

2010 年山西省中考数学试题与答案

第 I 卷选择题 (共 20 分)

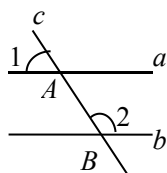
一、选择题 (本大题 10 个小题, 每题 2 分, 共 20 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. -3 的绝对值是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

2. 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 c 分别与 a 、 b 相交于点 A、B。已知 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()

- A. 165° B. 155° C. 145° D. 135°



(第 2 题)

3. 山西是我国古代文明发祥地之一, 其总面积约为 16 万平方千米, 这个数据用科学记数法表示为 ()

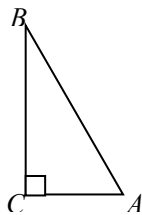
- A. 0.16×10^6 平方千米 B. 16×10^4 平方千米 C. 1.6×10^4 平方千米 D. 1.6×10^5 平方千米

4. 下列运算正确的是 ()

- A. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ B. $(-a^2)^3 = -a^6$ C. $x^2 + x^2 = x^4$ D. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$

5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若将各边长度都扩大为原来的 2 倍, 则 $\angle A$ 的正弦值 ()

- A. 扩大 2 倍 B. 缩小 2 倍 C. 扩大 4 倍 D. 不变



(第 5 题)

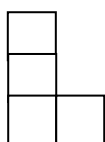
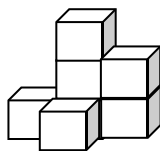
6. 估算 $\sqrt{31} - 2$ 的值 ()

- A. 在 1 和 2 之间 B. 在 2 和 3 之间 C. 在 3 和 4 之间 D. 在 4 和 5 之间

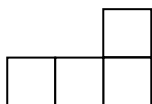
7. 在一个不透明的袋中, 装有若干个除颜色不同外其余都相同的球, 如果袋中有 3 个红球且摸到红球的概率为 $\frac{1}{4}$, 那么袋中球的总个数为 ()

- A. 15 个 B. 12 个 C. 9 个 D. 3 个

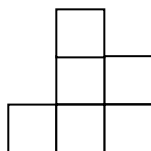
8. 下图是由 7 个完全相同的小立方块搭成的几何体, 那么这个几何体的左视图是 ()



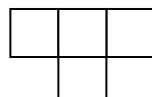
A



B



C



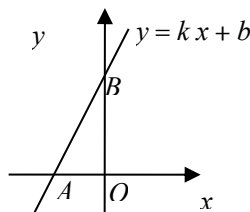
D

9. 现有四根木棒，长度分别为 4cm, 6cm, 8cm, 10cm. 从中任取一根木棒，能组成三角形的个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. 如图，直线 $y = kx + b$ 交坐标轴于 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 5)$ 两点，则不等式 $-kx - b < 0$ 的解集为 ()

- A. $x > -3$ B. $x < -3$ C. $x > 3$ D. $x < 3$



(第 10 题)

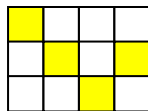
第 II 卷选择题 (共 100 分)

二、填空题 (本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分。把答案写在题中横线上)

11. 计算: $9x^3 \div (-3x^2) =$ _____.

12. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是 AB 的中点， $CD = 4\text{cm}$ ，则 $AB =$ _____ cm.

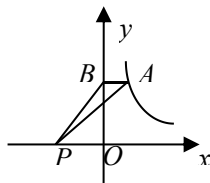
13. 随意地抛一粒豆子，恰好落在图中的方格中 (每个方格除颜色外完全一样)，那么这粒豆子停在黑色方格中的概率是 _____.



(第 13 题)

14. 方程 $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} = 0$ 的解为 _____.

15. 如图， A 是反比例函数图象上一点，过点 A 作 $AB \perp y$ 轴于点 B ，点 P 在 x 轴上， $\triangle ABP$ 的面积为 2，则这个反比例函数的解析式为 _____.

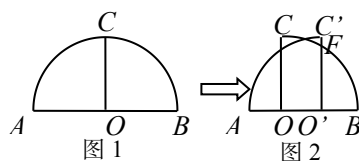


(第 15 题)

16. 哥哥与弟弟玩一个游戏：三张大小、质地都相同的卡片上分别标有数字 1、2、3. 将标有数字的一面朝下，哥哥从中任意抽取一张，记下数字后放回洗匀，然后弟弟从中任意抽取一张，计算抽得的两个数字之和，如果和为奇数，则弟弟胜；和为偶数，则哥哥胜该游戏对双方 _____ (填“公平”或“不公平”).

