^2 = OA^2,$$

$$\therefore (\sqrt{3})^2 + x^2 = (2x)^2.$$

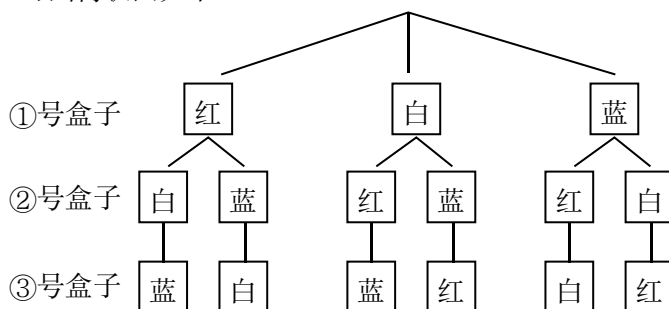
解得  $x = 1$ 。

$\therefore OA = 2\text{cm}$ ，即  $O$  的半径为  $2\text{cm}$ 。

$\therefore O$  的周长为  $2\pi r$ ，即  $4\pi\text{cm}$ 。

**21. 本小题主要考查概率等基本的概念，考查。满分 12 分。**

(1) 解法 1：可画树状图如下：



共 6 种情况。

解法 2：3 个小球分别放入编号为①、②、③的三个盒子的所有可能情况为：红白蓝、红蓝白、白红蓝、白蓝红、蓝红白、蓝白红共 6 种。

(2) 解：从 (1) 可知，红球恰好放入 2 号盒子的可能结果有白红蓝、蓝红白共 2 种，

所以红球恰好放入 2 号盒子的概率  $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

**22. 本小题主要考查图形的坐标、轴对称图形、尺规作图、一次函数等基础知识，考查用待定系数法求函数解析式的基本方法，以及从平面直角坐标系中读图获取有效信息的能力，满分 12 分。**

解：(1)  $A(-1,3)$ ， $B(-4,2)$ ；

(2) 解法 1： $\therefore$  直线  $MN$  经过坐标原点，

$\therefore$  设所求函数的关系式是  $y = kx$ ，

又点  $M$  的坐标为  $(1, 2)$ ，

$$\therefore k = 2.$$

$\therefore$  直线  $MN$  所对应的函数关系式是  $y = 2x$ 。

解法 2: 设所求函数的关系式是  $y = kx + b$

则由题意得:

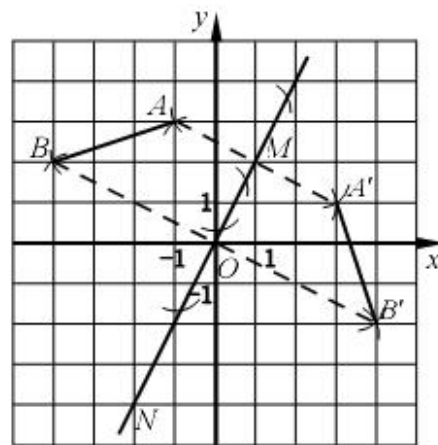
$$\begin{cases} b = 0, \\ k + b = 2. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} k = 2, \\ b = 0. \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $MN$  所对应的函数关系式是  $y = 2x$ .

(3) 利用直尺和圆规, 作线段  $AB$  关于直线  $MN$  的对称图形  $A'B'$ , 如图所示.



**23. 本小题主要考查建立二元一次方程组模型解决简单实际问题的能力, 考查基本的代数计算推理能力. 满分 12 分.**

**解:** (1) 设启动活动前的一个月销售给农户的 I 型冰箱和 II 型冰箱分别为  $x$ ,  $y$  台.

根据题意得 
$$\begin{cases} x + y = 960, \\ x(1 + 30\%) + y(1 + 25\%) = 1228. \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} x = 560, \\ y = 400. \end{cases}$$

$\therefore$  启动活动前的一个月销售给农户的 I 型冰箱和 II 型冰箱分别为 560 台和 400 台.

(2) I 型冰箱政府补贴金额:  $2298 \times 560 \times (1 + 30\%) \times 13\% = 217482.72$  元,

II 型冰箱政府补贴金额:  $1999 \times 400 \times (1 + 25\%) \times 13\% = 129935$  元.

$\therefore$  启动活动后第一个月两种型号的冰箱政府一共补贴金额:

$$217482.72 + 129935 = 347417.72 \approx 3.5 \times 10^5 \text{ 元}.$$

答: 启动活动后第一个月两种型号的冰箱政府一共约补贴农户  $3.5 \times 10^5$  元.

**24. 本小题主要考查正方形、矩形、三角形全等等基础知识, 考查计算能力、推理能力和空间观念. 满分 14 分.**

(1) 证明 1: 在  $\text{Rt}\triangle ADH$  与  $\text{Rt}\triangle ABF$  中,  
 $\because AD = AB, DH = AG = AE = BF,$   
 $\therefore \text{Rt}\triangle ADH \cong \text{Rt}\triangle ABF.$   
 $\therefore AF = AH.$

证明 2: 在  $\text{Rt}\triangle AEF$  中,  $AF^2 = AE^2 + EF^2.$

在  $\text{Rt}\triangle AGH$  中,  $AH^2 = AG^2 + GH^2$

$$\begin{aligned} \because AG = AE, GH = EF, \\ \therefore AF = AH. \end{aligned}$$

(2) 证明 1: 将  $\triangle ADH$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  到  $\triangle ABM$  的位置.

