

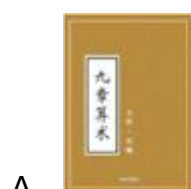
2018 年山西省中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

1. (3.00 分) (2018•山西) 下面有理数比较大小，正确的是 ()

A. $0 < -2$ B. $-5 < 3$ C. $-2 < -3$ D. $1 < -4$

2. (3.00 分) (2018•山西) “算经十书”是指汉唐一千多年间的十部著名数学著作，它们曾经是隋唐时期国子监算学科的教科书，这些流传下来的古算书中凝聚着历代数学家的劳动成果. 下列四部著作中，不属于我国古代数学著作的是 ()



《九章算术》



《几何原本》



《海岛算经》



《周髀算经》

3. (3.00 分) (2018•山西) 下列运算正确的是 ()

A. $(-a^3)^2 = -a^6$ B. $2a^2 + 3a^2 = 6a^2$

C. $2a^2 \cdot a^3 = 2a^6$ D. $(\frac{b^2}{2a})^3 = \frac{b^6}{8a^3}$

4. (3.00 分) (2018•山西) 下列一元二次方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$ B. $x^2 + 4x - 1 = 0$ C. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ D. $3x^2 = 5x - 2$

5. (3.00 分) (2018•山西) 近年来快递业发展迅速, 下表是 2018 年 1~3 月份我省部分地市邮政快递业务量的统计结果 (单位: 万件):

太原市	大同市	长治市	晋中市	运城市	临汾市	吕梁市
3303.78	332.68	302.34	319.79	725.86	416.01	338.87

1~3 月份我省这七个地市邮政快递业务量的中位数是 ()

A. 319.79 万件 B. 332.68 万件 C. 338.87 万件 D. 416.01 万件

6. (3.00 分) (2018•山西) 黄河是中华民族的象征, 被誉为母亲河, 黄河壶口瀑布位于我省吉县城西 45 千米处, 是黄河上最具气势的自然景观. 其落差约 30 米, 年平均流量 1010 立方米/秒. 若以小时作时间单位, 则其年平均流量可用科学记数法表示为 ()



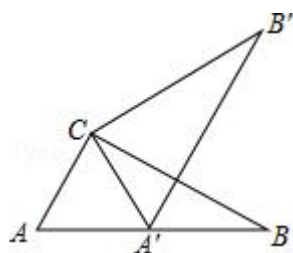
A. 6.06×10^4 立方米/时 B. 3.136×10^6 立方米/时

C. 3.636×10^6 立方米/时 D. 36.36×10^5 立方米/时

7. (3.00 分) (2018•山西) 在一个不透明的袋子里装有两个黄球和一个白球, 它们除颜色外都相同, 随机从中摸出一个球, 记下颜色后放回袋子中, 充分摇匀后, 再随机摸出一个球. 两次都摸到黄球的概率是 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

8. (3.00 分) (2018•山西) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AC=6$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C'$, 此时点 A' 恰好在 AB 边上, 则点 B' 与点 B 之间的距离为 ()

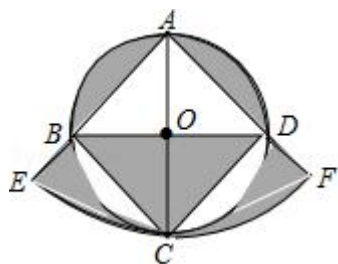


- A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{3}$

9. (3.00 分) (2018•山西) 用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为 ()

- A. $y=(x-4)^2+7$ B. $y=(x-4)^2-25$ C. $y=(x+4)^2+7$ D. $y=(x+4)^2-25$

10. (3.00 分) (2018•山西) 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\odot O$ 的半径为 2, 以点 A 为圆心, 以 AC 长为半径画弧交 AB 的延长线于点 E , 交 AD 的延长线于点 F , 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $4\pi-4$ B. $4\pi-8$ C. $8\pi-4$ D. $8\pi-8$

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3.00 分) (2018•山西) 计算: $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)=$ _____.

12. (3.00 分) (2018•山西) 图 1 是我国古代建筑中的一种窗格，其中冰裂纹图案象征着坚冰出现裂纹并开始消溶，形状无一定规则，代表一种自然和谐美. 图 2 是从图 1 冰裂纹窗格图案中提取的由五条线段组成的图形，则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ _____ 度.



图1

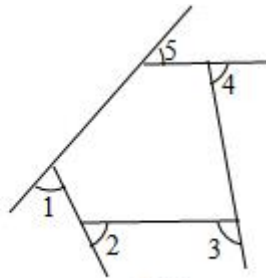
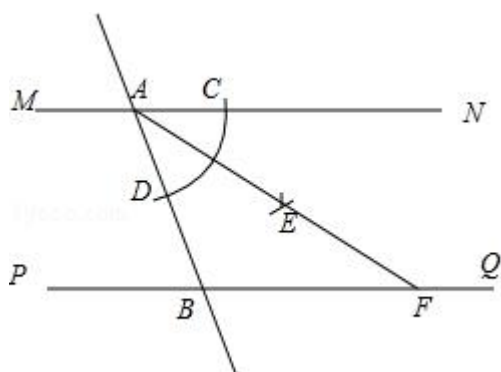


图2

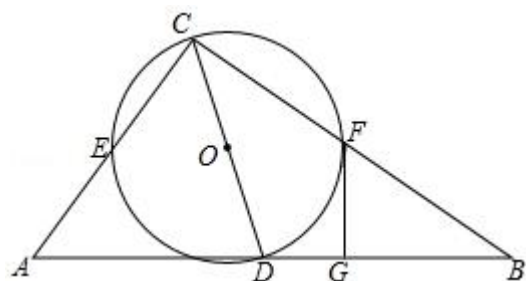
13. (3.00 分) (2018•山西) 2018 年国内航空公司规定：旅客乘机时，免费携带行李箱的长，宽，高三者之和不超过 115cm. 某厂家生产符合该规定的行李箱. 已知行李箱的宽为 20cm，长与高的比为 8: 11，则符合此规定的行李箱的高的最大值为 _____ cm.



14. (3.00 分) (2018•山西) 如图，直线 $MN \parallel PQ$ ，直线 AB 分别与 MN ， PQ 相交于点 A ， B . 小宇同学利用尺规按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以任意长为半径作弧交 AN 于点 C ，交 AB 于点 D ；②分别以 C ， D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}CD$ 长为半径作弧，两弧在 $\angle NAB$ 内交于点 E ；③作射线 AE 交 PQ 于点 F . 若 $AB=2$ ， $\angle ABP=60^\circ$ ，则线段 AF 的长为 _____.



15. (3.00 分) (2018•山西) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, 点 D 是 AB 的中点, 以 CD 为直径作 $\odot O$, $\odot O$ 分别与 AC , BC 交于点 E , F , 过点 F 作 $\odot O$ 的切线 FG , 交 AB 于点 G , 则 FG 的长为_____.



三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (2018•山西) 计算:

(1) $(2\sqrt{2})^2 - |-4| + 3^{-1} \times 6 + 2^0$.

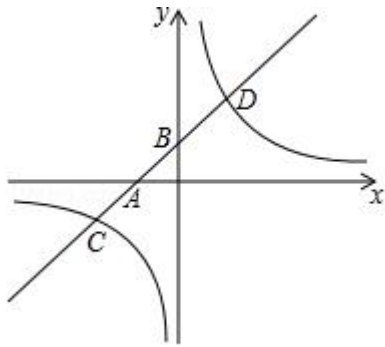
(2) $\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x-2}$.

17. (2018•山西) 如图, 一次函数 $y_1=k_1x+b$ ($k_1 \neq 0$) 的图象分别与 x 轴, y 轴相交于点 A , B , 与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的图象相交于点 $C(-4, -2)$, $D(2, 4)$.