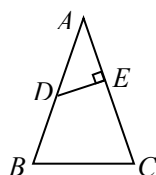
17. 图 1 是以 AB 为直径的半圆形纸片， $AB = 6\text{cm}$ ，沿着垂直于 AB 的半径 OC 剪开，将扇

形 OAC 沿 AB 方向平移至扇形 $O'A'C'$. 如图 2, 其中 O' 是 OB 的中点. $O'C'$ 交 $\widehat{BC}$ 于点 F , 则 $\widehat{BF}$ 的长为 _____ cm.



(第 17 题)

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 13$, $BC = 10$, D 是 AB 的中点, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 则 DE 的长是 _____.



(第 18 题)

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 76 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (每小题 5 分, 共 10 分)

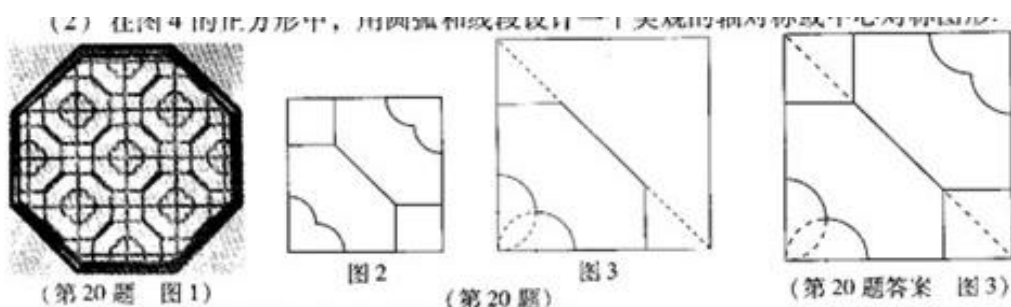
(1) 计算: $\sqrt{9} + (-\frac{1}{2})^{-1} - \sqrt{2}\sin 45^\circ + (\sqrt{3} - 2)^0$

(2) 先化简, 再求值: $(\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1}) \cdot \frac{x^2-1}{2x}$, 其中 $x = -3$

20. (本题 6 分) 山西民间建筑的门窗图案中, 隐含着丰富的数学艺术之美. 图 1 是其中一个代表, 该窗格图案是以图 2 为基本图案经过图形变换得到的. 图 3 是图 2 放大后的部分, 虚线给出了作图提示, 请用圆规和直尺画图.

(1) 根据图 2 将图 3 补充完整;

(2) 在图 4 的正方形中, 用圆弧和线段设计一个美观的轴对称或中心对称图形.

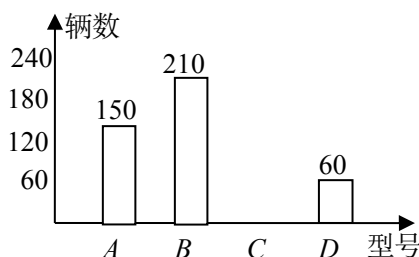


(1) 将图 3 补充完整得 3 分 (画出虚线不扣分)

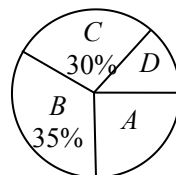
(2) 图略, 答案不唯一, 只要符合题目要求均得 3 分

21. (本题 10 分) 某课题小组为了解某品牌电动自行车的销售情况, 对某专卖店第一季度该品牌 A 、 B 、 C 、 D 四种型号的销量做了统计, 绘制成如下两幅统计图 (均不完整).