在  $\triangle AMF$  与  $\triangle AHF$  中,

$$\because AM = AH, AF = AF,$$

$$\angle MAF = \angle MAH - \angle FAH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle FAH,$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle AHF.$$

$$\therefore MF = HF.$$

$$\because MF = MB + BF = HD + BF = AG + AE,$$

$$\therefore AG + AE = FH.$$

证明 2: 延长  $CB$  至点  $M$ , 使  $BM = DH$ , 连结  $AM$ .

在  $\text{Rt}\triangle ABM$  与  $\text{Rt}\triangle ADH$  中,

$$\because AB = AD, BM = DH,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ADH.$$

$$\therefore AM = AH, \angle MAB = \angle HAD.$$

$$\because \angle FAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAH = \angle BAD - \angle FAH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle MAF = \angle MAB + \angle BAF = \angle HAD + \angle BAF = 45^\circ = \angle FAH.$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle AHF.$$

$$\therefore MF = FH.$$

$$\because MF = MB + BF = HD + BF = AG + AE,$$

$$\therefore AG + AE = FH.$$

$$(3) \text{ 设 } BF = x, GB = y, \text{ 则 } FC = 1 - x, AG = 1 - y. (0 < x < 1, 0 < y < 1)$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle GBF \text{ 中, } GF^2 = BF^2 + BG^2 = x^2 + y^2.$$

$$\because \text{Rt}\triangle GBF \text{ 的周长为 } 1,$$

$$\therefore BF + BG + GF = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

$$\text{即 } \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - (x + y).$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 = 1 - 2(x + y) + (x + y)^2.$$

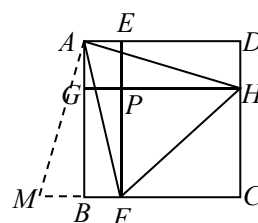
$$\text{整理得 } 2xy - 2x - 2y + 1 = 0. \quad (*)$$

求矩形  $EPHD$  的面积给出以下两种方法:

$$\text{方法 1: 由 } (*) \text{ 得 } y = \frac{2x-1}{2(x-1)}. \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \text{矩形 } EPHD \text{ 的面积 } S = PH \cdot EP = FC \cdot AG = (1-x)(1-y) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{将 } \textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } S = (1-x)(1-y)$$



24 题 (2) 图

$$= (1-x) \left[ 1 - \frac{2x-1}{2(x-1)} \right]$$

$$= (1-x) \frac{-1}{2(x-1)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

∴ 矩形  $EPHD$  的面积是  $\frac{1}{2}$ .

方法 2: 由 (\*) 得  $(x+y) - xy = \frac{1}{2}$ ,

∴ 矩形  $EPHD$  的面积  $S = PH \cdot EP = FC \cdot AG = (1-x)(1-y)$

$$= 1 - (x+y) + xy$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

∴ 矩形  $EPHD$  的面积是  $\frac{1}{2}$ .

**25. 本小题主要考查二次函数、解直角三角形等基础知识，考查运算能力、推理能力和空间观念. 满分 14 分.**

**解:** (1) 设点  $A(x_1, 0)$ ,  $B(x_2, 0)$ , 其中  $x_1 < x_2$ .

∵ 抛物线  $y = x^2 + px + q$  过点  $C(0, -1)$ ,

$$\therefore -1 = 0^2 + P \times 0 + q.$$

$$\therefore q = -1.$$

$$\therefore y = x^2 + px - 1.$$

∵ 抛物线  $y = x^2 + px + q$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点,

∴  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + px - 1 = 0$  的两个实根.

求  $p$  的值给出以下两种方法:

方法 1: 由韦达定理得:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = -1$ .

∴  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{5}{4}$ ,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = \frac{5}{4}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 1 \times (x_2 - x_1) = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 = \frac{25}{4}.$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2,$$

$$\therefore (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = \frac{25}{4}.$$

$$\therefore (-p)^2 + 4 = \frac{25}{4}.$$

$$\text{解得 } p = \pm \frac{3}{2}.$$

$$\therefore p < 0,$$

$$\therefore p = -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{所求二次函数的关系式为 } y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

$$\text{方法 2: 由求根公式得 } x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

$$AB = x_2 - x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} - \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4}}{2} = \sqrt{p^2 + 4}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{5}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = \frac{5}{4}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 1 \times (x_2 - x_1) = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{p^2 + 4} = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore p^2 + 4 = \frac{25}{4}.$$

$$\text{解得 } p = \pm \frac{3}{2}.$$

$$\therefore p < 0,$$

$$\therefore p = -\frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{所求二次函数的关系式为 } y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

$$(2) \text{ 令 } x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2.$$

$$\therefore A\left(-\frac{1}{2}, 0\right), B(2, 0).$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOC \text{ 中, } AC^2 = AO^2 + OC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中, } BC^2 = BO^2 + OC^2 = 2^2 + 1^2 = 5,$$

$$\therefore AB = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4} = AB^2.$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

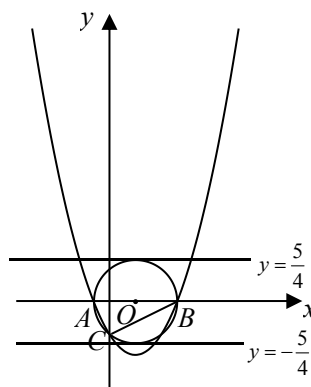
$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形.