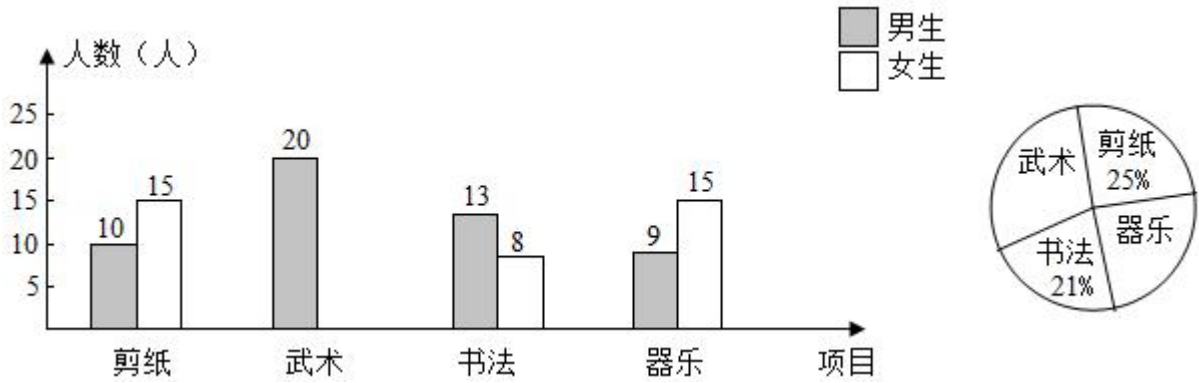
(1) 求一次函数和反比例函数的表达式;

(2) 当 x 为何值时, $y_1 > 0$;

(3) 当 x 为何值时, $y_1 < y_2$, 请直接写出 x 的取值范围.



18. (2018•山西) 在“优秀传统文化进校园”活动中, 学校计划每周二下午第三节课时间开展此项活动, 拟开展活动项目为: 剪纸, 武术, 书法, 器乐, 要求七年级学生人人参加, 并且每人只能参加其中一项活动. 教务处在该校七年级学生中随机抽取了 100 名学生进行调查, 并对此进行统计, 绘制了如图所示的条形统计图和扇形统计图 (均不完整).

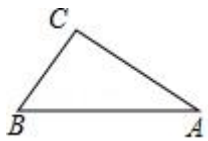


请解答下列问题:

- (1) 请补全条形统计图和扇形统计图;
- (2) 在参加“剪纸”活动项目的学生中, 男生所占的百分比是多少?
- (3) 若该校七年级学生共有 500 人, 请估计其中参加“书法”项目活动的有多少人?
- (4) 学校教务处要从这些被调查的女生中, 随机抽取一人了解具体情况, 那么正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是多少?



19. (2018•山西) 祥云桥位于省城太原南部, 该桥塔主体由三根曲线塔柱组合而成, 全桥共设 13 对直线型斜拉索, 造型新颖, 是“三晋大地”的一种象征. 某数学“综合与实践”小组的同学把“测量斜拉索顶端到桥面的距离”作为一项课题活动, 他们制订了测量方案, 并利用课余时间借助该桥斜拉索完成了实地测量. 测量结果如下表.

项目	内容		
课题	测量斜拉索顶端到桥面的距离		
测量示意图		说明: 两侧最长斜拉索 AC, BC 相交于点 C, 分别与桥面交于 A, B 两点, 且点 A, B, C 在同一竖直平面内.	
测量数据	$\angle A$ 的度数	$\angle B$ 的度数	AB 的长度
	38°	28°	234 米
...	...		

(1) 请帮助该小组根据上表中的测量数据, 求斜拉索顶端点 C 到 AB 的距离 (参考数据: $\sin 38^\circ \approx 0.6$, $\cos 38^\circ \approx 0.8$, $\tan 38^\circ \approx 0.8$, $\sin 28^\circ \approx 0.5$, $\cos 28^\circ \approx 0.9$, $\tan 28^\circ \approx 0.5$)

(2) 该小组要写出一份完整的课题活动报告, 除上表的项目外, 你认为还需要补充哪些项目 (写出一个即可).



20. (2018•山西) 2018 年 1 月 20 日, 山西迎来了“复兴号”列车, 与“和谐号”相比, “复兴号”列车时速更快, 安全性更好. 已知“太原南 – 北京西”全程大约 500 千米, “复兴号”G92 次列车平均每小时比某列“和谐号”列车多行驶 40 千米, 其行驶时间是该列“和谐号”列车行驶时间的 $\frac{4}{5}$ (两列车中途停留时间均除外). 经查询, “复兴号”G92 次列车从太原南到北京西, 中途只有石家庄一站, 停留 10 分钟. 求乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要多长时间.



21. (2018•山西) 请阅读下列材料, 并完成相应的任务:

在数学中, 利用图形在变化过程中的不变性质, 常常可以找到解决问题的办消去. 著名美籍匈牙利数学家波利亚在他所著的《数学的发现》一书中有这样一个例子: 请问如何在一个三角形 ABC 的 AC 和 BC 两边上分别取一点 X 和 Y , 使

得 $AX=BY=XY$. (如图) 解决这个问题的操作步骤如下:

第一步, 在 CA 上作出一点 D , 使得 $CD=CB$, 连接 BD . 第二步, 在 CB 上取一点 Y' , 作 $Y'Z' \parallel CA$, 交 BD 于点 Z' , 并在 AB 上取一点 A' , 使 $Z'A'=Y'Z'$. 第三步, 过点 A 作 $AZ \parallel A'Z'$, 交 BD 于点 Z . 第四步, 过点 Z 作 $ZY \parallel AC$, 交 BC 于点 Y , 再过点 Y 作 $YX \parallel ZA$, 交 AC 于点 X .

则有 $AX=BY=XY$.

下面是该结论的部分证明:

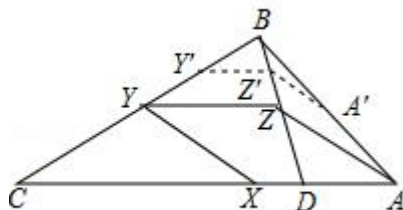
证明: $\because AZ \parallel A'Z', \therefore \angle BA'Z' = \angle BAZ$,

又 $\because \angle A'BZ' = \angle ABZ, \therefore \triangle BA'Z' \sim \triangle BAZ$.

$$\therefore \frac{Z'A'}{ZA} = \frac{BZ'}{BZ}.$$

$$\text{同理可得 } \frac{Y'Z'}{YZ} = \frac{BZ'}{BZ}, \therefore \frac{Z'A'}{ZA} = \frac{Y'Z'}{YZ}.$$

$$\therefore Z'A' = Y'Z', \therefore ZA = YZ.$$



任务: (1) 请根据上面的操作步骤及部分证明过程, 判断四边形 $AXYZ$ 的形状, 并加以证明;

(2) 请再仔细阅读上面的操作步骤, 在 (1) 的基础上完成 $AX=BY=XY$ 的证明过程;

(3) 上述解决问题的过程中, 通过作平行线把四边形 $BA'Z'Y'$ 放大得到四边形 $BAZY$, 从而确定了点 Z, Y 的位置, 这里运用了下面一种图形的变化是_____.

- A. 平移 B. 旋转 C. 轴对称 D. 位似

22. (2018•山西) 综合与实践

问题情境: 在数学活动课上, 老师出示了这样一个问题: 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=2AB$, E 是 AB 延长线上一点, 且 $BE=AB$, 连接 DE , 交 BC 于点 M , 以 DE 为一边在 DE 的左下方作正方形 $DEFG$, 连接 AM . 试判断线段 AM 与 DE 的位置关系.