- (1) 该店第一季度售出这种品牌的电动自行车共多少辆？
- (2) 把两幅统计图补充完整；
- (3) 若该专卖店计划订购这四款型号电动自行车 1800 辆，求 C 型电动自行车应订购多少辆？

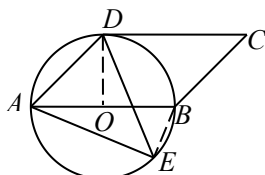


(第 21 题 图 1)



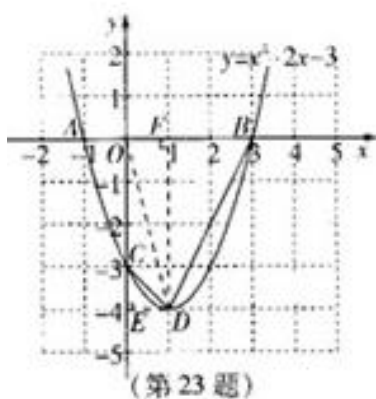
(第 21 题 图 2)

22. (本题 8 分) 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，以 AB 为直径的 $\odot O$ 经过点 D ， E 是 $\odot O$ 上一点，且 $\angle AED = 45^\circ$.
- (1) 试判断 CD 与 $\odot O$ 的关系，并说明理由.
 - (2) 若 $\odot O$ 的半径为 3cm， $AE = 5$ cm，求 $\angle ADE$ 的正弦值.



(第 22 题)

23. (本题 10 分) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D .
- (1) 求点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标，并在下面直角坐标系中画出该二次函数的大致图象；
 - (2) 说出抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 可由抛物线 $y = x^2$ 如何平移得到？
 - (3) 求四边形 $OCDB$ 的面积.



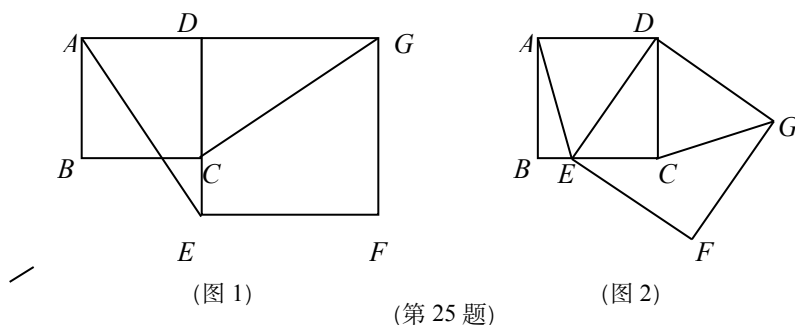
(第 23 题)

24. (本题 8 分) 某服装店欲购甲、乙两种新款运动服，甲款每套进价 350 元，乙款每套进价 200 元，该店计划用不低于 7600 元且不高 8000 元的资金订购 30 套甲、乙两款运动服.

- (1) 该店订购这两款运动服，共有哪几种方案？
 (2) 若该店以甲款每套 400 元，乙款每套 300 元的价格全部出售，哪种方案获利最大？

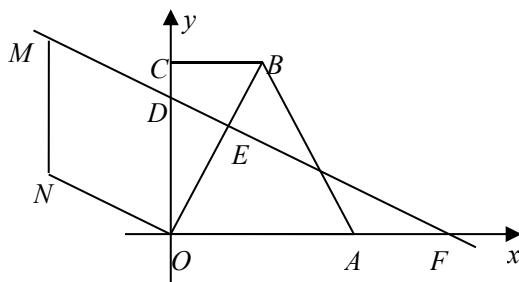
25. (本题 10 分) 如图 1，已知正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $DEFG$ 的边 DE 上，连接 AE 、 GC 。

- (1) 试猜想 AE 与 GC 有怎样的位置关系，并证明你的结论。
 (2) 将正方形 $DEFG$ 绕点 D 按顺时针方向旋转，使点 E 落在 BC 边上，如图 2，连接 AE 和 CG 。你认为 (1) 中的结论是否还成立？若成立，给出证明；若不成立，请说明理由。



26. 在直角梯形 $OABC$ 中， $CB \parallel OA$ ， $\angle COA = 90^\circ$ ， $CB = 3$ ， $OA = 6$ ， $BA = 3\sqrt{5}$ 。分别以 OA 、 OC 边所在直线为 x 轴、 y 轴建立如图 1 所示的平面直角坐标系。

- (1) 求点 B 的坐标；
 (2) 已知 D 、 E 分别为线段 OC 、 OB 上的点， $OD = 5$ ， $OE = 2EB$ ，直线 DE 交 x 轴于点 F 。求直线 DE 的解析式；
 (3) 点 M 是 (2) 中直线 DE 上的一个动点，在 x 轴上方的平面内是否存在另一个点 N ，使以 O 、 D 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。