$\therefore \text{Rt}\triangle ABC$  的外接圆的圆心是斜边  $AB$  的中点.

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \text{ 的外接圆的半径 } r = \frac{AB}{2} = \frac{5}{4}.$$

$\therefore$  垂线与  $\triangle ABC$  的外接圆有公共点,

$$\therefore -\frac{5}{4} \leq m \leq \frac{5}{4}.$$



25 题 (2) 图

(3) 假设在二次函数  $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  的图象上存在点  $D$ , 使得四边形  $ACBD$  是直角梯形.

①若  $AD \parallel BC$ , 设点  $D$  的坐标为  $\left(x_0, x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1\right)$ ,  $x_0 > 0$ ,

过  $D$  作  $DE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 如图 1 所示.

求点  $D$  的坐标给出以下两种方法:

方法 1: 在  $\text{Rt}\triangle AED$  中,

$$\tan \angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1}{x_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)},$$

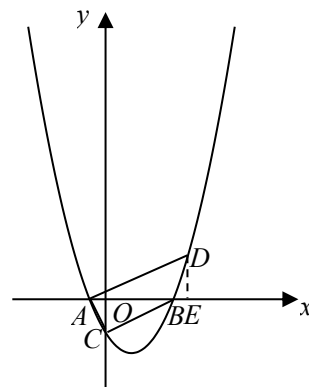
$$\text{在 Rt}\triangle BOC \text{ 中, } \tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CBO,$$

$$\therefore \tan \angle DAE = \tan \angle CBO.$$

$$\therefore \frac{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1}{x_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$4x_0^2 - 8x_0 - 5 = 0.$$



25 题 (3) 图 1

$$\text{解得 } x_0 = \frac{5}{2} \text{ 或 } x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$\because x_0 > 0,$$

$$\therefore x_0 = \frac{5}{2}, \text{ 此时点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

而  $AD^2 = AE^2 + ED^2 = \frac{45}{4} \neq BC^2$ , 因此当  $AD \parallel BC$  时在抛物线  $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  上存在

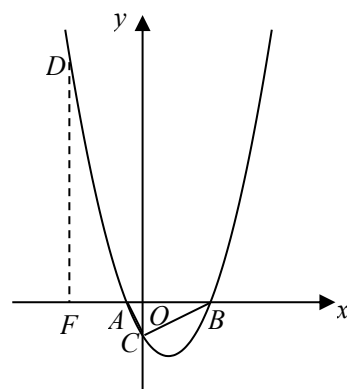
点  $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , 使得四边形  $DACB$  是直角梯形.

方法 2: 在  $\text{Rt}\triangle AED$  与  $\text{Rt}\triangle BOC$  中,  $\angle DAE = \angle CBO$ ,

$\therefore \text{Rt}\triangle AED \sim \text{Rt}\triangle BOC$ .

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OC}{OB}.$$

$$\therefore \frac{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1}{x_0 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$



25 题 (3) 图 2

以下同方法 1.

②若  $AC \parallel BD$ , 设点  $D$  的坐标为  $\left(x_0, x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1\right)$ ,  $x_0 < 0$ ,

过  $D$  作  $DF \perp x$  轴, 垂足为  $F$ , 如图 2 所示.

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DFB \text{ 中, } \tan \angle DBF = \frac{DE}{FB} = \frac{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1}{2 - x_0},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle COA \text{ 中, } \tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle CAO,$$

$$\therefore \tan \angle DBF = \tan \angle CAO.$$

$$\therefore \frac{x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 - 1}{2 - x_0} = 2.$$

$$2x_0^2 + x_0 - 10 = 0.$$

$$\text{解得 } x_0 = -\frac{5}{2} \text{ 或 } x_0 = 2.$$

$$\because x_0 < 0,$$

$\therefore x_0 = -\frac{5}{2}$ , 此时  $D$  点的坐标为  $\left(-\frac{5}{2}, 9\right)$ .

此时  $BD \neq AC$ , 因此当  $AC \parallel BD$  时, 在抛物线  $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  上存在点  $D\left(-\frac{5}{2}, 9\right)$ , 使得四边形  $DACB$  是直角梯形.

综上所述, 在抛物线  $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$  上存在点  $D$ , 使得四边形  $DACB$  是直角梯形, 并且点

$D$  的坐标为  $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$  或  $\left(-\frac{5}{2}, 9\right)$ .