探究展示: 勤奋小组发现, AM 垂直平分 DE , 并展示了如下的证明方法:

证明: $\because BE=AB, \therefore AE=2AB.$

$\because AD=2AB, \therefore AD=AE.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \parallel BC.$

$\therefore \frac{EM}{DM} = \frac{EB}{AB}.$ (依据 1)

$\because BE=AB, \therefore \frac{EM}{DM} = 1. \therefore EM=DM.$

即 AM 是 $\triangle ADE$ 的 DE 边上的中线,

又 $\because AD=AE, \therefore AM \perp DE.$ (依据 2)

$\therefore AM$ 垂直平分 $DE.$

反思交流:

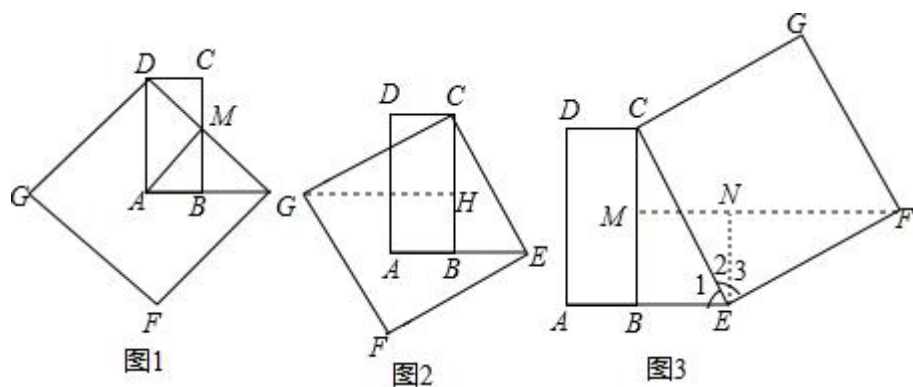
(1) ①上述证明过程中的“依据 1”“依据 2”分别是指什么?

②试判断图 1 中的点 A 是否在线段 GF 的垂直平分线上, 请直接回答, 不必证明;

(2) 创新小组受到勤奋小组的启发, 继续进行探究, 如图 2, 连接 CE , 以 CE 为一边在 CE 的左下方作正方形 $CEFG$, 发现点 G 在线段 BC 的垂直平分线上, 请你给出证明;

探索发现:

(3) 如图 3, 连接 CE , 以 CE 为一边在 CE 的右上方作正方形 $CEFG$, 可以发现点 C , 点 B 都在线段 AE 的垂直平分线上, 除此之外, 请观察矩形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 的顶点与边, 你还能发现哪个顶点在哪条边的垂直平分线上, 请写出一个你发现的结论, 并加以证明.



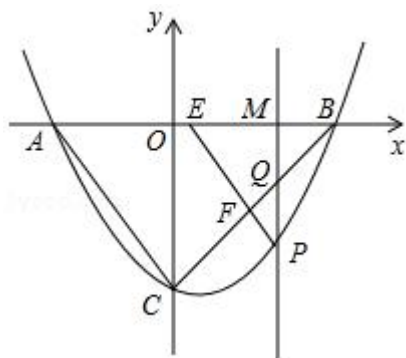
23. (2018•山西) 综合与探究

如图，抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$ 与 x 轴交于 A , B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，连接 AC , BC ．点 P 是第四象限内抛物线上的一个动点，点 P 的横坐标为 m ，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴，垂足为点 M ， PM 交 BC 于点 Q ，过点 P 作 $PE \parallel AC$ 交 x 轴于点 E ，交 BC 于点 F ．

(1) 求 A , B , C 三点的坐标；

(2) 试探究在点 P 运动的过程中，是否存在这样的点 Q ，使得以 A , C , Q 为顶点的三角形是等腰三角形．若存在，请直接写出此时点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 请用含 m 的代数式表示线段 QF 的长，并求出 m 为何值时 QF 有最大值．



2018 年山西省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

1. (3.00 分) (2018•山西) 下面有理数比较大小，正确的是 ()

A. $0 < -2$ B. $-5 < 3$ C. $-2 < -3$ D. $1 < -4$

【分析】直接利用有理数比较大小的方法分别比较得出答案.

【解答】解：A、 $0 > -2$ ，故此选项错误；

B、 $-5 < 3$ ，正确；

C、 $-2 > -3$ ，故此选项错误；

D、 $1 > -4$ ，故此选项错误；

故选：B.

【点评】此题主要考查了有理数大小比较，正确把握比较方法是解题关键.

2. (3.00 分) (2018•山西) “算经十书”是指汉唐一千多年间的十部著名数学著作，它们曾经是隋唐时期国子监算学科的教科书，这些流传下来的古算书中凝聚着历代数学家的劳动成果. 下列四部著作中，不属于我国古代数学著作的是 ()



《九章算术》



B.

《几何原本》



C.

《海岛算经》



D.

《周髀算经》

【分析】根据数学常识逐一判别即可得.

【解答】解：A、《九章算术》是中国古代数学专著，作者已不可考，它是经历代各家的增补修订，而逐渐成为现今定本的；

B、《几何原本》是古希腊数学家欧几里得所著的一部数学著作；

C、《海岛算经》是中国学者编撰的最早一部测量数学著作，由刘徽于三国魏景元四年所撰；

D、《周髀算经》原名《周髀》，是算经的十书之一，中国最古老的天文学和数学著作；

故选：B.

【点评】本题主要考查数学常识，解题的关键是了解我国古代在数学领域的成就.

3. (3.00 分) (2018•山西) 下列运算正确的是 ()

A. $(-a^3)^2 = -a^6$ B. $2a^2 + 3a^2 = 6a^2$

C. $2a^2 \cdot a^3 = 2a^6$ D. $(\frac{b^2}{2a})^3 = \frac{b^6}{8a^3}$

【分析】分别根据幂的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法及分式的乘方逐一计算即可判断.

【解答】解: A、 $(-a^3)^2 = a^6$, 此选项错误;

B、 $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$, 此选项错误;

C、 $2a^2 \cdot a^3 = 2a^5$, 此选项错误;

D、 $(\frac{b^2}{2a})^3 = \frac{b^6}{8a^3}$, 此选项正确;

故选: D.

【点评】本题主要考查整式的运算, 解题的关键是掌握幂的乘方、合并同类项法则、同底数幂的乘法及分式的乘方的运算法则.

4. (3.00 分) (2018•山西) 下列一元二次方程中, 没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$ B. $x^2 + 4x - 1 = 0$ C. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ D. $3x^2 = 5x - 2$

【分析】利用根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 分别进行判定即可.

【解答】解: A、 $\Delta = 4 - 4 = 0$, 有两个相等的实数根, 故此选项不合题意;

B、 $\Delta = 16 + 4 = 20 > 0$, 有两个不相等的实数根, 故此选项不合题意;

C、 $\Delta = 16 - 4 \times 2 \times 3 < 0$, 没有实数根, 故此选项符合题意;

D、 $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$, 有两个相等的实数根, 故此选项不合题意;

故选: C.

【点评】此题主要考查了根的判别式, 关键是掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根;

②当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；

③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

5. (3.00 分) (2018•山西) 近年来快递业发展迅速，下表是 2018 年 1~3 月份我省部分地市邮政快递业务量的统计结果 (单位: 万件):

太原市	大同市	长治市	晋中市	运城市	临汾市	吕梁市
3303.78	332.68	302.34	319.79	725.86	416.01	338.87

1~3 月份我省这七个地市邮政快递业务量的中位数是 ()

A. 319.79 万件 B. 332.68 万件 C. 338.87 万件 D. 416.01 万件

【分析】找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数.

【解答】解: 首先按从小到大排列数据: 319.79, 302.34, 332.68, 338.87, 416.01, 725.86, 3303.78

由于这组数据有奇数个，中间的数据是 338.87

所以这组数据的中位数是 338.87

故选: C.

【点评】本题属于基础题，考查了确定一组数据的中位数的能力. 注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

6. (3.00 分) (2018•山西) 黄河是中华民族的象征，被誉为母亲河，黄河壶口瀑布位于我省吉县城西 45 千米处，是黄河上最具气势的自然景观. 其落差约 30 米，年平均流量 1010 立方米/秒. 若以小时作时间单位，则其年平均流量可用科学记数法表示为 ()



- A. 6.06×10^4 立方米/时 B. 3.136×10^6 立方米/时
C. 3.636×10^6 立方米/时 D. 36.36×10^5 立方米/时

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解： $1010 \times 360 \times 24 = 3.636 \times 10^6$ 立方米/时，
故选：C.