(第 26 题 图 1)

数 学

第 I 卷 选择题 (共 20 分)

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. -3 的绝对值是 (**B**)

A. -3

B. 3

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

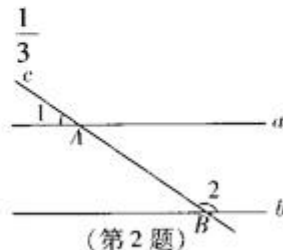
2. 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 c 分别与 a 、 b 相交于点 A 、 B . 已知 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 (**C**)

A. 165°

B. 155°

C. 145°

D. 135°



(第 2 题)

3. 山西是我国古文明发祥地之一, 其总面积约为 16 万平方千米, 这个数据用科学记数法表示为 (**D**)

A. 0.16×10^6 平方千米

B. 16×10^4 平方千米

C. 1.6×10^4 平方千米

D. 1.6×10^5 平方千米

4. 下列运算正确的是 (**B**)

A. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

B. $(-a^2)^3 = -a^6$

C. $x^2 + x^2 = x^4$

D. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$

5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若将各边长度都扩大为原来的 2 倍, 则 $\angle A$ 的正弦值 (**D**)

A. 扩大 2 倍

B. 缩小 2 倍

C. 扩大 4 倍

D. 不变

6. 估算 $\sqrt{31} - 2$ 的值 (**C**)

A. 在 1 和 2 之间

B. 在 2 和 3 之间

C. 在 3 和 4 之间

D. 在 4 和 5 之间

7. 在一个不透明的袋中, 装有若干个除颜色不同外其余都相同的球, 如果袋中有 3 个红球且摸到红球的概率为 $\frac{1}{4}$, 那么袋中球的总个数为 (**B**)

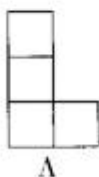
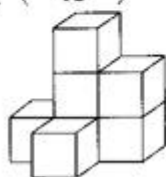
A. 15 个

B. 12 个

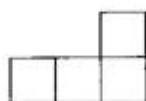
C. 9 个

D. 3 个

8. 下图是由 7 个完全相同的小立方块搭成的几何体, 那么这个几何体的左视图是 (**A**)

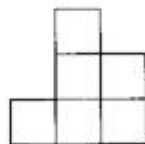


A

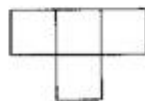


B

(第 8 题)

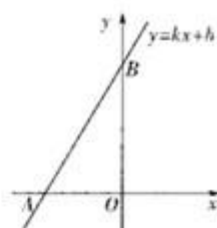


C



D

9. 现有四根木棒, 长度分别为 4cm, 6cm, 8cm, 10cm, 从中任取三根木棒, 能组成三角形的个数为 (C)
 A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个
10. 如图, 直线 $y = kx + b$ 交坐标轴于 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 5)$ 两点, 则不等式 $-kx - b < 0$ 的解集为 (A)
 A. $x > -3$ B. $x < -3$
 C. $x > 3$ D. $x < 3$



(第 10 题)

第 II 卷 非选择题 (共 100 分)

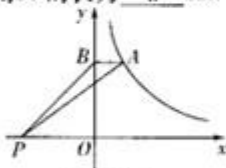
二、填空题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案写在题中横线上)

11. 计算: $9x^3 \div (-3x^2) = -3x$.
12. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点, $CD = 4\text{cm}$, 则 $AB = 8\text{cm}$.
13. 随意地抛一粒豆子, 恰好落在图中的方格中 (每个方格除颜色外完全一样), 那么这粒豆子停在黑色方格中的概率是 $\frac{1}{3}$.