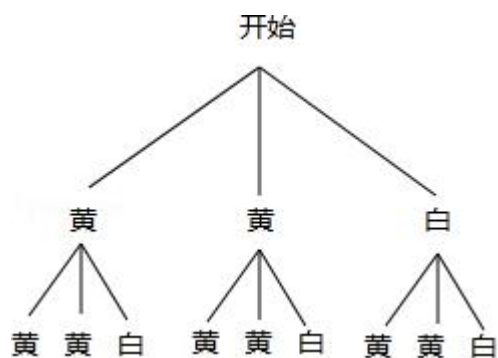
【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

7. (3.00 分) (2018•山西) 在一个不透明的袋子里装有两个黄球和一个白球，它们除颜色外都相同，随机从中摸出一个球，记下颜色后放回袋子中，充分摇匀后，再随机摸出一个球. 两次都摸到黄球的概率是 ()

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

【分析】首先根据题意画出树状图，由树状图求得所有等可能的结果与两次都摸到黄球的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案. 注意此题属于放回实验.

【解答】解：画树状图如下：



由树状图可知，共有 9 种等可能结果，其中两次都摸到黄球的有 4 种结果，

$\therefore$ 两次都摸到黄球的概率为 $\frac{4}{9}$ ，

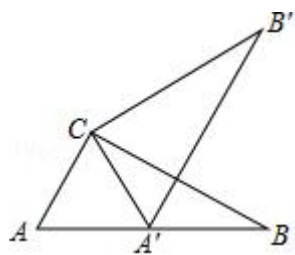
故选：A.

【点评】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率的知识．注意画树状图与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．

8. (3.00 分) (2018•山西) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=60^\circ$ ， $AC=6$ ，

将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C'$ ，此时点 A' 恰好在 AB 边上，

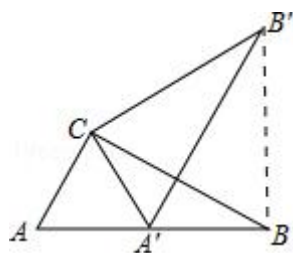
则点 B' 与点 B 之间的距离为 ()



A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{3}$

【分析】 连接 $B'B$ ，利用旋转的性质和直角三角形的性质解答即可．

【解答】 解：连接 $B'B$ ，



∴ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C'$,

∴ $AC=A'C$, $AB=A'B$, $\angle A=\angle CA'B'=60^\circ$,

∴ $\triangle AA'C$ 是等边三角形,

∴ $\angle AA'C=60^\circ$,

∴ $\angle B'A'B=180^\circ-60^\circ=60^\circ=60^\circ$,

∴ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C'$,

∴ $\angle ACA'=\angle BAB'=60^\circ$, $BC=B'C$, $\angle CB'A'=\angle CBA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$,

∴ $\triangle BCB'$ 是等边三角形,

∴ $\angle CB'B=60^\circ$,

∴ $\angle CB'A'=30^\circ$,

∴ $\angle A'B'B=30^\circ$,

∴ $\angle B'BA'=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$,

∴ $\angle ACB=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$, $AC=6$,

∴ $AB=12$,

∴ $A'B=AB-AA'=AB-AC=6$,

∴ $B'B=6\sqrt{3}$,

故选: D.

【点评】 此题考查旋转问题, 关键是利用旋转的性质和直角三角形的性质解答.

9. (3.00 分) (2018•山西) 用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)$

^2+k 的形式为 ()

- A. $y = (x - 4)^2 + 7$ B. $y = (x - 4)^2 - 25$ C. $y = (x + 4)^2 + 7$ D. $y = (x + 4)^2 - 25$

【分析】直接利用配方法进而将原式变形得出答案.

【解答】解: $y = x^2 - 8x - 9$

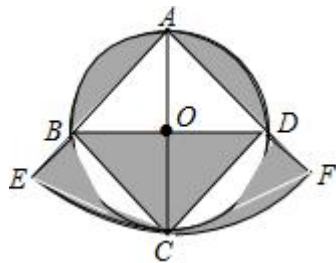
$$= x^2 - 8x + 16 - 25$$

$$= (x - 4)^2 - 25.$$

故选: B.

【点评】此题主要考查了二次函数的三种形式, 正确配方是解题关键.

10. (3.00 分) (2018•山西) 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\odot O$ 的半径为 2, 以点 A 为圆心, 以 AC 长为半径画弧交 AB 的延长线于点 E , 交 AD 的延长线于点 F , 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $4\pi - 4$ B. $4\pi - 8$ C. $8\pi - 4$ D. $8\pi - 8$

【分析】利用对称性可知: 阴影部分的面积 = 扇形 AEF 的面积 - $\triangle ABD$ 的面积.

【解答】解: 利用对称性可知: 阴影部分的面积 = 扇形 AEF 的面积 - $\triangle ABD$ 的

$$\text{面积} = \frac{90 \cdot \pi \cdot 4^2}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4\pi - 4,$$

故选: A.

【点评】本题考查扇形的面积公式、正方形的性质等知识, 解题的关键是学会用转化的思想思考问题, 属于中考常考题型.

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3.00 分) (2018•山西) 计算: $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1) = \underline{17}$.

【分析】根据平方差公式计算即可.

【解答】解: 原式= $(3\sqrt{2})^2 - 1^2$

$$= 18 - 1$$

$$= 17$$

故答案为: 17.

【点评】本题考查的是二次根式的混合运算, 掌握平方差公式、二次根式的性质是解题的关键.

12. (3.00 分) (2018•山西) 图 1 是我国古代建筑中的一种窗格, 其中冰裂纹图案象征着坚冰出现裂纹并开始消溶, 形状无一定规则, 代表一种自然和谐美. 图 2 是从图 1 冰裂纹窗格图案中提取的由五条线段组成的图形, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \underline{360}$ 度.



图1

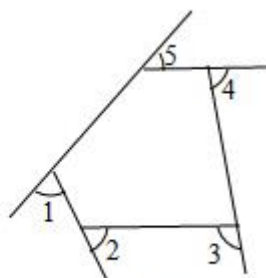


图2

【分析】根据多边形的外角和等于 360° 解答即可.

【解答】解: 由多边形的外角和等于 360° 可知,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ,$$

故答案为: 360° .

【点评】本题考查的是多边形的内角和外角, 掌握多边形的外角和等于 360° 是

解题的关键.

13. (3.00 分) (2018•山西) 2018 年国内航空公司规定: 旅客乘机时, 免费携带行李箱的长, 宽, 高三者之和不超过 115cm. 某厂家生产符合该规定的行李箱. 已知行李箱的宽为 20cm, 长与高的比为 8: 11, 则符合此规定的行李箱的高的最大值为 55 cm.



【分析】 利用长与高的比为 8: 11, 进而利用携带行李箱的长、宽、高三者之和不超过 115cm 得出不等式求出即可.

【解答】 解: 设长为 $8x$, 高为 $11x$,

由题意, 得: $19x+20 \leq 115$,

解得: $x \leq 5$,

故行李箱的高的最大值为: $11x=55$,

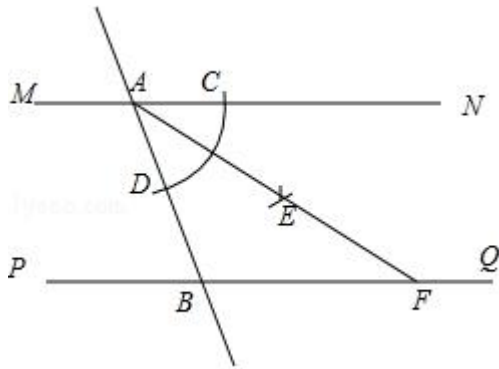
答: 行李箱的高的最大值为 55 厘米.

故答案为: 55

【点评】 此题主要考查了一元一次不等式的应用, 根据题意得出正确不等关系是解题关键.

14. (3.00 分) (2018•山西) 如图, 直线 $MN \parallel PQ$, 直线 AB 分别与 MN , PQ 相交于点 A , B . 小宇同学利用尺规按以下步骤作图: ①以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧交 AN 于点 C , 交 AB 于点 D ; ②分别以 C , D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}CD$

长为半径作弧, 两弧在 $\angle NAB$ 内交于点 E; ③作射线 AE 交 PQ 于点 F. 若 $AB=2$, $\angle ABP=60^\circ$, 则线段 AF 的长为 $2\sqrt{3}$.



【分析】 作高线 BG, 根据直角三角形 30 度角的性质得: $BG=1$, $AG=\sqrt{3}$, 可得 AF 的长.

【解答】 解: $\because MN \parallel PQ$,

$$\therefore \angle NAB = \angle ABP = 60^\circ,$$

由题意得: AF 平分 $\angle NAB$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\because \angle ABP = \angle 1 + \angle 3,$$

$$\therefore \angle 3 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = BF, \quad AG = GF,$$

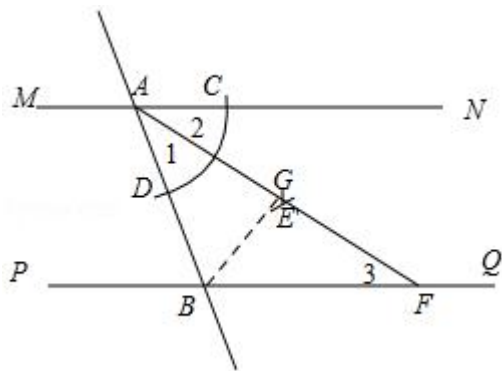
$$\because AB = 2,$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore AG = \sqrt{3},$$

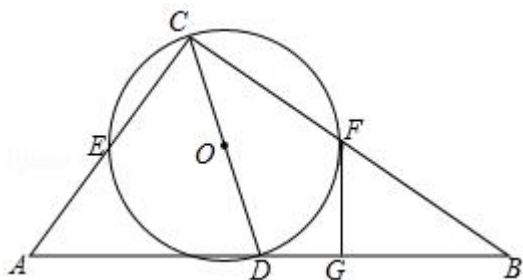
$$\therefore AF = 2AG = 2\sqrt{3},$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.



【点评】 本题考查了平行线的性质、角平分线的基本作图、直角三角形 30 度角的性质，此题难度不大，熟练掌握平行线和角平分线的基本作图是关键.

15. (3.00 分) (2018•山西) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ，点 D 是 AB 的中点，以 CD 为直径作 $\odot O$ ， $\odot O$ 分别与 AC ， BC 交于点 E ， F ，过点 F 作 $\odot O$ 的切线 FG ，交 AB 于点 G ，则 FG 的长为 $\frac{12}{5}$.



【分析】 先利用勾股定理求出 $AB=10$ ，进而求出 $CD=BD=5$ ，再求出 $CF=4$ ，进而求出 $DF=3$ ，再判断出 $FG \perp BD$ ，利用面积即可得出结论.

【解答】 解：如图，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据勾股定理得， $AB=10$ ，

$\therefore$ 点 D 是 AB 中点，

$$\therefore CD=BD=\frac{1}{2}AB=5,$$

连接 DF ，

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle CFD=90^\circ,$$

16. (2018•山西) 计算:

$$(1) (2\sqrt{2})^2 - |-4| + 3^{-1} \times 6 + 2^0.$$

$$(2) \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x-2}.$$

【分析】 (1) 先计算乘方、绝对值、负整数指数幂和零指数幂，再计算乘法，最后计算加减运算可得；

(2) 先将分子、分母因式分解，再计算乘法，最后计算减法即可得.

【解答】 解: (1) 原式 $= 8 - 4 + \frac{1}{3} \times 6 + 1$

$$= 8 - 4 + 2 + 1$$

$$= 7.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{x}{x-2}. \end{aligned}$$

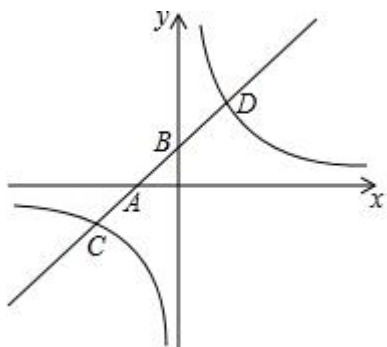
【点评】 本题主要考查实数和分式的混合运算，解题的关键是掌握绝对值性质、负整数指数幂、零指数幂及分式混合运算顺序和运算法则.

17. (2018•山西) 如图，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ ($k_1 \neq 0$) 的图象分别与 x 轴， y 轴相交于点 A，B，与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的图象相交于点 C (-4, -2)，D (2, 4).

(1) 求一次函数和反比例函数的表达式；

(2) 当 x 为何值时， $y_1 > 0$ ；

(3) 当 x 为何值时， $y_1 < y_2$ ，请直接写出 x 的取值范围.



【分析】 (1) 将 C、D 两点代入一次函数的解析式中即可求出一次函数的解析式，然后将点 D 代入反比例函数的解析式即可求出反比例函数的解析式；

(2) 根据一元一次不等式的解法即可求出答案.

(3) 根据图象即可求出答案该不等式的解集.

【解答】 解：(1) $\because$ 一次函数 $y_1=k_1x+b$ 的图象经过点 C $(-4, -2)$, D $(2, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} -4k_1+b=-2 \\ 2k_1+b=4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1=1 \\ b=2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y_1=x+2$.

$\because$ 反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象经过点 D $(2, 4)$,

$$\therefore 4=\frac{k_2}{2}.$$

$$\therefore k_2=8.$$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{8}{x}$.

(2) 由 $y_1 > 0$, 得 $x+2 > 0$.

$$\therefore x > -2.$$

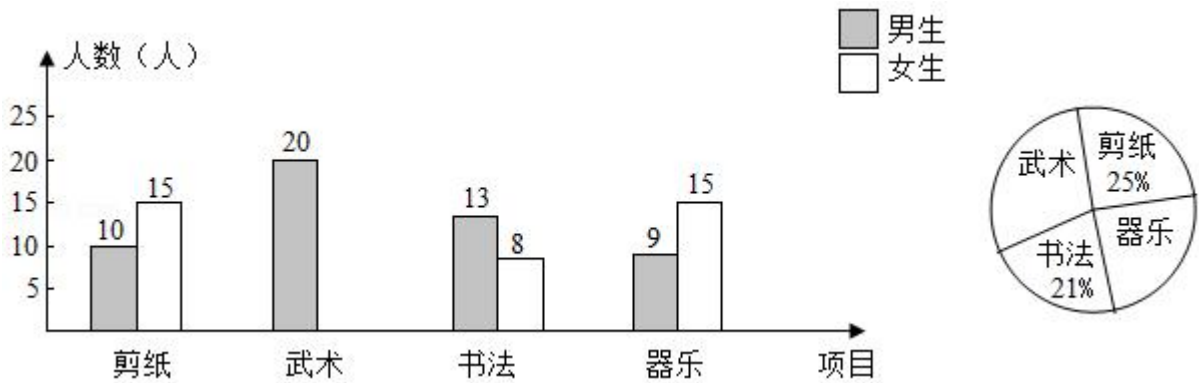
$\therefore$ 当 $x > -2$ 时, $y_1 > 0$.

(3) $x < -4$ 或 $0 < x < 2$.

【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的综合问题，解题的关键是熟练运用待

定系数法以及数形结合的思想，本题属于中等题型.