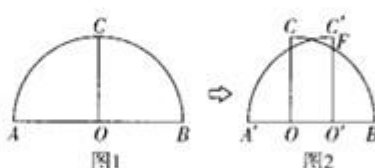


(第 13 题)

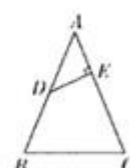
14. 方程 $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} = 0$ 的解为 $x = 5$.
15. 如图, A 是反比例函数图象上一点, 过点 A 作 $AB \perp y$ 轴于点 B , 点 P 在 x 轴上, $\triangle ABP$ 面积为 2, 则这个反比例函数的解析式为 $y = \frac{4}{x}$.
16. 哥哥与弟弟玩一个游戏: 三张大小、质地都相同的卡片上分别标有数字 1, 2, 3. 将标有数字的一面朝下, 哥哥从中任意抽取一张, 记下数字后放回洗匀, 然后弟弟从中任意抽取一张, 计算抽得的两个数字之和, 如果和为奇数, 则弟弟胜; 和为偶数, 则哥哥胜. 该游戏对双方 不公平 (填“公平”或“不公平”).
17. 图 1 是以 AB 为直径的半圆形纸片, $AB = 6\text{cm}$, 沿着垂直于 AB 的半径 OC 剪开, 将扇形 OAC 沿 AB 方向平移至扇形 $O'A'C'$, 如图 2, 其中 O' 是 OB 的中点, $O'C'$ 交 $\widehat{BC}$ 于点 F , 则 $\widehat{BF}$ 的长为 πcm .



(第 15 题)



(第 17 题)



(第 18 题)

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 13$, $BC = 10$, D 是 AB 的中点, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 则 DE 的长是 $\frac{60}{13}$.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 76 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 计算: $\sqrt{9} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{2}\sin 45^\circ + (\sqrt{3}-2)^0$.

解: 原式 $= 3 + (-2) - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ (4 分)

$= 3 - 2 - 1 + 1 = 1$ (5 分)

(2) 先化简, 再求值: $\left(\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{2x}$, 其中 $x = -3$.

解: 原式 $= \frac{3x(x+1) - x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2x}$ (1 分)

$$= \frac{3x^2 + 3x - x^2 + x}{2x} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{2x^2 + 4x}{2x} = \frac{2x(x+2)}{2x} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

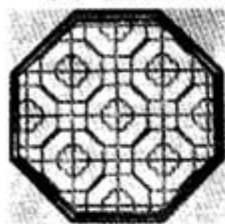
$$= x + 2. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x = -3 \text{ 时, 原式} = -3 + 2 = -1. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

20. (本题 6 分) 山西民间建筑的门窗图案中, 隐含着丰富的数学艺术之美. 图 1 是其中一个代表, 该窗格图案是以图 2 为基本图案经过图形变换得到的. 图 3 是图 2 放大后的部分, 虚线给出了作图提示, 请用圆规和直尺画图.

(1) 根据图 2 将图 3 补充完整;

(2) 在图 4 的正方形中, 用圆弧和线段设计一个美观的轴对称或中心对称图形.



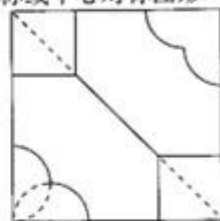
(第 20 题 图 1)



图 2



图 3



(第 20 题答案 图 3)

(1) 将图 3 补充完整得 3 分 (画出虚线不扣分).

(2) 图略. 答案不唯一, 只要符合题目要求均得 3 分.

21. (本题 10 分) 某课题小组为了解某品牌电动自行车的销售情况, 对某专卖店第一季度该品牌 A、B、C、D 四种型号的销量做了统计, 绘制成如下两幅统计图 (均不完整).

(1) 该店第一季度售出这种品牌的电动自行车共多少辆?

(2) 把两幅统计图补充完整;

(3) 若该专卖店计划订购这四款型号的电动自行车 1800 辆, 求 C 型电动自行车应订购多少辆?

解: (1) $210 \div 35\% = 600$ (辆).

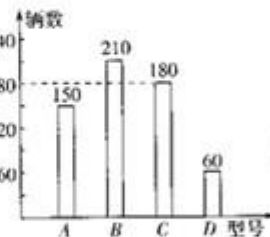
答: 该店第一季度售出这种品牌的电动自行车共 600 辆. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 补全条形统计图 (没画虚线不扣分). $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

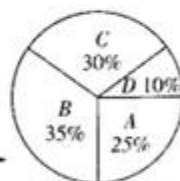
补全扇形统计图. $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

(3) $1800 \times 30\% = 540$ (辆).

答: C 型电动自行车应订购 540 辆. $\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$



(第 21 题 图 1)



(第 21 题 图 2)

22. (本题 8 分) 如图, 四边形 ABCD 是平行四

边形, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 经过点 D, E 是 $\odot O$ 上一点, 且 $\angle AED = 45^\circ$.

(1) 试判断 CD 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 3cm, $AE = 5\text{cm}$, 求 $\angle ADE$ 的正弦值.

解: (1) CD 与 $\odot O$ 相切. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

理由是: 连接 OD,

则 $\angle AOD = 2\angle AED = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形, $\therefore AB \parallel DC$,

$\therefore \angle CDO = \angle AOD = 90^\circ$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$\therefore OD \perp CD$, $\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

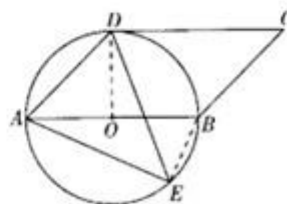
(2) 连接 BE, 则 $\angle ADE = \angle ABE$. $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$, $AB = 2 \times 3 = 6(\text{cm})$. $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\sin \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{5}{6}$, $\therefore \sin \angle ADE = \sin \angle ABE = \frac{5}{6}$. $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

(其它解法可参照给分)



(第 22 题)

23. (本题 10 分) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .

(1) 求点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标, 并在下面直角坐标系中画出该二次函数的大致图象;

(2) 说出抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 可由抛物线 $y = x^2$ 如何平移得到?

(3) 求四边形 $OCDB$ 的面积.

解: (1) 当 $y = 0$ 时, $x^2 - 2x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

$\therefore A$ 在 B 的左侧,

$\therefore$ 点 A 、 B 的坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$.

..... (2 分)

当 $x = 0$ 时, $y = -3$

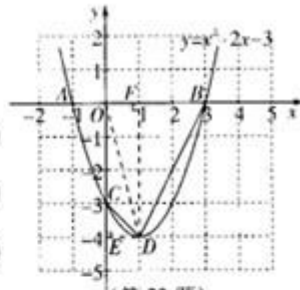
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -3)$.

又 $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, -4)$.

(也可利用顶点坐标公式求解)

画出二次函数图象如图. (6 分)



(第 23 题)

(2) 抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位, 再向下平移 4 个单位可得到抛物线

$y = x^2 - 2x - 3$ (8 分)

(3) 解法一: 连接 OD , 作 $DE \perp y$ 轴于点 E , 作 $DF \perp x$ 轴于点 F .

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形} OCDB} &= S_{\triangle OCB} + S_{\triangle ODB} = \frac{1}{2} OC \cdot DE + \frac{1}{2} OB \cdot DF \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{15}{2}. \end{aligned} \quad \text{..... (10 分)}$$

解法二: 作 $DE \perp y$ 轴于点 E .

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形} OCDB} &= S_{\text{梯形} OEDB} - S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} (DE + OB) \cdot OE - \frac{1}{2} CE \cdot DE \\ &= \frac{1}{2} (1 + 3) \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{15}{2}. \end{aligned} \quad \text{..... (10 分)}$$

解法三: 作 $DF \perp x$ 轴于点 F .

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形} OCDB} &= S_{\text{梯形} OCFD} + S_{\triangle FDB} = \frac{1}{2} (OC + DF) \cdot OF + \frac{1}{2} FB \cdot FD \\ &= \frac{1}{2} (3 + 4) \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{15}{2}. \end{aligned} \quad \text{..... (10 分)}$$

(其它解法可参照给分)

24. (本题 8 分) 某服装店欲购甲、乙两种新款运动服, 甲款每套进价 350 元, 乙款每套进价 200 元, 该店计划用不低于 7600 元且不高 8000 元的资金订购 30 套甲、乙两款运动服.

(1) 该店订购这两款运动服, 共有哪几种方案?

(2) 若该店以甲款每套 400 元, 乙款每套 300 元的价格全部出售, 哪种方案获利最大?

解: 设该店订购甲款运动服 x 套, 则订购乙款运动服 $(30 - x)$ 套, 由题意, 得 (1 分)

$$(1) \begin{cases} 350x + 200(30 - x) \geq 7600, \\ 350x + 200(30 - x) \leq 8000. \end{cases} \quad \text{..... (2 分)}$$

$$\text{解这个不等式组, 得 } \frac{32}{3} \leq x \leq \frac{40}{3}. \quad \text{..... (3 分)}$$

$\because x$ 为整数, $\therefore x$ 取 11, 12, 13.