18. (2018•山西) 在“优秀传统文化进校园”活动中，学校计划每周二下午第三节课时间开展此项活动，拟开展活动项目为：剪纸，武术，书法，器乐，要求七年级学生人人参加，并且每人只能参加其中一项活动. 教务处在该校七年级学生中随机抽取了 100 名学生进行调查，并对此进行统计，绘制了如图所示的条形统计图和扇形统计图（均不完整）.



请解答下列问题:

- (1) 请补全条形统计图和扇形统计图;
- (2) 在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比是多少?
- (3) 若该校七年级学生共有 500 人，请估计其中参加“书法”项目活动的有多少人?
- (4) 学校教务处要从这些被调查的女生中，随机抽取一人了解具体情况，那么正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率是多少?



【分析】 (1) 先求出参加活动的女生人数，进而求出参加武术的女生人数，即可

补全条形统计图，再分别求出参加武术的人数和参加器乐的人数，即可求出百分比；

(2) 用参加剪纸中男生人数除以剪纸的总人数即可得出结论；

(3) 根据样本估计总体的方法计算即可；

(4) 利用概率公式即可得出结论.

【解答】解：(1) 由条形图知，男生共有： $10+20+13+9=52$ 人，

$\therefore$ 女生人数为 $100 - 52 = 48$ 人，

$\therefore$ 参加武术的女生为 $48 - 15 - 8 - 15 = 10$ 人，

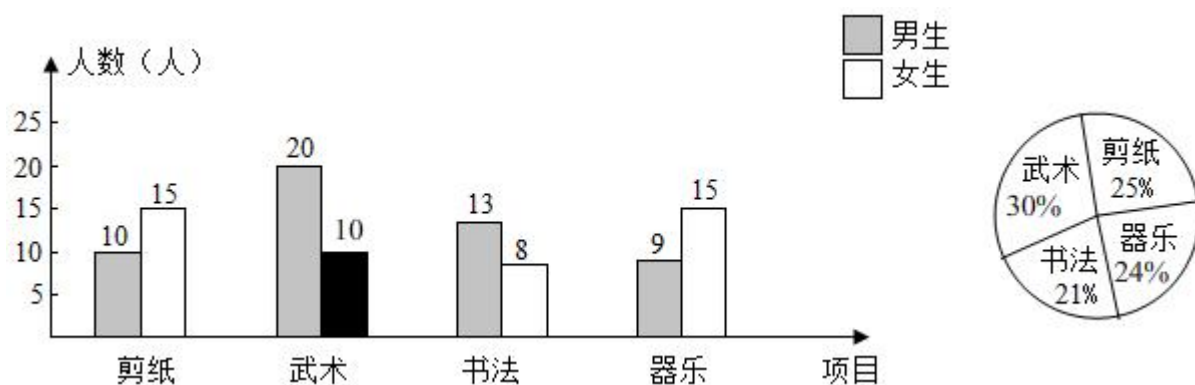
$\therefore$ 参加武术的人数为 $20 + 10 = 30$ 人，

$\therefore 30 \div 100 = 30\%$ ，

参加器乐的人数为 $9 + 15 = 24$ 人，

$\therefore 24 \div 100 = 24\%$ ，

补全条形统计图和扇形统计图如图所示：



(2) 在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比是 $\frac{10}{10+15} \times 100\% = 40\%$.

答：在参加“剪纸”活动项目的学生中，男生所占的百分比为 40%.

(3) $500 \times 21\% = 105$ (人).

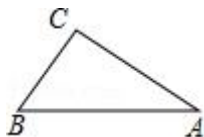
答：估计其中参加“书法”项目活动的有 105 人.

(4) $\frac{15}{15+10+8+15} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.

答：正好抽到参加“器乐”活动项目的女生的概率为 $\frac{5}{16}$.

【点评】此题主要考查了条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

19. (2018•山西) 祥云桥位于省城太原南部，该桥塔主体由三根曲线塔柱组合而成，全桥共设 13 对直线型斜拉索，造型新颖，是“三晋大地”的一种象征. 某数学“综合与实践”小组的同学把“测量斜拉索顶端到桥面的距离”作为一项课题活动，他们制订了测量方案，并利用课余时间借助该桥斜拉索完成了实地测量. 测量结果如下表.

项目	内容		
课题	测量斜拉索顶端到桥面的距离		
测量示意图		说明：两侧最长斜拉索 AC, BC 相交于点 C, 分别与桥面交于 A, B 两点，且点 A, B, C 在同一竖直平面内.	
测量数据	∠A 的度数	∠B 的度数	AB 的长度
	38°	28°	234 米
...	...		

(1) 请帮助该小组根据上表中的测量数据，求斜拉索顶端点 C 到 AB 的距离 (参考数据： $\sin 38^\circ \approx 0.6$, $\cos 38^\circ \approx 0.8$, $\tan 38^\circ \approx 0.8$, $\sin 28^\circ \approx 0.5$, $\cos 28^\circ \approx 0.9$, $\tan 28^\circ \approx 0.5$)

(2) 该小组要写出一份完整的课题活动报告，除上表的项目外，你认为还需要补充哪些项目 (写出一个即可).



【分析】 (1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D . 解直角三角形求出 DC 即可;

(2) 还需要补充的项目可为: 测量工具, 计算过程, 人员分工, 指导教师, 活动感受等

【解答】 解: (1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D .

设 $CD=x$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle A=38^\circ$.

$$\because \tan 38^\circ = \frac{CD}{AD}, \therefore AD = \frac{CD}{\tan 38^\circ} = \frac{x}{0.8} = \frac{5}{4}x.$$

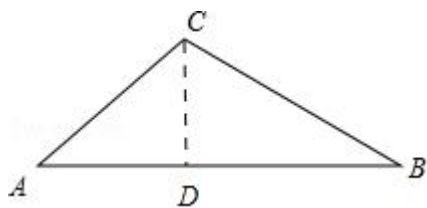
在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $\angle BDC=90^\circ$, $\angle B=28^\circ$.

$$\because \tan 28^\circ = \frac{CD}{BD}, \therefore BD = \frac{CD}{\tan 28^\circ} = \frac{x}{0.5} = 2x.$$

$$\therefore AD+BD=AB=234, \therefore \frac{5}{4}x+2x=234.$$

解得 $x=72$.

答: 斜拉索顶端点 C 到 AB 的距离为 72 米.



(2) 还需要补充的项目可为: 测量工具, 计算过程, 人员分工, 指导教师, 活动感受等. (答案不唯一)

【点评】 本题考查解直角三角形的应用, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题;

20. (2018•山西) 2018 年 1 月 20 日, 山西迎来了“复兴号”列车, 与“和谐号”相比, “复兴号”列车时速更快, 安全性更好. 已知“太原南 - 北京西”全程大约 500

千米，“复兴号”G92 次列车平均每小时比某列“和谐号”列车多行驶 40 千米，其行驶时间是该列“和谐号”列车行驶时间的 $\frac{4}{5}$ （两列车中途停留时间均除外）。经查询，“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西，中途只有石家庄一站，停留 10 分钟。求乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要多长时间。



【分析】设“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西的行驶时间需要 x 小时，则“和谐号”列车的行驶时间需要 $\frac{5}{4}x$ 小时，根据速度=路程÷时间结合“复兴号”G92 次列车平均每小时比某列“和谐号”列车多行驶 40 千米，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论。

【解答】解：设“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西的行驶时间需要 x 小时，则“和谐号”列车的行驶时间需要 $\frac{5}{4}x$ 小时，

根据题意得：
$$\frac{500}{x} = \frac{500}{\frac{5}{4}x} + 40,$$

解得：
$$x = \frac{5}{2},$$

经检验， $x = \frac{5}{2}$ 是原分式方程的解，

$$\therefore x + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

答：乘坐“复兴号”G92 次列车从太原南到北京西需要 $\frac{8}{3}$ 小时。

【点评】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键。

21. (2018•山西) 请阅读下列材料，并完成相应的任务：

在数学中，利用图形在变化过程中的不变性质，常常可以找到解决问题的办法。著名美籍匈牙利数学家波利亚在他所著的《数学的发现》一书中有这样一个例子：请问如何在一个三角形 ABC 的 AC 和 BC 两边上分别取一点 X 和 Y ，使