$\therefore 30 - x$ 取 19, 18, 17. (4 分)

答: 该店订购这两款运动服, 共有 3 种方案.

方案一: 甲款 11 套, 乙款 19 套;

方案二: 甲款 12 套, 乙款 18 套;

方案三: 甲款 13 套, 乙款 17 套. (5 分)

(2) 解法一: 设该店全部出售甲、乙两款运动服后获利 y 元, 则

$$y = (400 - 350)x + (300 - 200)(30 - x)$$

$$= 50x + 3000 - 100x = -50x + 3000. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\because -50 < 0, \therefore y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小.} \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$\therefore$ 当 $x = 11$ 时, y 最大.

答: 方案一即甲款 11 套, 乙款 19 套时, 获利最大. $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

解法二: 三种方案分别获利为:

$$\text{方案一: } (400 - 350) \times 11 + (300 - 200) \times 19 = 2450 (\text{元}).$$

$$\text{方案二: } (400 - 350) \times 12 + (300 - 200) \times 18 = 2400 (\text{元}).$$

$$\text{方案三: } (400 - 350) \times 13 + (300 - 200) \times 17 = 2350 (\text{元}). \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\because 2450 > 2400 > 2350, \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$\therefore$ 方案一即甲款 11 套, 乙款 19 套, 获利最大. $\dots\dots\dots (8 \text{ 分})$

25. (本题 10 分) 如图 1, 已知正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $DEFG$ 的边 DE 上, 连接 AE , GC .

(1) 试猜想 AE 与 GC 有怎样的位置关系, 并证明你的结论.

(2) 将正方形 $DEFG$ 绕点 D 按顺时针方向旋转, 使点 E 落在 BC 边上, 如图 2, 连接 AE 和 GC . 你认为 (1) 中的结论是否还成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 请说明理由.

(1) 答: $AE \perp GC$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

证明: 延长 GC 交 AE 于点 H .

在正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 中,

$$AD = DC, \angle ADE = \angle CDG = 90^\circ,$$

$$DE = DG, \therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AHG = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\therefore AE \perp GC. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(2) 答: 成立. $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

证明: 延长 AE 和 GC 相交于点 H .

在正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 中,

$$AD = DC, DE = DG, \angle ADC = \angle DCB = \angle B = \angle BAD = \angle EDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle 3.$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG.$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 4. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\angle 4 + \angle 7 = 180^\circ - \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 6 = \angle 7. \text{ 又} \because \angle 6 + \angle AEB = 90^\circ, \angle AEB = \angle CEH,$$

$$\therefore \angle CEH + \angle 7 = 90^\circ, \therefore \angle EHC = 90^\circ, \therefore AE \perp GC. \dots (10 \text{ 分})$$

(其它证法可参照给分)

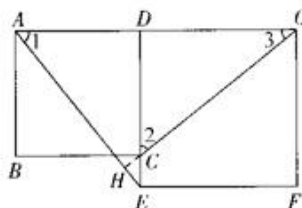


图1

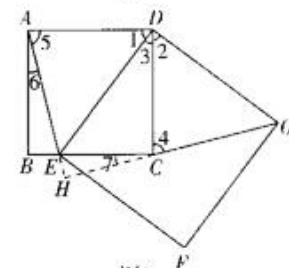


图2

(第 25 题)

26. (本题 14 分) 在直角梯形 $OABC$ 中, $CB \parallel OA$, $\angle COA = 90^\circ$, $CB = 3$, $OA = 6$, $BA = 3\sqrt{5}$. 分别以 OA 、 OC 边所在直线为 x 轴、 y 轴建立如图 1 所示的平面直角坐标系.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 已知 D 、 E 分别为线段 OC 、 OB 上的点, $OD = 5$, $OE = 2EB$, 直线 DE 交 x 轴于点 F . 求直线 DE 的解析式;

(3) 点 M 是 (2) 中直线 DE 上的一个动点, 在 x 轴上方的平面内是否存在另一个点 N , 使以 O 、 D 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) 作 $BH \perp x$ 轴于点 H , 则四边形 $OHBC$ 为矩形,