得 $AX=BY=XY$ 。（如图）解决这个问题的操作步骤如下：

第一步，在 CA 上作出一点 D ，使得 $CD=CB$ ，连接 BD 。第二步，在 CB 上取一点 Y' ，作 $Y'Z' \parallel CA$ ，交 BD 于点 Z' ，并在 AB 上取一点 A' ，使 $Z'A'=Y'Z'$ 。第三步，过点 A 作 $AZ \parallel A'Z'$ ，交 BD 于点 Z 。第四步，过点 Z 作 $ZY \parallel AC$ ，交 BC 于点 Y ，再过点 Y 作 $YX \parallel ZA$ ，交 AC 于点 X 。

则有 $AX=BY=XY$ 。

下面是该结论的部分证明：

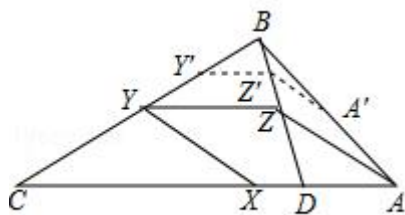
证明： $\because AZ \parallel A'Z'$ ， $\therefore \angle BA'Z' = \angle BAZ$ ，

又 $\because \angle A'BZ' = \angle ABZ$ ， $\therefore \triangle BA'Z' \sim \triangle BAZ$ 。

$$\therefore \frac{Z'A'}{ZA} = \frac{BZ'}{BZ}.$$

$$\text{同理可得} \frac{Y'Z'}{YZ} = \frac{BZ'}{BZ}. \therefore \frac{Z'A'}{ZA} = \frac{Y'Z'}{YZ}.$$

$$\because Z'A' = Y'Z', \therefore ZA = YZ.$$



任务：（1）请根据上面的操作步骤及部分证明过程，判断四边形 $AXYZ$ 的形状，并加以证明；

（2）请再仔细阅读上面的操作步骤，在（1）的基础上完成 $AX=BY=XY$ 的证明过程；

（3）上述解决问题的过程中，通过作平行线把四边形 $BA'Z'Y'$ 放大得到四边形

BAZY，从而确定了点 Z，Y 的位置，这里运用了下面一种图形的变化是 D (或位似)_____.

A. 平移

B. 旋转

C. 轴对称

D. 位似

【分析】 (1) 四边形 AXYZ 是菱形. 首先由“两组对边相互平行的四边形是平行四边形”推知四边形 AXYZ 是平行四边形，再由“邻边相等的平行四边形是菱形”证得结论；

(2) 利用菱形的四条边相等推知 $AX=XY=YZ$. 根据等量代换得到 $AX=BY=XY$.

(3) 根据位似变换的定义填空.

【解答】 解：(1) 四边形 AXYZ 是菱形.

证明： $\because ZY \parallel AC, YX \parallel ZA,$

$\therefore$ 四边形 AXYZ 是平行四边形.

$\because ZA=YZ,$

$\therefore$ 平行四边形 AXYZ 是菱形.

(2) 证明： $\because CD=CB,$

$\therefore \angle 1 = \angle 3.$

$\because ZY \parallel AC,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2.$

$\therefore \angle 2 = \angle 3.$

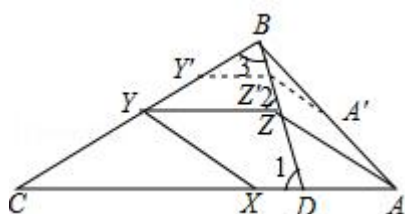
$\therefore YB=YZ.$

$\because$ 四边形 AXYZ 是菱形,

$\therefore AX=XY=YZ.$

$\therefore AX=BY=XY.$

(3) 通过作平行线把四边形 $BA'Z'Y'$ 放大得到四边形 $BAZY$ ，从而确定了点 Z ， Y 的位置，此时四边形 $BA'Z'Y' \sim$ 四边形 $BAZY$ ，所以该变换形式是位似变换。
故答案是：D（或位似）。



【点评】考查了相似综合题型，掌握菱形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，位似变换，位似图形的两个图形必须是相似形。

22. (2018•山西) 综合与实践

问题情境：在数学活动课上，老师出示了这样一个问题：如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， $AD=2AB$ ， E 是 AB 延长线上一点，且 $BE=AB$ ，连接 DE ，交 BC 于点 M ，以 DE 为一边在 DE 的左下方作正方形 $DEFG$ ，连接 AM 。试判断线段 AM 与 DE 的位置关系。

探究展示：勤奋小组发现， AM 垂直平分 DE ，并展示了如下的证明方法：

证明： $\because BE=AB$ ， $\therefore AE=2AB$ 。

$\because AD=2AB$ ， $\therefore AD=AE$ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore AD \parallel BC$ 。

$\therefore \frac{EM}{DM} = \frac{EB}{AB}$ 。（依据 1）

$\because BE=AB$ ， $\therefore \frac{EM}{DM} = 1$ 。 $\therefore EM=DM$ 。

即 AM 是 $\triangle ADE$ 的 DE 边上的中线，

又 $\because AD=AE$ ， $\therefore AM \perp DE$ 。（依据 2）

∴AM 垂直平分 DE.

反思交流:

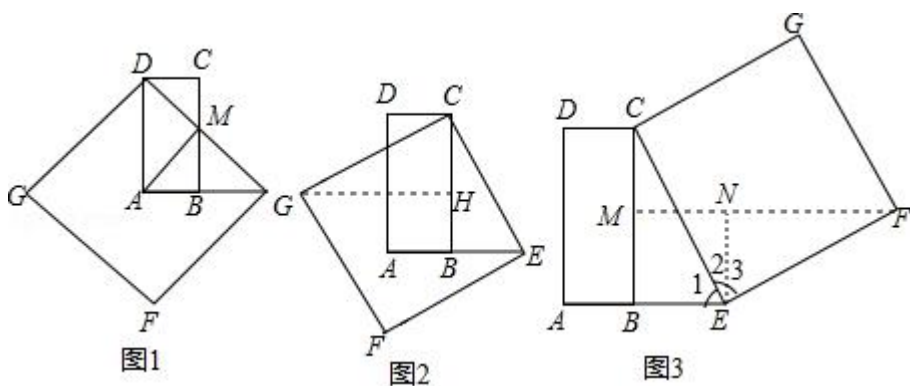
(1) ①上述证明过程中的“依据 1”“依据 2”分别是指什么?

②试判断图 1 中的点 A 是否在线段 GF 的垂直平分线上, 请直接回答, 不必证明;

(2) 创新小组受到勤奋小组的启发, 继续进行探究, 如图 2, 连接 CE, 以 CE 为一边在 CE 的左下方作正方形 CEFG, 发现点 G 在线段 BC 的垂直平分线上, 请你给出证明;

探索发现:

(3) 如图 3, 连接 CE, 以 CE 为一边在 CE 的右上方作正方形 CEFG, 可以发现点 C, 点 B 都在线段 AE 的垂直平分线上, 除此之外, 请观察矩形 ABCD 和正方形 CEFG 的顶点与边, 你还能发现哪个顶点在哪条边的垂直平分线上, 请写出一个你发现的结论, 并加以证明.



【分析】(1) ①直接得出结论;

②借助问题情景即可得出结论;

(2) 先判断出 $\angle BCE + \angle BEC = 90^\circ$, 进而判断出 $\angle BEC = \angle BCG$, 得出 $\triangle GHC \cong \triangle CBE$, 判断出 $AD = BC$, 进而判断出 $HC = BH$, 即可得出结论;

(3) 先判断出四边形 BENM 为矩形, 进而得出 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, 再判断出 $\angle 1 = \angle 3$, 得出 $\triangle ENF \cong \triangle EBC$, 即可得出结论.

【解答】解：（1）①依据 1：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例（或平行线分线段成比例）.

依据 2：等腰三角形顶角的平分线，底边上的中线及底边上的高互相重合（或等腰三角形的“三线合一”）.

②答：点 A 在线段 GF 的垂直平分线上.

理由：由问题情景知， $AM \perp DE$,

$\because$ 四边形 DEFG 是正方形,

$\therefore DE \parallel FG$,

$\therefore$ 点 A 在线段 GF 的垂直平分线上.

（2）证明：过点 G 作 $GH \perp BC$ 于点 H,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形，点 E 在 AB 的延长线上,

$\therefore \angle CBE = \angle ABC = \angle GHC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE + \angle BEC = 90^\circ$.

$\because$ 四边形 CEF G 为正方形,

$\therefore CG = CE$, $\angle GCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCE + \angle BCG = 90^\circ$.

$\therefore \angle 2BEC = \angle BCG$.

$\therefore \triangle GHC \cong \triangle CBE$.

$\therefore HC = BE$,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore AD = BC$.

$\therefore AD = 2AB$, $BE = AB$,

$$\therefore BC=2BE=2HC,$$

$$\therefore HC=BH.$$

$$\therefore GH \text{ 垂直平分 } BC.$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 在 } BC \text{ 的垂直平分线上.}$$

(3) 答：点 F 在 BC 边的垂直平分线上（或点 F 在 AD 边的垂直平分线上）.

证法一：过点 F 作 $FM \perp BC$ 于点 M ，过点 E 作 $EN \perp FM$ 于点 N .

$$\therefore \angle BMN = \angle ENM = \angle ENF = 90^\circ.$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形, 点 } E \text{ 在 } AB \text{ 的延长线上,}$$

$$\therefore \angle CBE = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } BENM \text{ 为矩形.}$$

$$\therefore BM = EN, \angle BEN = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\because \text{四边形 } CEF G \text{ 为正方形,}$$

$$\therefore EF = EC, \angle CEF = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\because \angle CBE = \angle ENF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ENF \cong \triangle EBC.$$

$$\therefore NE = BE. \therefore BM = BE.$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形,}$$

$$\therefore AD = BC.$$

$\therefore AD=2AB, AB=BE.$

$\therefore BC=2BM.$

$\therefore BM=MC.$

$\therefore FM$ 垂直平分 $BC.$

$\therefore$ 点 F 在 BC 边的垂直平分线上.

【点评】 此题是四边形综合题，主要考查了正方形的性质，矩形的性质，全等三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定和性质，构造全等三角形是解本题的关键.

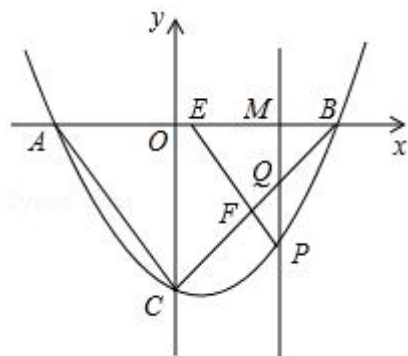
23. (2018•山西) 综合与探究

如图，抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，连接 AC, BC . 点 P 是第四象限内抛物线上的一个动点，点 P 的横坐标为 m ，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴，垂足为点 M ， PM 交 BC 于点 Q ，过点 P 作 $PE \parallel AC$ 交 x 轴于点 E ，交 BC 于点 F .

(1) 求 A, B, C 三点的坐标;

(2) 试探究在点 P 运动的过程中，是否存在这样的点 Q ，使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是等腰三角形. 若存在，请直接写出此时点 Q 的坐标; 若不存在，请说明理由;

(3) 请用含 m 的代数式表示线段 QF 的长，并求出 m 为何值时 QF 有最大值.



【分析】 (1) 解方程 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = 0$ 得 A (-3, 0), B (4, 0), 计算自变量为 0 时的二次函数值得 C 点坐标;

(2) 利用勾股定理计算出 $AC=5$, 利用待定系数法可求得直线 BC 的解析式为 $y=x-4$, 则可设 Q (m, m-4) ($0 < m < 4$), 讨论: 当 $CQ=CA$ 时, 则 $m^2 + (m-4+4)^2 = 5^2$,

当 $AQ=AC$ 时, $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$; 当 $QA=QC$ 时, $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$, 然后分别解方程求出 m 即可得到对应的 Q 点坐标;

(3) 过点 F 作 $FG \perp PQ$ 于点 G, 如图, 由 $\triangle OBC$ 为等腰直角三角形. 可判断 $\triangle FQG$ 为等腰直角三角形, 则 $FG=QG=\frac{\sqrt{2}}{2}FQ$, 再证明 $\triangle FGP \sim \triangle AOC$ 得到 $\frac{FG-PG}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$, 则 $PG=\frac{2\sqrt{2}}{3}FQ$, 所以 $PQ=\frac{7\sqrt{2}}{6}FQ$, 于是得到 $FQ=\frac{3\sqrt{2}}{7}PQ$, 设 P (m, $\frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4$) ($0 < m < 4$), 则 Q (m, m-4), 利用 $PQ=-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m$ 得到 $FQ=\frac{3\sqrt{2}}{7}(-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m)$, 然后利用二次函数的性质解决问题.

【解答】 解: (1) 当 $y=0$, $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = 0$, 解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 4$,

$\therefore A(-3, 0)$, $B(4, 0)$,

当 $x=0$, $y=\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 4 = -4$,

$\therefore C(0, -4)$;

(2) $AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

易得直线 BC 的解析式为 $y=x-4$,

设 Q (m, m-4) ($0 < m < 4$),

当 $CQ=CA$ 时, $m^2 + (m-4+4)^2 = 5^2$, 解得 $m_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $m_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (舍去), 此时 Q 点坐标为 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4)$;

当 $AQ=AC$ 时, $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$, 解得 $m_1 = 1$, $m_2 = -0$ (舍去), 此时 Q

点坐标为 $(1, -3)$;

当 $QA=QC$ 时, $(m+3)^2 + (m-4)^2 = 5^2$, 解得 $m = \frac{25}{2}$ (舍去),

综上所述, 满足条件的 Q 点坐标为 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} - 4)$ 或 $(1, -3)$;

(3) 解: 过点 F 作 $FG \perp PQ$ 于点 G , 如图,

则 $FG \parallel x$ 轴. 由 $B(4, 0)$, $C(0, -4)$ 得 $\triangle OBC$ 为等腰直角三角形

$$\therefore \angle OBC = \angle QFG = 45^\circ$$

$\therefore \triangle FQG$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore FG = QG = \frac{\sqrt{2}}{2} FQ,$$

$$\therefore PE \parallel AC, PG \parallel CO,$$

$$\therefore \angle FPG = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle FGP = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FGP \sim \triangle AOC.$$

$$\therefore \frac{FG}{OA} = \frac{PG}{CO}, \text{ 即 } \frac{FG}{3} = \frac{PG}{4},$$

$$\therefore PG = \frac{4}{3} FG = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} FQ = \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ,$$

$$\therefore PQ = PG + GQ = \frac{2\sqrt{2}}{3} FQ + \frac{\sqrt{2}}{2} FQ = \frac{7\sqrt{2}}{6} FQ,$$

$$\therefore FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7} PQ,$$

设 $P(m, \frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4)$ ($0 < m < 4$), 则 $Q(m, m-4)$,

$$\therefore PQ = m - 4 - (\frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3}m - 4) = -\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m,$$

$$\therefore FQ = \frac{3\sqrt{2}}{7} (-\frac{1}{3}m^2 + \frac{4}{3}m) = -\frac{\sqrt{2}}{7} (m-2)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{7} < 0,$$

$\therefore QF$ 有最大值.

$\therefore$ 当 $m=2$ 时, QF 有最大值.