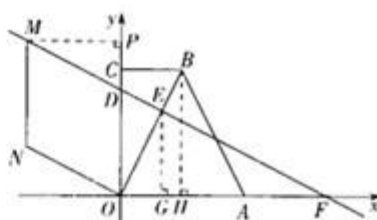
$$\therefore OH = CB = 3, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AH = OA - OH = 6 - 3 = 3.$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABH \text{ 中, } BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (3, 6). \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

- (2) 作 $EG \perp x$ 轴于点 G , 则 $EG \parallel BH$,
 $\therefore \triangle OEG \sim \triangle OBH$, (4 分)
 $\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{OG}{OH} = \frac{EG}{BH}$ 又 $\because OE = 2EB$,
 $\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{2}{3} = \frac{OG}{3} = \frac{EG}{6}$,
 $\therefore OG = 2, EG = 4$,
 $\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, 4)$ (5 分)
 又 $\because$ 点 D 的坐标为 $(0, 5)$,
 设直线 DE 的解析式为 $y = kx + b$,
 则 $\begin{cases} 2k + b = 4, \\ b = 5. \end{cases}$ 解得 $k = -\frac{1}{2}, b = 5$.



(第 26 题 图 1)

- $\therefore$ 直线 DE 的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x + 5$ (7 分)
 (3) 答: 存在 (8 分)

①如图 1, 当 $OD = DM = MN = NO = 5$ 时, 四边形 $ODMN$ 为菱形.

作 $MP \perp y$ 轴于点 P , 则 $MP \parallel x$ 轴, $\therefore \triangle MPD \sim \triangle FOD$,

$$\therefore \frac{MP}{OF} = \frac{PD}{OD} = \frac{MD}{FD} \quad \text{又} \because \text{当 } y = 0 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x + 5 = 0, \text{ 解得 } x = 10,$$

$$\therefore F \text{ 点的坐标为 } (10, 0), \therefore OF = 10.$$

$$\text{在 Rt} \triangle ODF \text{ 中, } FD = \sqrt{OD^2 + OF^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \therefore \frac{MP}{10} = \frac{PD}{5} = \frac{5}{5\sqrt{5}},$$

$$\therefore MP = 2\sqrt{5}, PD = \sqrt{5}. \therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}).$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}). \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

②如图 2, 当 $OD = DN = NM = MO = 5$ 时, 四边形 $ODNM$ 为菱形, 延长 NM 交 x 轴于点 P , 则 $MP \perp x$ 轴.

$$\because \text{点 } M \text{ 在直线 } y = -\frac{1}{2}x + 5 \text{ 上},$$

$$\therefore \text{设 } M \text{ 点坐标为 } (a, -\frac{1}{2}a + 5),$$

$$\text{在 Rt} \triangle OPM \text{ 中, } OP^2 + PM^2 = OM^2,$$

$$\therefore a^2 + \left(-\frac{1}{2}a + 5\right)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得 } a_1 = 4, a_2 = 0 \text{ (舍去)}, \therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (4, 3),$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的坐标为 } (4, 8). \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

③如图 3, 当 $OM = MD = DN = NO$ 时, 四边形 $OMDN$ 为菱形.

连接 NM , 交 OD 于点 P ,

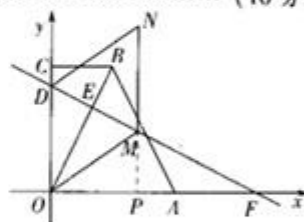
则 $NM \perp OD$ 互相垂直平分,

$$\therefore y_M = y_N = OP = \frac{5}{2},$$

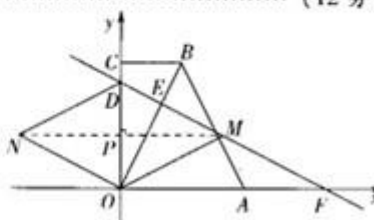
$$\therefore -\frac{1}{2}x_M + 5 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore x_M = 5, \therefore x_N = -x_M = -5.$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的坐标为 } (-5, \frac{5}{2}). \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$



(第 26 题 图 2)



(第 26 题 图 3)

综上所述, x 轴上方的点 N 有三个, 分别为 $N_1(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $N_2(4, 8)$, $N_3(-5, \frac{5}{2})$.

(其它解法可参照给分).